UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE GOBIERNO Y ADMINISTRACIÓN PÚBLICA
Primer Semestre 2009

MATEMÁTICAS I - Matrices

1. Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

   Determine:

   a) AB
   b) $5A + 3D$
   c) $B^t + D$
   d) C^2
   e) $2A - D$
   f) BCD^t

2. Determine $A = (a_{ij})$ de tamaño

   a) (5×6) tal que $a_{ij} = min\{i, j\}$
   b) (3×4) tal que $a_{ij} = max\{i, j\}$
   c) (4×4) tal que $a_{ij} = 2i - j$
   d) (4×3) tal que $a_{ij} = 2i + j$
   e) (2×3) tal que $a_{ij} = i^2 - j^2$
   f) (3×3) tal que $a_{ij} = \begin{cases} i^2 & \text{si } i = j \\ j & \text{si } i \neq j \end{cases}$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule $A^{4n}, A^{4n+1}, A^{4n+2}, A^{4n+3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x & -14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 4x & -2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Calcule A^{100} si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, calcule A^n para todo $n \in \mathbb{N}$ si

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Encuentre todas las matrices (2×2) que conmutan con

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

8. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de tamaño 5×5 donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + 1 = j \\ 0 & \text{si } i + 1 \neq j \end{cases}$$

   Pruebe que $A^5 = I$ y $A^4 \neq 0$.

9. Encuentre la forma escalonada reducida de las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

10. Resuelva los siguientes sistemas:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 11 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ x_1 - 7x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} x_1 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 2 \\ x_2 &= 1 \\ -x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

11. Estudie la solución del sistema $Ax = b$ determinando condiciones sobre α si:

$a)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & -\alpha & \alpha \end{bmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$.

$b)$ $A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & -\alpha \\ 2 & -1 & 2\alpha \\ -1 & 3\alpha & \alpha \end{bmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

12. Resuelva la ecuación matricial $AX = B$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 9 & -3 & 10 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

13. Determine la solución general del sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2. \end{aligned}$$

14. Determine condiciones sobre a para que el siguiente sistema no tenga solución

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + ax_3 &= 1. \end{aligned}$$

15. Sea $a \in \mathbb{R}$. Estudie la consistencia del siguiente sistema. En los casos en que exista solución, encuéntrelas.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= a \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & a & 3 \\ 0 & -1 & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a-3 & 6 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto si $a = 3$, el sitema no tiene solución.

Si $a \neq 3$, entonces

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 & a(5-a) \end{bmatrix}$$

Luego, si $a \neq 0$ y $a \neq 5$ el sistema no tiene solución.

Si $a = 0$ la solución es única: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -2$.

Si $a = 5$ la solución es única: $x_1 = 9$, $x_2 = -4$ y $x_3 = 3$.

16. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   a) Calcule $A(A^tA)^{-1}A^t$.

   b) Calcule $B(B^tB)^{-1}B^t$.

   c) Verifique que $A(A^tA)^{-1}A^t + B(B^tB)^{-1}B^t = I$.

17. Sea A una matriz de 3×3 tal que

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calcule A^{-1}.

18. Sea B una matriz cuadrada tal que $B^3 - B^2 - 5B + 5I = 0$. Escriba B^{-1} en función de B.

19. Demuestre que si A es una matriz cuadrada tal que $A^2 = 0$, entonces $I - A$ es invertible.

20. Demuestre que si A es una matriz cuadrada tal que $A^3 = 0$, entonces $I - A$ es invertible.