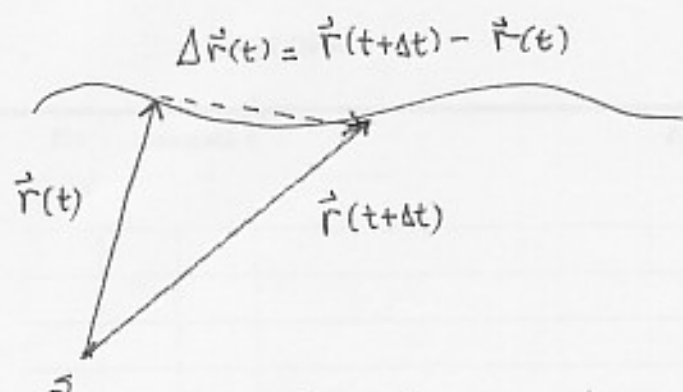
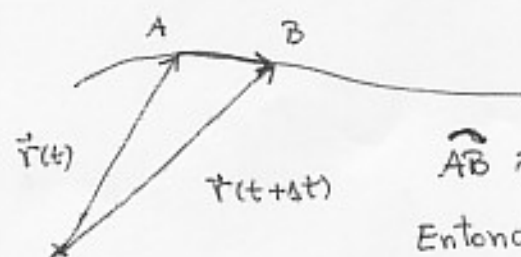


# Posición, Velocidad y Aceleración

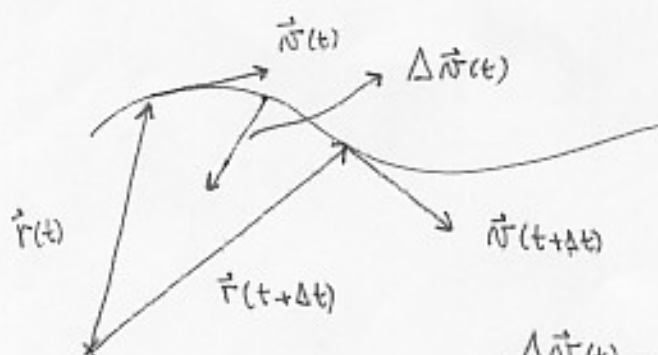


Cuando  $\Delta t$  es chico



$$\widehat{AB} \approx \|\Delta \vec{r}(t)\|$$

Entonces:  $\frac{\|\Delta \vec{r}(t)\|}{\Delta t} = \underbrace{\left\| \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} \right\|}_{\text{rapidez media}} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \underbrace{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|}_{\text{rapidez instantánea}} = \|\vec{v}(t)\|$



$$\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t) = \Delta \vec{v}(t)$$



$$\frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \vec{a}(t)_{\text{media}}$$

si  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}(t)_{\text{ins.}}$$

En gral: (Resumen)

$\vec{r}(t)$  posición

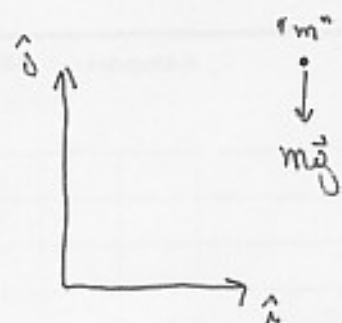
$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$  ; velocidad

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \quad \text{aceleración}$$

! velocidad es la derivada de la posición  
! c/r al tiempo y aceleración es la  
! segunda derivada c/r al tiempo (de la pos.)

## Caída Libre

Encontrar  $\vec{r}(t)$  (para todo  $t$ ) de la partícula de masa " $m$ ",  
asumiendo que  $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$ .



$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} ; \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{matrix}}$$

Necesito encontrar  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  de la partícula. sólo sé  
que  $a_x = 0$  y  $a_y = -g$ .

$$\text{Ya vimos que } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} \text{ y } a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$\Rightarrow \underset{(1)}{0 = \frac{dv_x}{dt}} \text{ y } \underset{(2)}{-g = \frac{dv_y}{dt}}$$

De la expresión (1). ¿Cómo debe ser  $v_x(t)$  para que  $\frac{dv_x}{dt} = 0$ ?

