

CURSO : MA22A-02 CALCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR

FECHA: 10 / 04 / 2001

TIEMPO: 3 HORAS

CONTROL #1

1.-

a) Sea (X, d) un espacio métrico.

i) Pruebe que $\forall x, y, z, w \in X$,

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w).$$

ii) Deduzca que $\forall x, y, z \in X$

$$|d(x, y) - d(z, y)| \leq d(x, z).$$

b) Sea (X, d) un espacio métrico y d^* definida por:

$$d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} \quad \forall x, y \in X$$

i) Muestre que d^* es métrica.

ii) Sea $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X y sea $a \in X$. Pruebe que $x_k \rightarrow a$ en (X, d) ssi $x_k \rightarrow a$ en (X, d^*) .

2.-

I.-

a) Dada una norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n y una matriz no singular P de $n \times n$, demuestre que la función $\|x\|_p = \|Px\|$ es norma en \mathbb{R}^n

b) Demuestre que en \mathbb{R}^2 , la función $\|x\|_e = \left[\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2 \right]^{1/2}$ es una norma. Haga un dibujo de $B((0,0);1)$.

II.-

Sean $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n y F un s.e.v de E .

a) Demostrar que:

$$B[0,1] \subseteq F \Rightarrow F = E$$

Indicación: Suponga que $F \subsetneq E \Rightarrow \exists x_0 \in E, x_0 \neq 0$ con $x_0 \notin F$

b) Demostrar

i) $rB[0,1] = B[0,r]$ con $r > 0$

ii) $B[a,r] + b = B[a+b,r]$ con $r > 0$

donde $rA = \{ra / a \in A\}$ $A + b = \{a + b / a \in A\}$

Indicación: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

3.- Considerar en el espacio $C([0,1])$ la métrica:

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

Analizaremos la completitud del espacio. Para ello considere la siguiente sucesión:

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ kx & \text{si } 0 < x < \frac{1}{k} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- Determine el límite puntual de la sucesión
 - Demuestre que $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.
 - ¿ $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ Converge en $C([0,1])$? Es $C([0,1])$ con la métrica $d(f, g)$ completo?. Justifique
 - ¿Es $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en el espacio $C([0,1])$ con la métrica uniforme
- $d'(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$? Justifique