

Ayudantía N°2

Matemática para la Gestión II

Ayudante Paolo Díaz Nahuelñir
Profesora Luz González

Martes 13 de Abril de 2021

Contenidos

1. Recordar

2. Propiedades de equivalencias Lógicas (Simplificación)

3. Ejercicios propuestos: Guía N°2 y 3

4. Cuantificadores

5. Ejercicios Propuestos

1. ¿Qué es la Lógica?

Lógica como Ciencia

Estudio de las leyes del Pensamiento, que tiene por objetivo estudiar la relación que el Pensamiento tiene con la Verdad. Es decir, estudia la relación argumental que tiene una determinada proposición para que una comunidad científica lo certifique como conocimiento valido (Ley).

¿Qué es un Pensamiento? ¿Qué es la Verdad?

¿Sólo la ciencia es portadora de Verdad?

¿Qué pasa con los conocimientos no científicos?

*Aportes para la Epistemología de nuestros conocimientos, contribuyendo con instrumentos cognitivos y metodológicos



1. ¿Qué es la Lógica?

Lógica Matemática

La Lógica Matemática usa su propio lenguaje, lenguaje matemático, el cual posee una sola interpretación y significado, de tal forma, que sus conclusiones se dicen exactas (ciencias exactas).

En este sentido, una PROPOSICIÓN matemática sólo tiene dos posibles alternativas; Verdadera o Falsa.

Las operaciones Lógicas Fundamentales se pueden resumir como:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \text{ ó } q$ <i>(Disyunción Excluyente)</i>	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

2. Propiedades Lógicas

1. Ley del 3er Excluido

1. $p \vee \sim p \equiv V$

Ejemplo: $(p \rightarrow q) \vee \sim(p \rightarrow q)$
 V

2. $p \wedge \sim p \equiv F$

Ejemplo: $(p \rightarrow q) \wedge \sim(p \rightarrow q)$
 F

2. Ley de Idempotencia

1. $p \vee p \equiv p$

2. $p \wedge p \equiv p$

Dependen del valor de Verdad de P

$$\frac{(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)}{(\sim p \wedge q)}$$

3. Ley de Involución o Doble Negación

1. $\sim(\sim p) \equiv p$

$$\frac{\sim[\underbrace{\sim(\sim p \wedge q)}_{(\sim p \wedge q)}]}{(\sim p \wedge q)}$$

2. Propiedades Lógicas

4. Ley Conmutativa

Ejemplos

$$1. p \vee q \equiv q \vee p \longrightarrow p \vee (q \rightarrow r) \equiv (q \rightarrow r) \vee p$$

$$2. p \wedge q \equiv q \wedge p \longrightarrow p \wedge (q \rightarrow r) \equiv (q \rightarrow r) \wedge p$$

5. Ley Asociativa

$$1. p \vee q \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$2. p \wedge q \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

6. Ley Distributiva

$$1. p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$2. p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

2. Propiedades Lógicas

7. Ley de Identidad

$$\begin{aligned} 1. \quad & p \wedge V \equiv p \\ & p \wedge F \equiv F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & p \vee V \equiv V \\ & p \vee F \equiv p \end{aligned}$$

8. Ley de Implicancia y Doble Implicancia

$$1. \quad (p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

$$2. \quad p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

9. Ley de Morgan

$$1. \quad \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$2. \quad \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

2. Propiedades Lógicas

10. Ley de Absorción

Absorción total

$$1. [p \vee (p \wedge q)] \equiv p$$

$$2. [p \wedge (p \vee q)] \equiv p$$

Absorción Parcial

$$3. [p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$$

$$4. [p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q)$$

p	q	$[p \vee (p \wedge q)]$	$(p \wedge q)$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	F	F
F	F	F	F

p	q	$[p \vee (\sim p \wedge q)]$	$(\sim p \wedge q)$	$(p \vee q)$
V	V	V	F	V
V	F	V	F	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	F

3. Ejercicio Propuesto

Simplificar las Sigüientes Proposiciones compuestas

(Guía de Lógica, ejercicio N°6a)

$$(p \rightarrow q) \rightarrow [p \rightarrow (\sim q \wedge p)]$$

Paso 1 $(\sim p \vee q) \rightarrow [\sim p \vee (\sim q \wedge p)]$ / Ley de Implicación

Paso 2 $(\sim p \vee q) \rightarrow [(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee p)]$ / Ley Distributiva

