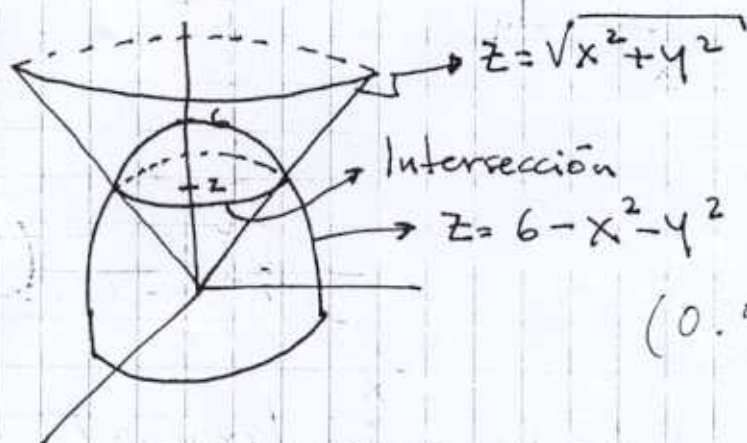


Problema 1:

$$\begin{aligned} a) \quad z &= \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \\ z &= 6 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 6 - z \\ \Rightarrow z^2 &= 6 - z \Rightarrow z^2 + z - 6 = 0 \\ \Rightarrow z &= -3 \vee z = +2 \Rightarrow \boxed{z = 2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 2^2 \text{ círculo de radio } 2} \quad (0.5)$$

$$\Rightarrow \text{Intersección} := \{(x, y, z) / z = 2, x^2 + y^2 = 4\} = I$$



(0.5)

b) Interior: Dado $x_0 \in I$ ¿ $\exists B(x_0, \varepsilon) \subset I$? con $\varepsilon > 0$
Falso, pues $B(x_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^3$ y I son puntos en un plano ($z=2$).

$$\Leftrightarrow \text{Int } I = \emptyset \quad (\text{verbo}) \quad (0.5)$$

Puntos de acumulación: Dado $x_0 \in I$ ¿ $B'(x_0, \delta) \cap I \neq \emptyset$?
 $\forall \delta > 0$

La respuesta es si dicha bola $B'(x_0, \delta) \subseteq \mathbb{R}^3$ y la curva de intersección a pesar de ser plana vive de igual forma en \mathbb{R}^3

$$\Rightarrow B'(x_0, \delta) \cap I \neq \emptyset \quad \forall x_0$$

$$\Rightarrow \text{Puntos de Acumulación de } I = I \quad (0.5)$$

Adherencia $\forall x_0 \in I$ (Puntos de Acum
 $x_0 \in \text{Adh } I$

$$\Rightarrow \text{Adh } I = I \quad \text{0 5)}$$

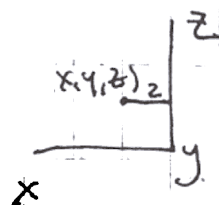
y como $\text{Adh } I = I \Rightarrow I$ es cerrado

Además no es abierto
 todos sus puntos son
 Por otro lado, es claramente
 y como es compacto.

