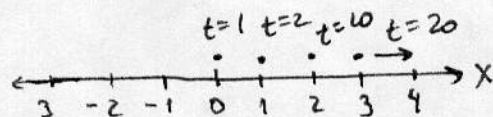


Derivadas

Derivar es aplicar una operación matemática sobre una función. A estas alturas uds. ya saben qué es una función, por lo que nos queda definir cómo realizar la operación. ¿Qué funciones nos interesa? $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de una variable real, le entre-

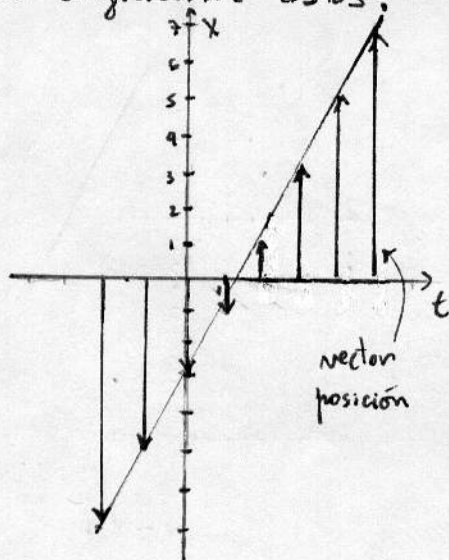
gamos un x y nos entrega un único $f(x)$. Por ej, si pensamos en un movimiento en una dimensión, la posición de la partícula es una función del tiempo $X(t)$. Para cada t hay un único X , no es posible que a alguna hora estemos en dos lugares. Por otro lado, es perfectamente posible que para dos tiempos distintos estemos en el mismo lugar, eso significaría que $X(t)$ no es inyectiva, pero sigue siendo función.



En física nos podrían interesar otras funciones como $V(T)$ volumen en función de la temperatura, o $\rho(P)$ densidad en función de la presión, que igualmente se pueden "derivar con respecto a su variable" que serían temperatura y presión respectivamente.

Pero vamos por paso, supongamos que experimentando obtenemos los siguientes datos:

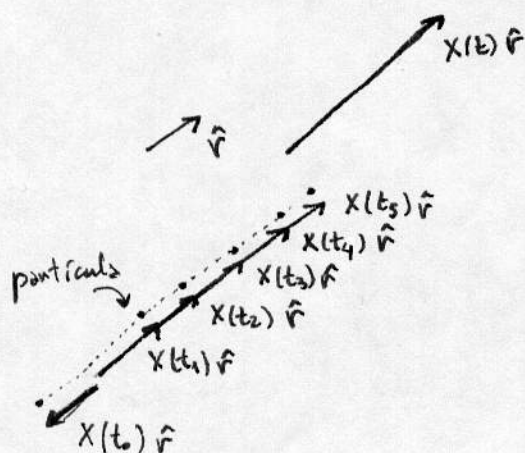
t	X
-2	-7
-1	-5
0	-3
1	-1
2	1
3	3
4	5
5	7



Nos puede interesar saber "cuánto varía X cuando variamos t en una unidad". De la tabla podemos ver que cuando t varía en 1, X varía en 2. Además hay que subrayar el hecho que varía en +2, podría disminuir en 2 en otro caso. La ecuación de esta recta es: $X(t) = 2t - 3$ y lo que buscábamos era la "pendiente de la recta" que es lo que define "la tasa de variación de X con respecto a t ".

la constante -3 no influye en cuánto varía la función $\frac{dX}{dt}$ a t , simplemente define dónde estoy en $t=0$.

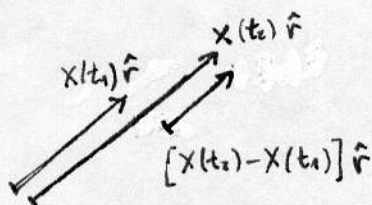
$\vec{X}(t)$ es el vector posición de la partícula con respecto a un sistema de referencias determinado. Así $\vec{X}(t) = X(t) \hat{r}$ donde \hat{r} es un vector de módulo uno que indica la dirección del movimiento y $X(t)$ es el ponderador, el número real que multiplica el largo unitario de el vector \hat{r} :



Además de definir la dirección, el vector \hat{r} define el sentido positivo. De esta manera $X(t)$ es un número real negativo. Como el vector \hat{r} no varía en el tiempo, para analizar el movimiento basta con analizar $X(t)$, una función a valores reales.

