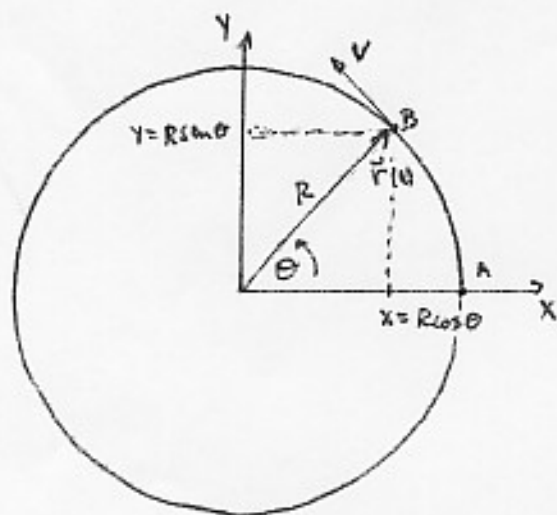


P Um objeto se move em el sentido de los punteros de un reloj en un círculo de radio R a rapidez cte V . El centro del círculo está en el origen de un sistema coordenado (X, Y) y en $t=0$ la partícula se encuentra en $\vec{r}(0) = R\hat{i}$.

a) Encontrar $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ funciones de t

b) Demostrar que: $a_x(t) + \omega^2 x(t) = 0$ con $\omega = \frac{V}{R}$
 $a_y(t) + \omega^2 y(t) = 0$

sol:



Vector posición en función de t $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j}$$

pero $\theta = \theta(t)$ depende de t

¿cómo se relacionan θ y los datos V y R ?

Sabemos que la partícula tiene rapidez uniforme (cte), que es distancia recorrida en un tiempo cualquiera:

$$\widehat{AB} = \theta R \quad \widehat{AB} = V \cdot t \quad (\text{rapidez} \times \text{tiempo} = \text{distancia})$$

$$\Rightarrow \theta R = V \cdot t$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{V}{R} \cdot t$$

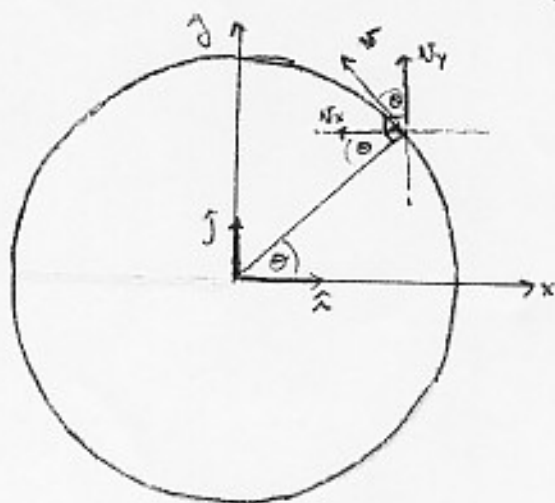
$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = R\cos\left(\frac{V}{R}t\right)\hat{i} + R\sin\left(\frac{V}{R}t\right)\hat{j}}$$

¿Cuál es el módulo o norma de este vector? $\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$

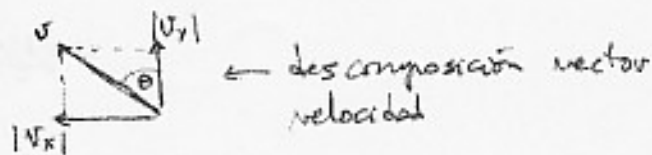
$$\Rightarrow \|\vec{r}(t)\| = \sqrt{R^2 \cos^2\left(\frac{V}{R}t\right) + R^2 \sin^2\left(\frac{V}{R}t\right)} = R \sqrt{\cos^2\left(\frac{V}{R}t\right) + \sin^2\left(\frac{V}{R}t\right)} = R$$

\Rightarrow El módulo es cte igual a R , que es lo esperado para un movimiento circular.

