UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MAT.

CURSO : MA22A-01 CALCULO EN VARIAS VARIABLES
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR
FECHA: 02 / 10 / 2002 TIEMPO: 3 HORAS

CONTROL #2

1.-

a) Sea $g : R^n \to R$ definida por: $g(x) = \dfrac{x^t A x}{x^t x}$ donde A es una matriz cualquiera de nxn con coeficientes reales y $x \neq 0$.

Si x_0 verifica $\nabla g(x_0) = 0$, entonces demuestre que:

$(A + A^t)x_0 = 2g(x_0)x_0$. Interprete. ¿Qué pasa si A es simétrica?

b) Sea $f : R^n \to R$ definida por:

$f(x) = \|Ax - b\|_2^2$ donde A es una matriz de mxn y $b \in R^m$.

i) Demuestre que f es diferenciable.
ii) Encuentre $\nabla f(x)$.

2.- Se dice que $F : A \subset R^n \to R^n$ es una función potencial o campo gradiente vectorial si existe $f : A \subset R^n \to R$ con segundas derivadas parciales contínuas tal que $F(x) = \nabla f(x)$.

Por otro lado, se dice que la función o camino $\boldsymbol{f} : B \subset R \to R^n$ es una línea de flujo de F si $J_{\boldsymbol{f}}(t) = \boldsymbol{f}'(t) = F(\boldsymbol{f}(t))$.

Se pide:

a) Muestre que $F : R^2 \to R^2$ definida por $F(x, y) = (-y, x)$ no es un campo gradiente vectorial.
b) Muestre que la fuerza electrostática actuando sobre una carga eléctrica q en una posición $x \in R^3$ debido a una carga Q en el origen (Ley de Coulomb), dada por:

$F(x) = \dfrac{\varepsilon Qq}{\|x\|_2^3} x$, <u>es un potencial si</u> $f(x) = -\dfrac{\varepsilon Qq}{\|x\|_2}$.

c) Considere $F : R^2 \to R^2$ definida por $F(x, y) = (x, -y)$. Determine $\boldsymbol{f}_1(t)$ y $\boldsymbol{f}_2(t)$ tal que $\boldsymbol{f}(t) = (\boldsymbol{f}_1(t), \boldsymbol{f}_2(t))$ es una línea de flujo de F. ¿Qué curva describe el camino $\boldsymbol{f}(t)$. ?

Dibuje F(x,y) sobre el camino que pasa por (1,1).

3.-Sea $\Omega \subset R^n$ un abierto y $f : \Omega \to R$. La siguiente propiedad, que se le pide probar, es otra caracterización de la diferenciabilidad para funciones escalares.

Se pide lo siguiente:

a) Si $f : \Omega \to R$ es diferenciable en $x_0 \in \Omega$ demuestre que existe una función $G : \Omega \to R^n$ contínua en x_0, tal que:

$f(x) - f(x_0) = \langle G(x), x - x_0 \rangle$. Determine G.

Indicación: Recuerde que $f : \Omega \to R$ es diferenciable en $x_0 \in \Omega$, si :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \boldsymbol{e}(h)$$

donde $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\boldsymbol{e}(h)}{\|h\|_2} = 0$

Además use el cambio de variable $x = x_0 + h$ y note que $\langle x - x_0, x - x_0 \rangle = \|x - x_0\|_2^2$

b) Suponga ahora que existe $G : \Omega \to R^n$ contínua en x_0, tal que:

$f(x) - f(x_0) = \langle G(x), x - x_0 \rangle$.

Pruebe que $f : \Omega \to R$ es diferenciable en $x_0 \in \Omega$ y determine $\nabla f(x_0)$.

Indicación:

La siguiente igualdad puede ser útil:

$$f(x) - f(x_0) = \|x - x_0\| \langle G(x) - G(x_0), \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \rangle + \langle G(x_0), x - x_0 \rangle$$