Paso 3 $(\sim p \vee q) \rightarrow [(\sim p \vee \sim q) \wedge [\vee]]$ / Identidad

Paso 4 $(\sim p \vee q) \rightarrow [(\sim p \vee \sim q)]$ / Identidad

Paso 5 $\sim(\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee \sim q)$ / Ley de Implicación

Paso 6 $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee \sim q)$ / Ley de Morgan

Paso 7 $[(p \wedge \sim q) \vee \sim p] \vee \sim q$ / Ley Asociativa

Paso 8 $[(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim p)] \vee \sim q$ / Ley Distributiva

3. Ejercicio Propuesto

Paso 8	$[(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim p)] \vee \sim q$	<i>/ Ley Distributiva</i>
Paso 9	$[(\sim p \vee \sim q) \wedge [V]] \vee \sim q$	<i>/ Identidad</i>
Paso 10	$[(\sim p \vee \sim q)] \vee \sim q$	<i>/ Identidad</i>
Paso 11	$(\sim q \vee \sim q) \vee \sim p$	<i>/ Ley Asociativa</i>
Paso 12	$(\sim q) \vee \sim p$	<i>/ Identidad</i>

Finalmente $(\sim p \vee \sim q)$

3. Ejercicio Propuesto

Simplificar las Sigüientes Proposiciones compuestas

(Guía de Lógica, ejercicio N°6b)

$$(q \rightarrow \sim p) \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)]$$

Paso 1

$$\sim(\sim q \vee \sim p) \vee [\sim(p \wedge q) \vee (\sim p \vee q)] \quad / \text{ Ley de Implicación}$$

Paso 2

$$(q \wedge p) \vee [(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q)] \quad / \text{ Ley de Morgan}$$

Paso 3

$$(q \wedge p) \vee [\sim p \vee \sim q \vee \sim p \vee q]$$

Cuando tenemos dentro de un paréntesis

Sólo un tipo de operaciones, entonces podemos asociar $(q \wedge p) \vee [(\sim p \vee \sim p) \vee (\sim q \vee q)]$ / Ley Asociativa

Paso 4

$$(q \wedge p) \vee [\sim p \vee \vee] \quad / \text{ Identidad}$$

$$(q \wedge p) \vee [\vee] \quad / \text{ Identidad}$$

$$\vee$$

3. Ejercicio Propuesto

Determinar a qué corresponde, (tautología, contradicción o contingencia)

(Guía de Lógica, ejercicio N°7a)

Paso 1

$$(p \wedge q) \wedge \underbrace{\sim(p \vee q)}$$
$$(p \wedge q) \wedge (\sim p \wedge \sim q) \quad / \text{ Ley de Morgan}$$

Paso 2

$$p \wedge q \wedge \sim p \wedge \sim q$$
$$\underbrace{(p \wedge \sim p)} \wedge \underbrace{(q \wedge \sim q)} \quad / \text{ Ley Asociativa}$$

Paso 3

$$\underbrace{(F)} \wedge \underbrace{(F)} \quad / \text{ Identidad}$$

Paso 4

$$\underbrace{\quad}_{F}$$

3. Ejercicio Propuesto

Determinar a qué corresponde, (tautología, contradicción o contingencia)

(Guía de Lógica, ejercicio N°7a)

Corroboración $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	V

3. Ejercicio Propuesto

Determinar a qué corresponde, (tautología, contradicción o contingencia)

(Guía de Lógica, ejercicio N°7c)

$$[(p \rightarrow q) \wedge \underbrace{\sim(p \wedge \sim q \wedge r)}] \rightarrow (\sim p \vee q)$$

Paso 1 $[\underbrace{(p \rightarrow q)} \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r)] \rightarrow (\sim p \vee q) \quad / \text{Ley de Morgan}$

Paso 2 $[(\sim p \vee q) \wedge \underbrace{(\sim p \vee q \vee \sim r)}] \rightarrow (\sim p \vee q) \quad / \text{Ley de Implicancia}$

Paso 3 $[\underbrace{(\sim p \vee q)} \wedge \underbrace{((\sim p \vee q) \vee \sim r)}] \rightarrow (\sim p \vee q) \quad / \text{Ley de Asociatividad}$

Paso 4 $[\underbrace{a \wedge (a \vee \sim r)}] \rightarrow (\sim p \vee q)$
 $\quad \quad \quad \underbrace{a \rightarrow (\sim p \vee q)} \quad / \text{Ley de Absorción}$