Volvamos al gráfico, tenemos que la variación de X cr a la de t es constante. Ya sea que tomemos una variación desde $t=2$ a $t=3$ o de $t=10$ a $t=11$, X variará siempre en 2 unidades. Ya se habrán dado cuenta que esta variación es lo que llamamos velocidad. En el caso de velocidad constante, esta se calcula como:

$$\vec{V}_0 = \frac{\vec{X}(t_2) - \vec{X}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{X(t_2) \hat{r} - X(t_1) \hat{r}}{t_2 - t_1} = \frac{X(t_2) - X(t_1)}{t_2 - t_1} \hat{r} = V_0 \hat{r} \quad \text{donde}$$



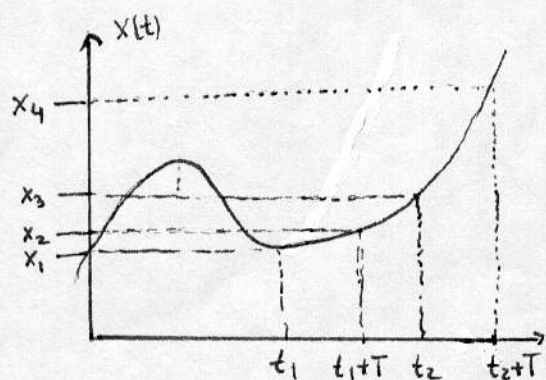
donde $V_0 = m = \frac{X(t_2) - X(t_1)}{t_2 - t_1}$

pendiente de la recta del gráfico

Para no acarrear el vector \hat{r} , anotaremos la posición como $X(t)$. No olvidar que la velocidad es el vector $\vec{V} = \frac{X(t_2) - X(t_1)}{t_2 - t_1} \hat{r}$

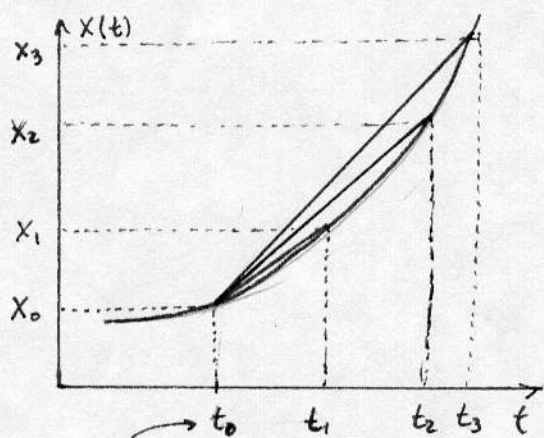
La rapidez es el módulo $|\vec{V}(t)| = \left| \frac{X(t_2) - X(t_1)}{t_2 - t_1} \right|$ un n° real mayor o igual a cero

Pero $v(t)$ no es ni rapidez (porque puede tomar valores negativos) ni velocidad (porque no tiene información de dirección espacial). Tomaremos la convención de llamado velocidad, dado que en 1 Dimensión la dirección es única, no así el sentido, que quedará definido por el signo de $v(t)$. Hasta ahora hemos hablado de $v(t) = v_0$ cte, pero sabemos que en la realidad se produce cambio de velocidad. ¿cómo sería el gráfico de un movimiento con velocidad variable?



Fijense que entre $t=t_1$ y $t=t_1+T$ pasa el mismo intervalo de tiempo que entre $t=t_2$ y $t=t_2+T$, es decir, T . Sin embargo, la distancia recorrida no es la misma. Esto implica que la velocidad ha cambiado, ya no recorrimos lo mismo en el mismo intervalo de tiempo.

Cuando viajamos en un automóvil cambiamos nuestra velocidad, sin embargo en un instante de tiempo miramos nuestro velocímetro y obtenemos nuestra velocidad en ese instante. Entonces tenemos que idear una forma de calcular nuestra velocidad en un instante dado. Lo que podríamos hacer es tomar un intervalo de tiempo



queremos calcular nuestra velocidad en el instante t_0 .

y hacer $\frac{X(t_3) - X(t_0)}{t_3 - t_0} = v_3$ ¿que representa v_3 ?

No puede ser la velocidad en t_0 , porque si usáramos t_2 tendríamos otra velocidad en t_0 y no habría ninguna razón para preferir el cálculo de la vel. en t_0 usando t_2 o t_3 .

Lo que representa es la velocidad media en el intervalo $t_0 \rightarrow t_3$, que es la velocidad cte. que necesita una partícula que parte en t_0 en X_0 para recorrer la misma distancia que la partícula acelerada en el mismo tiempo.

