

CURSO : MA22A CALCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR

FECHA: 07 / 12 / 2002

TIEMPO: 3 HORAS

EXAMEN

1.-

a) Usando coordenadas cilíndricas, encuentre el volumen V y la posición del centroide $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de la región delimitada por $x > 0$ $z > 0$ $x^2 + y^2 < 9$ $z < y$. Suponga que la densidad es constante e igual a 1.

b) Usando coordenadas polares, calcule las siguientes integrales sobre el semidisco definido por $x^2 + y^2 < 1$ $y > 0$

i) $\iint y dA$

ii) $\iint xy dA$

iii) $\iint y^2 dA$

iv) $\iint x^2 y dA$

v) $\iint (x^2 + y^2) y dA$

2.-

a) El prisma rectangular de la figura tiene una base rectangular y la parte superior es una porción del plano $z = ax + by + c$. Los cuatro ejes verticales tienen longitudes diferentes. Muestre usando integrales múltiples que el volumen del prisma es igual al área de la base multiplicado por el promedio de las longitudes de los ejes verticales.

b) Sea $q(x)$ una forma cuadrática definida positiva en R^n con matriz $A = (a_{ij})$ y sea $S = \{x \in R^n / q(x) = 1\}$ Determine los extremos (máximos y mínimos) de la función $f(x) = \|x\|_2^2$ sobre S . Aplique lo anterior a la forma cuadrática definida por: $q(x, y, z) = 7x^2 + 4(y^2 + z^2) + 4xy - 4xz - 2yz$

3.- Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, g de clase C^2 y f una función de clase C^2 sobre el abierto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$ tal que

$$f(x, y) = g(xy, \frac{x}{y})$$

Si f verifica la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$, entonces muestre que g verifica la siguiente

ecuación:
$$(uv + \frac{u}{v}) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2(1 - v^2) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{v}{u}(1 + v^2) \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + 2 \frac{v^2}{u} \frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

donde $u = xy$ $v = \frac{x}{y}$