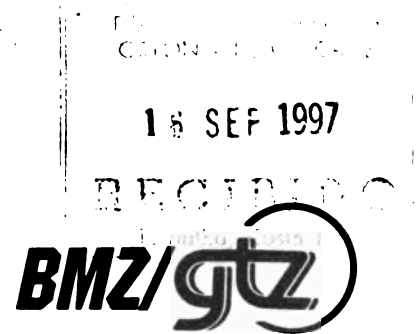




MENSURA FORESTAL

MICHAIL PRODAN
ROLAND PETERS
FERNANDO COX
PEDRO REAL

Proyecto IICA/GTZ sobre Agricultura,
Recursos Naturales y Desarrollo Sostenible

- Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura (IICA) /
Deutsche Gesellschaft für Technische Zusammenarbeit (GTZ) GmbH.
Julio, 1997.

Derechos reservados. Prohibida la reproducción total o parcial de este documento sin autorización escrita del IICA y la GTZ.

Las ideas y los planteamientos contenidos en los artículos firmados son propios de los autores y no representan necesariamente el criterio del IICA y la GTZ.

La Imprenta del IICA es responsable del montaje, fotomecánica e impresión de esta publicación.

Portada: Claudia Eppelin.

Prodan, Michail.

Mensura forestal / Michail Prodan, Roland Peters,
Fernando Cox, Pedro Real. -- San José, C.R. : Deutsche
Gesellschaft für Technische Zusammenarbeit (GTZ) GmbH :
Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura
(IICA), 1997.

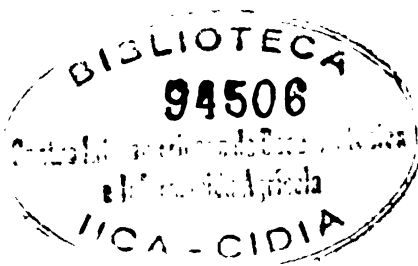
586 p. ; 23 cm. -- (Serie Investigación y Educación en
Desarrollo Sostenible / IICA, ISSN 1027-2631;
no. A1/SC-97-01, no. 1).

ISBN 92-9039-304 1

1. Dendrometría. 2. América Latina. I. Peters, Roland.
II. Cox, Fernando. III. Real, Pedro. IV. IICA. V. Título.
VI. Serie.

AGRIS
K10

Dewey
634.9285



SERIE INVESTIGACION Y EDUCACION
EN DESARROLLO SOSTENIBLE

ISSN-1027-2631
A1/SC-97-01

Julio, 1997
San José, Costa Rica

LOS AUTORES

Dr. h.c. Michail Prodan

Profesor emérito de la Universidad de Freiburg,
autor del libro original en alemán *Holzmesslehre*

Dr. Roland Peters

Profesor de la Pontificia Universidad Católica de Chile,
profesor extraordinario de la Universidad Austral de
Chile y ex profesor de la Universidad de Chile

Dr. Fernando Cox

Profesor de la Universidad de Chile y Mayor,
profesor de la Pontificia Universidad Católica de Chile
y ex profesor de la Universidad Austral de Chile

Dr. Pedro Real

Profesor de la Universidad de Concepción
y ex profesor de la Universidad Austral de Chile

PROLOGO

Es poco común que uno de los coautores de un libro se permita y al mismo tiempo sienta la obligación de prologarlo planteando algunas ideas respecto del mismo.

Mi libro original hace una presentación global del métodos cuantitativos de medición del rendimiento y crecimiento de los bosques, especialmente los europeos. La drástica reducción del número de especies en el continente europeo durante los últimos períodos geológicos me permitió incluir en el texto una descripción y deducción simplificada de las leyes del crecimiento, a la que agregué, procedentes del Norte, Noruega, Suecia y Finlandia ("donde siempre cantan los bosques" - Trygve Gulbrandsen), las últimas y decisivas ideas respecto de las técnicas de muestreo y del concepto de sustentabilidad (A. Langsaeter, W. Cajanus, Y. Ilvessalo, H. Nässlund, B. Matern, entre otros).

Roland Peters se dio a la tarea de incorporar, luego de traducir completamente mi libro original, alguna de la dispersa literatura latinoamericana existente relativa a los más variados aspectos de la mensura. Su amplio conocimiento de los bosques de América del Sur y Central y de la correspondiente literatura especializada, le permitió asociar y demostrar la aplicación de esas simples técnicas europeas a las múltiples condiciones de crecimiento y a las numerosas especies presentes en estos bosques. Sus amigos y también coautores Fernando Cox y Pedro Real, a quienes también conozco y aprecio desde hace tiempo, lo apoyaron siempre y contribuyeron significativamente, con temas de su especialidad, a complementar esta obra.

Como el de mayor edad fui incluido en la portada como el autor principal, sin embargo, la dirección de esta obra y su concepción general son en primera línea responsabilidad de Roland Peters a quien se lo he manifestado y reconocido siempre tanto personalmente como en nuestra permanente correspondencia.

Conozco a Roland Peters y su familia desde hace ya varias décadas y desde siempre he mantenido con ellos un respeto y una estimación que han sido mutuos.

En cada obra queda plasmado algo de la personalidad de su autor, de su vida, de su esfuerzo, y en ese sentido es que quiero destacar muy especialmente la preocupación de Roland por mantener vivo en el texto mi aporte a su libro.

Con afecto y admiración,

Michail Prodan

PREFACIO

El libro *Holzmesslehre* del Profesor Michail Prodan, editado en Alemania, es ya un clásico entre los textos de dasometría conocidos mundialmente. A través de la fuerte influencia alemana en múltiples centros de enseñanza e investigación forestal, este libro se ha constituido para nuestra América Latina en una obra guía, tanto en el campo de la educación forestal como en la práctica profesional. A pesar de estar escrito en idioma alemán, su uso se ha impuesto en numerosas escuelas universitarias y es utilizado ampliamente como texto de consulta por los profesionales forestales de la región, muchos de los cuales se han perfeccionado y obtenido sus títulos de posgrado en Alemania.

Sin embargo, los casi treinta años transcurridos desde su publicación, su orientación casi exclusiva a la silvicultura europea y especialmente el idioma, representan limitantes para un uso más generalizado, lo que hizo recomendable su traducción, modernización y adaptación a las condiciones latinoamericanas.

Esta adaptación trata de resolver el problema de mensura que plantean nuestros bosques, primero, porque existe una variedad muy grande de bosques y situaciones, y luego, porque los objetivos, técnicas y especies difieren en cada caso particular, requiriendo una solución distinta.

El autor principal de esta adaptación es el Dr. Roland Peters, ingeniero forestal, especialista en mensura forestal y profesor universitario con experiencia en Chile y otros países de Latinoamérica como consultor de organismos internacionales, quien fue especialmente contratado por la Deutsche Gesellschaft für Technische Zusammenarbeit (GTZ) con este propósito. El Dr. Peters invitó a participar a los colegas Dr. Fernando Cox y Dr. Pedro Real, también profesionales chilenos vinculados a la enseñanza de estas disciplinas en diversas universidades, cuya colaboración constituyó un valioso aporte a la obra. Antes de preparar este libro, los autores visitaron varios centros de enseñanza y de investigación forestal además de proyectos de la GTZ y de otras entidades internacionales en diversos países, con el fin de ampliar su experiencia y de reunir material que sirviera de orientación para estructurar su contenido.

Es importante destacar que esta edición española del texto de Prodan no es una traducción sino un libro nuevo cuya base está constituida por los conceptos principales contenidos en *Holzmesslehre*. Además de conferirle a este libro una estructura diferente, más acorde con los contenidos de las asignaturas de dasometría, dendrometría y epidometría que se imparten en las escuelas forestales, se intentó incorporar en él todos los adelantos del conocimiento relativos a este campo de las ciencias forestales que están actualmente en aplicación.

Dr. Dietrich Burger
GTZ, Jefe de la División
Manejo Recursos Forestales, Producción Animal,
Pesca y Conservación de la Naturaleza

AGRADECIMIENTOS

La realización de este texto no habría sido posible sin el decidido apoyo económico de la GTZ, el permanente estímulo y entusiasmo del Prof. Michail Prodan, así como la importante colaboración de varios colegas de América Latina y muy especialmente de los ingenieros forestales chilenos Juan Carlos Cerda, Harry Exss y Horacio Gilabert, quienes con gran interés participaron en la revisión del texto final. También se hace una mención muy especial para el Sr. Luis Brito, la Srta. Verónica Schuller y la Sra. Norma Valdés quienes con gran solicitud y eficiencia fueron los encargados de preparar las figuras y mecanografiar el manuscrito.

Por último, un reconocimiento al Proyecto IICA/GTZ en Agricultura, Recursos Naturales y Desarrollo Sostenible, y al Servicio Editorial del IICA, especialmente en la persona de la Sra. Danièle Trottier, por la producción de este libro.