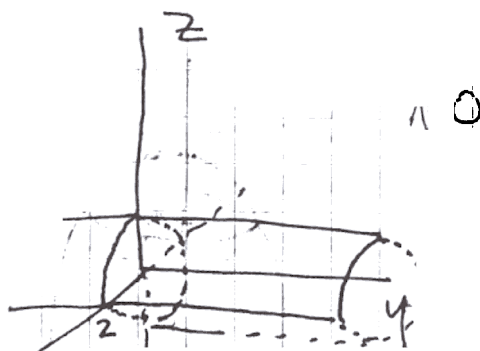
y es compacto

B

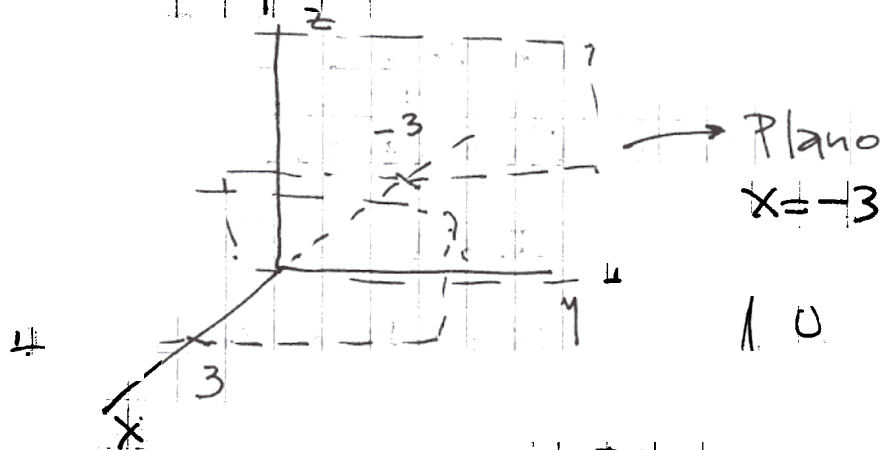
a) Estos son todos los puntos tal que $\sqrt{x^2 + z^2} = 2$



$$\Rightarrow x^2 + z^2 = 4 \text{ a unido}$$



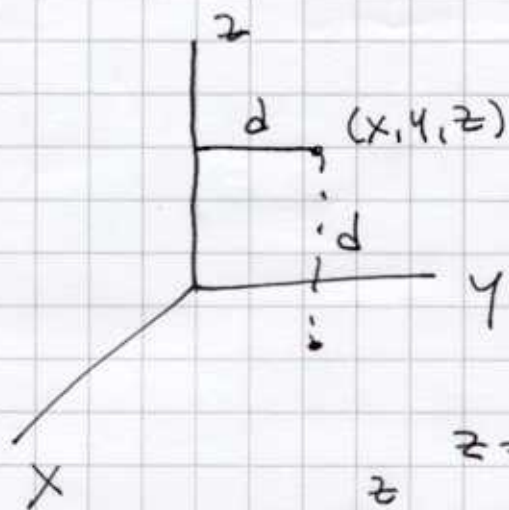
ii) Son todos los puntos $\{(x, y, z) \mid x = \pm 3\}$



\Rightarrow Plano $x = 3$

11

c)

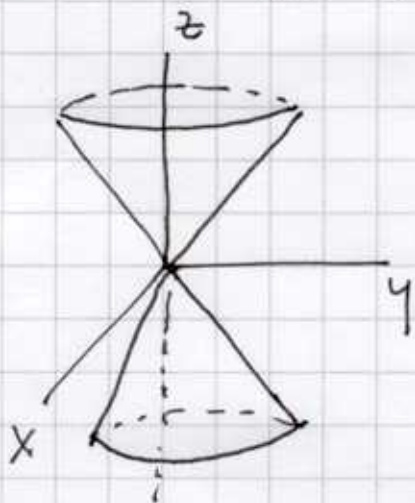


$$z = d$$

$$x^2 + y^2 = d^2$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$$

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{Conos}$$



1.0

$$2-. \quad C[0,1] = \{ f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \}$$

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

$$d_\infty(f,g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

a) Si d es métrica entonces

i) $0 \leq d(x,y) < +\infty$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$d_1(f,g)$ es métrica

i) ✓

ii) $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^1 |g(x) - f(x)| dx = d_1(g,f)$

iii)

$\Rightarrow d_1(f,g) = 0 \Rightarrow \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = 0 \Rightarrow |f(x) - g(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$

\Leftarrow ✓

iv) $|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \quad \bigg/ \int_0^1 dx$
 $d_1(f,h) \leq d_1(f,g) + d_1(g,h)$

$d_\infty(f,g)$ es métrica

i) ✓

ii) $d_\infty(f,g) = \max |f(x) - g(x)| = \max |g(x) - f(x)| = d_\infty(g,f)$

iii)

$\Rightarrow d_\infty(f,g) = 0 \Rightarrow \max |f(x) - g(x)| = 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1] \quad |f(x) - g(x)| = 0$
 $\Rightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x \in [0,1]$

\Leftarrow ✓

iv) $d_\infty(f,h) = \max |f(x) - h(x)| = \max |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)|$
 $\leq \max |f - g| + \max |g - h| \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$