El hecho que conozcamos el módulo del vector velocidad, hace más simple su obtención: Por ahora supondremos que sabemos que el vector velocidad es tangente a la trayectoria:



$$\vec{v}(t) = v_x(t) \hat{i} + v_y(t) \hat{j}$$



← descomposición vector velocidad

$$\sin \theta = \frac{|v_x|}{v} \Rightarrow |v_x| = v \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{|v_y|}{v} \Rightarrow |v_y| = v \cos \theta$$

El valor absoluto es para recalcar que estamos hablando de la magnitud. ¿Por qué? debemos ser consecuentes con nuestro sistema de referencia x-y y notamos que v_x va "en contra" de $\hat{i} \Rightarrow$ signo menos:

$$\vec{v}(t) = v_x(t) \hat{i} + v_y \hat{j} = -v \sin \theta \hat{i} + v \cos \theta \hat{j}$$

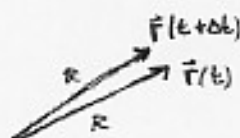
$$\Rightarrow \vec{v}(t) = -v \sin\left(\frac{v}{R}t\right) \hat{i} + v \cos\left(\frac{v}{R}t\right) \hat{j}$$

Bajo el supuesto que el vector velocidad es tangente a la trayectoria llegamos a este resultado ¿es válido? ¿es válido el supuesto? Para no tener que hacerlo, aplicamos directamente la definición de velocidad, "variación de posición en un tiempo tan pequeño como queramos, pero distinto de cero". Esto se escribe como:

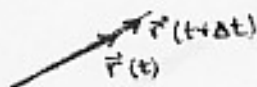
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Δt es un lapso pequeño de tiempo, 10^{-5} [s] por ej o 10^{-10} [s], lo podemos hacer tan pequeño como queramos, pues estamos "tomando el límite". Por lo tanto, ha pasado muy poco tiempo entre \rightarrow

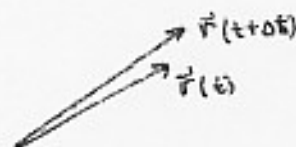
Por lo tanto, ha pasado muy poco tiempo entre el instante t y el $t+\Delta t$, lo que quiere decir que los vectores $\vec{r}(t+\Delta t)$ y $\vec{r}(t)$ son muy parecidos, sea cual sea la pequeña variación que ha sufrido en Δt segundos:



variación de tipo "giro"



variación de tipo "magnitud"



ambos tipos de variación

No importa qué tipo de variación haya sufrido, siempre podemos hacer:

$$\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \text{ que es simplemente restar dos vectores y ponerlos por el escalar } \frac{1}{\Delta t}$$

Recordemos que si $\vec{r} = r_x \hat{x} + r_y \hat{y}$

$$\Rightarrow \lambda \vec{r} = \lambda r_x \hat{x} + \lambda r_y \hat{y} \quad \text{con } \lambda \text{ cualquier vector}$$

Volvamos ahora al cálculo; si $\vec{r}(t) = R \cos\left(\frac{v}{R}t\right) \hat{x} + R \sin\left(\frac{v}{R}t\right) \hat{y}$

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[R \cos\left(\frac{v}{R}(t+\Delta t)\right) \hat{x} + R \sin\left(\frac{v}{R}(t+\Delta t)\right) \hat{y} \right] - \left[R \cos\left(\frac{v}{R}t\right) \hat{x} + R \sin\left(\frac{v}{R}t\right) \hat{y} \right]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{R \cos\left(\frac{v}{R}(t+\Delta t)\right) - R \cos\left(\frac{v}{R}t\right)}{\Delta t} \right] \hat{x} + \left[\frac{R \sin\left(\frac{v}{R}(t+\Delta t)\right) - R \sin\left(\frac{v}{R}t\right)}{\Delta t} \right] \hat{y} \end{aligned}$$

Lo que hicimos fue agrupar los vectores que van en la misma dirección, y aplicar la ponderación de vector por $\frac{1}{\Delta t}$

Ahora usaremos el hecho que "el límite de la suma es la suma de los límites". Esto es intuitivo, pero se lo demostrarán formalmente en Cálculo. \rightarrow

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{R \cos(\frac{v}{R}(t+\Delta t)) - R \cos(\frac{v}{R}t)}{\Delta t} \right] \hat{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{R \sin(\frac{v}{R}(t+\Delta t)) - R \sin(\frac{v}{R}t)}{\Delta t} \right] \hat{j}$$

