

CURSO : MA22A-02 CALCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR

FECHA: 12 / 06 / 2002

TIEMPO: 3 HORAS

CONTROL #3

1.-

- a) Sea $g : R^n \rightarrow R$ definida por: $g(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}$ con A simétrica real, $x \neq 0$

Muestre que si \hat{x} es punto crítico de $g(x)$, entonces $A\hat{x} = g(\hat{x})\hat{x}$. Interprete.

- b) Sea $f : \Omega \subset R^2 \rightarrow R$, de clase $C^2(\Omega)$ con Ω abierto. Se dice que f es armónica en Ω , si $\Delta f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega$. Demuestre que si f es armónica en Ω y tiene máximo o mínimo local en $(x_0, y_0) \in \Omega$, entonces todas las derivadas parciales de segundo orden de f en (x_0, y_0) se anulan.
- c) Sea $f : \Omega \subset R^2 \rightarrow R^2$ una función de clase $C^2(\Omega)$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad u, v : \Omega \subset R^2 \rightarrow R$$

Sean además los conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \Omega / u(x, y) = C_1\} \\ B &= \{(x, y) \in \Omega / v(x, y) = C_2\} \end{aligned} \quad \text{con } C_1, C_2 \in R$$

Pruebe que si $(x_0, y_0) \in A \cap B$ y $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

y además: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{en } \Omega$

entonces las curvas de nivel de u y v son ortogonales en (x_0, y_0) .

2.-

- a) Determinar los máximos y mínimos globales (si existen) de la función $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ en el conjunto $K = [0, 1] \times [0, 1]$
- b) Sea $f : \Omega \subset R^2 \rightarrow R$ y $x_0 \in \Omega$, f continua y no negativa en R^2 que tiende a 0 en el infinito. Demuestre que tiene un máximo global.
- c) Sea $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ con $a > 0$ $b > 0$. Calcular los máximos y mínimos globales. Indicación: Analice los casos $a=b$, $a < b$, $a > b$ y aplique la parte b) cuando corresponda.

3.- Considere $f : R^2 \rightarrow R$, de clase $C^2(R^2)$. Demuestre que la ecuación (*) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (y > 0)$ se

transforma en $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$ (**) bajo el cambio de variables $u = x - 2\sqrt{y}$ $v = x + 2\sqrt{y}$

¿Dónde están evaluadas las derivadas parciales?

Resuelva la ecuación (*), para ello resuelva la ecuación (**) en las variables u y v encontrando una solución general y una solución particular no nula ni polinomio. Escriba la solución en términos de las variables x y y .