Roland Peters

TABLA DE CONTENIDO

I.	INTRODUCCION.....	1
I.1	CONTENIDO	1
I.2	REVISION HISTORICA	2
I.3	SIMBOLOGIA	2
I.4	UNIDADES DE MEDIDA	4
I.4.1	Longitud	4
I.4.2	Superficie	7
I.4.3	Peso	9
I.4.4	Volumen madera aserrada	10
I.4.5	Volumen madera arrumada o apilada	11
II.	MEDICION DE ARBOLES INDIVIDUALES	13
II.1	MEDICION DE ATRIBUTOS DE ARBOLES Y PRODUCTOS	13
II.1.1	Medición de diámetro	13 ✓
II.1.2	Medición de diámetro a distintas alturas	22 ✓
II.1.3	Medición de alturas	22 ✓
II.1.3.1	Hipsómetros basados en principios geométricos	22
II.1.3.2	Hipsómetros basados en principios trigonométricos	26
II.1.3.3	Instrumentos de última generación	29
II.1.4	Medición de corteza	30
II.1.5	Medición precisa de crecimiento diametral	31
II.1.6	Medición de diámetro de copa	31 ✓

tabla de contenido

II.1.7	Medición de área basal	31✓
II.1.8	Medición de la forma	32
II.1.8.1	Cuocientes de forma y series de ahusamiento	33
II.1.8.2	Factores de forma	38
II.1.8.2.1	El factor de forma verdadero	41
II.1.8.2.2	El factor de forma falso o artificial	50
II.1.8.2.3	Relación entre el factor de forma falso y el verdadero	52
II.1.8.3	Cuerpos de rotación	54
II.1.8.4	Fórmulas de cubicación	57
II.1.8.4.1	Cubicación de secciones o trozas	62
II.1.8.4.2	Fórmula del centroide	66
II.1.8.4.3	Normas de cubicación de trozas JAS	66
II.1.8.5	Comparación entre los cuerpos de rotación teóricos y la forma fustal. Expresiones matemático-estadísticas para la forma fustal	67
II.1.8.5.1	Sistemas para la captación y representación de cualquier forma fustal. El sistema de SCHIFFEL (1897)	67
II.1.8.5.2	Sistemas para la captación de formas fustales medias	68
II.1.8.5.3	Sistemas referidos a su diámetro a igual altura relativa con la utilización de cuocientes de forma verdaderos	68
II.1.8.6	Expresión matemática de la forma	70
II.1.9	Comprobación de la fórmula de área central o media	73
II.1.9.1	Largo óptimo de los fustes para su cubicación	75
II.1.9.2	Discusión y solución general	76
II.1.9.3	Medidas de conicidad del fuste	79
II.1.9.4	Largos permitidos para la aplicación de la fórmula de área central	83
II.1.10	Errores y fuentes de error en la medición de árboles volteados	85
II.1.10.1	Relación entre el error del diámetro y el correspondiente error del área basal	86
II.1.10.2	Propagación de los errores del área basal o diamétrico y del largo sobre el cálculo volumétrico	87
II.1.10.3	La precisión de la determinación del área basal y sus errores	89
II.1.10.3.1	Errores de construcción de la forcípula	89
II.1.10.3.2	Superficie fustal irregular	91
II.1.10.3.3	Contracción diamétrica	91
II.1.10.3.4	Errores de medición aleatorios	92
II.1.10.3.5	Desviación del área circular	92
II.2	ESTIMACION DE ATRIBUTOS DE ARBOLES Y PRODUCTOS	94
II.2.1	Funciones de volumen	95
II.2.1.1	Funciones de volumen local o tarifas	95
II.2.1.2	Funciones de volumen general	97

II.2.1.3	Funciones de volumen hasta diferentes diámetros límites	98
II.2.1.4	Funciones de volumen de razón	100
II.2.1.5	Funciones de volumen con más de un diámetro	104
II.2.1.6	Estructura volumétrica del fuste	105
II.2.2	Funciones de ahusamiento	111
II.2.2.1	Modelos generales de árbol completo	112
II.2.2.2	Modelo general segmentado	115
II.2.2.3	Modelos compatibles generales y segmentados	116
II.2.2.4	Modelos de forma o exponente variable	117
II.2.2.5	Modelos de árbol individual	119
II.2.3	Problemas estadísticos en la construcción de funciones de volumen y modelos fustales	121
II.2.3.1	Selección de la muestra	121
II.2.3.2	Heterogeneidad de varianzas	123
II.2.4	Validación de modelos de volumen y ahusamiento	126
II.2.4.1	Muestra de validación	127
II.2.4.2	Evaluación de modelos	128
II.2.4.3	Examen de las capacidades predictivas	129
II.2.4.4	Estimación de volumen hasta distintos índices de utilización	129
II.2.4.5	Estimación de volumen de productos	130
II.2.4.6	Pruebas de consistencia de los modelos	130
II.2.4.7	Inferencia estadística	131
II.2.5	Reglas madereras	131
II.2.5.1	Reglas madereras basadas en diagramas. Regla Scribner	132
II.2.5.2	Reglas madereras basadas en fórmulas matemáticas	133
II.2.5.3	Funciones de volumen aserrable derivadas mediante estudios en aserraderos	135
II.2.5.4	Producción real <i>versus</i> estimada por reglas	136
II.2.6	Estimación de existencias netas	137
II.2.7	Estudio de defectos	138
II.2.8	Factores de transformación ("cull factors")	141
II.2.9	Funciones de producto	143
II.2.10	Simuladores de trozado	144
II.2.11	Volúmenes aprovechables en bosques naturales	144

III.	MEDICION DE RODALES	151
III.1	UNIDADES MUESTRALES	151✓
III.1.1	Unidades muestrales probabilísticas	153
III.1.1.1	Parcelas convencionales	154
III.1.1.2	Parcelas concéntricas	161
III.1.1.3	Muestreo puntual horizontal (MPH)	163
III.1.1.4	Muestro lineal horizontal (MLH)	175
III.1.1.5	Muestreo puntual vertical (MPV) y lineal vertical (MLV)	176
III.1.1.6	Generalización del MPH	178
III.1.2	Unidades muestrales no probabilísticas	181
III.1.3	Relaciones entre el tamaño de las parcelas y variabilidad	183✓
III.1.4	Unidades muestrales en el borde del rodal	188
III.1.5	Unidades muestrales en conglomerados	190
III.1.6	Determinación de variables en unidades muestrales mediante submuestreo	194
III.1.7	Determinación del valor promedio de atributos en unidades muestrales	200
III.2	DISEÑOS MUESTRALES	201
III.2.1	Generalidades	201
III.2.1.1	Estadística de poblaciones	202
III.2.1.2	Descripción muestral de poblaciones: estimaciones	205
III.2.2	Muestreo aleatorio simple (MAS)	207
III.2.3	Estimadores MAS alternativos	218
III.2.4	Muestreo sistemático	221✓
III.2.5	Muestreo con estimadores de razón	228
III.2.5.1	Estimador de razón de medias	228
III.2.5.2	Estimador de media de razones	234
III.2.6	Muestreo estratificado	235
III.2.7	Muestreo por conglomerados bietápico (MCB)	246

III.2.8	Muestreo en bloques	254
III.2.9	Muestreo con probabilidad variable	256
III.2.9.1	Muestreo de lista a priori (PPS)	256
III.2.9.2	Muestreo de lista a posteriori (PPP)	264
III.2.10	Muestreo en dos fases	269
III.2.10.1	Muestreo en dos fases con estimador de razón	272
III.2.10.2	Muestreo en dos fases con estimador de regresión	273
III.2.10.3	Muestreo en fases para estratificación	279
III.2.11	Muestreo en ocasiones sucesivas	281
III.2.11.1	Muestreo en inventarios sucesivos independientes	287
III.2.11.2	Inventarios sucesivos con todas las unidades permanentes en ambas ocasiones (inventario continuo o CFI)	288
III.2.11.3	Muestreo con remediación parcial	290
III.2.11.4	Muestreo con reposición parcial (SPR)	292
III.3	OPTIMIZACION DE INVENTARIOS	295
III.3.1	Análisis de errores en inventarios	295
III.3.1.1	Errores no muestrales	297
III.3.1.2	Errores muestrales	301
III.3.2	Maximización de la eficiencia muestral	301
III.4	DETERMINACION DE PARAMETROS DE RODAL	308
III.4.1	Diámetro medio del rodal	309 ✓
III.4.1.1	Relación entre la distribución diamétrica, el rango diamétrico y la desviación estándar	312 ✓
III.4.1.2	Los árboles medios de HOHENADL	315
III.4.1.3	El área basal y los correspondientes árboles medios	316 ✓
III.4.1.4	El diámetro del árbol de área basal media o diámetro medio cuadrático D_g	317 ✓
III.4.1.5	Diámetro del árbol de área basal central	318
III.4.1.6	Diámetro del árbol medio de WEISE	319
III.4.1.7	Errores en la determinación de diámetros y áreas basales	319
III.4.2	La altura en el rodal	322 ✓
III.4.2.1	La relación entre el diámetro d y la altura h en un rodal	323 ✓
III.4.2.2	La precisión de la curva de alturas de rodal	327 ✓
III.4.2.3	Propiedades de las curvas de alturas de rodal	329 ✓
III.4.2.4	Modelos parametrizados de altura	329
III.4.2.5	Los valores medios de altura	331

