UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MAT.

CURSO : MA22A-01 CALCULO EN VARIAS VARIABLES
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR
FECHA: 06 / 11 / 2002 TIEMPO: 3 HORAS

CONTROL #3

1.-

a) Determine la función $\phi : R \to R$ dos veces diferenciable tal que la función $f : U \subseteq R^2 \to R$ definida por $f(x,y) = \phi(x^2 + y^2)$ satisface la ecuación $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3y\dfrac{\partial f}{\partial x} = xyf(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$

con $\phi(0) = 0$ $\phi'(0) = 1$

b) Calcular los extremos de la función $f(x,y) = 2x + y^2$ sobre el conjunto:
$K = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 2; y^2 - x \geq 0\}$
Primero justifique que el problema tiene solución y luego encuéntrelas.

2.-

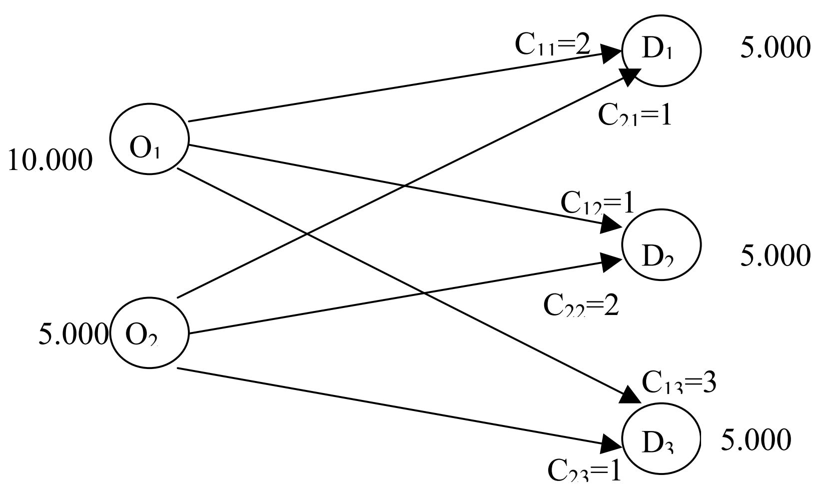
a) Determinar el conjunto donde son convexas las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = (x+y)^p$ donde $p \geq 1$.

ii) $g(x,y) = e^{xy}$

b) Calcule las dimensiones de una lata cilíndrica que pueda contener un litro de agua y que necesite para su construcción la menor cantidad de metal.

c) Consideremos una industria que tiene dos fábricas, una en la ciudad O_1 y otra en la ciudad O_2. Ella produce un bien que es consumido en D_1, D_2 y D_3. La oferta en O_1 es de 10.000 unidades diarias, mientras que la oferta en O_2 es de 5.000 unidades. La demanda diaria en todos los centros de consumo es de 5.000 unidades.



Los costos de trasportes (peajes, impuestos, pago de camiones) están dados por el vector c, donde c_{ij} es el costo de transportar una unidad de producción desde la fábrica i a la ciudad j.

El objetivo del industrial es determinar la cantidad de producto que debe enviar desde cada fábrica a cada centro de demanda, minimizando los costos de transporte. Plantee el problema de optimización que permite resolver el problema.

3.- Sea $F : R^n \to R^n$ un campo o función vectorial. A continuación se le entregarán algunas definiciones y se le pedirá demostrar algunas propiedades y finalmente desarrollar un ejemplo:

a) Se dice que $\phi : R \to R^n$ es una línea de flujo de F si $J_\phi(t) = \phi`(t) = F(\phi(t))$.

b) Para $F : R^n \to R^n$ tal que $F = (F_1,...,F_n)$ se define la divergencia de F como:

$$divF = \langle \nabla, F \rangle = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

c) Para $F : R^3 \to R^3$ se define el rotor de F como :

$$rotF = \nabla xF = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}).$$

donde $F = (F_1, F_2, F_3)$

d) Para $f : A \subset R^n \to R$ se tiene que :

$$div(\nabla f) = \langle \nabla, \nabla f \rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial_n^2} = \Delta f$$ (Laplaciano de f).

Se pide:

a) Sean $F : A \subset R^n \to R^n$ y $f : A \subset R^n \to R$ continuamente diferenciables. Demuestre que: $div(fF) = fdivF + \langle F, \nabla f \rangle$.

b) Sean $F : A \subset R^3 \to R^3$ y $G : A \subset R^3 \to R^3$ funciones continuamente diferenciables. Demuestre que:

$$div(FxG) = \langle G, rotF \rangle - \langle F, rotG \rangle$$

c) Sea $F : A \subset R^3 \to R^3$ una función dos veces continuamente diferenciables. Demuestre que $div(rotF) = 0$

d) Sean $f : A \subset R^n \to R$ y $g : A \subset R^n \to R$ funciones dos veces continuamente diferenciables. Demuestre que:
$div(f\nabla g - g\nabla f) = f\Delta g - g\Delta f$ y $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$.

e) Considere el campo vectorial: $F(x, y, z) = (2x, z, -z^2)$

Se pide:

i) Sea $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$ una línea de flujo de F. Demuestre que $\phi_1, \phi_2 y \phi_3$ satisfacen sendas ecuaciones diferenciales ordinarias. Encuéntrelas y determine $\phi_1, \phi_2 y \phi_3$ explícitamente.

ii) Muestre que $\phi(t) = (e^{2t}, \log t, 1/t)$ donde $t > 0$ es una solución particular.

iii) Determine $divF$ y $rotF$.