Metodología Cuantitativa I

Dra. Llery Ponce

Profesora asistente
Instituto de Estudios Avanzados en Educación
Universidad de Chile

Dr. Patricio Rodríguez

Profesor asistente
Instituto de Estudios Avanzados en Educación
Universidad de Chile

Propiedades de la distribución normal e intervalos de confianza

Magíster en Investigación en Educación
Diplomado de postítulo en Metodologías de Investigación en Educación

Santiago, Chile
Abril 03, 2024

UNIVERSIDAD DE CHILE
INSTITUTO DE ESTUDIOS AVANZADOS EN EDUCACIÓN

Contenido

1. Teorema del limite central
2. Distribución normal
3. Intervalos de confianza

1

Teorema del límite central

1 Teorema del límite central

Definiciones básicas

- **Experimento**: proceso que entrega uno o más resultados.
- **Resultados elementales**: Todos los posibles resultados más simples de un experimento.
- **Variable aleatoria**: Función que asigna un valor numérico único a cada resultado de un experimento. Pueden ser:
  - **Discretas**: Cuando puede tomar sólo un número finito de distintos valores.
  - **Continuas**: Puede asumir un número infinito de posibles valores (dentro de un rango).
- **Espacio muestral**: Conjunto de todos los resultados elementales

1 Teorema del límite central

Distribución muestral de parámetros

- Tal como se puede estimar la distribución de una variable aleatoria, se puede estimar la distribución muestral de un parámetro.
- **Definición**: es una distribución de probabilidad de un estadístico muestral calculado a partir de todas las muestras posibles de tamaño n, elegidas al azar en una población determinada.
- **Resume** la probabilidad de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

1

Teorema del límite central

Resumen de promedios y desviación estándar según el n muestral

Número de dados	Media	Desv. Est.
1	3,5	2,92
2	3,5	1,46
3	3,5	0,97
4	3,5	0,73
5	3,5	0,58

Teorema del límite central

1

Propiedades

- Llamaremos **distribución muestral**:
  - Al conjunto de todos los resultados obtenidos al extraer todas las muestras aleatorias posibles, que tengan un tamaño n específico, en una población.
  - En rigor, es una distribución de probabilidad de un estadístico muestral calculado a partir de todas las muestras posibles de tamaño n, elegidas al azar en una población determinada.
- Si observamos los gráficos veremos que las distribuciones van tomando una forma aproximada a la **curva normal**.
- Los promedios se mantienen.
- Las varianzas de reducen en forma proporcional al n de la muestra.

1

Teorema del límite central

Propiedades

Características de los estimadores:

- **Insesgados:** valor esperado del estadígrafo se aproxima al valor del parámetro en la población.
- **Consistentes:** a medida que el tamaño de la muestra aumenta, el valor del estadígrafo se acerca cada vez más al valor del parámetro en la población.
- **Eficientes:** precisión del estadígrafo. Esto implica una baja variabilidad en la distribución muestral del estadígrafo.

Teorema del límite central

1

Enunciado

Si extraemos sucesivas muestras aleatorias de tamaño n de una población con media μ y varianza (σ^2), la distribución muestral de los promedios ($\overline{X}$)

- tendrá una distribución aproximadamente normal,
- con media ($\mu_{\overline{X}}$) igual a μ,
- y desviación estándar ($\sigma_{\overline{X}}$) igual a $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