Si en t_0 tenemos una velocidad dada, y en los instantes posteriores cambió, lo más lógico es tomar un instante cercano a t_0 para aproximar la velocidad en t_0 . Así, si usamos t_2 vamos a calcular una vel. distinta que con t_3 , una distinta velocidad media, pero que se parecerá más a nuestra velocidad en t_0 , dado que la partícula puede variar menos su velocidad en un intervalo más pequeño de tiempo. De esta manera, mientras más pequeño es el intervalo, mejor estamos aproximando la vel. en t_0 . La pendiente de las rectas de la página anterior representan las velocidades medias que estamos usando para aprox. la vel en t_0 . Lo que vamos a hacer es definir la velocidad en t_0 como la vel media usando un t tan cercano a t_0 como podamos imaginar, pero distinto de t_0 .

Hacer esto se escribe como: $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$, lo que es sólo una notación, lo importante es saber lo que está sucediendo.

De esta definición se desprende que la velocidad instantánea (la vel. en t_0) es la pendiente de la recta tangente a la curva en t_0 . Basta con que se fijen que las rectas que dibujemos se parezcan cada vez más a la recta tangente a la curva en t_0 . Al hacer este cálculo nos debe dar un número, y el valor de este número depende de en qué valor calculamos en límite, en este caso, t_0 . Es decir, como t_0 es cualquier valor, el resultado es una función de ese valor: $v(t_0)$ o $v(t)$, como t_0 es cualquiera, lo podemos llamar " t ".

$$v(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

Entonces, si tenemos la función $x(t)$, entonces podemos calcular $v(t)$. Pasemos ahora a describir la matemática del asunto.

El límite es un concepto matemático formal cuyo desarrollo en detalle verán en cálculo (a fin de semestre sino me equivoco). Por ahora sólo los usaremos en su forma más simple. Esto no pretende ser una lección formal de límites y derivadas.

Def: sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función continua*, se define la "derivada de f con respecto a t "

$$\boxed{\frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}}$$

* no se preocupen por lo de continua

Veamos cómo calculamos algunas derivadas:

• $f(t) = c$ (cte)

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{c - c}{t - t_0} = 0$$

Estamos dividiendo cero por un n° tan cercano a cero como queramos, pero distinto de cero. \Rightarrow cero

Y es lógico, ya que la variación de una constante es cero.

$$\Rightarrow \frac{df}{dt}(t) = 0$$

• $f(t) = at^m$ $a, m \in \mathbb{R}$ (por lo general trabajamos con $m \in \mathbb{N}$)

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{at^m - at_0^m}{t - t_0}$$

Fijense que cuando $t \approx t_0$ $at^m \approx at_0^m$ y $t \approx t_0$, es decir, estamos cercanos a dividir cero en cero, lo que no sabemos qué es. Pero sí sabemos que la derivada debe existir, porque at^m es un polinomio y por lo tanto tiene recta tangente en cualquier punto. Lo que hay que hacer es analizar en detalle lo que sucede cerca de t_0 .

Vamos a hacer un "cambio de variable". Esto es algo que sirve para facilitar los cálculos:

$$\frac{df(t_0)}{dt} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \underset{*}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$$

* Definimos $h = t - t_0$ ¿qué es h ? es una variable función de otra variable, t . Cuando $t \rightarrow t_0$ (t tiende a t_0), es decir, t se parece a t_0 , entonces $h \rightarrow 0$ (h tiende a cero) luego, cambiamos la variable t por $h \Rightarrow t = t_0 + h$. Hacemos esto, porque suele ser mucho más fácil calcular un límite tendiendo a cero.

Aplicado a " $a t^n$ "

$$\frac{df(t_0)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(t_0+h)^n - a t_0^n}{h}$$

Hasta ahora seguimos dividiendo cero en cero pero:

$$(t_0+h)^n = \left[t_0 \left(1 + \frac{h}{t_0} \right) \right]^n = t_0^n \left(1 + \frac{h}{t_0} \right)^n$$

En el límite, cuando h es muy pequeño, $\frac{h}{t_0}$ es muy pequeño.

