PAUTA PROBLEMA 3

(i)

$$a_{centripeta} = \frac{V^2}{R}$$

$$F_{gravitaconal} = \frac{GMm}{R^2}$$

Como la órbita es circular,

$$F_{gravitacional} = m \cdot a_{centripeta}$$

despejando,

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

(ii)

$$\vec{l}_{inicial} = R \times \vec{p}_{inicial}$$

$$\vec{l}_{final} = R \times \vec{p}_{final}$$

Por conservación de momento angular,

$$RmV = (1-\alpha)mV_{1-\alpha} + \alpha m V_\alpha$$

V es la velocidad calculada en la parte (i)

pero $V_{1-\alpha} = 0$

entonces,

$$\boxed{V_\alpha = \frac{V}{\alpha}}$$

Imponemos condición de escape: *E=0*

$$E_\alpha = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2} m V_\alpha^{\ 2} = 0$$

reemplazando V_α,

$$\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}\frac{mV^2}{\alpha^2}$$

reemplazando V

$$\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}\frac{mGM}{R\alpha^2}$$

despejando,

$$\boxed{\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(iii)

$$E_{inicial}=-\frac{GMm}{R}+\frac{1}{2}m\frac{GM}{R}=-\frac{GMm}{2R}$$

$$E_{final}=E_\alpha+E_{1-\alpha}$$

pero $E_\alpha=0$ (condición de escape)

entonces,

$$E_{final}=-\frac{GM(1-\alpha)m}{R}$$

la energía de eyección es la diferencia de estas dos energías.

$$E_{eyección}=-\frac{GM(1-\alpha)m}{R}--\frac{GMm}{2R}$$

$$\boxed{E_{eyección}=\frac{GMm}{R}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)=\frac{GMm}{R}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)}$$