Universidad de Chile
E. de Gobierno y Gestión Pública
Semestre Primavera 2009

Matemáticas II - Guía de funciones

1. Considere las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

   Calcule $f \circ g, g \circ f, f \circ f$ y $g \circ g$, definiendo el dominio resultante para cada una.

2. Para las funciones $f(x) = 3x^2 + 1$, $g(x) = \dfrac{x}{2x+1}$, calcular:

   a) $(f \circ g)(x)$
   b) $(g \circ f)(x)$
   c) $(f + g)(x)$
   d) $(f - g)(x)$

3. Calcular las inversas de las siguientes funciones. Para comprobar, graficar (con ayuda de calculadora) cada función con su inversa, verificando simetría respecto de la recta $x = y$. En caso de no existir la inversa, restringir el dominio y recorrido, para que la función tenga inversa.

   a) $f(x) = 3x - 2$
   b) $f(x) = \dfrac{x-3}{2x-1}$
   c) $f(x) = \dfrac{2x+2}{3}$
   d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

   Ayuda: *Una función es inyectiva si se verifica la condición $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$; para comprobar inyectividad, se usa el contrapositivo $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$. Para comprobar epiyectividad, el recorrido debe coincidir con el conjunto de llegada.*

4. Sean $f(x) = 5 - 3x$ y $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ funciones reales, calcular $g \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ g$.

5. Para las funciones reales $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$,

   a) Calcular $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f/g y $f \circ g$.
   b) Indicar el dominio de cada una de las funciones del punto anterior.

6. Para las funciones reales $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \sqrt{x}$,

   a) Calcular $f + g$, $g - f$, $h \cdot g$, f/g, $f \circ g$ y $h \circ g$.
   b) Indicar el dominio de cada una de las funciones del punto anterior.
   c) ¿Cuáles de las funciones calculadas tienen inversa? En estos casos, escriba tal inversa, y compruebe gráficamente.

7. Sean las funciones $g(x) = 3x + 1$ y $h(x) = \dfrac{x-1}{3}$.

   a) Calcular $(h \circ g)(x)$ y $(g \circ h)(x)$.

b) ¿Qué se puede concluir?

8. Si $f\big(g(x)\big) = x^3 - 6x + 1$ y $g(x) = 3x + 2$, encuentre $f(x)$.

   ***Ayuda**: componer por la derecha con la inversa de $g(x)$ a ambos lados de la ecuación, ya que $g^{-1}\big(g(x)\big) = g\big(g^{-1}(x)\big) = x$.*

9. Considere las funciones $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = 3x + 1$.

   a) Demuestre algebraicamente que g es biyectiva.

   b) Encuentre una función h, tal que $g \circ h = f$. Indique el dominio de h.

10. Indique el dominio y recorrido de las funciones

    a) $2\sin(3x)$,

    b) $3\cos(x) + 1$,

    c) $\tan(x)$,

    d) $\frac{1}{3}\big(\cos(7x) + 2\big)$.

11. Grafique las funciones $\sin x$, $\sin(2x)$, $\cos x$, $\cos(2x)$ y compare las gráficas.

    a) ¿Cuál es el período de $\sin(2x)$ y $\cos(2x)$?

    b) Repita lo anterior con $\sin(3x)$ y $\cos(3x)$ e indique el período en cada una.

    c) Si $a > 0$, ¿qué puede afirmar sobre el período de $\sin(ax)$ y $\cos(ax)$?

12. Una función f es **impar** (resp. **par**) si satisface $f(-x) = -f(x)$ (resp. $f(-x) = f(x)$). Verificar si las siguientes satisfacen alguna de estas propiedades:

    a) $\sin(x)$,

    b) $\cos(x)$,

    c) $\tan(x)$,

    d) $\sin(3x) + 1$,

    e) $3\cos(x)$,

    f) $\tan(3x)$,

13. Señalar el dominio y recorrido de:

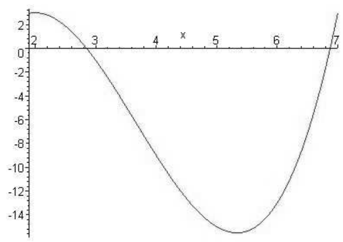
    a) $f(x) = \ln(x - 1)$,

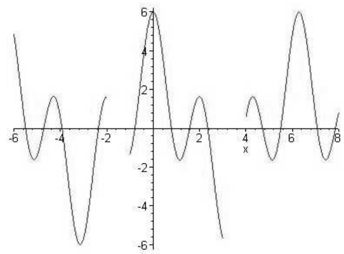
    b) $g(x) = -2 \cdot e^x$,

    c) $h(x) = \ln(x) + 3$,

    d) $f(x) = e^{3x} - 7$.

14. Determine el dominio y recorrido de las funciones dadas por las gráficas:

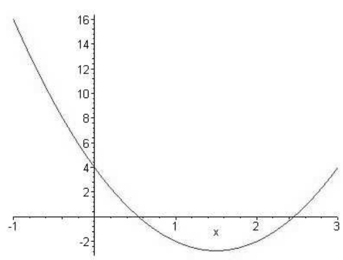


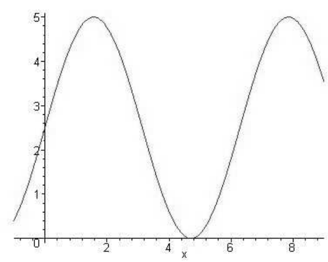


15. Determinar los máximos y mínimos absolutos y relativos de:

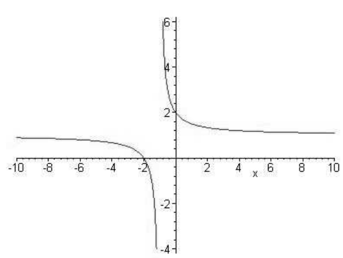
a) Las funciones dadas por las gráficas del problema anterior.

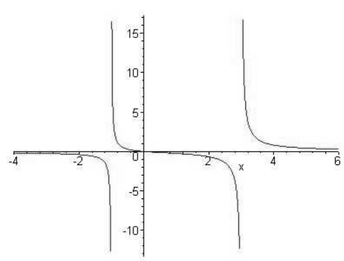
b) Las funciones cuyas gráficas se muestran abajo.





16. Determinar asíntotas verticales y horizontales para:





17. ¿A qué funciones corresponden las siguientes gráficas?