Resp:  $v_x(t)$  debe ser cte. en el tpo ya que

$$\text{si } f(t) = \text{cte} \Rightarrow \frac{df(t)}{dt} = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x(t) = \text{cte} = v_{x0}} \text{ (no la conozco, sólo le pongo nombre)}$$

Ahora: si  $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  ¿Cómo debe ser  $x(t)$  para que  
 $\frac{dx(t)}{dt} = v_{x0}$ ?

$$\text{Entonces: supongo } x(t) = v_{x0} \cdot t + \text{cte. 1}$$

$$\text{Comprobamos: } \frac{dx(t)}{dt} = v_{x0} \cdot 1 \cdot t^{1-1} + 0 = v_{x0} \quad \checkmark \checkmark$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = v_{x0} \cdot t + x_0} \quad (\text{cte. 1} = x_0) \text{ le pongo nombre}$$

en  $\checkmark$  lo que se hizo fue:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (v_{x0} \cdot t) + \frac{d \text{cte. 1}}{dt}$$

$$= v_{x0} \cdot \frac{d(t)}{dt} + 0$$

$$= v_{x0} \cdot 1 \cdot t^{1-1} = v_{x0} //$$

Resumen para x

$$a_x = 0$$

$$v_x(t) = v_{x0}$$

$$x(t) = v_{x0}t + x_0$$

¿Qué pasa con el eje y?

de la expresión (2)

$$\Rightarrow -g = \frac{dv_y}{dt} \quad ; \text{ ¿Cómo es } v_y(t) \text{ para que } \frac{dv_y}{dt} = -g?$$

$$\text{Veamos que } \frac{dv_y}{dt} = \underbrace{-g \cdot 1 \cdot t^{1-1}}_{\frac{d(-g \cdot t)}{dt}} + \underbrace{0}_{\frac{d(\text{cte. 2})}{dt}} = \frac{d}{dt} (-gt + \text{cte. 2})$$

$$\Rightarrow v_y(t) = -g \cdot t + \underbrace{\text{cte. 2}}_{v_{y0}} \Rightarrow \boxed{v_y(t) = -g \cdot t + v_{y0}}$$

(le pongo nombre)

ya conozco  $v_y(t)$  y quiero conocer  $y(t)$ .

$$\frac{dy}{dt} = v_y(t) \quad ; \text{ ¿Cómo es } y(t) \text{ para que } \frac{dy}{dt} = v_y(t)?$$

Veamos que

$$N_y(t) = -g \cdot 1 \cdot t^{2-1} + N_{y0} \cdot 1 \cdot t^{1-1} + 0$$

$$= -g \cdot \frac{2}{2} \cdot t^{2-1} + N_{y0} \cdot 1 \cdot t^{1-1} + 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (-g \cdot t^2) + \frac{d}{dt} (N_{y0} \cdot t) + \frac{d}{dt} (\text{cte. } 3)$$

ojo:

$$\frac{d}{dt} (\lambda \cdot t^m) = \lambda \cdot \frac{d}{dt} t^m$$

$\lambda$  una cte.

$$\Rightarrow N_y(t) = \frac{d}{dt} y = \frac{d}{dt} \left( -\frac{g}{2} t^2 \right) + \frac{d}{dt} (N_{y0} \cdot t) + \frac{d}{dt} (\text{cte. } 3)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{g}{2} t^2 + N_{y0} \cdot t + \text{cte. } 3 \right)$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{g \cdot t^2}{2} + N_{y0} \cdot t + \text{cte. } 3$$

$y_0$  (le pongo nombre)

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = -\frac{g \cdot t^2}{2} + N_{y0} \cdot t + y_0}$$

Resumen para y

$$a_y = -g$$

$$N_y(t) = -g \cdot t + N_{y0}$$

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + N_{y0} t + y_0$$

Escribimos en forma vectorial el Resumen para x e y.

