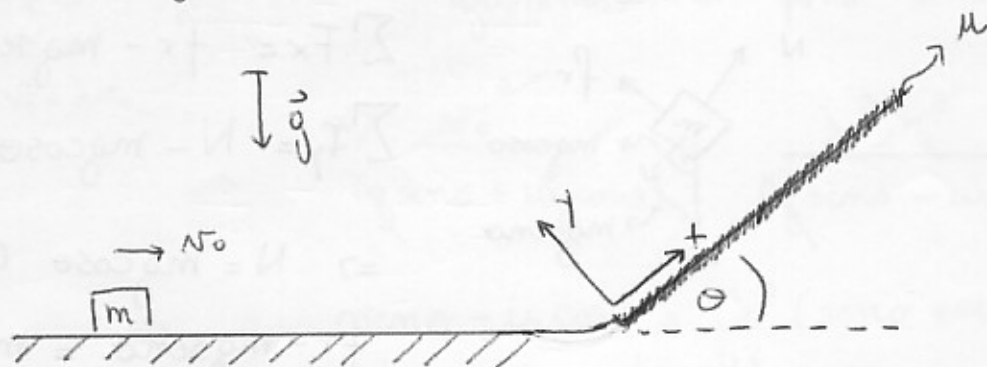


# Problema 1

Un cuerpo de masa " $m$ " se desliza sobre una superficie sin roce con una rapidez etc " $v_0$ ". Sobre la superficie existe un plano inclinado con un coef. de roce dinámico  $\mu_d$ . Se sabe que una vez que el cuerpo baja del plano inclinado, lo hace con una rapidez " $\lambda v_0$ ". Calcule  $\mu_d$ .



## Solución:

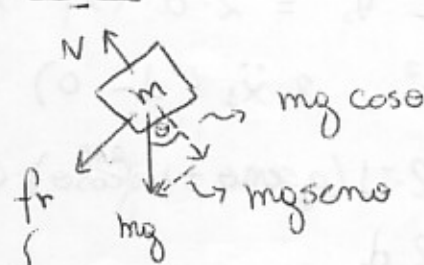
Mientras el cuerpo se mueve en el plano horizontal, lo recorre con rapidez  $v_0 = \text{cte.}$  debido a que no existe roce. Cuando se mueve sobre el plano inclinado su mov. se verá afectado por la existencia de roce, siendo distintos los casos cuando sube y baja.

Entonces:

Caso 1: masa sube



DCL  $m$



"se opone al mov."

$$\sum F_x = -mg \sin \theta - f_r = m \ddot{x}$$

$$\sum F_y = N - mg \cos \theta = m \ddot{y} = 0$$

$$\Rightarrow N = mg \cos \theta \quad (1)$$

$$m \ddot{x} = -mg \sin \theta - f_r \quad (2)$$

Pero  $f_r = \mu \cdot N = \mu \cdot mg \cos \theta$

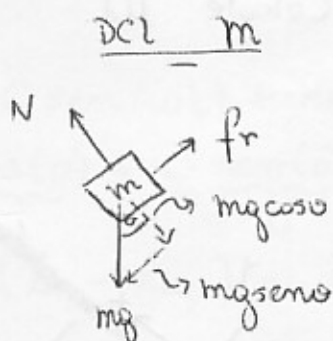
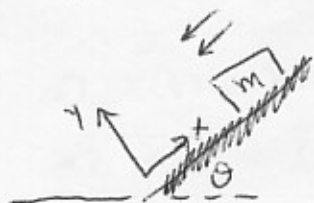
2

Reemplazamos en (2)

$$\Rightarrow m \ddot{x} = -mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}_1 = -g \sin \theta - \mu g \cos \theta}$$

Caso 2: masa baja



$$\sum F_x = f_r - mg \sin \theta = m \ddot{x}$$

$$\sum F_y = N - mg \cos \theta = m \ddot{y}$$

$$\Rightarrow N = mg \cos \theta \quad (1')$$

$$f_r - mg \sin \theta = m \ddot{x} \quad (2')$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} = \mu mg \cos \theta - mg \sin \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}_2 = \mu g \cos \theta - g \sin \theta}$$

Para despejar " $\mu$ " debemos encontrar alguna relación entre  $\ddot{x}_1$  y  $\ddot{x}_2$ .

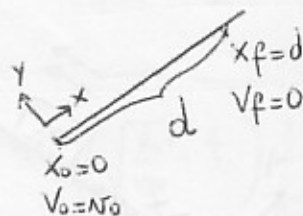
Cuando la masa sube, lo hace hasta una distancia " $d$ ". Aplicamos la ec. de Torricelli al mov. de subida como para el de bajada, donde en ambos mov. la masa recorre una distancia  $d$ .

