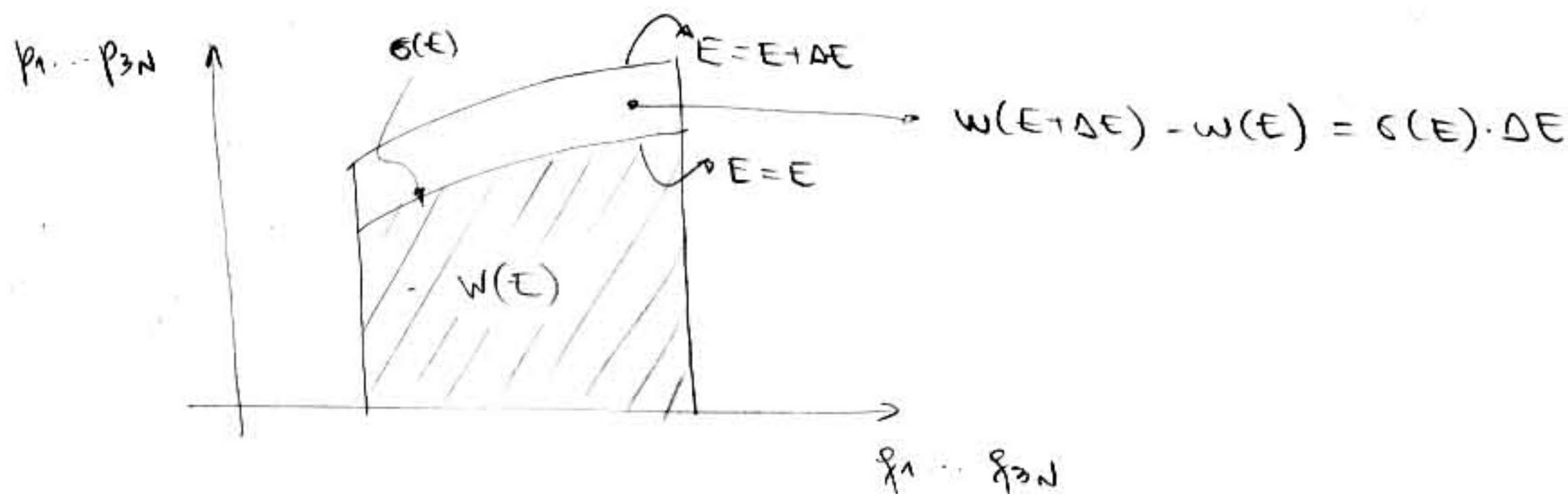


- 1) Nos interesa el volumen que ocupan los microestados entre E y $E + \Delta E$ en V .



a) Si: $\Delta W = W(E + \Delta E) - W(E) = \sigma(E) \Delta E$ y $\Omega(E, V, N) = \sigma(E, V, N) / \sigma_0$
 pero $\sigma(E) = \frac{\Delta W}{\Delta E} \Rightarrow \boxed{\Omega(E, V, N) = \frac{1}{\sigma_0} \left. \frac{\partial W}{\partial E} \right|_{V, N}}$ Si tomamos el lím $\Delta E \rightarrow 0$

b) Como $W(E, V, N) = \int_{H(\{q_i, p_i\}_{i=1}^{3N}) < E} d^{3N}q d^{3N}p$ y $H(\{q_i, p_i\}_{i=1}^{3N}) = \sum_{i=1}^{3N} p_i^2 / 2m$,
 no impone ninguna restricción sobre q_i

Luego $W(E, V, N) = \int_V d^{3N}q \int_{\sum_{i=1}^{3N} p_i^2 < 2mE} d^{3N}p$

$= V^N \int_{\sum p_i^2 < 2mE} d^{3N}p = V^N V_{3N}(\sqrt{2mE})$

volumen de una esfera en $3N$ dimensiones de radio $\sqrt{2mE}$

c) Nos interesa calcular $S(E, V, N) = k \ln \Omega(E, V, N)$

donde $\Omega(E, V, N) = \frac{1}{\sigma_0} \left. \frac{\partial W}{\partial E} \right|_{V, N}$ y $W(E, V, N) = V^N V_{3N}(\sqrt{2mE}) \simeq \frac{V^N \pi^{3N/2} (2mE)^{3N/2}}{\frac{3N}{2} (\frac{3N}{2} - 1)!}$