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}; \quad \vec{N}(t) = \begin{pmatrix} N_{x0} \\ -g \cdot t + N_{y0} \end{pmatrix}; \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} N_{x0} \cdot t + x_0 \\ -\frac{g}{2} t^2 + N_{y0} \cdot t + y_0 \end{pmatrix}$$

Hay 4 ctes. que tengo que determinar:

$$v_{x0}, v_{y0}, x_0, y_0$$

Cómo lo hago? (Paso:  $g$  no es algo desconocido  
 $g$  es  $9,8 \frac{m}{s^2}$ , es el módulo

Resp: Mediante las condiciones de la aceleración de gravedad  $\vec{g}$   
iniciales del problema ( $\vec{g} = -g \hat{j} \Rightarrow \|\vec{g}\| = g$ )

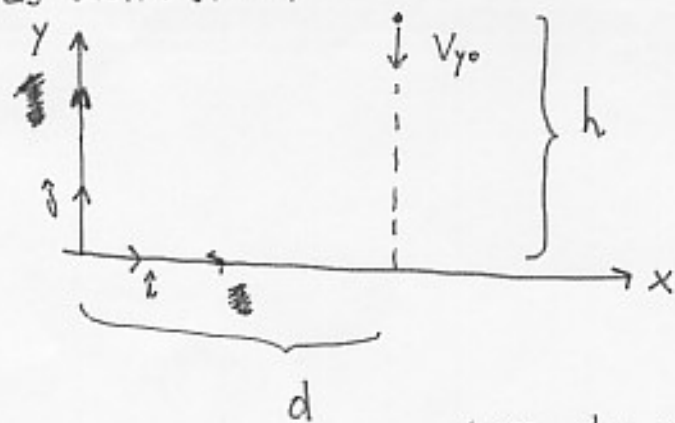
(Me las tienen que dar)

Supongamos que:

para  $t=0$

$$\vec{r}(t=0) = \begin{pmatrix} d \\ h \end{pmatrix}; \quad \vec{v}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_{y0} \end{pmatrix}$$

Es decir: ( $t=0$ )

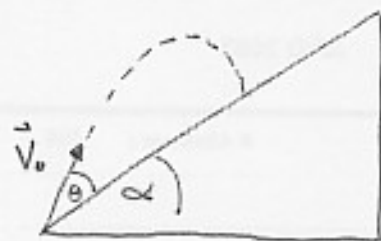


y sé que:  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{x0} \cdot t + x_0 \\ -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_{y0} \cdot t + y_0 \end{pmatrix}$  evolúo en  $t=0$

$$\Rightarrow \vec{r}(t=0) = \begin{pmatrix} v_{x0} \cdot 0 + x_0 \\ -\frac{g}{2} \cdot 0^2 + v_{y0} \cdot 0 + y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{tiene que ser por la cond. inicial}}{=} \begin{pmatrix} d \\ h \end{pmatrix}$$



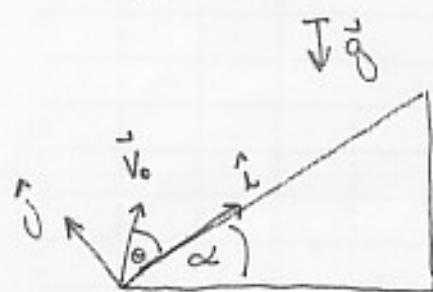
## Plano Inclinado



Se lanza un proyectil desde la ladera de un "cerro" de pendiente definida por el ángulo  $\alpha$ . El proyectil es lanzado con velocidad  $\vec{V}_0$  que forma un ángulo  $\theta$  con la ladera. Encontrar el alcance del proyectil sobre la ladera en función del ángulo  $\theta$  y encontrar el ángulo  $\theta^*$  que maximiza esta distancia.

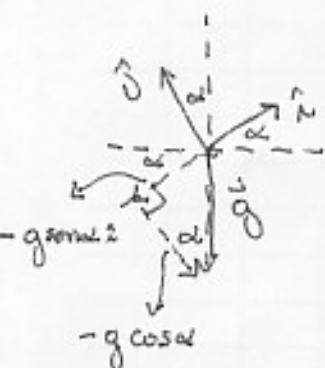
Sol

Para estudiar este mov. vamos a tomar un sistema de referencia ubicado en el "pie" o base del cerro con los ejes orientados como indica la figura.



$$\text{Si } \vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = ?$$

En este caso tenemos que descomponer el vector  $\vec{g}$  en los dos ejes.