tabla de contenido

III.4.3	Factores de forma	337
III.4.3.1	La curva del factor de forma comercial	340
III.4.3.2	La curva del factor de forma de madera total	340
III.4.3.3	La curva del factor de forma de madera fustal	342
III.4.3.4	El factor de forma falso	343
III.4.3.5	Coeficiente de forma basal de HOHENADL	346
III.4.3.6	Estimación del factor de forma falso a partir de otros cuocientes de forma	348
III.4.3.7	Relación entre el factor de forma, el diámetro a la altura del pecho y altura del árbol	349
III.4.3.8	Producto forma-altura (altura mórfica)	351
III.4.4	Estimación del espesor de corteza	352
III.4.5	Determinación de volumen	353
III.4.5.1	Métodos del árbol muestra	354
III.4.5.2	Métodos basados en tarifas o funciones generales de volumen	361
III.5	MEDICION DE SUPERFICIES	361
III.5.1	Por coordenadas	362
III.5.2	Planímetro polar	362
III.5.3	Red de puntos o mallas	363
III.5.4	Transectos	363
III.5.5	Determinación de errores	364
IV.	SITIO Y PRODUCTIVIDAD	369
IV.1	EXPRESIONES DEL SITIO EN BASE AL COMPLEJO SUELO-CLIMA	370
IV.2	EXPRESIONES DE LA CALIDAD DE SITIO EN BASE A PARAMETROS DEL RODAL	371
IV.3	CURVAS DE INDICE DE SITIO	371
IV.3.1	Principios: anamorfismo y polimorfismo	371
IV.3.2	Tipos de datos: parcelas permanentes, parcelas temporales y análisis fustal	372

IV.3.3	Construcción de curvas de índice de sitio	373
IV.3.3.1	Método de la curva guía	373
IV.3.3.2	Método de la ecuación de diferencia	376
IV.3.3.3	Método de regresión anidada	376
IV.3.3.4	Construcción de curvas polimórficas	379
IV.3.4	Modelos de estimación del índice de sitio en base a factores ambientales	383
IV.3.5	Indices de productividad	384
IV.3.6	Estimación del índice de sitio de rodales	386
IV.3.7	Proyección del crecimiento en altura	386
V.	DENSIDAD Y ESTRUCTURA	389
V.1	INDICES DE DENSIDAD DE RODAL	390 ✓
V.1.1	Número de árboles	390 ✓
V.1.2	Area basal	390
V.1.3	Indice de densidad de REINEKE	390
V.1.4	Indices de espaciamiento	395
V.1.5	Densidad de copas o porcentaje de cobertura	397 ✓
V.1.6	Ley del autorraleo o de la potencia $-3/2$	397
V.1.7	Factor de competencia de copas (CFF)	400
V.1.8	Razón de área de árboles (TAR)	401
V.1.9	Guía de densidad	401
V.2	INDICES DE DENSIDAD Y DE COMPETENCIA PUNTUAL	403
V.2.1	Indices independientes de distancia	403
V.2.2	Indices dependientes de distancia	404

tabla de contenido

V.3	ESTRUCTURA DE RODALES	407
V.3.1	Distribución uniforme	408
V.3.2	Distribución unimodal	409
V.3.3	Distribución bimodal	411
V.3.4	Distribución decreciente y formas de transición	412
V.3.5	Funciones de probabilidad de densidad (<i>f.d.p.</i>)	417
V.3.5.1	Conceptos básicos	418
V.3.5.2	Elementos estadísticos de las <i>f.d.p.</i>	419
V.3.5.3	Curtosis	420
V.3.5.4	Momento	420
V.3.5.5	Cuartiles, deciles y percentiles	422
V.3.5.6	Flexibilidad de una función de distribución de probabilidad	422
V.3.5.7	Funciones de distribución de probabilidad más importantes en el campo forestal	423
V.3.6	Predicción de la tabla de rodal	429
V.3.6.1	Método de predicción de parámetros	430
V.3.6.2	Método de recuperación de parámetros	430
VI.	RENDIMIENTO Y CRECIMIENTO	431
VI.1	CONCEPTOS	431
VI.2	TIPOS DE CRECIMIENTO	431
VI.2.1	El crecimiento anual corriente, <i>i</i>	432
VI.2.2	El crecimiento periódico, <i>ip</i>	432
VI.2.3	Relación entre las curvas de rendimiento y crecimiento	434
VI.2.4	El crecimiento medio anual, <i>ima</i>	436
VI.2.5	Crecimiento de rodal	438
VI.2.6	Puntos de culminación de crecimiento	440
VI.3	PORCENTAJES DE CRECIMIENTO	445
VI.3.1	Fórmulas de interés	445

VI.3.2	Fórmulas de aproximación	448
VI.4	INFORMACION BASICA DE CRECIMIENTO	451
VI.4.1	Análisis de tallo	451
VI.4.2	Tarugos de incremento	455
VI.4.3	Parcelas permanentes	455
VI.5	MODELOS DE CRECIMIENTO Y TABLAS DE RENDIMIENTO	455
VI.5.1	Tablas de rendimiento	456
VI.5.1.1	Tablas de rendimiento normales	457
VI.5.1.2	Tablas de rendimiento empíricas	458
VI.5.1.3	Tablas de rendimiento de densidad variable	458
VI.5.2	Modelos de rodal	459
VI.5.2.1	Modelos agregados de rodal	461
VI.5.2.2	Modelos de árbol individual	461
VI.5.3	Compatibilidad y funciones biológicas	462
VI.5.4	Funciones de crecimiento principales	462
VII.	USO DE FOTOGRAFIA AEREA EN INVENTARIOS FORESTALES	467
VII.1	FOTOGRAFIA AEREA COMO SISTEMA DE INFORMACION	468
VII.1.1	Ventajas y limitaciones de las fotografías aéreas	469
VII.1.2	Escala de las fotografías aéreas	469
VII.1.2.1	Concepto de escala	469
VII.1.2.2	Determinación de la escala	470
VII.1.2.3	Otros métodos para determinar la escala	471
VII.1.3	Estereoscopía	473
VII.1.3.1	Visión estereoscópica y fotografía aérea	474
VII.1.3.2	Instrumentos para la observación tridimensional	475
VII.2	FOTOGRAFIA AEREA E INVENTARIOS FORESTALES	475
VII.2.1	Información proveniente de un proceso de fotointerpretación	477

tabla de contenido

VII.2.2	Reconocimiento de especies y tipos forestales	480
VII.2.3	Organización de un proceso de fotointerpretación	480
VII.2.3.1	Definición de objetivos	480
VII.2.3.2	Recopilación de información básica	480
VII.2.3.3	Fotointerpretación preliminar	481
VII.2.3.4	Planificación y ejecución de campaña de terreno	481
VII.2.3.5	Fotointerpretación y delineamiento definitivo	481
VII.2.4	Manipulación de fotografías	482
VII.2.5	Información fotodendrométrica	483
VII.2.6	Cubicación aerofotogramétrica. Métodos de estimación del volumen	486
VII.2.6.1	Comparación visual	486
VII.2.6.2	Tablas de volumen para uso con fotografías aéreas	486
VII.2.6.3	Tablas de volumen para árboles individuales	486
VII.2.6.4	Tablas de volumen de rodal	487
VII.3	PRODUCCION DE CARTOGRAFIA FORESTAL	487
VII.3.1	Mosaicos controlados	488
VII.3.2	Actualización de cartografía restituida	488
VII.3.3	Restitución aerofotogramétrica	489
VII.3.4	Ortofotografía	489
VII.3.4.1	Ventajas del uso de ortofotomapas	490
VII.3.5	Presentación de la cartografía forestal	491
VII.3.6	Mediciones de superficie	492
VII.4	SISTEMAS DE INFORMACION GEOGRAFICOS (SIG)	492
VII.4.1	Ambiente computacional y SIG	493
VII.4.2	Elementos de un SIG	493
VII.5	SISTEMA DE POSICIONAMIENTO GLOBAL SATELITAL (GPS)	498
VII.5.1	Descripción del sistema GPS	498
VII.5.2	Configuración del sistema GPS	499

VII.5.3	Bases del sistema	499
VII.5.4	Metodologías de trabajo	500
VII.5.5	Precisión	500
VII.5.6	Sistemas de coordenadas	501
VII.5.7	GPS y posproceso	501
BIBLIOGRAFIA		503

I. INTRODUCCION

Por mensura forestal se conoce aquella ciencia que se ocupa de la medición del bosque y sus productos. Representa en último término la aplicación de los principios básicos de matemáticas, geometría y física a la solución de los problemas planteados en la medición y estimación tanto de la madera en pie como tumbada, sustentada especialmente en la metodología estadística.