siempre que n sea lo **suficientemente grande**

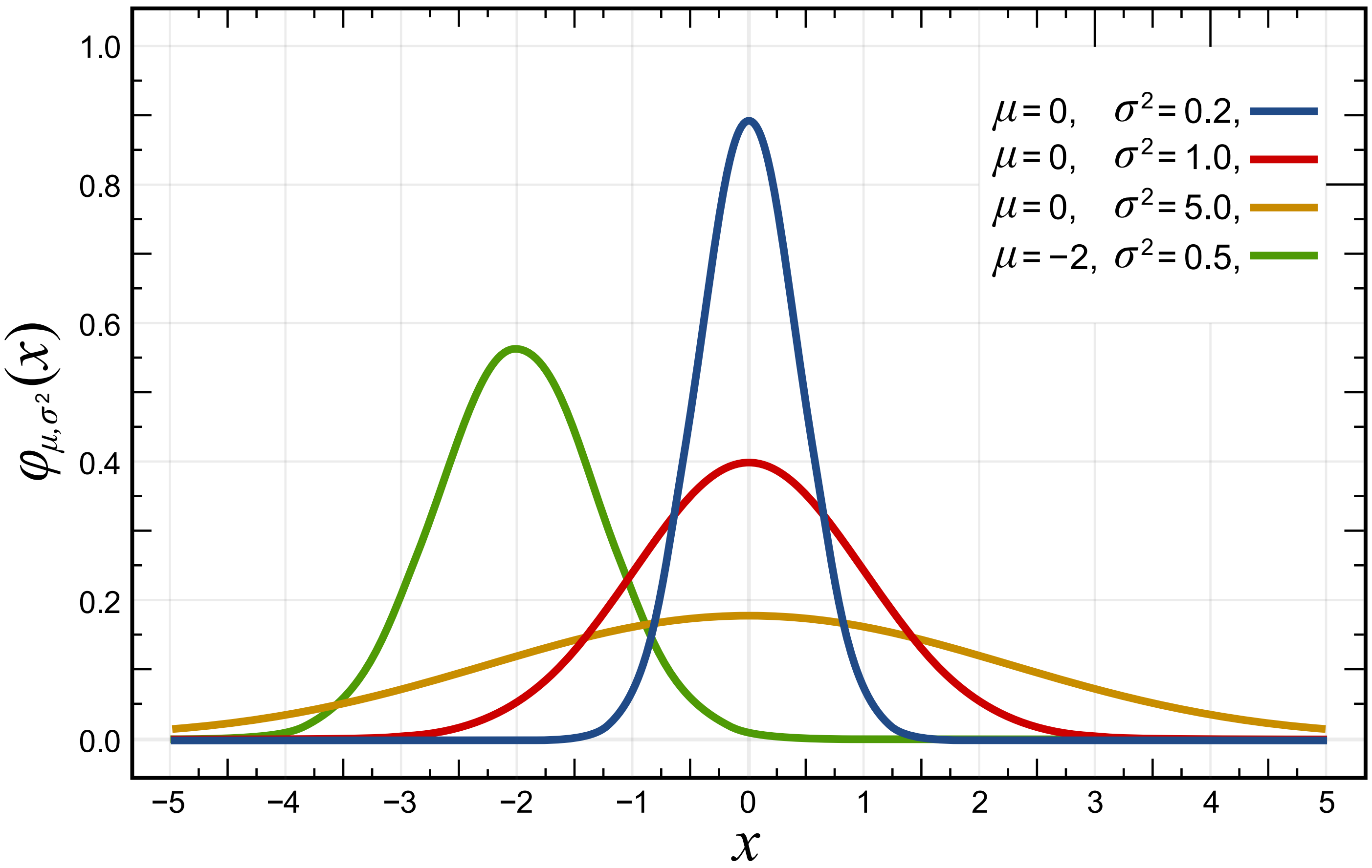
2

Distribución normal

2

Distribución normal

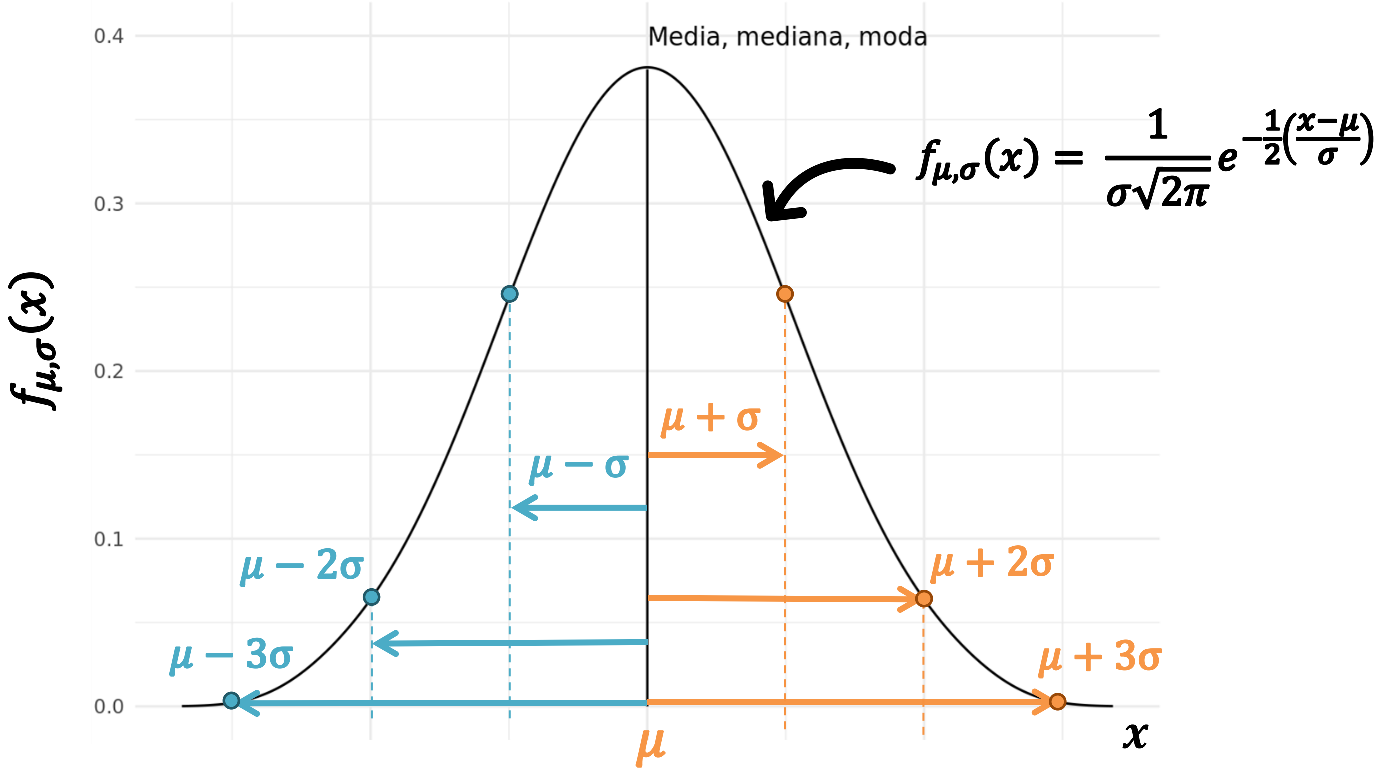
¿Qué es?



Distribución normal

¿Qué es?

La distribución normal es una función de densidad de probabilidades para una **variable aleatoria** que tiene la siguiente forma y responde a la siguiente expresión:

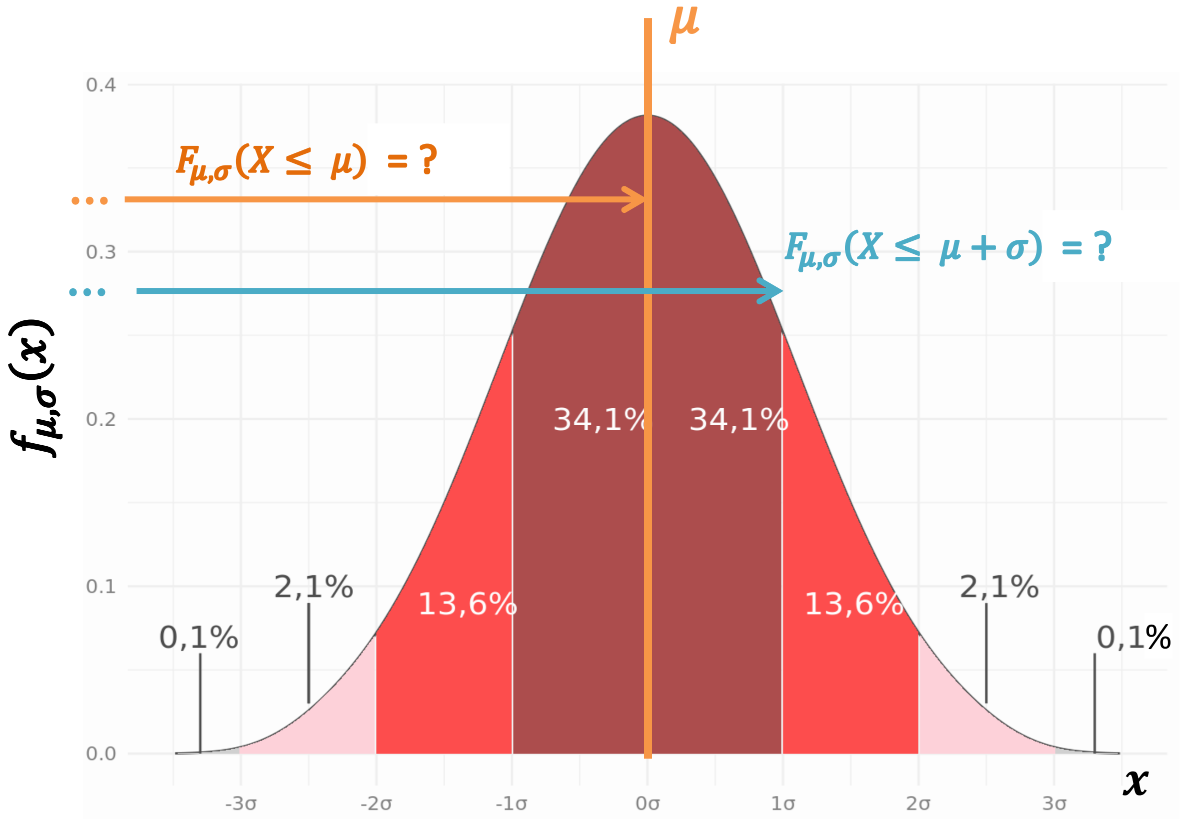


Fuente: Dietrichson (2019)

2 Distribución normal

Propiedades

El área bajo la curva (probabilidad acumulada) en función de la media ($\boldsymbol{\mu}$) y la desviación estándar ($\boldsymbol{\sigma}$) siempre se comporta de la siguiente forma:



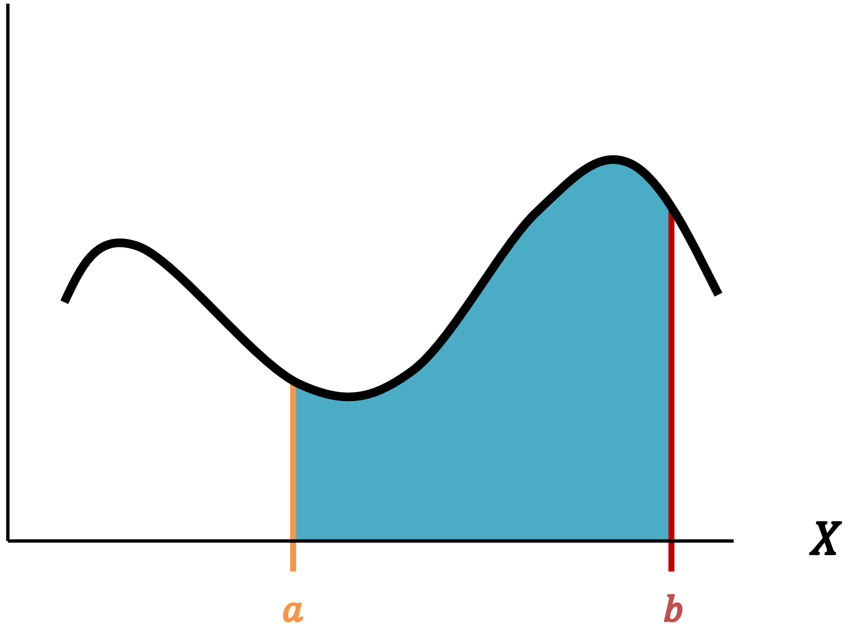
Fuente: [Dietrichson (2019)]

Distribución normal

Propiedades

Sabiendo que:

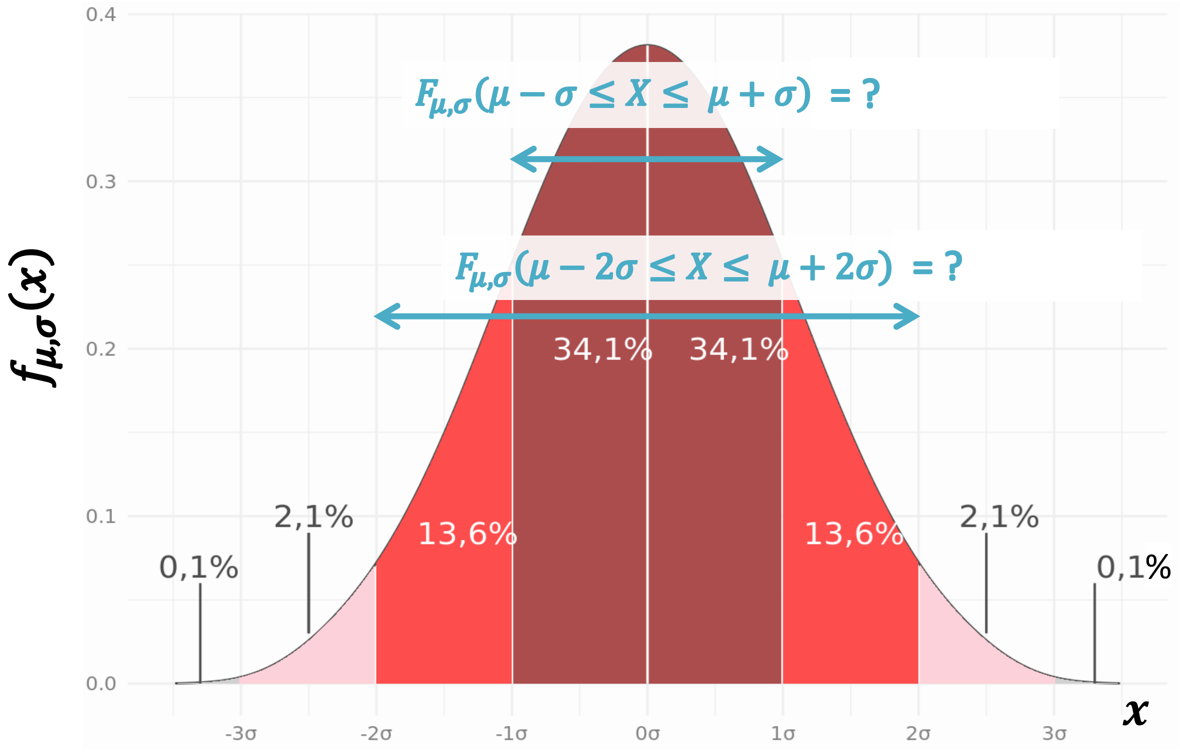
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a)$$



Distribución normal

Propiedades

El área bajo la curva (probabilidad acumulada) en función de la media ($\boldsymbol{\mu}$) y la desviación estándar ($\boldsymbol{\sigma}$) siempre se comporta de la siguiente forma:



Fuente: [Dietrichson (2019)]

Distribución normal

Propiedades

Entonces:

- Dado una distribución de probabilidades (en particular para el caso de la normal), se puede determinar un rango de valores en el cual se encuentre un cierto porcentaje de los casos.
- O bien, la probabilidad de que los valores de dicha población se encuentren en dicho rango.
- Del mismo modo, se podría **fijar la probabilidad deseada** (por ejemplo, **95%** o **99%**) e identificar el rango de valores en la cual se encontrará la medida de la población a partir de la muestra.

Distribución normal

2 Propiedades

- Las **distribuciones normales** se pueden **estandarizar**, es decir, se puede hacer una transformación de forma tal que la variable aleatoria tenga $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