Entonces:

Ec. de Torricelli:  $V_f^2 - V_o^2 = 2 \cdot a \cdot (x_f - x_o)$

Para subida:  $0^2 - v_o'^2 = 2 \ddot{x}_1 (d - 0)$

$$-v_o'^2 = 2 \cdot (-1)(g \sin \theta + \mu g \cos \theta) \cdot d$$



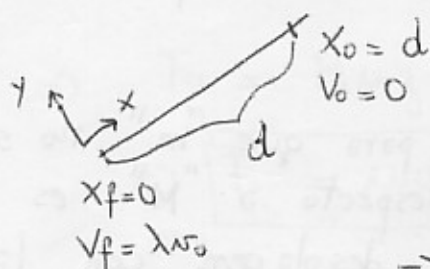
$$\Rightarrow v_0^2 = 2(g \sin \theta + \mu g \cos \theta) \cdot d \quad (*)$$

Para bajada:

$$V_f^2 - V_0^2 = 2 a (x_f - x_0)$$

$$\lambda^2 v_0^2 - 0^2 = 2 \cdot (\mu g \cos \theta - g \sin \theta) \cdot (0 - d)$$

$$\lambda^2 v_0^2 = 2(g \sin \theta - \mu g \cos \theta) d \quad (**)$$



Iguualamos "d" para ambas expresiones

$$\Rightarrow \frac{v_0^2}{(g \sin \theta + \mu g \cos \theta)} = \frac{\lambda^2 v_0^2}{(g \sin \theta - \mu g \cos \theta)} \quad \left( \begin{array}{l} \text{simplifico} \\ v_0 \text{ y } g \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \sin \theta - \mu \cos \theta = \lambda^2 (\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{(1 - \lambda^2) \sin \theta}{(1 + \lambda^2) \cos \theta} = \tan(\theta) \cdot \frac{(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)} \tan(\theta)}$$

Notemos que cuando sale del plano inclinado, la masa va con rapidez " $\lambda v_0$ ". ¿Qué sabemos de  $\lambda$ ?  $0 < \lambda < 1$  por debido a la existencia de roce su rapidez de salida debe ser menor a la rapidez de entrada. En caso de no haber roce la rapidez de salida sería igual a la de entrada y ahí sería  $\lambda = 1$ . En este caso  $\lambda < 1 \Rightarrow \lambda^2 < 1$

$$\Rightarrow (1 - \lambda^2) > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu > 0}$$

## Problema 2

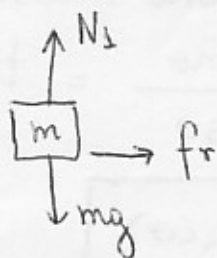
Sobre un cuerpo de masa "M" se pone un cuerpo de masa "m". Sobre "M" se aplica una fuerza  $\vec{F}_0$  etc. Calcular  $\vec{F}_0$  tq la masa "m" no se mueva o despegue del cuerpo M. Existe roce entre los cuerpos M y m con coef  $\mu$ .

### Solución

la condición para que "m" no se mueva con respecto a "M" es que ambas se desplacen con la misma aceleración.

Entonces:

DC2 m



$$\sum F_x = fr = m \ddot{x}_m$$

$$\sum F_y = N_1 - mg = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{N_1 = mg}$$

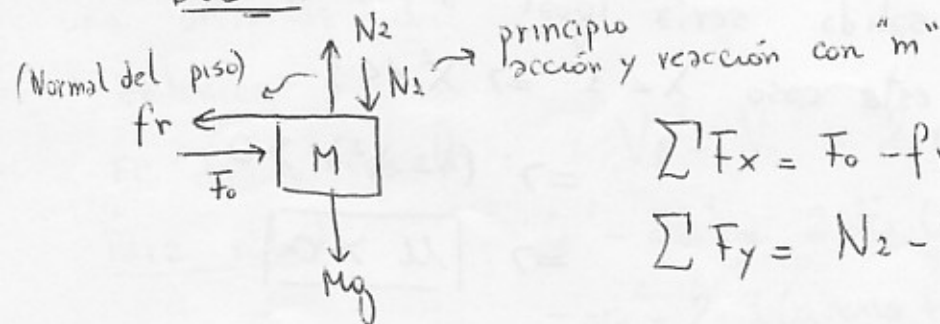
Pero  $fr \leq \mu \cdot N_1$

$$\Rightarrow fr \leq \mu \cdot mg$$

↓ en el límite es igual

$$\Rightarrow \boxed{\mu \cdot mg = m \ddot{x}_m}$$

DC2 M



$$\sum F_x = F_0 - fr = M \ddot{x}_M$$

$$\sum F_y = N_2 - N_1 - Mg = m \ddot{y} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow N_2 = N_1 + Mg$$

$$\Rightarrow \boxed{N_2 = mg + Mg = (m+M)g}$$

$$F_0 - f_r = M \ddot{X}_M$$

pero  $\ddot{X}_M = \ddot{X}_m$  ,  $\ddot{X}_m = \mu g$

$$\Rightarrow F_0 - f_r = M \cdot \mu g \quad , \quad f_r = \mu m g$$

$$\Rightarrow F_0 = M \mu g + m \mu g$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_0 = \mu g (M+m) \hat{x}}$$

pero recordemos que  $f_r = \mu m g$  en el límite

En gral  $f_r \leq \mu m g \Rightarrow F_0 \leq \mu g (M+m)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_0 \leq \mu g (M+m) \hat{x}}$$

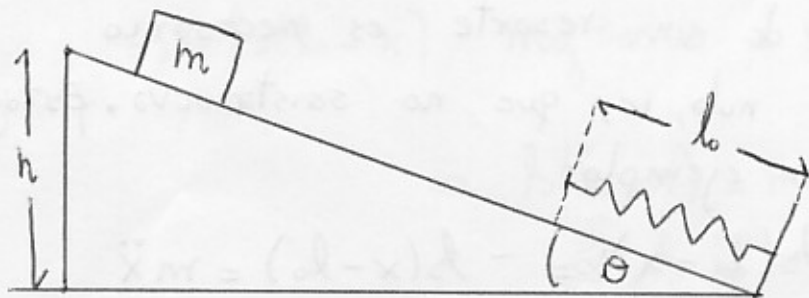


## Problema 1

6

Una masa " $m$ " desliza por un plano inclinado sin roce. La masa se suelta desde una altura  $h$ , de modo que se desliza hacia abajo hasta tocar el extremo de un resorte de cte. elástica " $k$ " y largo natural " $l_0$ ". Una vez que la masa toca el resorte, queda oscilando permanentemente unida al extremo del resorte.