$$\vec{g} = \begin{pmatrix} -g \sin \alpha \\ -g \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \sin \alpha \\ -g \cos \alpha \end{pmatrix} ; \text{ ya que } \vec{a} = \vec{g}$$

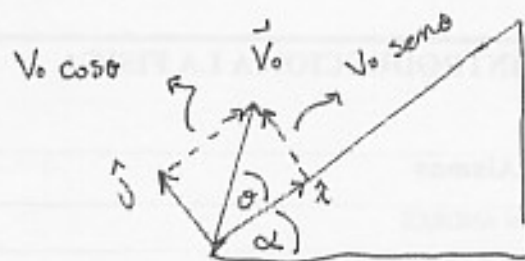
Al preguntarnos por el alcance, implícitamente nos preguntan sobre cómo es  $x(t)$  e  $y(t)$  y ya vimos en el ejercicio anterior que si conocemos  $\vec{a}$  podemos conocer  $\vec{r}(t)$  siempre y cuando tb. dispongamos de las condiciones iniciales. En este caso notemos que las cond. iniciales son:

$$\vec{r}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ya q' parte} \\ \text{desde el origen} \\ \text{de nuestro sist.} \end{array} \right. \quad (\star)$$



$$\vec{v}(t=0) = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}_0\| \cos \theta \\ \|\vec{v}_0\| \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \end{pmatrix} (*)$$

donde  $v_0 = \|\vec{v}_0\|$



Zoom.

Entonces:

Para eje x

$$a_x = -g \sin \alpha ; \text{ sabemos que: } a_x = \frac{d v_{x}(t)}{dt}$$

la pregunta que nos debemos hacer es: ¿Cómo es  $v_x(t)$  para que  $\frac{d v_x}{dt} = -g \sin \alpha$ ?

$$a_x = \frac{d v_x(t)}{dt} = \underbrace{-g \sin \alpha}_{\text{cte.}} = \underbrace{-g \sin \alpha \cdot 1 \cdot t^{1-1}}_{\frac{d}{dt}(-g \sin \alpha \cdot t)} + \underbrace{0}_{\frac{d}{dt}(\text{cte.})}$$

$$\Rightarrow \frac{d v_x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(-g \sin \alpha \cdot t) + \frac{d}{dt}(\text{cte.}) \quad / \quad \text{cte.} = v_{x0}$$

$$\Rightarrow \frac{d v_x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(-g \sin \alpha \cdot t + v_{x0})$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x(t) = -g \sin \alpha \cdot t + v_{x0}}$$

ojo:  $v_{x0} \neq v_{0x}$

sólo le pongo nombre a cte. 1

Apliquemos ahora la cond. inicial sobre  $v_x(t)$  en  $t=0$

$$* v_x(t=0) = v_0 \cos \theta \quad (\text{fijarse en } (*))$$



$$\Rightarrow v_x(t=0) = -g \cdot \sin \alpha \cdot 0 + v_{x0} = v_0 \cos \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{x0} = v_0 \cos \theta = v_{0x}}$$

Ahora si!  $v_{x0} = v_{0x}$

Reemplazamos:

$$\Rightarrow \boxed{v_x(t) = -g \sin \alpha \cdot t + v_0 \cos \theta}$$

Ahora:

$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ , entonces la pregunta es .... esa misma.  
¿Cómo debe ser  $x(t)$  para que  
 $\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$ ?

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = (-g \sin \alpha) \cdot t + v_0 \cdot \cos \theta$$

$$= (-g \sin \alpha) \cdot 1 \cdot t^{2-1} + v_0 \cdot \cos \theta \cdot 1 \cdot t^{1-1} + 0$$

$$= \frac{(-g \sin \alpha)}{2} \cdot 2 \cdot t^{2-1} + v_0 \cdot \cos \theta \cdot 1 \cdot t^{1-1} + 0.$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{-g \sin \alpha}{2} \cdot t^2 \right) + \frac{d}{dt} (v_0 \cdot \cos \theta \cdot t) + \frac{d}{dt} (\text{cte. 2})$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{-g \sin \alpha}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot \cos \theta \cdot t + \text{cte. 2} \right) \quad \left( \text{cte. 2} = x_0 \right. \\ \left. \text{le pongo nombre} \right)$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{g \sin \alpha}{2} \cdot t^2 + v_0 \cos \theta \cdot t + x_0$$