Si se fijan en la definición de $\vec{v}(t)$ (para este problema):

$$\vec{r}(t) = X(t)\hat{i} + Y(t)\hat{j} = R \cos(\frac{v}{R}t)\hat{i} + R \sin(\frac{v}{R}t)\hat{j}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} \hat{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Y(t+\Delta t) - Y(t)}{\Delta t} \hat{j} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta X}{\Delta t} \hat{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta t} \hat{j} = \frac{dX}{dt} \hat{i} + \frac{dY}{dt} \hat{j} \end{aligned}$$

donde $\frac{dX}{dt}$ y $\frac{dY}{dt}$ son las "derivadas de X e Y con respecto al tiempo", pero es sólo notación, una manera de escribirlo.

Lo más importante es el concepto $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}$

"Cambio pequeño de X con respecto a un cambio pequeño de t "
Sigamos con el cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \cos(\frac{v}{R}(t+\Delta t)) - R \cos(\frac{v}{R}t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \cos(\frac{v}{R}t + \frac{v}{R}\Delta t) - R \cos(\frac{v}{R}t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R [\cos(\frac{v}{R}t) \cdot \cos(\frac{v}{R}\Delta t) - \sin(\frac{v}{R}t) \sin(\frac{v}{R}\Delta t)] - R \cos(\frac{v}{R}t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Hemos llegado a esta expresión. Si $\Delta t \approx 0 \Rightarrow R \cos(\frac{v}{R}(t+\Delta t)) \approx R \cos(\frac{v}{R}t)$, lo que significa que estamos dividiendo algo muy cercano a cero por algo muy cercano a cero (Δt). Para ver qué sucede debemos mirar un poco más fino, desarrollemos el coseno de la suma.

$$\cos(\frac{v}{R}\Delta t) \approx 1 \quad \text{ya que } \frac{v}{R}\Delta t \ll 1 \quad (\text{recordemos, } \Delta t \text{ tan pequeño como queramos})$$

$$\sin(\frac{v}{R}\Delta t) \approx \frac{v}{R}\Delta t \quad (\sin \theta \approx \theta \quad 0 \ll 1)$$

Con estas aproximaciones para Δt pequeño tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \left[\cos\left(\frac{v}{R}t\right) \cdot 1 - \sin\left(\frac{v}{R}t\right) \cdot \frac{v}{R} \Delta t \right] - R \cos\left(\frac{v}{R}t\right)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \cancel{\cos\left(\frac{v}{R}t\right)} - v \Delta t \sin\left(\frac{v}{R}t\right) - R \cancel{\cos\left(\frac{v}{R}t\right)}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-v \Delta t \sin\left(\frac{v}{R}t\right)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -v \sin\left(\frac{v}{R}t\right) = -v \sin\left(\frac{v}{R}t\right) = \frac{dx(t)}{dt}\end{aligned}$$

Heamos el cálculo análogo $\frac{dy}{dt}(t)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \sin\left(\frac{v}{R}(t+\Delta t)\right) - R \sin\left(\frac{v}{R}t\right)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \sin\left(\frac{v}{R}t + \frac{v}{R}\Delta t\right) - R \sin\left(\frac{v}{R}t\right)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \left[\sin\left(\frac{v}{R}t\right) \cos\left(\frac{v}{R}\Delta t\right) + \cos\left(\frac{v}{R}t\right) \sin\left(\frac{v}{R}\Delta t\right) \right] - R \sin\left(\frac{v}{R}t\right)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \left[\sin\left(\frac{v}{R}t\right) \cdot 1 + \cos\left(\frac{v}{R}t\right) \cdot \frac{v}{R} \Delta t \right] - R \sin\left(\frac{v}{R}t\right)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \cancel{\sin\left(\frac{v}{R}t\right)} + v \Delta t \cos\left(\frac{v}{R}t\right) - R \cancel{\sin\left(\frac{v}{R}t\right)}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \Delta t \cos\left(\frac{v}{R}t\right)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \cos\left(\frac{v}{R}t\right) = v \cos\left(\frac{v}{R}t\right) = \frac{dy}{dt}(t)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \frac{dx}{dt}(t) \hat{i} + \frac{dy}{dt}(t) \hat{j} = -v \sin\left(\frac{v}{R}t\right) \hat{i} + v \cos\left(\frac{v}{R}t\right) \hat{j}}$$

Que es lo mismo que a lo que habríamos llegado.