Se puede afirmar que hoy por hoy los métodos estadístico-matemáticos son el elemento más importante de la mensura forestal junto a los espectaculares avances de la informática.

I.1 CONTENIDO

El texto comprende seis capítulos luego de una introducción general que incluye una breve revisión histórica de esta importante rama de la ciencia forestal, la descripción de la simbología normalizada adoptada internacionalmente para la mayoría de las variables y la presentación de las unidades de medidas principales y sus equivalencias utilizadas en América Latina.

La división adoptada para el libro trata de cubrir en forma ordenada los ámbitos del quehacer de la dendrometría, dasometría y epidometría a través de los siguientes capítulos:

- Medición de árboles individuales
- Medición de rodales
- Sitio y productividad
- Densidad y estructura
- Rendimiento y crecimiento
- Uso de fotografías aéreas

El libro *Holzmesslehre*, en su versión alemana original, tiene como una de sus principales fortalezas la gran variedad de técnicas dasométricas y dendrométricas para determinar parámetros de árboles y rodales. El tema de los diseños muestrales, en cambio, no se encuentra desarrollado con igual propiedad, siendo de particular importancia en la mensura de bosques extensos y de difícil acceso y donde la frecuente carencia de recursos obliga a adoptar técnicas de máxima eficiencia. En mérito a lo anterior es que en esta edición se dio especial énfasis a los sistemas de muestreo que se aplican en los inventarios forestales con un completo análisis tanto de sus fundamentos teóricos como de su aplicación práctica ejemplificada a través de ejercicios resueltos.

En relación con el uso de fotografías aéreas es importante mencionar que, si bien el tema de los sensores remotos como imágenes de satélite y similares es de gran relevancia en la actualidad, su tratamiento es tan largo que requeriría la preparación de otro texto.

Esta nueva estructura del libro, algo diferente del texto alemán de Prodan, se adapta más a los programas de educación forestal que se imparten en nuestro continente americano. Este libro, como su original, está destinado al estudiante forestal como texto de estudio y al práctico forestal que lo puede utilizar como documento de apoyo y consulta permanente en su ejercicio profesional.

I.2 REVISION HISTORICA

Los principios de la Mensura Forestal se remontan a la Europa de fines del siglo XVIII. El problema inicial fue la cubicación del árbol como individuo y luego de la masa boscosa. Las fórmulas básicas para la determinación de volumen de secciones fustales fueron introducidas por ÖTTELT (1765), KRÜNITZ (1781) y otros.

PAULSEN (1795) desarrolla la primera fórmula empírica para determinar rendimientos y COTTA (1804) construye la primera tabla de volumen.

KLAUPRECHT (1846) complementa y publica la teoría de los factores de forma desarrollada también por PAULSEN años antes.

En un libro publicado en 1852, HEYER fue uno de los primeros en plantear las diferentes relaciones principales entre las variables diámetro, altura y volumen.

Problemas posteriores que preocuparon a los investigadores en esta disciplina fueron las funciones de crecimiento y muy especialmente las técnicas de inventario que dieron origen a los sistemas de muestreo a fines del siglo XVIII, pero que sólo se aplicaron a principios del siglo XX junto a la adopción definitiva de las técnicas matemático-estadísticas. Una revolución en los métodos muestrales lo constituyó el método relascópico de BITTERLICH (1952).

El período último se ha caracterizado por su desarrollo sostenido en la aplicación de técnicas matemático-estadísticas, el acelerado avance tecnológico en las herramientas computacionales que hoy están al servicio de esta ciencia y su cada vez más estrecha relación con otras disciplinas forestales tales como silvicultura, manejo, política y economía forestal.

I.3 SIMBOLOGIA

La Unión Internacional de Organizaciones de Investigación Forestal (IUFRO), a través de su documento «La normalización de los símbolos en dasometría» publicado en 1969, propuso un conjunto de símbolos para representar las principales variables utilizadas en Mensura Forestal. Esta simbología fue adoptada en su mayoría por este texto en un esfuerzo por contribuir al éxito de esta importante iniciativa que además facilitará la comprensión por parte de aquellos lectores que no dominan el idioma español.

La lista de símbolos generales recomendados por IUFRO y utilizados en este libro son los siguientes:

c	=	circunferencia o perímetro
d	=	diámetro a 1.3 m de altura
h	=	altura total
g	=	área basal
v	=	volumen
b	=	espesor de corteza
t	=	edad
i	=	crecimiento
k	=	cuociente de forma
f	=	factor de forma
n	=	número
p	=	tasa de crecimiento o interés

Estas letras minúsculas están dispuestas para las variables a nivel de árbol individual, mientras que las mismas letras mayúsculas están reservadas para las variables representativas de rodales.

Las mediciones sin corteza se individualizan con el subíndice u ; aquellas efectuadas a nivel de tocón con el subíndice st .

Otros símbolos de uso frecuente son para árboles y/o rodal según sea el caso:

$\overline{D}$	=	diámetro medio aritmético
D_x	=	diámetro del árbol de área basal media
$d_{0,i}$	=	diámetro a 0.i de la altura desde el suelo
d_j	=	diámetro a j metros desde el suelo. Se usa también frecuentemente para representar el diámetro de la j - ésima sección
$\overline{H}$	=	altura media aritmética
H_g	=	altura del árbol de área basal media
H_{dom}	=	altura dominante
H_L	=	altura de LOREY
i_d	=	crecimiento anual corriente en diámetro
i_g	=	crecimiento anual corriente en área basal

introducción

i_h	=	crecimiento anual corriente en altura
i_v	=	crecimiento anual corriente en volumen
k_{0i}	=	cuociente de forma verdadero
k_j	=	cuociente de forma falso
$f_{0.1}$	=	factor de forma verdadero
$f_{1.3}$	=	factor de forma falso

I.4 UNIDADES DE MEDIDA

Para la medición del bosque y sus productos coexisten en América Latina distintos sistemas de medidas.

En general en todos los países de la región se está incorporando el sistema métrico decimal, sin embargo, especialmente en lo concerniente a unidades de superficie y también volúmenes de madera, se encuentran en uso unidades de los sistemas británico y español.

A continuación se proporcionan algunas equivalencias para las unidades de longitud, área y volumen más ampliamente usadas.

I.4.1 Longitud

Multiplicar	por	para obtener
Centímetros	0.01	Metros
	10	Milímetros
	0.3937	Pulgadas
	0.03281	Pies
	0.01094	Yardas
	0.01197	Varas
Kilómetros	1000	Metros
	100000	Centímetros
	0.6214	Millas
	49.71	Cadenas
	1093.61	Yardas
	1197.60	Varas
	239.52	Leguas
	3281	Pies

Longitud (continuación)

Multiplicar	por	para obtener
Metros	100	Centímetros
	0.001	Kilómetros
	1000	Milímetros
	3.281	Pies
	39.37	Pulgadas
	1.197	Varas
	$6.2137 \cdot 10^{-4}$	Millas
	1.094	Yardas
	0.0497	Cadenas
	0.2395	Leguas
Pies	30.48	Centímetros
	0.3048	Metros
	12	Pulgadas
	0.3333	Yardas
	0.3646	Varas
	0.0730	Leguas
Pulgadas	2.54	Centímetros
	0.0254	Metros
	0.08333	Pies
	0.0386	Varas
	0.0278	Yardas
Varas	0.8350	Metros
	32.91	Pulgadas
	2.7474	Pies
	0.9132	Yardas
	0.2	Leguas
	0.04155	Cadenas
Yardas	0.9144	Metros
	3	Pies
	36	Pulgadas
	1.094	Varas
	0.219	Leguas
	0.04545	Cadenas

introducción

Longitud (continuación)

Multiplicar	por	para obtener
Leguas	4.175	Metros
	13.7	Pies
	164.4	Pulgadas
	5	Varas
	4.5625	Yardas
	0.2075	Cadenas
Cadenas	20.1168	Metros
	66	Pies
	22	Yardas
	24	Varas
Millas	1.609	Kilómetros
	1609	Metros
	80	Cadenas
	385.4	Leguas
	1760	Yardas
	1925	Varas
Cuerdas 40 varas	40	Varas
	1.662	Cadenas
	33.400	Metros
	109.698	Pies
	36.566	Yardas
Cuerdas 28 varas	28	Varas
	1.163	Cadenas
	23.380	Metros
	76.789	Pies
	25.596	Yardas
Cuerdas 25 varas	25	Varas
	1.039	Cadenas
	20.875	Metros
	68.561	Pies
	22.854	Yardas