2-

b) PDA $(C[0,1], d_{\infty})$ es completo

Sea $f_n(x)$ una sucesión de Cauchy respecto de la métrica d_{∞}

$\forall x \in [0,1]$ $f_n(x)$ es de Cauchy en \mathbb{R}

$\forall x \in [0,1]$ $f_n(x)$ converge

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

Probemos que $f(x)$ es continua en $[0,1]$

PDA $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 / |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \underbrace{\epsilon_1}_{f_n(x) \rightarrow f(x)} + \underbrace{\epsilon_2}_{f_n \in C[0,1]} + \underbrace{\epsilon_3}_{f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)} < \epsilon. \end{aligned}$$

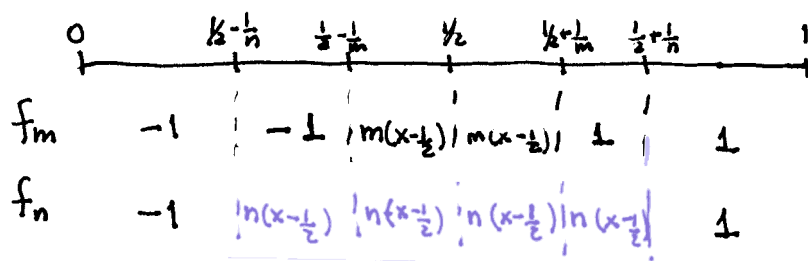
$\Rightarrow f(x)$ es continua en $x_0, x_0 \in [0,1]$

$\Rightarrow (C[0,1], d_{\infty})$ es completo

$$c) f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \quad \textcircled{a} \\ n(x - \frac{1}{2}) & x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \quad \textcircled{b} \\ 1 & x \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \quad \textcircled{c} \end{cases}$$

claro que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} -1 & x < \frac{1}{2} \\ 0 & x = \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases} \notin C[0,1]$

Veamos si $f_n(x)$ es de Cauchy sin perder generalidad supongamos que $m > n \Rightarrow \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$



c) Luego

$$\begin{aligned}
 d_1(f_m, f_n) &= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |1-(-1)| dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}} |1-n(x-\frac{1}{2})| dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} (m-n)(x-\frac{1}{2}) dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |1-n(x-\frac{1}{2})| dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}^1 |1-1| dx \\
 &= \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}} (\frac{1}{2}+nx) dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} (m-n)(x-\frac{1}{2}) dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (\frac{3}{2}-nx) dx \\
 &= \frac{1}{2}x + \frac{n}{2}x^2 \Big|_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}} + (m-n)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) \Big|_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}} + \frac{3}{2}x - \frac{n}{2}x^2 \Big|_{\frac{1}{2}+\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) + \frac{n}{2}\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)^2\right) + \frac{(m-n)}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m}\right)^2 - \frac{2}{m}\right] + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) - \frac{n}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\right)^2\right] \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) + \frac{n}{2}\left(-\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{(m-n)}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} - \frac{2}{m}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \\
 &= -\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{n}{m^2} - \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{2}{m} + \frac{n}{m^2}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d_1(f_m, f_n) = 0 \Rightarrow f_n(x) \text{ es de Cauchy cr a } d_1$$

Como $f(x) \notin C[0,1] \Rightarrow (C[0,1], d_1)$ no es completo.

Pregunta 3:

i) Elijiendo el camino $y = x$

se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{2x^4} = 0$$

Pero si tomamos $y=0$ y $x=x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow f$ no es continua en $(0,0)$

Sin embargo, es continua $\forall (x,y) \neq (0,0)$ por algebra de funciones continuas.

ii) Necesitamos $x-y+1 > 0 \Rightarrow y < x+1$
 \Rightarrow será continua en D .

iii) Notemos que $f(x,y) = \frac{y^2 x^3}{x^4 + y^4} + 1$

Por lo tanto el candidato a límite es 1.
Notemos también que si $(x,y) \neq (0,0)$ f es continua por algebra de funciones continuas.