$\Rightarrow \Omega = \frac{1}{\sigma_0} \frac{V^N \pi^{3N/2} (2mE)^{3N/2}}{\frac{3N}{2} (\frac{3N}{2} - 1)!} \cdot \frac{1}{E} \Rightarrow S = k \ln \left(\frac{1}{\sigma_0} \frac{V^N (2mE)^{3N/2}}{(\frac{3N}{2} - 1)! E} \right)$

$$\begin{aligned} \rightarrow S &= k \left\{ \ln \left(\left(\frac{V}{\sigma_0^{1/N}} \right)^N (2\pi m E)^{3N/2} \right) - \ln E - \ln \left(\frac{3N-1}{2}! \right) \right\} \\ &\approx Nk \left\{ \ln \left(\frac{V}{\sigma_0^{1/N}} (2\pi m E)^{3/2} \right) - \cancel{\frac{\ln E}{N}} - \frac{1}{N} \left(\frac{3N}{2} \ln \frac{3N}{2} - \frac{3N}{2} \right) \right\} \\ &= Nk \left\{ \ln \left(\frac{V}{\sigma_0^{1/N}} (2\pi m E)^{3/2} \right) - \ln \left(\frac{3N}{2} \right)^{3/2} + \frac{3}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$S = Nk \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{V}{\sigma_0^{1/N}} \left(\frac{4\pi m E}{3N} \right)^{3/2} \right) \right]$$

Notar que $\sigma_0^{1/N} \sim 1$
(en realidad $\sigma_0^{1/N}$ es una constante independiente de N)

d) Como $\beta = \frac{1}{kT} = \frac{2 \ln \Omega}{\partial E} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$

pero $S = Nk \left[\text{cte} + \frac{3}{2} \ln E \right] \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{3Nk}{2E} \Rightarrow \boxed{E = \frac{3}{2} NkT}$

Además $dE = TdS - PdV \Rightarrow P = - \frac{dE}{dV} \Big|_S$

pero $\left(\frac{S}{Nk} - \text{cte}' - \ln V \right) \cdot \frac{2}{3} = E \Rightarrow \frac{-dE}{dV} = - \underbrace{e^{\frac{3}{2} E}}_E \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{V} \Rightarrow P = + \frac{2}{3} \frac{E}{V}$

$\Rightarrow PV = \frac{2}{3} E = NkT \Rightarrow \boxed{PV = NkT}$

e) Si S fuera extensiva $S(N_1+N_2, V_1+V_2, E_1+E_2) = S(N_1, V_1, E_1) + S(N_2, V_2, E_2)$

$\Rightarrow S(\lambda N, \lambda V, \lambda E) = \lambda S(N, V, E)$

pero $S(\lambda N, \lambda V, \lambda E) = \lambda Nk \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{\lambda V}{\sigma_0^{1/N}} \left(\frac{4\pi m \lambda E}{3\lambda N} \right)^{3/2} \right) \right]$

acá hay un problema

$\therefore S$ no es una cantidad extensiva.

(en realidad N_1, V_1, E_1 y N_2, V_2, E_2 deben tener las mismas cantidades intensivas) $\Rightarrow T$ y P iguales $\Rightarrow \frac{E}{N} = \text{cte}$
 $\frac{N}{V} = \text{cte}'$

2)