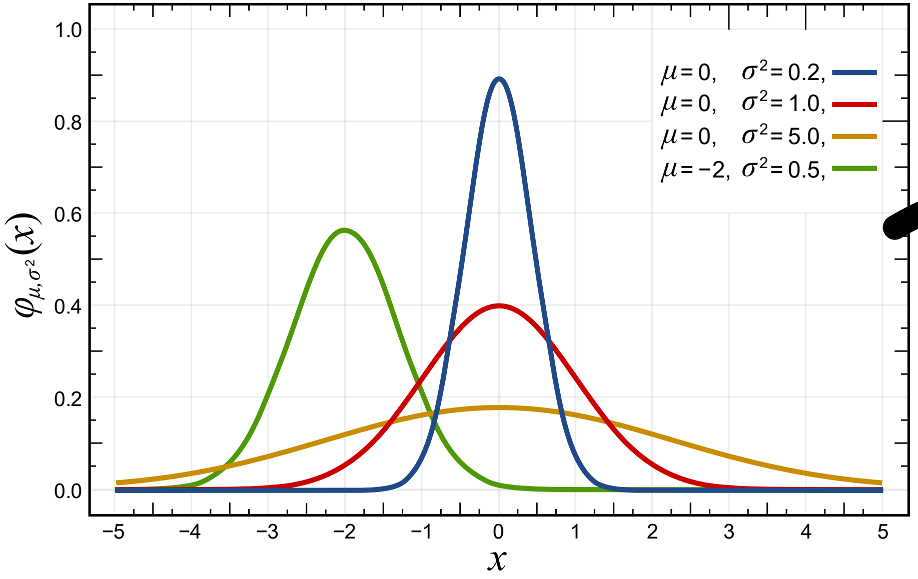
- **¿Cómo se hace?:**

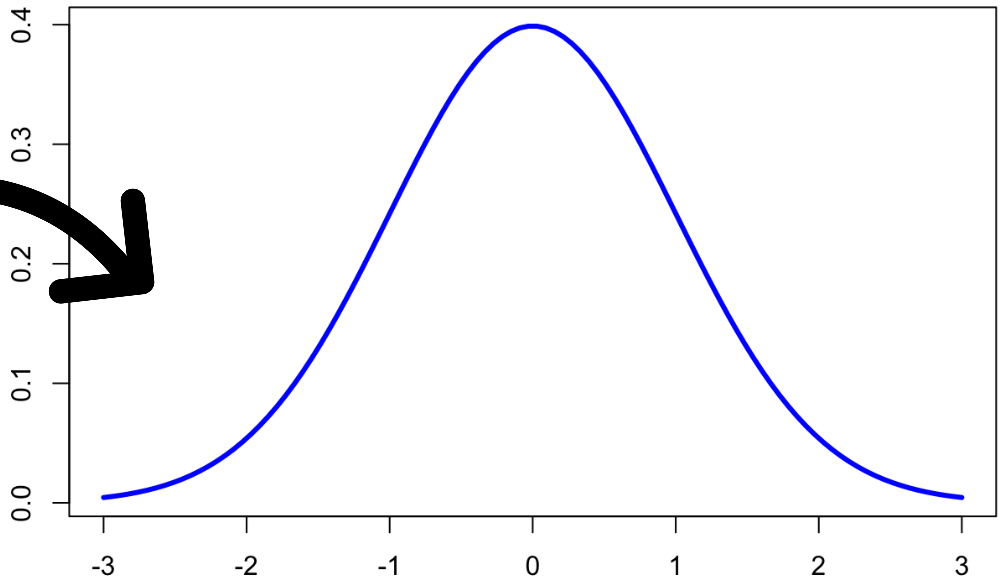
  Si X es la variable aleatoria que distribuye normalmente, entonces se puede transformar a una variable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ que distribuye $\mathcal{N}(0,1)$: $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

- La gracia es que los valores de esta densidad y frecuencia acumulada de la distribución $\mathcal{N}(0,1)$ están previamente tabulados, calculados y son conocidos.