¿Cómo saber si $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ son perpendiculares para todo t ?

Dos vectores son perpendiculares (se dice ortogonales en el caso general) si su producto punto es cero.

Recordemos que si $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y}$ y $\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$ (6)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

$$\vec{r}(t) = R \cos\left(\frac{v}{R}t\right) \hat{x} + R \sin\left(\frac{v}{R}t\right) \hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = -v \sin\left(\frac{v}{R}t\right) \hat{x} + v \cos\left(\frac{v}{R}t\right) \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{r} = -Rv \sin\left(\frac{v}{R}t\right) \cos\left(\frac{v}{R}t\right) + Rv \sin\left(\frac{v}{R}t\right) \cos\left(\frac{v}{R}t\right) = 0$$

\Rightarrow son perpendiculares $\forall t$

¿Cuál es el módulo de \vec{v} , es decir, la rapidez?

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v^2 \sin^2\left(\frac{v}{R}t\right) + v^2 \cos^2\left(\frac{v}{R}t\right)} = v \sqrt{\underbrace{\sin^2\left(\frac{v}{R}t\right) + \cos^2\left(\frac{v}{R}t\right)}_1} = v$$

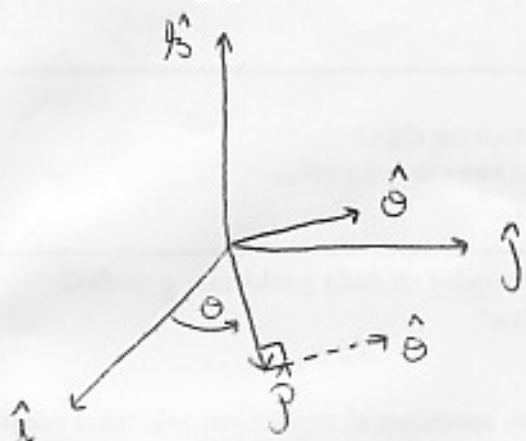
Ahora calculen vds. $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{dv_x}{dt}(t) \hat{x} + \frac{dv_y}{dt}(t) \hat{y}$

calculen su módulo, vean qué ángulo forman con los vectores $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ y dibújennlos todos en el círculo en un instante dado...

(La parte (b) es reemplazar los valores de a_x y x en las expresiones que les dan y ver que da cero)

JPR

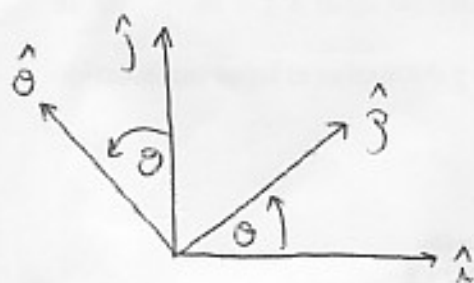
Coord. Polares o Cilíndricas



$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho} + z \hat{k}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$\hat{\rho} = \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta$$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\hat{i} \sin \theta \dot{\theta} + \hat{j} \cos \theta \dot{\theta} = \dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \hat{\rho} + z \hat{k}) = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \frac{d\hat{\rho}}{dt} + \dot{z} \hat{k}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\hat{i} \cos \theta \dot{\theta} - \hat{j} \sin \theta \dot{\theta} = -\hat{\rho} \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{k}$$

$$\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{k})$$

$$= \ddot{\rho} \hat{\rho} + \dot{\rho} \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\rho} \dot{\theta} \hat{\theta} + \rho \ddot{\theta} \hat{\theta} - \rho \dot{\theta}^2 \hat{\rho} + \ddot{z} \hat{k}$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{\rho} + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \hat{\theta} + \ddot{z} \hat{k}$$