I.4.2 Superficie

Multiplicar	por	para obtener
Acres	4047	Metros²
	0.405	Hectáreas
	10	Cadenas²
	0.579	Manzanas
	0.08968	Caballerías
	3.618	Cuerdas 40 varas²
	7.385	Cuerdas 28 varas²
	9.624	Cuerdas 25 varas²
	43560	Pies²
Centímetros²	0.0001	Metros²
	100	Milímetros²
	1.076•10⁻³	Pies²
	0.155	Pulgadas²
Hectáreas	2.471	Acres
	10000	Metros²
	0.01	Kilómetros²
	24.71	Cadenas²
	1.4342	Manzanas
	0.02216	Caballerías
	8.944	Cuerdas 40 varas²
	18.253	Cuerdas 28 varas²
	28.897	Cuerdas 25 varas²
Kilómetros²	0.64	Cuadras
	247.1	Acres
	100	Hectáreas
	1.0•10⁻⁶	Metros²
	0.3861	Millas²
	64	Cuadras
Metros²	2.471•10⁻⁶	Acres
	10.76	Pies²
	1.550	Pulgadas²
	0.0001	Hectáreas
	1.196	Yardas²
	1.432	Varas²

introducción

Superficie (continuación)

Multiplicar	por	para obtener
Pies ²	2.296•10 ⁻⁵	Acre
	0.929•10 ⁻⁵	Hectáreas
	0.929	Metros ²
	0.1111	Yardas ²
	0.133	Varas ²
Caballerías	45.03	Hectáreas
	111.27	Acre
	64.58	Manzanas
	403.125	Cuerdas 40 varas ²
	838.50	Cuerdas 28 varas ²
	1032	Cuerdas 25 varas ²
	1112.7	Cadenas ²
	28.82	Cuadras
Manzanas	0.69874	Hectáreas
	1.726	Acre
	0.01568	Caballerías
	6.25	Cuerdas 40 varas ²
	13.0	Cuerdas 28 varas ²
	16.0	Cuerdas 25 varas ²
	282.78	Cadenas ²
	1.0918	Cuadras
Cuerdas 40 varas ²	0.1337	Hectáreas
	0.3306	Acre
	0.16	Manzanas
	0.00248	Caballerías
	2.16	Cuerdas 28 varas ²
	2.56	Cuerdas 25 varas ²
	54.1	Cadenas ²
	0.2089	Cuadras
Cuadras	15625	Metros ²
	1.5625	Hectáreas
	3.8609	Acre
	2.24	Manzanas
	0.03462	Caballerías

I.4.3 Peso

Multiplicar	por	para obtener
Toneladas métricas	1000	Kilogramos
Kilogramos	1000	Gramos
	2.20	Libras
	35.27	Onzas
Quintales	46	Kilogramos
	4	Arrobas
	1600	Onzas
	0.5	Cargas
	101.47	Libras
	0.46	Quintales métricos
	0.9055	Quintales avoirdupois
Cargas	92	Kilogramos
	2	Quintales
	0.92	Quintales métricos
	0.552	Quintales avoirdupois
	8	Arrobas
	200	Libras
Quintales métricos	100	Kilogramos
	2.17	Quintales
	1.968	Quintales avoirdupois
	8.7	Arrobas
	220.46	Libras
	1.087	Cargas
	3526.21	Onzas
Libras	0.4536	Kilogramos
	453.6	Gramos
	16	Onzas
Onzas	28.359	Gramos
Arrobas	11.5	Kilogramos
	400	Onzas
Quintales avoirdupois	50.80	Kilogramos
	112	Libras

introducción

Peso (continuación)

Multiplicar	por	para obtener
Quintales avoirdupois	4.417	Arrobas
	1766.8	Onzas
	3200	Cargas
	0.508	Quintales métricos
	1.1043	Quintales

I.4.4 Volumen madera aserrada

Multiplicar	por	para obtener
Metros ³	35.314	Pies ³
	42.37	Pulgadas madereras
	423.77	Pies madereros
	48.5	Pulgadas pineras
Pies ³	0.0283	Metros ³
	1.2	Pulgadas madereras
	12	Pies madereros
	1.37	Pulgadas pineras
Pulgadas pineras (Chile)	0.0206	Metros ³
1" • 10" • 10.5'	0.73	Pies ³
	0.875	Pulgadas madereras
	8.75	Pies madereros
Pulgadas madereras (Chile)	0.0236	Metros ³
1" • 10" • 12'	0.833	Pies ³
	1.14	Pulgadas pineras
	10	Pies madereros
Pies madereros *	0.00236	Metros ³
1" • 1' • 1'	0.0833	Pies ³
	0.1	Pulgadas madereras
	0.114	Pulgadas pineras
	144	Pulgadas ³

* También llamado pie tablar o pie cuadrado.

I.4.5 Volumen madera arrumada o apilada

Multiplicar	por	para obtener
Metros estéreo 1 m • 1 m • 1 m	1 0.60 - 0.75	Metros ³ en trozas Metros ³ sólidos
Metros ruma 1 m • 1 m • 2.44 m	1.66 1.109 2.217 0.6734 0.5388	Metros ³ sólidos Metros Biobio Metros Masisa Cuerdas cortas Cuerdas largas
Metros Biobio (Chile) 1 m • 1 m • 2.20 m	1.5 0.9017 2 0.61035 0.4855	Metros ³ sólidos Metros ruma Metros Masisa Cuerdas cortas Cuerdas largas
Metros Masisa (Chile) 1 m • 1 m • 1.10 m	0.75 0.451 0.5 0.3125 0.25	Metros ³ sólidos Metros ruma Metros Biobio Cuerdas cortas Cuerdas largas
Cuerdas cortas 4' • 4' • 8'	2.4 1.4848 1.6384 3.2 0.7989	Metros ³ sólidos Metros ruma Metros Biobio Metros Masisa Cuerdas largas
Cuerdas largas 4' • 4' • 10'	3 1.856 2.059 4 1.2517	Metros ³ sólidos Metros ruma Metros Biobio Metros Masisa Cuerdas cortas

II. MEDICION DE ARBOLES INDIVIDUALES

Toda medición implica la comparación de un elemento u objeto con un patrón estándar. Cualquier determinación de características tipo de un individuo o de un conjunto de individuos es considerada una medición cuando existe un contacto entre el instrumento y el objeto, contacto que puede ser físico, óptico o de otra naturaleza.

Al tratar la mensura de individuos, o conjunto de individuos, se debe diferenciar expresamente entre mediciones y estimaciones; este último concepto se aplicará a la determinación de un valor o dimensión mediante un estimador, que también es un instrumento, pero de tipo estadístico-matemático.

Las definiciones anteriores de los conceptos medición y estimación permiten aclarar situaciones ambiguas como lo son las mal llamadas estimaciones oculares, que en realidad corresponden a una medición, aunque el instrumento ojo-mente sea impreciso.

II.1 MEDICION DE ATRIBUTOS DE ARBOLES Y PRODUCTOS

Estas mediciones pueden realizarse por comparación directa del patrón estándar con el objeto, y en ese caso son llamadas mediciones directas; o por medio de soluciones geométricas o trigonométricas, en cuyo caso son denominadas indirectas, como los sistemas ópticos de medición.

II.1.1 Medición de diámetro

La medición de diámetro es la operación más corriente y sencilla de mensura. En árboles en pie, la altura normal del diámetro representativo del árbol es 1.3 m desde el nivel del suelo, medidos sobre la pendiente. Por la altura de medición, se denomina diámetro a la altura de pecho.

Otros puntos de medición de diámetro de tipo comercial en árboles en pie son la altura del tocón, mitad del fuste, cualquier punto sobre el fuste, diámetro a la altura de comienzo de copa, diámetros límites comerciales, etc. En trozas normalmente se miden los diámetros extremos y eventualmente diámetros intermedios.

Para la medición directa o indirecta de diámetros de árboles en pie o de trozas hay varios instrumentos disponibles basados en diferentes principios.

a) Forcípula

Se compone de una barra graduada y dos brazos paralelos. Uno de los brazos es fijo, mientras que el otro se desplaza libremente sobre la barra.

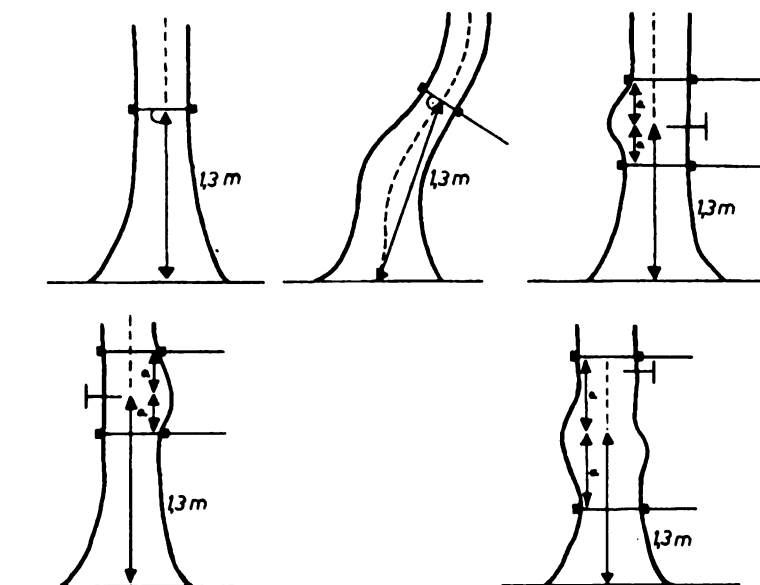


Figura 2-1. Punto de medición del diámetro a la altura de pecho

Una forcípula debe cumplir las siguientes condiciones:

- i) La barra debe ser recta, suficientemente larga y estable, con una graduación precisa y legible.
- ii) Los brazos deben estar en un plano, ser perpendiculares a la barra y paralelos entre sí.
- iii) El movimiento del brazo debe realizarse con facilidad, pero en ningún caso debe estar suelto.