¿Cómo conozco  $x_0$ ? Imponiendo cond. inicial sobre  $x(t)$   
en  $t=0$ . Por las cond. iniciales en (\*)  $\Rightarrow x(t=0) = 0$

$$\Rightarrow x(t=0) = -\frac{g \sin \alpha}{2} \cdot 0^2 + v_0 \cdot \cos \theta \cdot 0 + x_0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_0 = 0} \quad \text{Reemplazando ...}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{g \sin \alpha}{2} \cdot t^2 + v_0 \cos \theta \cdot t}$$

## Resumen para eje x

$$a_x = -g \sin \alpha$$

$$v_x(t) = -g \sin \alpha \cdot t + v_0 \cos \theta$$

$$x(t) = -\frac{g \sin \alpha}{2} \cdot t^2 + v_0 \cos \theta \cdot t$$

## Ahora: Para eje y

Notemos que:  $a_y = -g \cos \alpha$  y q' las condiciones iniciales son  $y(t=0) = 0$  y que  $v_y(t=0) = v_0 \cdot \sin \theta$ .

Debido a la similitud con el eje x, podemos afirmar que:

$$a_y = -g \cos \alpha$$

$$v_y(t) = -g \cos \alpha \cdot t + v_0 \sin \theta$$

$$y(t) = -\frac{g \cos \alpha}{2} \cdot t^2 + v_0 \sin \theta \cdot t$$

Cambiamos  
 $\cos \theta \rightarrow \sin \theta$   
 $\sin \alpha \rightarrow \cos \alpha$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{g \sin \alpha}{2} \cdot t^2 + v_0 \cos \theta \cdot t \\ -\frac{g \cos \alpha}{2} \cdot t^2 + v_0 \sin \theta \cdot t \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -g \sin \alpha \cdot t + v_0 \cos \theta \\ -g \cos \alpha \cdot t + v_0 \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -g \sin \alpha \\ -g \cos \alpha \end{pmatrix}$$

¿Cómo calculamos el alcance?

El alcance es la distancia q' recorre en  $x$  el proyectil. Esta distancia la podemos encontrar despejando o conociendo el tiempo de vuelo del proyectil para luego reemplazar este tpo. en  $x(t^*) \Rightarrow d$ . (alcance)

Entonces:

Despejar tiempo de vuelo: Para conocerlo debemos pedir que el proyectil nuevamente esté en  $y=0$ .

$$\Rightarrow y(t^*) = -\frac{g \cos \alpha}{2} t^{*2} + V_0 \cdot \text{seno } t^* = 0.$$

$$\Rightarrow t^* \left( V_0 \text{ seno} - \frac{g \cos \alpha}{2} t^* \right) = 0$$

$\Rightarrow t^* = 0$   
lo cual está bien ya que  $y(t=0) = 0$

$$t^* \frac{g \cos \alpha}{2} = V_0 \text{ seno}$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{2 V_0 \text{ seno}}{g \cos \alpha}$$

tpo. de vuelo

Entonces,

$$x(t^*) = d = -\frac{g \text{ seno}}{2} \left( \frac{2 V_0 \text{ seno}}{g \cos \alpha} \right)^2 + V_0 \cos \alpha \left( \frac{2 V_0 \text{ seno}}{g \cos \alpha} \right)$$

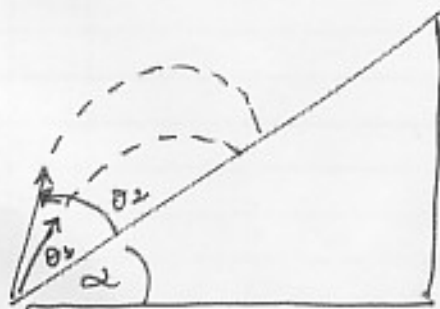
$$\Rightarrow d(\theta) = -\frac{g \text{ seno}}{2} \left( \frac{4 V_0^2 \text{ seno}^2}{g^2 \cos^2 \alpha} \right) + \frac{V_0^2}{g \cos \alpha} \cdot \text{sen}(2\theta)$$

$$= -\frac{2 V_0^2 \text{ seno}^2 \text{ seno}}{g \cos^2 \alpha} + \frac{V_0^2 \cdot \text{sen}(2\theta)}{g \cos \alpha}$$

$$= \frac{V_0^2}{g \cos^2 \alpha} \left( \text{sen}(2\theta) \cdot \cos \alpha - 2 \text{ seno}^2 \theta \cdot \text{sen} \alpha \right)$$