T, p N_A, V_A	T, p N_B, V_B
----------------------	----------------------

a) Como la energía del gas no depende del volumen de gas, sino que sólo de T y N , la temperatura no cambia

$$E = (N_1 + N_2) k T_f = N_1 k T + N_2 k T = E_1 + E_2 \Rightarrow \boxed{T_f = T}$$

$$\text{Además, } p \cdot V = N k T \Rightarrow p_f (V_1 + V_2) = (N_1 + N_2) k T$$

$$\text{y } p \cdot V_1 = N_1 k T \quad \text{y } p \cdot V_2 = N_2 k T \Rightarrow p_f (V_1 + V_2) = p (V_1 + V_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_f = p}$$

$$b) \Delta S = S_{\text{final}} - S_{\text{inicial}} \quad \text{y} \quad S = N k \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{V}{\sigma_0^{1/N}} (2\pi m k T)^{3/2} \right) \right]$$

$$= S(N_1, V_1 + V_2, T) + S(N_2, V_1 + V_2, T) - S(N_1, V_1, T) - S(N_2, V_2, T)$$

$$= (N_1 + N_2) k \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{\sigma_0^{1/N}} (2\pi m k T)^{3/2} \right) \right] - N_1 k \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{V_1}{\sigma_0^{1/N}} (2\pi m k T)^{3/2} \right) \right] \\ - N_2 k \left[\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{V_2}{\sigma_0^{1/N}} (2\pi m k T)^{3/2} \right) \right]$$

$$= (N_1 + N_2) k \ln(V_1 + V_2) - N_1 k \ln V_1 - N_2 k \ln V_2$$

$$\boxed{\Delta S = N_A k \ln \left(\frac{V_A + V_B}{V_A} \right) + N_B k \ln \left(\frac{V_A + V_B}{V_B} \right)}$$

c) El proceso es irreversible, ya q. siempre se debe cumplir $\Delta S > 0$, luego para revertir la situación necesariamente se debe cumplir $\Delta S < 0$

$$d) \text{ Ahora } \Delta S = S(N_1 + N_2, V_1 + V_2, T) - S(N_1, V_1, T) - S(N_2, V_2, T)$$

$$\text{pero } S(N_1 + N_2, V_1 + V_2, T) = S(N_1, V_1 + V_2, T) + S(N_2, V_1 + V_2, T)$$

Luego se obtiene el mismo resultado.

3)

- a) La idea es descontar los casos equivalentes, esto es, dividir por el n° de permutaciones de las partículas: $N!$

Es decir: $\Omega'(E, V, N) = \frac{\Omega(E, V, N)}{N!}$

$$\Rightarrow \ln \Omega' \approx \ln \Omega - N \ln N + N$$

$$\Rightarrow S' = S - Nk[\ln N - 1]$$

$$= Nk \left[\frac{5}{2} + \ln \left(\frac{V}{\sigma_0^{1/N}} \left(\frac{4\pi m E}{3N} \right)^{3/2} \right) \right] - Nk \ln N + Nk$$

$$\boxed{S' = Nk \left[\frac{5}{2} + \ln \left(\frac{1}{\sigma_0^{1/N}} \frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m E}{3N} \right)^{3/2} \right) \right]}$$

b) Ahora $S'(\lambda N, \lambda V, \lambda E) = \lambda Nk \left[\frac{5}{2} + \ln \left(\frac{1}{\sigma_0^{1/\lambda N}} \frac{\lambda V}{\lambda N} \left(\frac{4\pi m \lambda E}{3\lambda N} \right)^{3/2} \right) \right]$
 $= \lambda S'(N, V, E)$

- c) Ahora la única diferencia con el caso anterior es un término $-(N_1 + N_2)k \ln(N_1 + N_2) - (-N_1k \ln N_1 - N_2k \ln N_2)$

$$\Rightarrow \Delta S = N_A k \ln \left(\frac{V_A + V_B}{V_A} \frac{N_A}{N_A + N_B} \right) + N_B k \ln \left(\frac{V_A + V_B}{V_B} \frac{N_B}{N_A + N_B} \right)$$

pero $\frac{N_A}{V_A} = \frac{N_B}{V_B} = \frac{N_A + N_B}{V_A + V_B}$, ya que P y T no cambian

$$\Rightarrow \Delta S = N_A k \ln(1) + N_B k \ln(1) = 0$$