Dos son los errores que se cometen con mayor frecuencia:

- La forcípula no se mantiene perpendicular al eje longitudinal del árbol; los errores son en este caso de signo positivo (sobremedición).
- El brazo móvil suelto ha perdido su paralelismo con el brazo fijo, en cuyo caso el error de medición es sistemático y de signo negativo (submedición).

Existen diferentes modelos que son variedades de la forcípula de brazos paralelos y se basan en distintos principios. En su mayoría, los fundamentos para la graduación y construcción de forcípulas se desarrollaron en el siglo XIX y fueron acuciosamente descritos por MÜLLER (1899).

- **Forcípula finlandesa.** Consiste en un brazo recto y otro parabólico, graduado de forma tal que el diámetro se puede leer directamente en el punto de contacto con el árbol. Se usa especialmente para la medición directa de diámetros superiores, para lo cual se monta en varas de hasta 8 m de longitud.

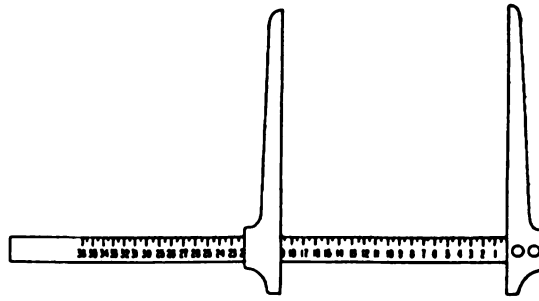


Figura 2-2. Forcípula de brazos paralelos (de HUSCH *et al.* 1982)

Forcípula de horcaja. Tiene sólo dos brazos rectos en ángulo y es adecuada solamente para diámetros pequeños.

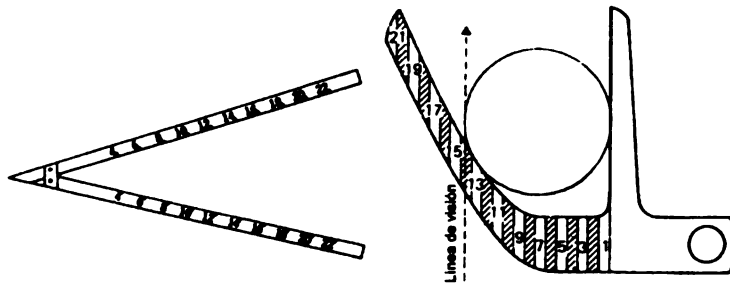


Figura 2-3. Forcípulas de horcaja y finlandesa (de HUSCH *et al.* 1982)

b) Huincha o cinta diamétrica

Es de acero, material plástico o fibra de vidrio altamente estable y está graduada en unidades π . Permite medir directamente el diámetro, al rodear el tronco a la altura deseada, cuidando que ella se ubique en un plano exactamente perpendicular al eje longitudinal del fuste.

A partir de la fórmula de la circunferencia

$$c = \pi \cdot d \quad (2-1)$$

se lee directamente el diámetro

$$d = \frac{c}{\pi} \quad (2-2)$$

El uso de esta cinta fue muy generalizado en países europeos en el siglo XVIII y hasta inicios del XIX, pero la cinta fue desplazada por la forcípula.

Las grandes ventajas de este instrumento son: su facilidad de transporte y de comprobación de estado, el amplio rango de dimensiones para las cuales es útil y la precisión con que permite efectuar las mediciones. Esta última ventaja lo hace recomendable para parcelas experimentales y estudios de crecimiento (ASSMANN 1957, 1961; MÜLLER 1958; HUMMEL *et al.* 1959).

Su principal desventaja es que, en secciones no circulares, que son la mayoría, sobrestima sistemáticamente el diámetro.

c) **Vara Biltmore**

Un medio práctico para la medición rápida y cómoda de diámetros en árboles en pie es la vara Biltmore, cuyo principio óptico fue desarrollado por SCHENCK, BELYEA (1932), PRODAN (1957), y se desprende de la Figura 2-4. Dependiendo de la distancia S desde el ojo del observador A al árbol y de los dos radios OT_1 y OT_2 , se puede leer directamente el diámetro sobre la vara graduada CD .

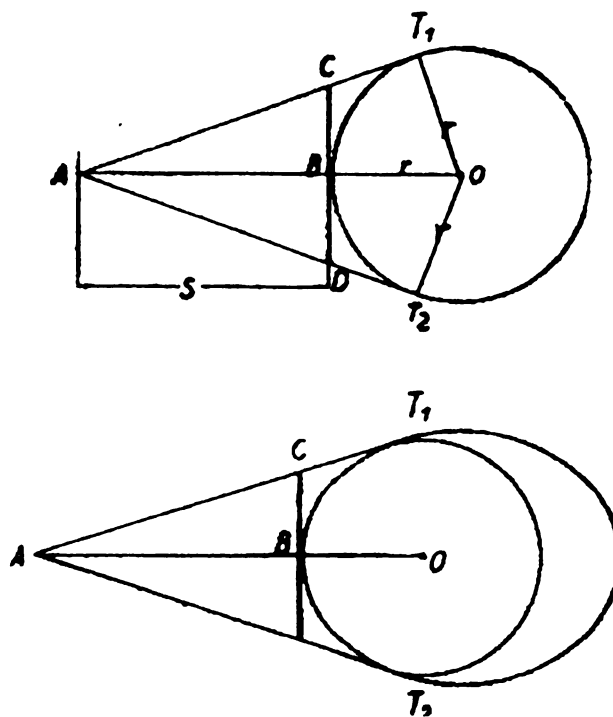


Figura 2-4. Principio de la vara Biltmore

De la equivalencia de los triángulos ABC y AT_1O se obtiene que:

$$\frac{S}{AT_1} = \frac{CB}{r} \quad (2-3)$$

$$\text{Como } AT_1 = \sqrt{(S+r)^2 - r^2} \text{ y } r = \frac{1}{2}d \quad (2-3a)$$

resulta

$$\overline{CD} = \frac{2Sr}{\sqrt{S^2 + 2rS}} = \frac{Sd}{\sqrt{S^2 + Sd}} = \frac{Sd^2}{S + d} \quad (2-4)$$

Reemplazando diferentes valores de d en la fórmula, se obtienen las graduaciones de la vara Biltmore. En el Cuadro 2-1 se incluye la graduación para diferentes largos de brazos. Para secciones que difieren fuertemente de una circunferencia, los errores de medición pueden ser muy grandes. Sin embargo, trabajando en forma correcta, con la longitud de brazo correspondiente y realizando varias mediciones se posibilita una compensación de errores.

Cuadro 2-1. Graduación de la vara Biltmore (según KRENN)

Para	AB (largo de brazos)			Para	AB (largo de brazos)		
	59	65	71 cm		59	65	71 cm
d				d			
2	1,97	1,97	1,97	32	25,77	26,20	26,57
4	3,87	3,88	3,89	34	27,08	27,55	27,96
5	4,80	4,82	4,83	36	28,37	28,88	29,33
6	5,72	5,74	5,76	38	29,64	30,19	30,67
8	7,51	7,55	7,58	40	30,88	31,47	31,99
10	9,25	9,31	9,36				
12	10,94	11,02	11,10	42	32,10	32,73	33,29
14	12,59	12,69	12,80	44	33,30	33,97	34,57
16	14,19	14,33	14,46	46	34,48	35,19	35,83
18	15,75	15,93	16,08	48	35,64	36,40	37,07
20	17,28	17,49	17,67	50	36,79	37,59	38,30
22	18,77	19,02	19,23	52	37,92	38,76	39,51
24	20,23	20,52	20,75	54	39,03	39,91	40,70
26	21,66	21,98	22,24	56	40,12	41,05	41,87
28	23,06	23,41	23,71	58	41,19	42,17	43,03
30	24,43	24,82	25,15	60	42,25	43,27	44,17
				65	44,84	45,96	46,97
				70	47,34	48,57	49,68
				75	49,76	51,10	52,30
				80	52,12	53,56	54,86

medición de árboles individuales

La variable incierta en la fórmula (2-4) es el largo del brazo. Esta incertidumbre puede disminuirse calculando individualmente las graduaciones sobre la vara. Para ello se hacen varias mediciones diamétricas con una forcípula precisa y simultáneamente, definida la distancia $AB = S$, se derivan los valores para diferentes pendientes del terreno (Cuadro 2-2).