- ¿Cuál es el valor de la veloc. cuando la masa " $m$ " se engancha al resorte?
- Encuentre el nuevo pto. de equilibrio del resorte
- Calcule una expresión para la veloc. de la masa luego que se engancha al resorte.



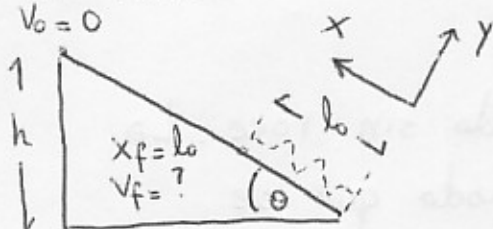
Sol:

Parte a)

Utilicemos Ec. de Torricelli:  $V_f^2 - V_o^2 = 2a(x_f - x_o)$

$$x_0 = h/\sin\theta$$

$$v_0 = 0$$

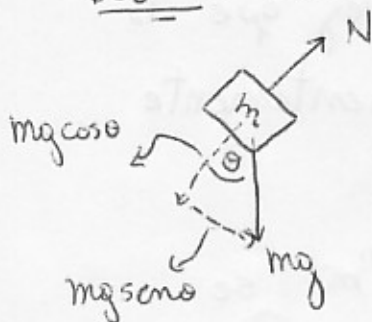


$$\Rightarrow v_f^2 - v_0^2 = 2a_x(x_f - x_0)$$

$$v_f^2 - 0^2 = 2 \cdot a_x \left( l_0 - \frac{h}{\sin\theta} \right)$$

$$a_x = ?$$

DEL m (aún no hay contacto con resorte)



$$\sum F_x = -mg \sin\theta = m\ddot{x}$$

$$\sum F_y = N - mg \cos\theta = m\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = mg \cos\theta}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -mg \sin\theta$$

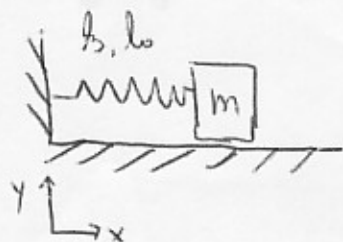
$$\Leftrightarrow \ddot{x} = -g \sin\theta = a_x$$

$$\Rightarrow v_f^2 = 2 \cdot -g \sin\theta \cdot \left( l_0 - \frac{h}{\sin\theta} \right)$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2g \sin\theta \left( \frac{h}{\sin\theta} - l_0 \right)}$$

parte b)

Para calcular el pto de eq. de un resorte es necesario imponer que la dinámica sea nula, i.e., que no exista una fuerza neta actuando sobre la masa. Por ejemplo:



$$F_{\text{elástica}} = k(l_0 - x) = -k(x - l_0) = m\ddot{x}$$

$$\text{quiero que: } m\ddot{x} = F_n = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0$$

$$\Rightarrow -k(x - l_0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{\text{eq}} = l_0}$$

Notemos que cuando la masa está en  $l_0$ , el resorte no está ni estirado ni comprimido  $\Rightarrow$  no realiza fuerza sobre la masa  $m$ .

Entonces en nuestro caso:

DCL m (ya en contacto con resorte)



$$\sum F_x = F_e - mg \sen \theta = m \ddot{x}$$

pero  $F_e = -k(l_0 - x)$  ¿por que?

notar que cuando  $x < l_0$  (resorte comprimido)

$$\Rightarrow l_0 - x > 0$$



$$\Rightarrow F_e > 0$$

$$\Rightarrow \text{sentido "+"}$$

$$\Rightarrow \text{empuja masa}$$

$$\Rightarrow \text{consecuente con DCL.}$$

$$\sum F_y = N - mg \cos \theta = m \ddot{y} \Rightarrow N = mg \cos \theta \quad (1)$$

$$k(l_0 - x) - mg \sen \theta = m \ddot{x} \quad (2)$$

Entonces queremos  $x_{eq}$ :

$$\Rightarrow k(l_0 - x) - mg \sen \theta = m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow k(l_0 - x) = mg \sen \theta$$

$$\Rightarrow k \cdot l_0 - mg \sen \theta = k x_{eq}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{eq} = l_0 - \frac{mg \sen \theta}{k}}$$



### Parte c)

9

Queremos encontrar una expresión para la veloc. de la masa cuando oscila unido al resorte, ie, queremos  $\dot{x}(t)$

Nosotros sabemos que la sol. de la ec. dif:

$$(*) m \ddot{x} = -kx \Rightarrow x(t) = A \cos(\underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega} t + \phi)$$