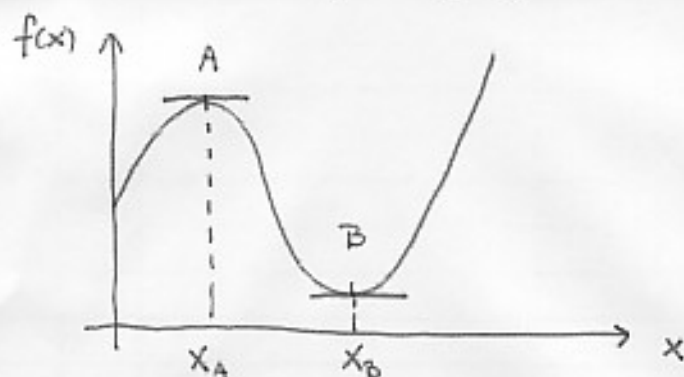
$$\Rightarrow d(\theta) = \frac{V_0^2}{g \cos^2 \alpha} (\sin(2\theta) \cos \alpha - 2 \sin^2 \theta \cdot \sin \alpha)$$

Queremos encontrar el ángulo  $\theta^*$  que maximiza a  $d$   
 Notar que  $d$  depende de  $\theta \Rightarrow d(\theta)$ , esto quiere decir  
 que si yo cambio el valor del ángulo  $\theta$  encontraré  
 otros alcances



¿Cómo maximizamos una función?

Cuando hablamos de derivadas, hablamos de pendientes.  
 Fijemosnos en el sgte. gráfico:



Notemos que A es un  
 máximo y B un mínimo.

¿Qué características tienen  
 estos pto.s?

Resp: La pendiente en los  
 pto.s (en A y en B) es  
 cero

$$\Rightarrow \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_A} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se lee: la derivada} \\ \text{de } f(x) \text{ con respecto} \\ \text{a } x, \text{ evaluada en} \\ x_A \text{ es cero.} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} = 0$  } se lee: la derivada de  $f(x)$  c/r a  $x$ , evaluada en  $x_0$  es cero.

Ambos pto. cumplen con  $\frac{df(x)}{dx} = 0$ , pero ¿cómo sé cuál es máximo, cuál es mínimo?

Resp: Se debe calcular la segunda derivada.

si  $\left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x_A} > 0 \Rightarrow f(x_A)$  es mínimo.

si  $\left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x_A} < 0 \Rightarrow f(x_A)$  es máximo.

Discernir si un pto. es máximo o es mínimo creo q' por el momento no es necesario, sólo importa saber encontrar máximos y mínimos (es decir, todos aquellos pto. donde la derivada es cero).

Entonces:

Para conocer  $d_{\max} = d(\theta^*)$  derivamos  ~~$d(\theta)$~~ .  
 $d(\theta)$  c/r a  $\theta$  .... eh... mala notación, sea  $d(\theta) = D(\theta)$

$$\Rightarrow \left. \frac{d D(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta^*} = 0$$

(condición de máx o min)  
 (cambie el nombre al alcance,  
 para que no se confundieran  
 las letras)

Entonces:

$$\frac{d D(\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left( \underbrace{\frac{V_0^2}{g \cos^2 \alpha}}_{\text{cte.}} (\sin(2\theta) \cos \alpha - 2 \sin^2 \theta \sin \alpha) \right)$$

puede salir  
para afuera

$$\Rightarrow \frac{dD(\theta)}{d\theta} = \frac{V_0^2}{g \cos^2 \alpha} \cdot \frac{d}{d\theta} \left( \sin(2\theta) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 2 \sin^2 \theta \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

$$= \frac{V_0^2}{g \cos^2 \alpha} \cdot \left\{ \cos \alpha \cdot \frac{d(\sin 2\theta)}{d\theta} - 2 \sin \alpha \cdot \frac{d(\sin^2 \theta)}{d\theta} \right\}$$