Los valores ajustados entregan las graduaciones para el largo de brazo individual y se representan por una línea continua (Figura 2-5).

Cuadro 2-2. Mediciones para la vara Biltmore

Pendiente > 15 ‰						Plano					
$x =$ Lectura en la forcípula			$y =$ Lectura sobre la regla CD			$x =$ Lectura en la forcípula			$y =$ Lectura sobre la regla CD		
x		y	x		y	x		y	x		y
Forcípula			Forcípula			Forcípula			Forcípula		
1	19,5	16,5	21	38,5	28,5	1	46,0	32,5	21	40,0	28,0
2	23,5	20,0	22	26,5	20,0	2	47,0	31,5	22	47,0	31,5
3	48,0	32,5	23	34,5	25,5	3	18,0	14,5	23	43,5	32,0
4	30,5	23,5	24	46,0	31,5	4	29,0	22,0	24	34,0	24,5
5	35,0	27,5	25	33,0	23,5	5	32,5	24,0	25	52,0	33,5
6	35,5	28,5	26	38,5	29,0	6	32,0	24,5	26	22,0	18,0
7	25,5	21,0	27	53,0	38,0	7	27,5	21,0	27	51,5	33,5
8	27,0	22,0	28	28,5	22,0	8	30,5	22,5	28	27,5	22,0
9	30,0	24,4	29	32,5	25,0	9	30,0	22,0	29	41,0	31,0
10	31,0	25,0	30	46,5	44,0	10	30,0	21,0	30	45,0	31,0
11	39,5	31,0	31	29,5	23,0	11	18,0	14,5	31	41,0	30,5
12	26,0	21,0	32	24,5	20,0	12	32,0	23,0	32	24,0	20,0
13	28,0	22,5	33	42,5	31,5	13	27,0	20,0	33	40,0	31,0
14	30,5	23,0	34	24,5	19,5	14	46,0	29,5	34	30,0	23,0
15	39,5	28,5	35	42,0	29,5	15	45,0	31,0	35	32,5	24,5
16	26,5	20,5	36	24,0	18,0	16	49,5	32,5	36	21,5	17,0
17	44,0	31,5	37	21,5	17,0	17	58,0	38,0	37	52,0	33,5
18	37,0	28,5	38	45,5	34,5	18	39,0	28,5	38	34,0	25,0
19	30,5	23,0	39	43,5	31,5	19	21,0	16,0	39	26,0	20,0
20	28,5	22,5	40	48,5	33,5	20	38,0	27,0	40	42,0	30,0

Otras variantes de forcípulas son aquellas que entregan directamente el área basal (WEISE 1880; BITTERLICH 1959; HELLRIGL 1960), y que permiten obtener en forma más directa el árbol de área basal media; forcípulas para cubicación, que miden el contenido de madera rolliza directamente para diferentes clases de longitud. Hoy son utilizadas por la administración forestal de Württemberg, donde ya en 1865 WALDRAFF la había introducido (MÜLLER 1899).

d) Forcípula de tarifa o sector de diámetro de Bitterlich

Corresponde a una mejora sustancial del principio de la vara Biltmore y simultáneamente equivale a una nueva versión óptica de la medición angular de TREFFURTH, MÜLLER (1899), BITTERLICH (1952, 1959).

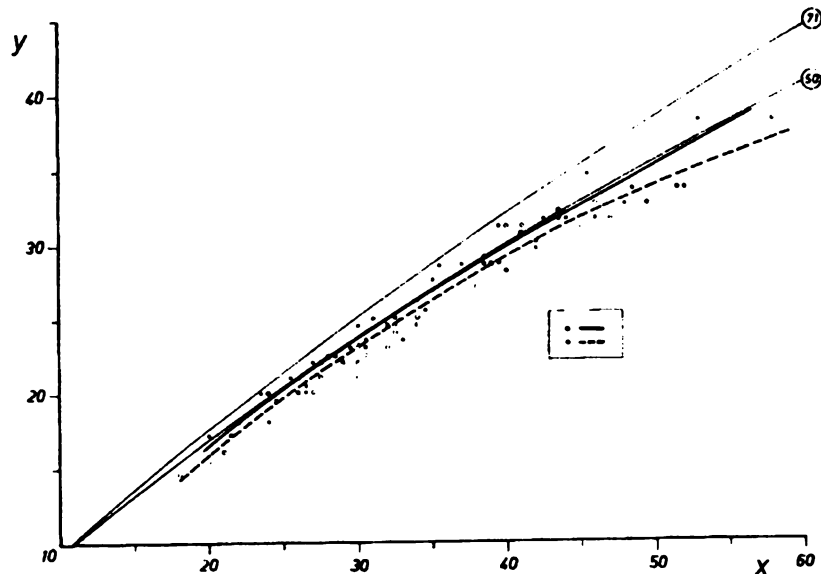


Figura 2-5. Relación entre la graduación y de la vara Biltmore y el diámetro x medido con forcípula para largos de brazo de 59 y 71 cm

Consiste en dos brazos que subtienden un ángulo de 135° . Ambos brazos deben encontrarse en contacto con el fuste. Por construcción, estos brazos captan mejor la sección transversal del árbol, y los errores por irregularidades disminuyen. El brazo curvo está graduado en centímetros para diámetro, dm^2 para área basal y en m^3 para volumen (Figuras 2-6 y 2-7).

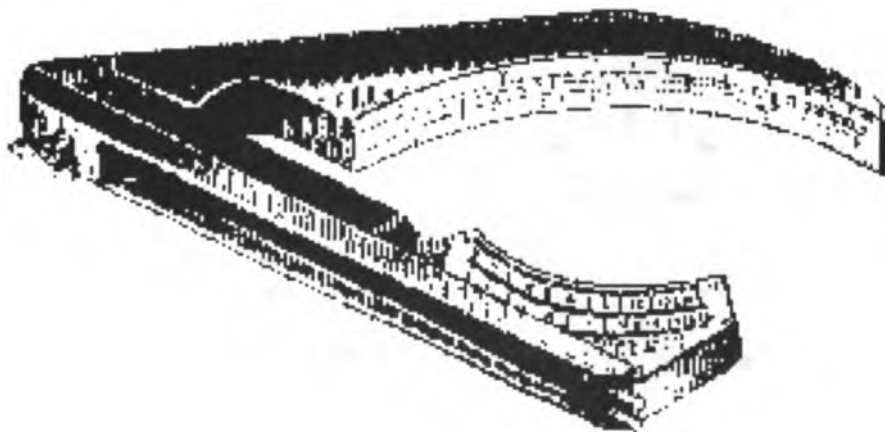


Figura 2-6. Sector de diámetro de Bitterlich



Figura 2-7. Escala del sector de diámetro de Bitterlich. La escala superior (S1) entrega el diámetro en centímetros, la central (S2) entrega el área basal en decímetros cuadrados y la inferior, el volumen en decimos de m³

e) Dendrómetros y forcípulas ópticas

Existe una serie de instrumentos ópticos diseñados para medir diámetros, basados en el principio taquimétrico. Son aptos para mediciones a distancia y especialmente adecuados para efectuar mediciones a diferentes alturas sobre el suelo. Estos instrumentos proyectan un ángulo α , que debe abarcar exactamente el fuste del árbol en el punto de medición, conocida la distancia al árbol E .

Para un ángulo α tan pequeño el diámetro se determina de acuerdo con la siguiente función:

$$d = \ell \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \quad (2-5)$$

Cuando las mediciones se hacen en altura sobre el fuste o en un terreno inclinado que tiene un ángulo de elevación θ , entonces procede la determinación del diámetro por la siguiente función:

$$d = 2 \cdot \ell \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \sec \theta \quad (2-6)$$

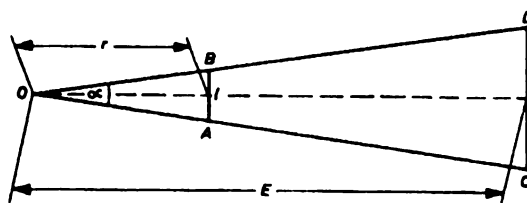


Figura 2-8. Principio taquimétrico del dendrómetro

Por la distancia desde el observador al árbol el ángulo α es muy pequeño de tal forma que prácticamente $\operatorname{sen} \alpha / 2 \approx \operatorname{tg} \alpha / 2$.

Inspirados en este principio, hay desde instrumentos muy sencillos hasta sofisticados y evolucionados equipos. El diatrombo es un instrumento básico de ángulo variable. La variación del ángulo se logra al desplazarse una placa o estadía de ancho fijo a lo largo del instrumento.

Desde el siglo pasado, se conocen y han descrito en detalle dendrómetros, construidos para este fin con diversos diseños y distintos grados de precisión, FIRAT (1958), GIERUSZINSKI (1959), KORF (1953), MICHAÏLOFF (1952), MÜLLER (1899), SPURR (1952) y TISCHENDORF (1927).