Notemos que en la ec. anterior (ojo: en la ecuación dif)  $x$  depende del tiempo,  $x$  es la posición de la masa "m"

$$\Rightarrow m \ddot{x}(t) = -kx(t) \Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -\frac{k}{m} x(t) \text{ y nosotros}$$

queremos encontrar la solución que cumpla la ec. anterior y como ya es sabido  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$  cumple. ( $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ )

Por el momento no se tiene conocimiento sobre ec. diferenciales pero por ahora basta con que sepan que:

$$\ddot{\triangle}(t) + \square^2 \triangle(t) = 0 \Rightarrow \triangle(t) = A \cdot \cos(\square \cdot t + \phi)$$

En el caso del resorte:  $\triangle(t) = x(t)$   
 $\square^2 = \frac{k}{m}$

$$\begin{aligned} \text{Notemos que } x(t) &= A \cos(\omega t + \phi) \\ &= A [\cos(\omega t) \cos \phi - \sin(\omega t) \sin \phi] \\ &= \underbrace{A \cos \phi}_{B} \cdot \cos(\omega t) - \underbrace{A \sin \phi}_{C} \sin(\omega t) \\ \Rightarrow x(t) &= B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t) \end{aligned}$$

n nuestro problema:

$$b(l_0 - x) - mg \sin \theta = m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow -bx + (bl_0 - mg \sin \theta) = m \ddot{x} \quad (*)$$

Notemos que (\*) no es igual que a (\*), difieren en un término cte. ¿Qué hacemos? Un cambio de variable.

$$\text{Sea } x = x' + \text{cte} \Rightarrow \dot{x} = \dot{x}' \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{x}'$$

$$\Rightarrow -b(x' + \text{cte}) + (bl_0 - mg \sin \theta) = m \ddot{x}'$$

$$\Rightarrow -bx' - b\text{cte} + (bl_0 - mg \sin \theta) = m \ddot{x}'$$

$$\text{quiero que } -b\text{cte} + (bl_0 - mg \sin \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \text{cte} = \frac{(bl_0 - mg \sin \theta)}{b} = x_{eq} !!!$$

$$\Rightarrow x = x' + x_{eq} \quad (\text{Ojo: } x(t) = x'(t) + \underbrace{x_{eq}}_{\text{cte}})$$

$$\text{Entonces si } x = x' + x_{eq}$$

$$\Rightarrow (*) \text{ queda: } -bx' = m \ddot{x}' \quad \left( \int \frac{\Delta}{\Delta}(t) = x'(t) \right)$$

$$\Rightarrow x'(t) = A \cos(\omega t + \phi); \quad \omega = \sqrt{\frac{b}{m}}$$

$$x'(t) = B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow x(t) = B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t) + x_{eq}$$

Necesitamos despejar las ctes. B y C. ¿cómo? con las condiciones iniciales. ¿Cuáles? En la parte 2 a) nos pedían

Calcular la veloc. con la cual la masa llega al resorte. 41  
 Esta veloc. es la veloc. inicial con la cual se mueve el  
 resorte  $\Rightarrow$  Cond. iniciales son: (consideremos  $t=0$  el momento  
 en que la masa se une al resorte)

$$X(0) = l_0$$

$$\dot{X}(0) = V_f \quad (V_f \text{ es conocida})$$

$$\Rightarrow X(t) = B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t) + X_{eq}$$

$$\Rightarrow X(0) = l_0 = B \cdot \underbrace{\cos(0)}_1 + C \cdot \underbrace{\sin(0)}_0 + X_{eq}$$

$$\Rightarrow B = (l_0 - X_{eq}) = \frac{mg \operatorname{sen} \theta}{k}$$

Ahora:  $X(t) = B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t) + X_{eq}$

$$\Rightarrow \dot{X}(t) = -B\omega \sin(\omega t) + C\omega \cos(\omega t)$$

$$\dot{X}(0) = V_f = -B \cdot \omega \underbrace{\sin(0)}_0 + C \cdot \omega \underbrace{\cos(0)}_1$$

$$\Rightarrow V_f = C \cdot \omega \Rightarrow C = \frac{V_f}{\omega} = \frac{V_f}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot V_f$$

$$\Rightarrow X(t) = \underbrace{\frac{mg \operatorname{sen} \theta}{k}}_{(l_0 - X_{eq})} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + \sqrt{\frac{m}{k}} \underbrace{\sqrt{2g(h - l_0 \operatorname{sen} \theta)}}_{V_f} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + X_{eq}$$

$$\Rightarrow \dot{X}(t) = \sqrt{\frac{m}{k}} \sqrt{2g(h - l_0 \operatorname{sen} \theta)} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) - \frac{mg \operatorname{sen} \theta}{k} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{X}(t) = \sqrt{2g(h - l_0 \operatorname{sen} \theta)} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) - \sqrt{\frac{m}{k}} g \operatorname{sen} \theta \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)}$$

**EJERCICIO 09**  
**INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA FI10A-2003**

PROF. MARCEL G. CLERC  
AUXILIARES: CRISTIÁN FERNÁNDEZ OTO, SERGIO GODOY GONZÁLEZ,  
JUAN PABLO ROJAS CURI

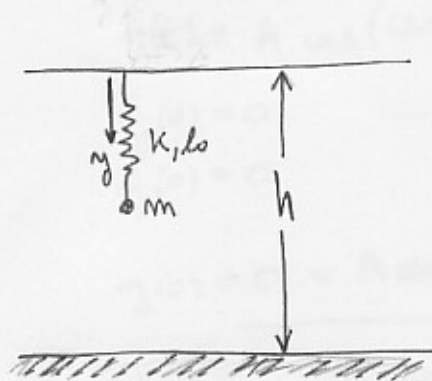
**BUNGEE o Salto con cuerda elástica:** En los últimos años ha aumentado el interés de lanzarse desde diversos puentes o torres amarrado a una cuerda elástica, como se ilustra en la figura. Considere un puente que esta a una altura  $h$  del piso, además modele la cuerda elástica por un resorte ideal de largo natura  $l_o$  y constante elástica  $K$ . Donde  $l_o$  es menor que  $H/2$ .