Paso 5 $\underbrace{(\sim p \vee q) \rightarrow (\sim p \vee q)}$
 $\quad \quad \quad \mathbf{V}$

3. Ejercicio Propuesto

Determinar a qué corresponde, (tautología, contradicción o contingencia)

(Guía de Lógica, ejercicio N°7c)

Corroboración $[(p \rightarrow q) \wedge \sim(p \wedge \sim q \wedge r)] \rightarrow (\sim p \vee q)$

p	q	R	$(p \rightarrow q)$	$[(p \rightarrow q) \wedge \sim(p \wedge \sim q \wedge r)]$	$\sim(p \wedge \sim q \wedge r)$	$[(p \rightarrow q) \wedge \sim(p \wedge \sim q \wedge r)] \rightarrow (\sim p \vee q)$	$(\sim p \vee q)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

4. Cuantificadores

En la Lógica Matemática habíamos definido una Preposición como un Juicio que, al ser razonado, podríamos determinar su valor de Verdad.

Cuándo está preposición se cumple para distintas “Variables”, entonces estamos hablando de un Predicado o Propiedad.

Estos se denominan “Polinomio Booleano” o “Polinomio Lógico”. Se denotan como $P(x)$; $Q(x,y,z\dots)$; donde $x,y,z \dots$ (variables) \in a un Universo

En este sentido, los CUANTIFICADORES son expresiones que nos permitirán indicar las veces que se cumple la Propiedad para Variables pertenecientes a un Universo.

Cuantificador Universal	Cuantificador Existencial		No Existe
$\forall x, y \dots$	$\exists x, y \dots$	$\exists! x$	$\nexists x, y \dots$
Para todo $x, y \dots$	Existe al menos un $x, y \dots$	Existe un único x	No existe ningún $x, y \dots$

4. Cuantificadores

Lenguaje Matemático

Simbología	Significado
$x, y, z \dots$	Variables
$P(x, y, z \dots)$	Polinomio Booleano / Lógico
U	Universo
$/$	Tal qué
\in	Pertenece

Negación Conectivos Lógicos

Conectivo	Negación
\wedge	\vee
\vee	\wedge
\rightarrow	$\sim(\sim p \vee q)$
\leftrightarrow	$\sim[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

Negación de Cuantificadores

Cuantificador Universal	Cuantificador Existencial		No Existe
$\forall x, y \dots$	$\exists x, y \dots$	$\exists! x$	$\nexists x, y \dots$
\exists	\forall	\forall	\forall

5. Ejercicios Propuestos

Utilizando el cuantificador apropiado, expresar en forma simbólica cada una de las proposiciones siguientes, y luego determinar su valor de verdad:

- a) Existen números enteros tales que $x^2 - 1 = 0$
- b) En todos los números naturales x , $-x$ es menor que cero
- c) Existe un número racional q , tal que $(q - 1)$ es negativo

Luego, Negar cada una de las siguientes proposiciones del ejercicio anterior

de la Guía Lógica)
(Ejercicio N°15 y 16)

- a) Existen números enteros tales que $x^2 - 1 = 0$

Solución

$$\exists x \in \mathbb{Z} / x^2 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Donde, } x^2 - 1 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \rightarrow (1, -1) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

5. Ejercicios Propuestos

b) En todos los números naturales x , $-x$ es menor que cero

Solución

$$\forall x \in \mathbb{N} / -x < 0$$

c) Existe un número racional q , tal que $(q - 1)$ es negativo

Solución

$$\exists! q \in \mathbb{Q} / (q - 1) < 0$$

Donde $x=0$

5. Ejercicios Propuestos

a) Negación de “Existen números enteros tales que $x^2 - 1 = 0$ ”

$$\sim [\exists x \in \mathbb{Z} / x^2 - 1 = 0]$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} / x^2 - 1 \neq 0$$

b) Negación de “En todos los números naturales x , $-x$ es menor que cero”

$$\sim [\forall x \in \mathbb{IN} / -x < 0]$$

$$\exists x \in \mathbb{IN} / -x \geq 0$$

c) Existe un número racional q , tal que $(q - 1)$ es negativo

$$\sim [\exists! x \in \mathbb{Q} / (x - 1) < 0]$$

$$\forall x \in \mathbb{Q} / (x - 1) \geq 0$$