Pdg: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ ~~tal~~ $\|(x,y)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y) - 1\| < \epsilon$

$$\text{Sea } \begin{cases} x = p \cos \theta \\ y = p \sin \theta \end{cases} \quad f(x,y) = F(p,\theta) = \frac{p^2 \sin^2 \theta p^3 \cos^3 \theta}{p^4 \cos^4 \theta + p^4 \sin^4 \theta} + 1$$

$$\Rightarrow F(p,\theta) = p \left[\frac{\sin^2 \theta \cos^3 \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} \right] + 1$$

Pdg: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad 0 < p < \delta \Rightarrow |F(p,\theta) - 1| \leq \epsilon \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$

$$|F(p,\theta) - 1| = \left| \frac{p \sin^2 \theta \cos^3 \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta} \right| \leq \frac{p}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta}$$

Además, como $T(\theta) = \sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ es
continua en el compacto $[0, 2\pi] \Rightarrow \exists \theta_0 \in [0, 2\pi]$
tal que $T(\theta_0) = \min \{T(\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\} > 0$

$$\Rightarrow |F(p, \theta) - 1| \leq \frac{f}{T(\theta_0)}$$

De donde se deduce que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1$$

$\Rightarrow f$ es continua en $(0,0)$

iv) Sea $x = y^3$:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 |x^3|^k}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-4+3k} \neq 0$$

$$\text{si } -4+3k \leq 0 \Rightarrow k \leq \frac{3}{4}$$

\Rightarrow si $k \leq \frac{3}{4}$ f es discontinua en $(0,0)$

Si $k > \frac{3}{4}$ f es continua en $(0,0)$.

En efecto,

$$\text{como } |x| \leq \sqrt[6]{x^6 + y^2} \quad |y| \leq \sqrt[2]{x^6 + y^2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x^2 |y|^k}{x^6 + y^2} \right| \leq \frac{(x^6 + y^2)^{1/3} (x^6 + y^2)^{k/2}}{x^6 + y^2} = |x^6 + y^2|^{\frac{k}{2} - \frac{2}{3}} < \varepsilon$$

$$\text{si } \frac{k}{2} - \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow k > \frac{4}{3}$$

v) Se sabe que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \exists \delta^* > 0 \quad / \quad \left| \frac{1 - \cos z}{z^2} \right| \leq 1 \quad \text{si } |z| < \delta^*$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x \cos y - y \cos x - x + y}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x^2 y \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) - x y^2 \left(\frac{1 - \cos y}{y^2} \right)}{x^2 + y^2} \right|$$

$$\leq \frac{x^2 |y| + y^2 |x|}{x^2 + y^2} < \|x\|_\infty < \delta$$

Como $\|x\|_\infty < \delta^* \Rightarrow |x| < \delta^*$
 $|y| < \delta^*$ Basta elegir
 $\delta \leq \min \{ \delta^*, \varepsilon \}$

$\Rightarrow h$ es continua en $(0,0)$ y en todo su dominio.

b) El numerador es divisible por el denominador, $f(x,y)$ coincide con una función polinómica para $x \neq y, x \neq a, y \neq a$, luego tiene límite en todo punto.

Sea $y = 2a - x$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - 2a + x)a^n + (a - x)(2a - x)^n - (a - 2a + x)x^n}{(x - 2a + x)(a - x)(a - 2a + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(2x - 2a)a^n + (a - x)(2a - x)^n - (x - a)x^n}{(2x - 2a)(a - x)(x - a)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a) [2a^n - (2a-x)^n - x^n]}{2(x-a)^2(a-x)}$$

Luego, por L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{+n(2a-x)^{n-1} - nx^{n-1}}{-2 \cdot 2(x-a)}$$

Nuevamente L'Hopital.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{-n(n-1)(2a-x)^{n-2} - n(n-1)x^{n-2}}{-4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \% = \frac{-n(n-1)a^{n-2} - n(n-1)a^{n-2}}{-4}$$

$$= \frac{-2n(n-1)a^{n-2}}{-4} = \frac{n(n-1)a^{n-2}}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \frac{(x-y)a^n + (a-x)y^n - (a-y)x^n}{(x-y)(a-x)(a-y)} = \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}$$