Una persona de masa  $m$  se deja caer desde el puente, es decir con velocidad cero como condición inicial. Por motivos de simplicidad aproxime que el movimiento es solo vertical y que la persona es puntual.



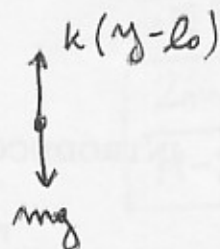
**9-a** Encuentre la ecuación de movimiento que describe la caída.

**9-b** ¿Cuál debe ser el valor de la constante elástica para que la persona al caer no golpee el suelo?.



a) Buscar ecuación de movimiento:

del m



Según nuestro sistema de referencia:  $-k(y - l_0) + mg = m\ddot{y}$

b) Buscar constante elástica  $k$  tal que la persona no golpee el suelo.

Resolvamos la ecuación de movimiento

$$m\ddot{y} = -k(y - l_0) + mg$$

$$m\ddot{y} + ky = kl_0 + mg$$

$$(1) \quad \ddot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}l_0 + g$$

Cambio de variable:

$$y = z + l_0 + \frac{m}{k}g$$

$$\dot{y} = \dot{z}$$

$$\ddot{y} = \ddot{z}$$

Reemplazando en (1)

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}\left(z + l_0 + \frac{m}{k}g\right) = \frac{k}{m}l_0 + g$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z + \cancel{\frac{k}{m}l_0} + \cancel{g} = \cancel{\frac{k}{m}l_0} + \cancel{g}$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$$

$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$  ecuación diferencial de solución conocida

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\Rightarrow y(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + l_0 + \frac{m}{k}g$$

donde  $A$  y  $\phi$  son desconocidos

Condiciones iniciales:  $y(0) = 0$

$$\dot{y}(0) = 0$$

velocidad y posición nulas en  $t=0$

Además  $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$



tenemos:

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + l_0 + \frac{mg}{k}$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$y(0) = 0 = A \cos(\phi) + l_0 + \frac{mg}{k}$$

$$\text{Calculamos: } \dot{y} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\dot{y}(0) = 0 = -A\omega_0 \sin \phi$$

$$\text{como } A \neq 0 \Rightarrow \sin \phi = 0$$

$$\Rightarrow \phi = 0$$

$$\vee \phi = \pi$$

Da lo mismo cual escoger

Escogemos  $\phi = 0$

$$\Rightarrow y(0) = 0 = A + l_0 + \frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow A = -\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = -\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) \cos(\omega_0 t) + \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$$

$$y(t) = \left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) (1 - \cos \omega_0 t)$$

El "y" máximo se logra cuando  $\cos(\omega_0 t) = -1$

$$\Rightarrow y_{\max} = 2\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$$

Imponemos que sea menor que H

$$y_{\max} < H \Rightarrow 2\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) < H$$

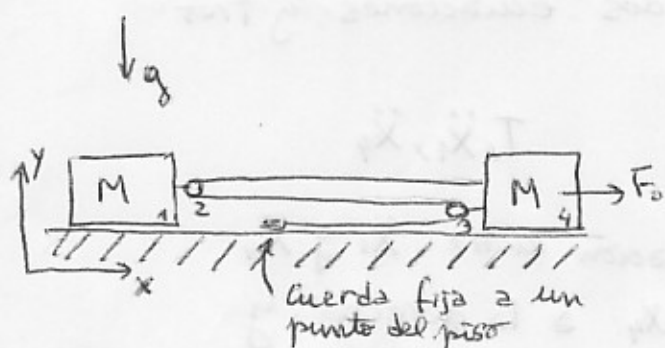
$\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) < H$$

$$2l_0 + 2\frac{mg}{k} < H$$

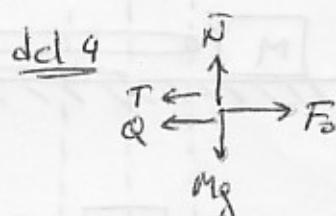
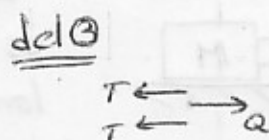
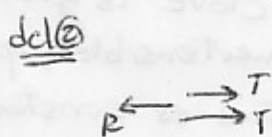
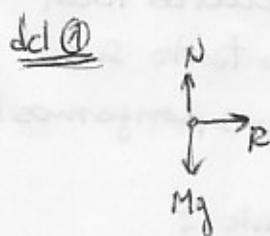
$$2\frac{mg}{k} < H - 2l_0$$

$$\boxed{\frac{2mg}{H - 2l_0} < k}$$



El sistema está formado por dos bloques de masa  $M$ , dos poleas ideales y una cuerda ideal (sin masa, sin roce e inextensible). Si se aplica una fuerza  $F_0$  como en la figura, calcular la aceleración de ambos bloques.