Distribución normal

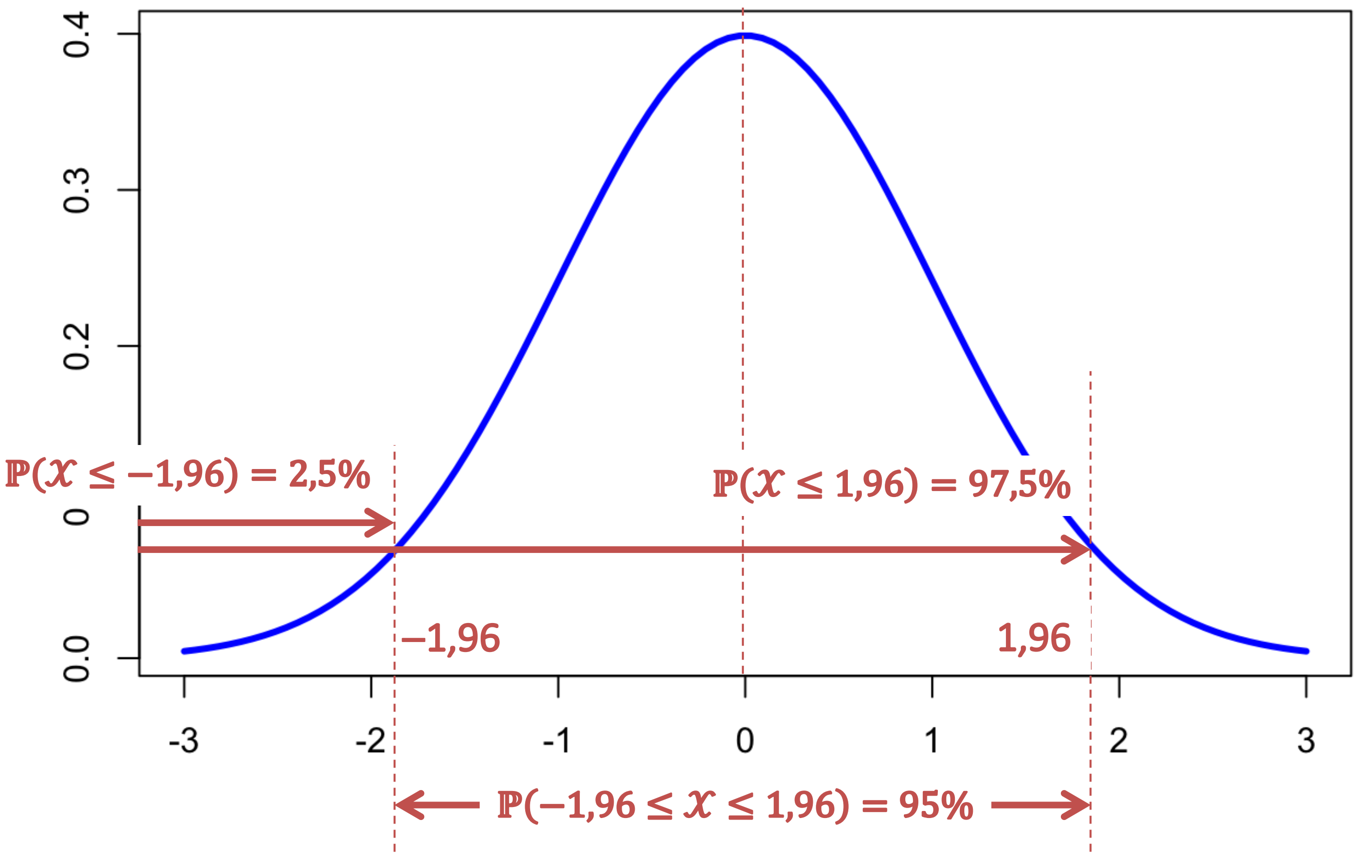
Propiedades





Distribución normal

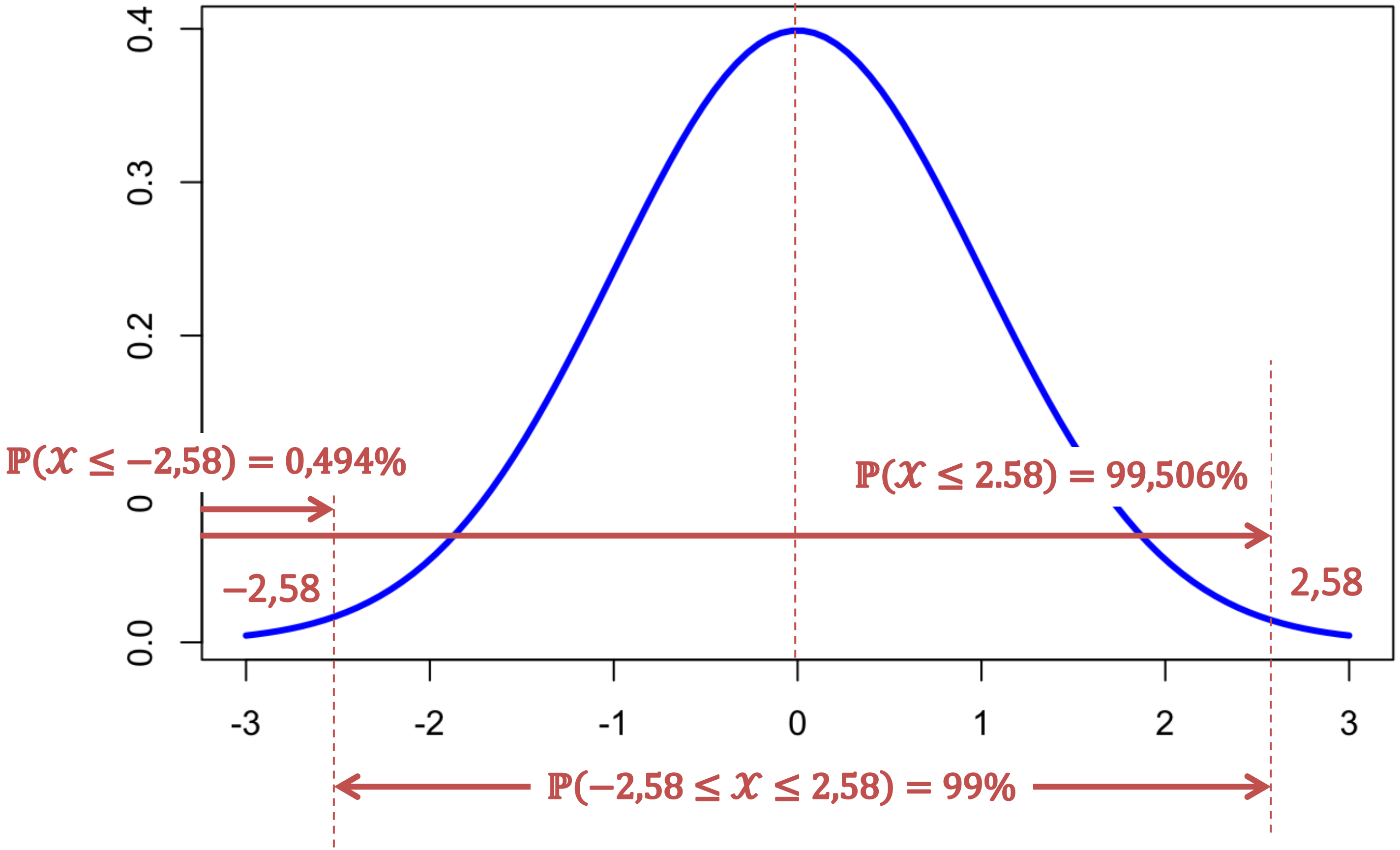
Propiedades



Fuente: [Ramírez (2019)]

Distribución normal

Propiedades



Fuente: Ramírez (2019)

3

Intervalos de confianza

3 Intervalos de confianza

Intervalo de confianza de la media de una población

Dado el teorema central del límite:

- La media de una muestra de una población es una variable aleatoria que distribuye normalmente con media μ y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Es decir, $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
- Si estandarizamos a $\mathcal{N}(0,1)$ entonces la variable $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

3

Intervalos de confianza

Intervalo de confianza de la media de una población

- Para 95%:

$$\mathbb{P}(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 95\%$$

$$-1{,}96 \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1{,}96$$

$$-1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} - \mu \leq 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{X} - 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Para 99%:

$$\mathbb{P}(-2{,}58 \leq Z \leq 2{,}58) = 99\%$$

$$-2{,}58 \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 2{,}58$$

$$-2{,}58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} - \mu \leq 2{,}58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{X} - 2{,}58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + 2{,}58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

3

Intervalos de confianza

Intervalo de confianza de la media de una población

Metodología Cuantitativa I

Dra. Llery Ponce

Profesora asistente
Instituto de Estudios Avanzados en Educación
Universidad de Chile

Dr. Patricio Rodríguez

Profesor asistente
Instituto de Estudios Avanzados en Educación
Universidad de Chile

Propiedades de la distribución normal e intervalos de confianza

Magíster en Investigación en Educación
Diplomado de postítulo en Metodologías de Investigación en Educación

UNIVERSIDAD DE CHILE
INSTITUTO DE ESTUDIOS AVANZADOS EN EDUCACIÓN

Santiago, Chile
Abril 03, 2024