

PAUTA PRUEBA N° 2
MATEMATICAS PARA LA GESTION II

PREGUNTA N°1 (20 puntos)

Dada la función $f(x) = \ln\left(\frac{e^{3x}-1}{e^{3x}+1}\right)$ calcule su derivada

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{3x}-1}{e^{3x}+1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{e^{3x}+1}{e^{3x}-1} \left(\frac{3e^{3x}(e^{3x}+1) - 3e^{3x}(e^{3x}-1)}{(e^{3x}+1)^2} \right)$$

$$f'(x) = \frac{e^{3x}+1}{e^{3x}-1} \left(\frac{3e^{6x} + 3e^{3x} - 3e^{6x} + 3e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2} \right)$$

$$f'(x) = \frac{e^{3x}+1}{e^{3x}-1} \left(\frac{6e^{3x}}{(e^{3x}+1)^2} \right)$$

$$f'(x) = \frac{6e^{3x}}{(e^{3x}-1)(e^{3x}+1)}$$

$$f'(x) = \frac{6e^{3x}}{e^{6x}+1}$$

PREGUNTA N°2 (20 puntos)

Dada la función $f(x) = (4x-5)e^{-3x}$ determine el resultado de la expresión

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x)$$

Encontrar primera derivada

$$f(x) = (4x-5)e^{-3x}$$

$$f'(x) = 4e^{-3x} + (4x-5)e^{-3x} \cdot (-3)$$

$$f'(x) = 4e^{-3x} - 3e^{-3x}(4x-5)$$

$$f'(x) = 4e^{-3x} - 12xe^{-3x} + 15e^{-3x}$$

$$f'(x) = 19e^{-3x} - 12xe^{-3x}$$

Obtener segunda derivada

$$f'(x) = 19e^{-3x} - 12xe^{-3x}$$

$$f''(x) = 19(-3)e^{-3x} - (12e^{-3x} + 12x(-3)e^{-3x})$$

$$f''(x) = -57e^{-3x} - 12e^{-3x} + 36xe^{-3x}$$

$$f''(x) = -69e^{-3x} + 36xe^{-3x}$$

Reemplazamos

$$f''(x) + 2f'(x) + 2f(x)$$

$$-69e^{-3x} + 36xe^{-3x} + 2(19e^{-3x} - 12xe^{-3x}) + 2(4x - 5)e^{-3x}$$

$$-69e^{-3x} + 36xe^{-3x} + 38e^{-3x} - 24xe^{-3x} + 8xe^{-3x} - 10e^{-3x}$$

$$\boxed{20xe^{-3x} - 41e^{-3x}}$$

PREGUNTA N°3 (20 puntos)

Dada la función $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3xy$ determine una expresión para $\frac{dy}{dx}$ (y')

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3xy$$

$$x^{1/3} + y^{1/3} = 3xy$$

$$\frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{3}y^{-2/3} \cdot y' = 3(y + xy')$$

$$\frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{3}y^{-2/3} \cdot y' = 3y + 3xy'$$

$$\frac{1}{3}y^{-2/3} \cdot y' - 3xy' = 3y - \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$y' \left[\frac{1}{3}y^{-2/3} - 3x \right] = 3y - \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$\boxed{y' = \frac{3y - \frac{1}{3}x^{-2/3}}{\frac{1}{3}y^{-2/3} - 3x}}$$

PREGUNTA N°4 (20 puntos)

Una empresa estima que si se producen q unidades de un determinado producto, el costo total será $C(q) = 2q^2 + 40q + 4000$ dólares y todas las unidades pueden venderse a un precio $p = 4000 - 20q$ dólares por unidad.

- a) Determine el nivel de producción que genera la máxima utilidad

Función de ingreso total:

$$I(q) = pq$$

$$I(q) = (4000 - 20q)q$$

$$I(q) = 4000q - 20q^2$$

Función de costo total: $C(q) = 2q^2 + 40q + 4000$

Función de utilidad:

$$U(q) = I(q) - C(q)$$

$$U(q) = 4000q - 20q^2 - (2q^2 + 40q + 4000)$$

$$U(q) = 4000q - 20q^2 - 2q^2 - 40q - 4000$$

$$U(q) = -22q^2 + 3960q - 4000$$

Derivar e igualar a cero

$$U'(q) = 0$$

$$-44q + 3960 = 0$$

$$-44q = -3960 \quad \cdot (-1)$$

$$44q = 3960$$

$$\boxed{q = 90}$$

Verificar que $q = 90$ es máximo

$$U''(q) = -44$$

$$U''(90) = -44 < 0$$

La utilidad se maximiza al producir y vender 90 unidades

- b) ¿Cuál es la mayor utilidad obtenida?

$$U(90) = -22(90)^2 + 3960(90) - 4000 = 174200$$

La mayor utilidad obtenida es 174200 dólares

c) ¿A qué precio se maximiza la utilidad?

$$p(90) = 4000 - 20(90) = 2200$$

El precio se debe fijar en 2200 dólares para obtener la máxima utilidad

PREGUNTA N°5 (20 puntos)

La función $p = \frac{q+750}{q+50}$ representa la demanda para cierto producto, donde p denota el precio por unidad para q unidades. Determine la función de ingreso marginal. Recuerde que

$$I = p * q$$

Función de ingreso total

$$I(q) = pq$$

$$I(q) = \left(\frac{q+750}{q+50} \right) q$$

$$I(q) = \frac{q^2 + 750q}{q+50}$$

Función de ingreso marginal

$$I(q) = \frac{q^2 + 750q}{q+50}$$

$$I'(q) = \frac{(2q+750)(q+50) - (q^2 + 750q) \cdot 1}{(q+50)^2}$$

$$I'(q) = \frac{2q^2 + 100q + 750q + 37500 - q^2 - 750q}{(q+50)^2}$$

$$I'(q) = \frac{q^2 + 100q + 37500}{(q+50)^2}$$