Sol Leyes de Newton para cada cuerpo



Se pueden omitir los dcl de las poleas si éstas se consideran como parte de cada bloque, el resultado es el mismo. Eso se puede hacer si las poleas no tienen masa ni roce.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \textcircled{2} & T + T - R = 0 \\ \textcircled{3} & Q - T - T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2T = R \\ Q = R = 2T \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{aligned} N - Mg &= 0 \\ R &= M \ddot{x}_1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad \begin{aligned} F_0 - T - Q &= M \ddot{x}_4 \\ N - Mg &= 0 \end{aligned}$$

Las fuerzas  $Q$  y  $R$  son las interacciones entre las poleas y los bloques. Se pueden suponer unidos por pedazos de cuerdas ideales, así  $Q$  y  $R$  serían tensiones.

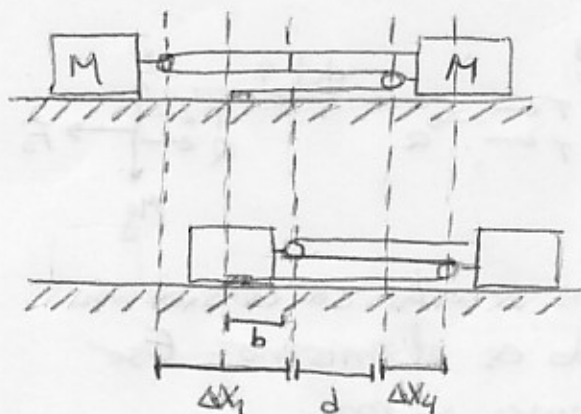
Así:  $R = M \ddot{x}_1 \Rightarrow \underline{2T = M \ddot{x}_1}$  que era lo mismo que no considerar la polea y decir que el cuerpo ① es tirado por dos tensiones.

$$F_0 - T - Q = M \ddot{x}_4 \Rightarrow \underline{F_0 - 3T = M \ddot{x}_4}$$

Tenemos un sistema lineal de dos ecuaciones y tres incógnitas:

$$2T = M\ddot{x}_1 \quad F_0 - 3T = M\ddot{x}_4 \quad T, \ddot{x}_1, \ddot{x}_4$$

Falta una ecuación. Hay una relación entre  $\ddot{x}_1$  y  $\ddot{x}_4$ .  
Suponemos que ④ se mueve un  $\Delta x_4$  a la derecha y vemos que sucede con ①



La clave es que la cuerda ideal es inextensible, por lo tanto su longitud es constante, supongamos  $L$

antes del desplazamiento:

$$L = 2\Delta x_1 + 3d + b$$

después del desplazamiento

$$L = 3d + 3\Delta x_4 + b$$

$$\Rightarrow 2\Delta x_1 + 3d + b = 3d + 3\Delta x_4 + b$$

$\Rightarrow \Delta x_1 = \frac{3}{2}\Delta x_4$  Es decir, si ④ se mueve un  $\Delta x_4$ , ① se mueve  $\frac{3}{2}\Delta x_4$   
Para que esto suceda  $\dot{x}_1 = \frac{3}{2}\dot{x}_4 \sim \ddot{x}_1 = \frac{3}{2}\ddot{x}_4$   
De lo que tenemos la tercera ecuación

$$\left. \begin{array}{l} 2T = M\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 = \frac{3}{2}\ddot{x}_4 \end{array} \right\} \Rightarrow 2T = M\frac{3}{2}\ddot{x}_4 \Rightarrow 4T = 3M\ddot{x}_4 \Rightarrow \frac{4T}{3M} = \frac{F_0 - 3T}{M} \Rightarrow \boxed{T = \frac{3}{13}F_0}$$

$$F_0 - 3T = M\ddot{x}_4$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}_1 = \frac{6}{13} \frac{F_0}{M}}$$

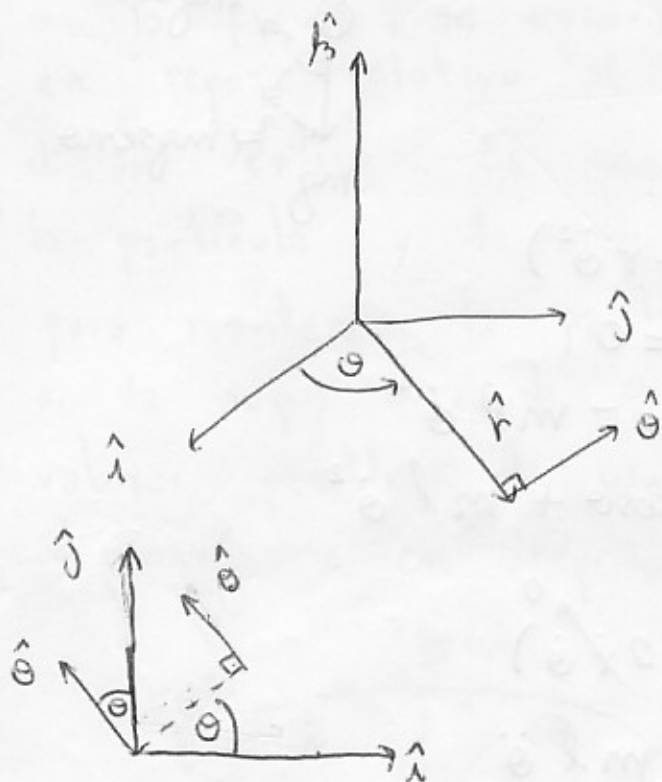
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}_4 = \frac{4}{13} \frac{F_0}{M}}$$

Nota: La cuerda y las poleas son ideales  $\Rightarrow$  la tensión a lo largo de la cuerda no cambia

# Coord. polares o cilíndricas

\* Cuando sólo trabajamos con  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$  se llaman coord. polares.