Una aproximación muy usada en física es:

$(1+X)^n \approx (1+nX)$ cuando $X \ll 1$ (pequeño). No lo voy a demostrar, ya que tengo que usar cosas como El Binomio de Newton o alargarme más de la cuenta, pero:

$$(1+0,001)^3 = 1,003003001 \quad \checkmark$$

$$(1+3 \cdot 0,001) = 1,003$$

$$\begin{aligned} \text{luego } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(t_0+h)^n - a t_0^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a t_0^n \left(1 + \frac{h}{t_0} \right)^n - a t_0^n}{h} = \\ &\approx \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a t_0^n \left(1 + \frac{n h}{t_0} \right) - a t_0^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{a t_0^n} + n a t_0^{n-1} \cdot h - \cancel{a t_0^n}}{h} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m a t_0^{n-1} h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} m a t_0^{n-1} = m a t_0^{n-1}$$

no depende de h

$$\Rightarrow \frac{df}{dt}(t_0) = m a t_0^{n-1}$$

$$\boxed{\frac{df}{dt}(t) = a n t^{n-1}}$$

Aprovechemos para hablar de la notación:

• Si $f(t) = 3t^2$

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{d}{dt}(3t^2) = 3 \cdot 2t^{2-1} = 6t$$

↑
notación

Más notación $\frac{dx}{dt}(t) \equiv x'(t) \equiv \dot{x}(t)$ son lo mismo!

• Ej: $g(t) = 8t^6 \Rightarrow \frac{dg}{dt} = 48t^5 = 6 \cdot 8t^{6-1}$

• $f(t) = b \cos(ct)$ $b, c \in \mathbb{R}$

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{d}{dt}[b \cos(ct)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b \cos(c(t+h)) - b \cos(ct)}{h} =$$

Atención! no confundir $c(t+h)$ con "c función evaluada en $t+h$ ". Sabemos que c es un número por lo que $c(t+h)$ es $c \cdot (t+h)$ una simple multiplicación.

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b \cos(ct+ch) - b \cos(ct)}{h}$$

cuando $h \rightarrow 0$ de nuevo tenemos $\frac{\text{cero}}{\text{cero}}$...

pero $\cos(ct_0 + ch) = \cos(ct_0) \cdot \cos(ch) - \sin(ct_0) \cdot \sin(ch)$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b \cos(ct_0) \cos(ch) - b \sin(ct_0) \sin(ch) - b \cos(ct_0)}{h}$$

cuando $h \approx 0 \Rightarrow ch \approx 0 \Rightarrow \cos(ch) \approx 1$
 $\sin(ch) \approx ch$

ya que $\sin \theta \approx \theta$
 $\cos \theta \approx 1$ cuando $\theta \ll 1$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b \cancel{\cos(ct_0)} 1 - b \sin(ct_0) ch - b \cancel{\cos(ct_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-b \sin(ct_0) ch}{h} = -b \sin(ct_0)$$

no depende
de h

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(b \cos(ct)) = -b c \sin(ct)}$$

El coseno cambia por menos seno, la "c" salta fuera del seno y b no hace nada.

Análogamente (pueden hacerlo)

$$\boxed{\frac{d}{dt}(b \sin(ct)) = b c \cos(ct)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\cos t) &= -\sin t \\ \frac{d}{dt}(\sin t) &= \cos t \end{aligned}}$$

Veremos que las derivadas de seno y coseno con las ctes son casos de las propiedades:

No vamos a derivar más funciones, pero vamos a enumerar propiedades que sirven para calcular derivadas de combinaciones de estas funciones (polinomios y trigonométricas).

$$f(t) = g(t) + h(t) \Rightarrow \frac{df}{dt}(t) = \frac{dg}{dt}(t) + \frac{dh}{dt}(t) \quad (1)$$

$$f(t) = g(t) \cdot h(t) \Rightarrow \frac{df}{dt}(t) = \frac{dg}{dt}(t) h(t) + g(t) \frac{dh}{dt}(t) \quad (2)$$

$$f(t) = \frac{g(t)}{h(t)} \Rightarrow \frac{df}{dt}(t) = \frac{\frac{dg}{dt}(t) \cdot h(t) - g(t) \frac{dh}{dt}(t)}{[h(t)]^2} \quad (3)$$

$$\begin{matrix} f(t) = c g(t) \\ c \text{ cte} \end{matrix} \Rightarrow \frac{df}{dt}(t) = c \frac{dg}{dt}(t) \quad (4)$$

$$f(t) = g(h(t)) \Rightarrow \frac{df}{dt}(t) = \frac{dg}{dt}(h(t)) \cdot \frac{dh}{dt}(t) \quad (5) \text{ Regla de la Cadena.}$$

• Ej: sabiendo que $\frac{d}{dt}(\sin t)$ y las propiedades (4) y (5) podemos

$$\text{calcular } (A \sin \omega t)' = \frac{d}{dt}(A \sin \omega t) = A \frac{d}{dt}(\sin(\omega t)) \quad (4)$$

$$\text{ahora: } \frac{d}{dt}[\sin(\omega t)]$$

Reconocemos que tenemos una función de una función, $\sin(t)$ evaluado en ωt . Fijense en la regla de la cadena:

Identificamos que $g(t) = \sin t$ $h(t) = \omega t$

$g(h(t)) = \sin(\omega t)$, la regla dice que hay que calcular $\frac{dg}{dt}$, evaluarlo en $h(t)$ y multiplicar eso por $\frac{dh}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dt}(t) = \cos t \quad \frac{dh}{dt}(t) = \omega \quad \left[\frac{d}{dt} \omega t^1 = \omega \frac{d}{dt} t^1 = \omega \cdot 1 \cdot t^{1-1} = \omega \right]$$

(4) derivada polinomial

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\sin \omega t) = \cos(\omega t) \cdot \omega = \omega \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(A \sin(\omega t)) = A \omega \cos(\omega t)$$

$$\frac{d}{dt}(A \cos \omega t) = -A \omega \sin(\omega t)$$

Ejemplos:

- $x(t) = 3t^5 + 2\sin(5t^2)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^5) + \frac{d}{dt}(2\sin(5t^2)) = 3 \frac{d}{dt}(t^5) + 2 \frac{d}{dt}(\sin(5t^2)) =$$

$$= 3 \cdot 5t^4 + 2 \cdot \cos(5t^2) \cdot \frac{d}{dt}(5t^2) = 15t^4 + 2\cos(5t^2) \cdot 5 \cdot 2t =$$

$$v(t) = 15t^4 + 20\cos(5t^2) \cdot t$$

- $x(t) = 10\cos(\sin(\sqrt{t}))$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = 10 \frac{d}{dt} \left[\cos(\sin(\sqrt{t})) \right] = 10 \left[-\sin(\sin(\sqrt{t})) \frac{d}{dt}(\sin \sqrt{t}) \right] =$$

doble regla de la cadena

$$= -10 \sin(\sin(\sqrt{t})) \cdot \cos(\sqrt{t}) \frac{d}{dt}(\sqrt{t}) = -10 \sin(\sin(\sqrt{t})) \cos(\sqrt{t}) \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\sqrt{t} = t^{1/2} \Rightarrow \frac{d}{dt}(t^{1/2}) = \frac{1}{2} t^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{-5 \sin(\sin(\sqrt{t})) \cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$$

- $x(t) = 3t^2 \cos(3t)$

$$v(t) = \frac{d}{dt}(3t^2) \cdot \cos(3t) + 3t^2 \cdot \frac{d}{dt} \cos(3t) = 6t \cdot \cos(3t) + 3t^2 \cdot \sin(3t) \cdot 3$$

regla del producto (2) cadena

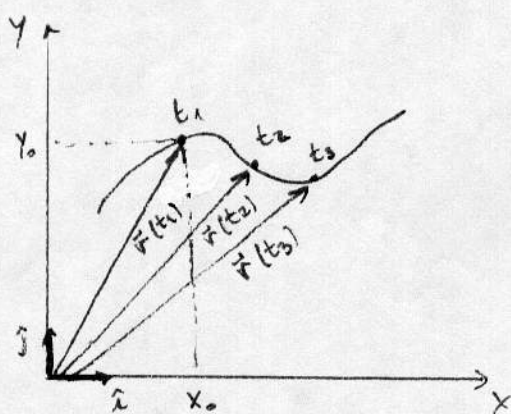
$$\Rightarrow v(t) = 6t \cos(3t) - 9t^2 \sin(3t)$$

PD: no creo que tengan que derivar cosas tan rebuscadas como el segundo ejemplo, pero pa que cañen

Ahora que sabemos un par de derivadas, somos capaces de calcular el vector velocidad si nos dan el vector posición. El vector aceleración se define como:

$$\vec{a}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0}, \text{ es decir, es la "tasa de variación de la velocidad wr el tiempo"}$$

Por lo tanto, basta derivar la velocidad para obtener la aceleración. Hasta ahora estamos en una dimensión, y el $x(t)$ corresponde a el ponderador de un único vector unitario \hat{i} ¿que pasa en 2 o más dimensiones?



\hat{i} \hat{j} vectores unitarios

Debemos describir la posición con un vector de 2 dimensiones.

$$\vec{r}(t_1) = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} = (x_0, 0) + (0, y_0)$$

Posición en función del tiempo:

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j}$$

Para derivar un vector se derivan los componentes (al menos en coordenadas cartesianas)

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right) \hat{i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{dy(t)}{dt} \right) \hat{j}$$

$$\text{Notación: } \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) = \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

Revisen el problema de mov. circular y lo que hizo Sergio.

P.D: Esto no es trivial, pregunten.

Juan Pablo Rojas