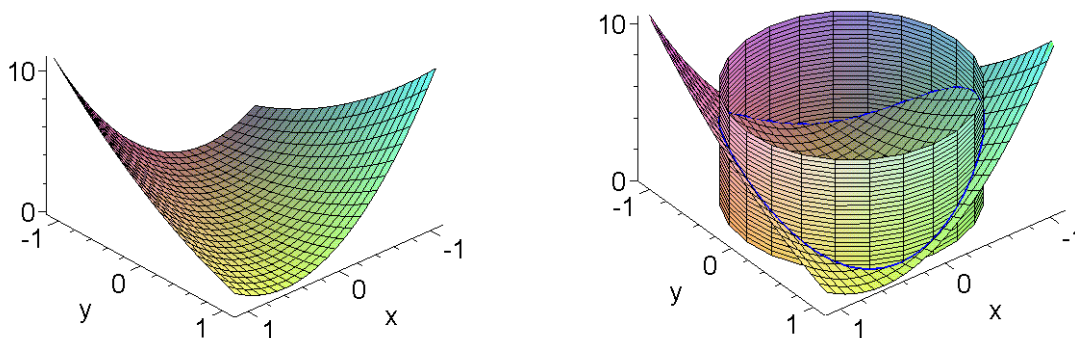


Multiplicadores de Lagrange: uma interpretação geométrica

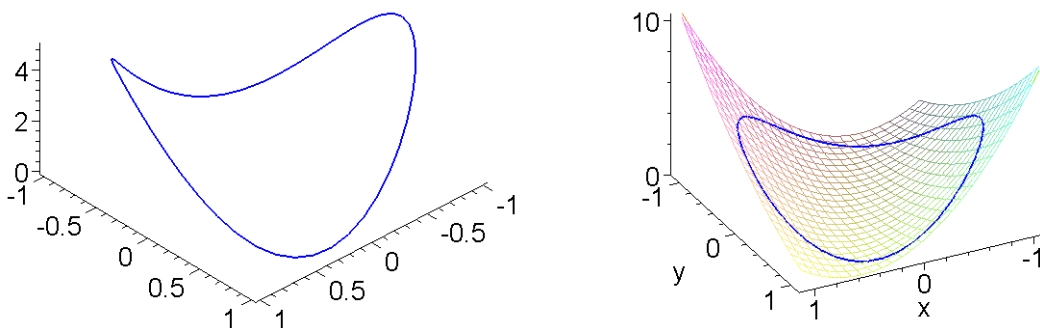
O Problema: Encontrar os máximo e/ou mínimos da função $f(x, y) = y^2 - 4xy + 4x^2$ para pontos (x, y) do círculo $x^2 + y^2 = 1$.

Para ver a geometria da situação, nós vamos plotar as superfícies $f(x, y) = y^2 - 4xy + 4x^2$ e $x^2 + y^2 = 1$. Estamos interessados em determinar os pontos mais altos e os mais baixos da interseção:

Gráfico de f

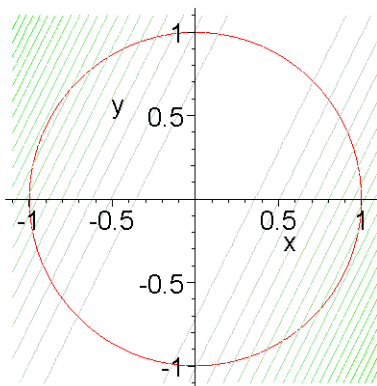


A interseção entre as superfícies é uma curva representada por

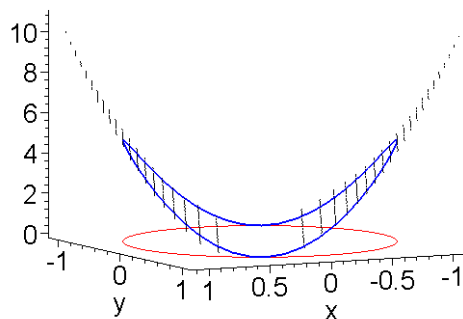
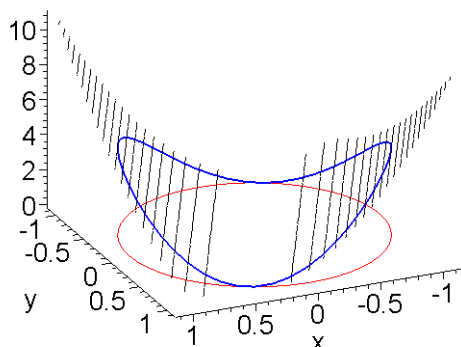


Uma análise do gráfico nos indica que existem dois pontos de máximo e dois pontos de mínimo.

Vamos agora analisar a condição $x^2 + y^2 = 1$ (em vermelho) e sua relação com as curvas de nível da função $f(x, y)$ (em verde).



Na ilustração acima, percebemos que a medida que avaliamos a função em pontos do círculo $x^2 + y^2 = 1$ vamos ultrapassando curvas de nível. Este fato indica que sobre a curva a função está decrescendo ou crescendo. Vejamos essa ilustração no ambiente 3D.



Os pontos $(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$ e $(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$ são detectados quando ao percorrer a curva $x^2 + y^2 = 1$ tangenciamos a curva de **nível 5** da função $f(x,y)$.

Esses pontos são pontos onde a tangente a curva $x^2 + y^2 = 1$ é ortogonal ao gradiente da função $f(x,y)$. Como a curva $x^2 + y^2 = 1$ é a curva de nível zero da função $h(x,y) = x^2 + y^2 = 1$, os pontos acima são pontos onde o **gradiente de $h(x,y)$ é paralelo ao gradiente de $f(x,y)$** .

Os pontos $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ e $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$, são detectados quando a curva $h(x,y) = 0$ corta a curva de nível zero da função. Esta curva de nível zero é a curva $y = 2x$. Quando calculamos o vetor gradiente da função $f(x,y)$ nos pontos dessa curva vemos que o gradiente é nulo, e novamente podemos dizer que **gradiente de $h(x,y)$ é paralelo ao gradiente de $f(x,y)$** .

Exercício: Use o método dos multiplicadores de Lagrange para resolver o problema acima.