$\frac{d}{d\theta} \sin(2\theta) = 2 \cos(2\theta)$  ¿por qué? porque vimos en la clase de derivadas que:

$$\frac{d}{d\theta} (b \sin(a\theta)) = b \cdot a \cdot \cos(a\theta)$$

si  $b=1$  y  $a=2$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta} (\sin(2\theta)) = 2 \cos(2\theta) //$$

$\frac{d}{d\theta} (\sin^2 \theta) = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$  ¿por qué? !!!  
por regla de la cadena.

### Regla de la Cadena (Recuerdo)

Sean  $f(y)$  y  $g(x)$  funciones

Entonces:

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

↓  
cadena.

Quizás queda mas claro de la sgte forma:

$g(x) = y$  y  $f(y)$  función

$$\frac{df(y)}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

↓  
 $y=g(x)$



Ejemplo

$$f(y) = y^2$$

$$g(x) = \sin x = y(x)$$

$$\Rightarrow f(y) = \sin^2 x$$

Entonces:

$$\frac{df(y)}{dx} = \underbrace{\frac{df(y)}{dy}}_{2y} \cdot \underbrace{\frac{dy(x)}{dx}}_{\cos x}$$

$\rightarrow$  (1) se hace con la def. de:  
 $\frac{d(at^n)}{dt} = a \cdot n \cdot t^{n-1}$   
 $\rightarrow$  (2) se hace con la def. de:  
 $\frac{d(a \sin(bt))}{dt} = a \cdot b \cos(bt)$

$$\Rightarrow \frac{df(y)}{dx} = 2y \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin(2x) \quad \checkmark \checkmark$$

Continuando...

$$\Rightarrow \frac{dD(\alpha)}{d\alpha} = \frac{V_0^2}{g \cos^2 \alpha} \left\{ \cos \alpha \cdot 2 \cos(2\alpha) - 2 \sin \alpha \sin(2\alpha) \right\}$$

evaluamos en  $\alpha^*$  e igualamos a cero.

$$\Rightarrow \frac{V_0^2}{g \cos^2 \alpha} \left\{ \cos \alpha \cdot 2 \cos(2\alpha^*) - 2 \sin \alpha \cdot \sin(2\alpha^*) \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \cdot 2 \cos(2\alpha^*) - 2 \sin \alpha \cdot \sin(2\alpha^*) = 0$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \cdot \cos(2\alpha^*) = \sin \alpha \cdot \sin(2\alpha^*) \quad (\#)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin(2\alpha^*)}{\cos(2\alpha^*)} \Rightarrow \boxed{\cotan \alpha = \tan(2\alpha^*)}$$

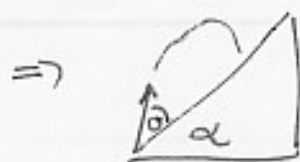
$$\Rightarrow \alpha^* = \frac{\arctan(\cotan \alpha)}{2}$$



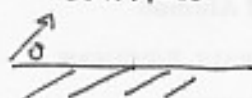
¿Está bueno esto?

Veamos: hacemos tender  $\alpha$  a cero

$$\Rightarrow \alpha = 0$$



"típico lanzamiento  
balístico"



Sabemos o deberíamos  
saber que el ángulo  $\theta^*$   
maximiza en este lanzamiento,  
el alcance es  $\theta^* = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

entonces:

(No es llegar y reemplazar  $\alpha = 0$  en (##))

ya que  $\cotan \alpha = \infty$ )

debemos reemplazar en:

$$\cos \alpha \cdot \cos(2\theta^*) = \sin \alpha \cdot \sin(2\theta^*) \quad \text{si } \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos 0}_1 \cdot \cos(2\theta^*) = \underbrace{\sin 0}_0 \cdot \sin(2\theta^*)$$

1

$$\Rightarrow \cos(2\theta^*) = 0$$

$$\Rightarrow 2\theta^* = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta^* = \frac{\pi}{4}} \text{ ¡está bien!}$$