SUMATORIAS.

I. Introducción.

Las sumas están por todas partes en matemática, por lo tanto necesitamos herramientas básicas para manejarlas. Esta unidad desarrolla la notación y las técnicas generales que hacen de la suma algo más amigable.

En años anteriores estudiamos un método geométrico para calcular la suma de los primeros n números naturales, suma que anotamos como 1 + 2 + 3 + 4 +.........+ n.

Dicha suma podemos escribirla en forma general como: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n$, donde cada $\boldsymbol{a_k}$ es un número que se ha definido de algún modo. Esta anotación tiene la ventaja que nosotros podemos ver la suma entera, casi como si se escribiera por completo. Cada $\boldsymbol{a_k}$ del elemento de una suma se llama un término. Los términos se especifican a menudo implícitamente a través de una fórmula (recordar el término de rango general de la guía de inducción matemática).

Pero, las notaciones que hemos usado hasta ahora no son cómodas. **Joseph Fourier** introduce en el año **1820** una nueva notación para la suma que usa la letra griega Σ (sigma mayúscula).

Esta notación nos dice que incluyamos precisamente en la suma esos términos cuyo índice es un entero que queda entre el límite inferior y el superior de la sumatoria.

Veamos un ejemplo:

Suma de las potencias de 2	1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 +.............
Otra forma:	$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots\ldots$
La suma de **n** potencias de 2	$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots\ldots 2^{n-1}$

Con la nueva notación la suma se anota así.

$$\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n}} 2^{\boldsymbol{k}-1}$$

II. Ejercicios.

1

1) Desarrolla cada sumatoria y calcula su valor.

a) $\sum_{k=2}^{k=5} k$ b) $\sum_{k=2}^{k=6} (2k+1)$ c) $\sum_{k=3}^{k=6} |3-k|$ d) $\sum_{k=1}^{k=3} (-1)^{k}\left(k^{2}-k\right)$

e) $\sum_{k=2}^{k=5} k^{k}+1$ f) $\sum_{j=15}^{j=16} \frac{1-j}{2}$ g) $\sum_{i=1}^{i=5} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$ h) $\sum_{k=1}^{k=4} (-1)^{k+1} k$

2) Escribe cada suma usando el símbolo de sumatoria.

a) $3+5+7+9++11+13$

b) $2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7$

c) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}$

d) $2-4+6-8+10-12+14$

e) $2^{3}+2^{4}+2^{5}+2^{6}+2^{7}+2^{8}+2^{9}+2^{10}$

f) $\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{4}{5\cdot 7}+\frac{6}{7\cdot 10}+\frac{8}{9\cdot 13}+\frac{10}{11\cdot 16}+\frac{12}{13\cdot 19}$

g) 3,3333

h) $4\cdot 5+4\cdot 6+4\cdot 7+4\cdot 8+4\cdot 9+4\cdot 10$

3) De las siete sumatorias, ¿cuáles representan la misma suma?

A) $\sum_{k=3}^{k=6} \frac{k}{k+2}$	**B)** $\sum_{k=5}^{k=8} \frac{k}{k+4}$	**C)** $\sum_{k=6}^{k=9} \frac{k}{k-1}$	**D)** $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{k+4}{k+8}$
E) $\sum_{k=3}^{k=6} \frac{k+4}{k+2}$	**F)** $\sum_{k=0}^{k=3} \frac{k+3}{k+5}$	**G)** $\sum_{k=8}^{k=11} \frac{k-2}{k-3}$	

$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n\ \ n+1}{2}$ (suma de los naturales)

b) $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (suma de los cuadrados de los naturales)

c) $\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ (suma de los cubos de los naturales)

5) Calcula

a) $\sum_{k=1}^{k=10} (2k+3)$

b) $\sum_{k=1}^{k=20} (k-5)^3$

c) $\sum_{k=4}^{k=23} (2k-6)$

d) $\sum_{k=5}^{k=8} (3k\text{-}1)$

e) $\sum_{k=1}^{k=20} \left(k^2 - 4k + 4\right)$

f) $\sum_{k=10}^{k=50} \left(k^2 - 1\right)$

g) $\sum_{k=5}^{k=10} 2k + 3\sum_{k=7}^{k=12} (2k-4)$

h) $\sum_{k=0}^{k=2} 2^k$

i) $\sum_{k=0}^{k=2} 3^{k-1}$

j) $\sum_{k=0}^{k=3} 4^{k+1}$

6) Encuentra la expresión algebraica que representa a las siguientes sumatorias.

a) $\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1)$

b) $\sum_{k=1}^{k=n} (k\text{-}1)^2$

c) $\sum_{k=1}^{k=n} (2k-6)$

d) $\sum_{k=1}^{k=n} \left(k^2 - 4k + 4\right)$

e) $\sum_{k=1}^{k=n} (k-5)^3$

f) $\sum_{k=1}^{k=n} \left(k^2 - k\right)$

7) Calcula el valor

a)

$\sum_{k=1}^{k=n}(3k+1)=610$ b) $\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)=1680$

8) dada la suma $2+5+8+11+......................+a_n$
   a) Escribe la expresión dada usando sumatoria.
   b) Determina la expresión algebraica para la sumatoria.
   c) Aplica la expresión encontrada para calcular $2+5+8+11+......................+599$

9) Dada la suma $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+........................+a_n$
   a) Escribe la expresión dada usando sumatoria
   b) Determina la expresión algebraica que le corresponde a la sumatoria.
   c) Calcula $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+........................+40\cdot 42$

10) a) Calcula la suma de los múltiplos de 3 menores que 302
   b) Calcula la suma de los múltiplos de 5 comprendidos entre 18 y 174
   c) Calcula la suma de los naturales menores que 20 menos la suma de los cuadrados de esos naturales.

11) Aplicando las propiedades de sumatoria, y escribiendo con su notación desarrolla los siguientes ejercicios.

   a) Calcula $\sum_{k=12}^{k=240}(2k-1)$

   b) Calcula $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

   c) Calcula $\sum_{k=1}^{n}\frac{k-2}{(k+1)(k+2)}$

   d) Calcula $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

e) Demuestra que $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2=\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$ y calcula la sumatoria

   Hint. A) desarrolla la sumatoria del primer término, B) asocia convenientemente C) Escribe usando símbolo de sumatoria, etc.

g) Calcula $\sum_{k=1}^{k=2n}(-1)^k\ k$

h) Calcula $\displaystyle\sum_{j=2}^{j=n+2} (j-1)^4 - \sum_{k=1}^{k=n} k^4$

i) Calcula $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2-1}$ y luego determina el valor de $\displaystyle\sum_{k=100}^{k=300} \frac{1}{k^2-1}$

j) Calcula $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k^2+2k}\right)$.(Hint: haz el desarrollo algebraico y sólo al final desarrolla las sumatorias).

12) a) Calcula $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k(k+1)(k+2)(k+3)$

b) Aplica la fórmula para calcular $\displaystyle\sum_{k=18}^{k=121} k(k+1)(k+2)(k+3)$

c) Calcula $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$

d) Calcula la suma $\mathrm{S}=\frac{5}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{9}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{3^3}+.........+.\frac{2n+3}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{3^n}$