\* Cuando usamos  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{h}$  se llaman coord. cilíndricas.



$$\begin{aligned}\hat{r} &= \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta \\ \hat{\theta} &= -\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta.\end{aligned}$$

Notemos que  $\theta = \theta(t)$

$\Rightarrow \hat{r}$  y  $\hat{\theta}$  dependen de  $t$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{d\hat{r}}{dt} &= -\dot{\theta} \sin \theta \hat{i} + \dot{\theta} \cos \theta \hat{j} \\ &= \dot{\theta} \hat{\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= -\dot{\theta} \cos \theta \hat{i} - \dot{\theta} \sin \theta \hat{j} \\ &= -\dot{\theta} \hat{r}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = r \hat{r} + z \hat{h}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V} = \dot{r} \hat{r} + r \underbrace{\frac{d\hat{r}}{dt}}_{\dot{\theta} \hat{\theta}} + \dot{z} \hat{h}$$

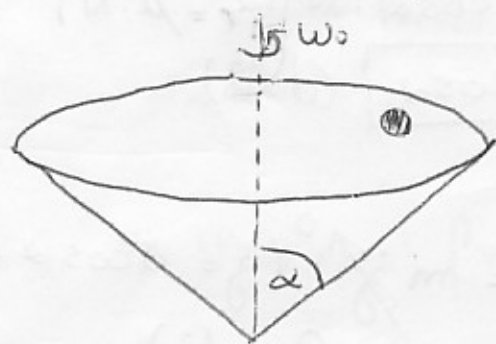
$$\Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a} = \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + r \ddot{\theta} \hat{\theta} + r \underbrace{\frac{d\dot{\theta}}{dt}}_{-\dot{\theta} \hat{r}} + \ddot{z} \hat{h}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\theta} + \ddot{z} \hat{h}$$

### Problema 3

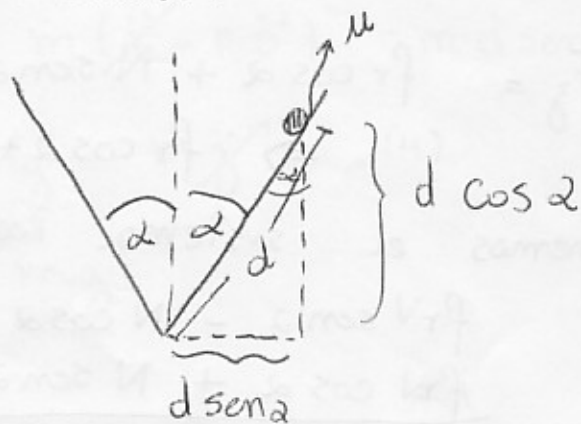
9

En el interior de un cono invertido, que gira con veloc. angular  $\omega_0 = \dot{\theta}_0$  con respecto a su eje de simetría puesto en posición vertical, como se muestra en la figura, se encuentra una partícula de masa " $m$ " en reposo relativo al cono y a una distancia " $d$ " de su vértice. El coef. de roce estático entre la partícula y la sup. es  $\mu$ . Este no es suf. para mantener la partícula en la posición indicada si la sup. deja de girar. Det. el intervalo de valores posibles de  $\omega_0$  para los cuales la partícula se mantiene en reposo relativo?



Sol:

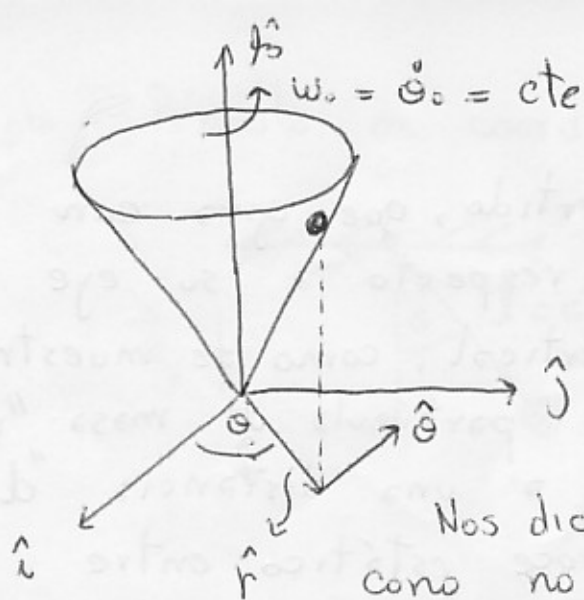
Realicemos un corte transversal



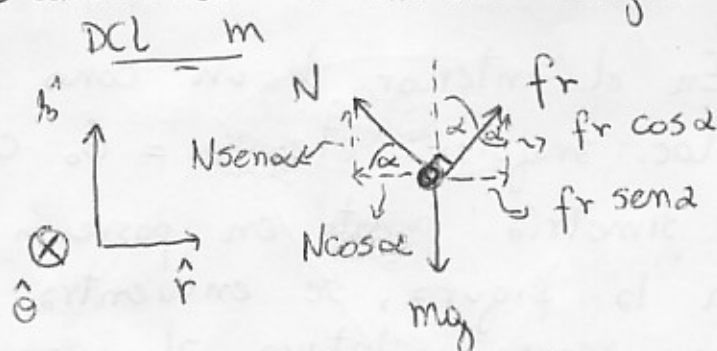
Tenemos que encontrar  $\omega_{min}$  y  $\omega_{max}$  para que " $m$ " no caiga. (casos distintos)

Para que no caiga es necesario encontrar  $\omega_{min}$  y para que no suba hay que encontrar  $\omega_{max}$ . La dif. entre estos casos es como se comporta la fuerza de roce, ya que cambia de sentido según el caso.





Usaremos coord. cilíndricas  
 \* Calculemos  $\omega_{min.}$  (no caída)



Nos dicen que  $\mu$  es  $t_g$  si el cono no gira, la partícula cae

$$\sum F_r = fr \sen \alpha - N \cos \alpha = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2); (r = d \sen \alpha = cte)$$

$$\Rightarrow fr \sen \alpha - N \cos \alpha = -m d \sen \alpha \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

Como nos dicen que si no gira, la masa cae: ( $\dot{\theta} = 0$ )

$$\Rightarrow N \cos \alpha \geq fr \sen \alpha$$

$$\Rightarrow N \cos \alpha \geq \mu \cdot N \sen \alpha \quad (\text{límite}) \quad (fr = \mu \cdot N)$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \alpha \geq \mu \sen \alpha}$$

~~pero r cambia~~  
 $\Rightarrow \exists \ddot{r}$  con signo "negativo"

retomemos:

$$\sum F_z = fr \cos \alpha + N \sen \alpha - mg = m \ddot{z} \quad (z = d \cos \alpha = cte)$$

$$\Rightarrow fr \cos \alpha + N \sen \alpha - mg = 0 \quad (2)$$

tenemos el sistema: Reemplazamos  $fr = \mu \cdot N$  (caso lím.)

$$\mu N \sen \alpha - N \cos \alpha = -m d \sen \alpha \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$\mu N \cos \alpha + N \sen \alpha - mg = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow \mu \cdot N \cos \alpha + N \sen \alpha = mg$$

$$\Rightarrow N = \frac{mg}{(\mu \cos \alpha + \sen \alpha)}$$

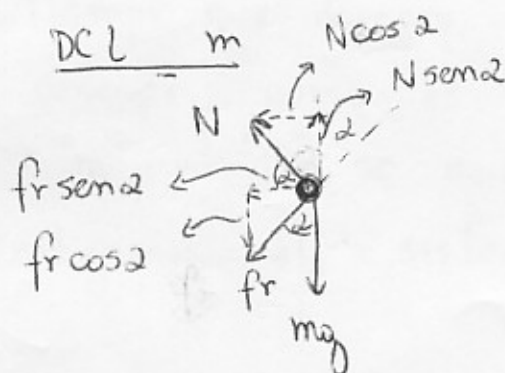
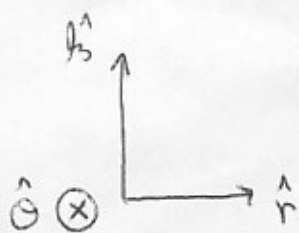
reemplazamos en (1)

$$\Rightarrow \frac{mg}{(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)} (\mu \sin \alpha - \cos \alpha) = - \cancel{m} d \sin \alpha \ddot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \frac{(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}{(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)} \cdot \frac{g}{d \sin \alpha} = \ddot{\theta}_{\min}^2 //$$

Como  $\cos \alpha \geq \mu \sin \alpha \Rightarrow \cos \alpha - \mu \sin \alpha \geq 0$   
 $\Rightarrow$  esta bien def el problema, mejor dicho, nuestra sol. tiene sentido.

⊕  $W_{\max}$  (no suba)



$$\sum F_r = -N \cos \alpha - f_r \sin \alpha = m(\ddot{r} - r \ddot{\theta}^2) = -m d \sin \alpha \ddot{\theta}^2 \quad (3)$$

$$\sum F_z = N \sin \alpha - f_r \cos \alpha - mg = m \ddot{z} \quad (4)$$

$$(4) \Rightarrow N(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = mg$$

$$\Rightarrow N = \frac{mg}{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$$

reemplazando en (3)

$$\Rightarrow \frac{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) mg}{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)} = \cancel{m} d \sin \alpha \ddot{\theta}_{\max}^2$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_{\max} = \frac{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) \cdot g}{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cdot l \sin \alpha}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \cdot \frac{(\cos \alpha - \mu \sin \alpha - \sin \alpha)}{(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l} \cdot \frac{(\cos \alpha - \mu \sin \alpha - \sin \alpha)}{(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$$



$$\sum F_y = N \cos \alpha - mg = m \ddot{\theta} l \sin \alpha$$

$$N \cos \alpha = m(g + \ddot{\theta} l \sin \alpha)$$

$$N = \frac{m(g + \ddot{\theta} l \sin \alpha)}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_{\max} = \frac{(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) \cdot g}{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \cdot l \sin \alpha}$$