Entre los más importantes están el pentaprisma de Wheeler, basado en prismas pentagonales diseñados para obtener errores máximos de 0.25 cm desde 15 metros de distancia y factible de montarse sobre trípode (WHEELER 1962); el dendrómetro Barr and Stroud; el Zeiss Teletop; el relascopio y telerrelascopio de Bitterlich (BITTERLICH 1959); y el distanciómetro de Stöhr (STÖHR 1959) (Figura 2-8a).

El Zeiss Teletop permite mediciones de diámetro con una exactitud de 1.5 a 2 mm, pero su uso está limitado a problemas científicos, principalmente por su alto costo y su prolongada demora en la medición (STÖHR 1959). El relascopio y el telerrelascopio de Bitterlich son sin duda, entre todas las forcípulas ópticas, las que presentan mayores ventajas, ya que permiten emplear ángulos diferentes y éstos se ajustan automáticamente al variar el ángulo de inclinación de la medición para una misma distancia horizontal al objeto.

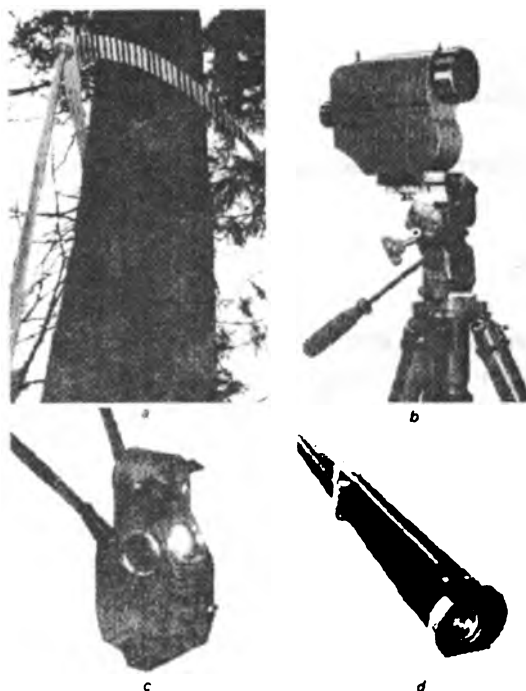


Figura 2-8a. Instrumentos para la medición de diámetros en altura a = Forcípula finlandesa, b = Telerrelascopio, c = Relascopio y d = Pentaprisma

II.1.2 Medición de diámetros a distintas alturas

La medición directa de diámetros a diferentes alturas hasta un máximo de ocho metros es factible a través de la forcípula finlandesa, ya descrita en la sección II.1.1, que montada sobre una vara permite una lectura directa.

La medición indirecta se efectúa a través de los dendrómetros o forcípulas ópticas mencionadas anteriormente como el Zeiss Teletop, dendrómetro Barr and Stroud, HUMMEL (1951), JEFFERS (1956), GROSENBAUGH (1963), pentaprisma de Wheeler (WHEELER 1962) y relascopio y telerrelascopio de Bitterlich (BITTERLICH 1959).

II.1.3 Medición de alturas

Dada la dificultad de emplear instrumentos de contacto o de medición directa como reglas o varas cuando las alturas sobrepasan los 8 a 10 metros, se usan en general instrumentos de tipo óptico basados en principios geométricos y trigonométricos (MÜLLER 1899; TISCHENDORF 1927).

A continuación se comentará la teoría general y se describirán los instrumentos más utilizados.

II.1.3.1 Hipsómetros basados en principios geométricos

Entre éstos se cuentan como los más comunes los hipsómetros Christen, Merritt, el suizo Klein y el danés Jal.

a) Hipsómetro Christen

El hipsómetro de Christen se fundamenta en la equivalencia de los triángulos $AC'D'$ y ACD como también de ABC y $AB'C'$ (Figuras 2-9 y 2-10).

Siendo

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} \quad (2-7)$$

y dados por construcción

$$B'C' = b = \text{constante} = 0.30m$$

$$CD = L = \text{constante} = 4.00m$$

la expresión queda:

$$\frac{b}{h} = \frac{x}{L} \text{ y } x = \frac{bL}{h} = \frac{1.2}{h} ; h = \frac{1.2}{x} \quad (2-8)$$

Donde

h = altura del árbol, m

x = el valor de la graduación en el hipsómetro, m

L = largo de la vara, m

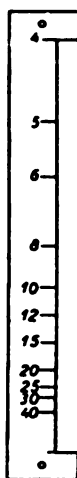


Figura 2-9. Hipsómetro Christen

Con la ayuda de la relación anterior se puede calcular para distintas alturas la graduación del hipsómetro. El hipsómetro Christen se puede construir fácilmente.

Con los valores de una regla b de 0.3 m y una vara o listón L de 4 m se obtienen los siguientes valores para x

h en m:	4	5	6	8	10	12	15	20	25	30	35	40
x en cm:	30.0	24	20	15	12	10	8	6	4.8	4	3.4	3

Para medir, el observador debe elegir una posición desde la cual pueda ver, sin moverse, la base del árbol en el extremo inferior de la regla y el ápice en el extremo superior. El hipsómetro debe estar en posición vertical. Simultáneamente se visualiza el listón y se hace la lectura de la altura correspondiente en la regla. El hipsómetro de CHRISTEN está muy difundido por su sencilla construcción y manejo.

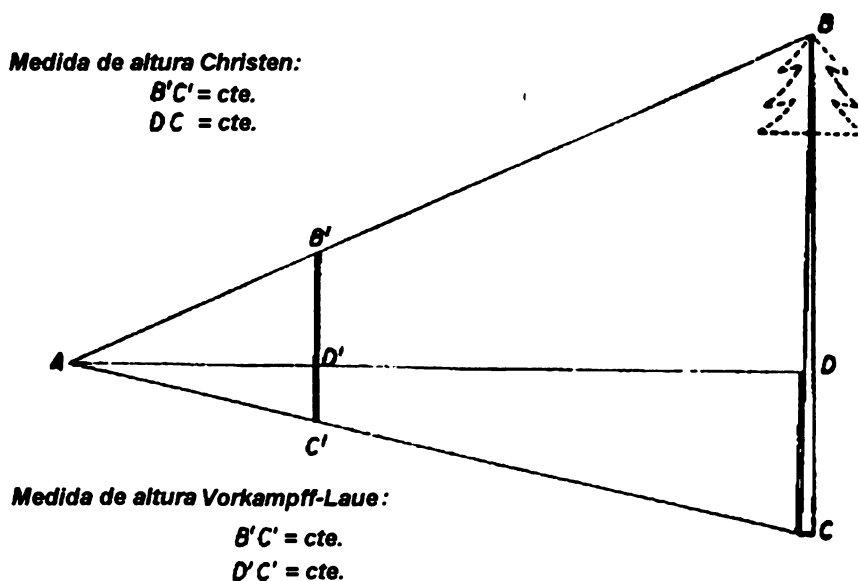


Figura 2-10. Procedimiento de medición con el hipsómetro Christen

Ventajas:

- No se requieren mediciones adicionales de distancia.
- Utiliza todo el campo visual, de modo que se requiere sólo una lectura en el instrumento.

Desventajas:

- Es difícil encontrar dentro del rodal cerrado una posición adecuada para la medición. Por lo tanto, el margen de libertad en el terreno es muy pequeño.
- Por el menor movimiento se pueden producir mediciones erróneas.
- Debido a la disminución de los intervalos de graduación, la medición de alturas se hace muy imprecisa.
- Trabajando prolijamente el hipsómetro de Christen tiene un error de $\pm 5-6\%$ de la altura.

b) Hipsómetro Vorkampff-Laue

El hipsómetro Vorkampff-Laue está construido con el mismo principio del hipsómetro de Christen y se diferencia de éste sólo por su presentación (Figura 2-10).

$$B'C' = b = \text{constante}$$

$$D'C' = x = \text{constante}$$

Asumiendo una relación constante:

$$\frac{B'C'}{D'C'} = \frac{b}{x} = \frac{10}{1} \quad (2-9)$$

Ejemplo:

$$B'C' = b = 80 \text{ cm}$$

$$D'C' = x = 8 \text{ cm}$$

entonces,

$$\frac{B'C'}{D'C'} = \frac{BC}{DC} \text{ o también } \frac{10}{1} = \frac{h}{L} \quad (2-9a)$$

$$h = 10 \cdot L$$

La magnitud $DC = L$ se puede marcar en el fuste y medir posteriormente o medir directamente sobre una mira.

El hipsómetro se puede construir en un bastón cómodamente transportable. Las ventajas y desventajas son las mismas que en el caso del hipsómetro de Christen. La precisión del instrumento, en especial para árboles altos, poniendo las marcas adecuadas exactamente en el punto visado, es mayor que la de Christen, debido a que x es constante y no disminuye sino permanece relativamente igual. Para simplificar la ubicación de un punto de medición es recomendable ubicar dos nuevas marcas en $B'C' = 40 \text{ cm}$ y $D'C' = 4 \text{ cm}$. La precisión del instrumento se puede establecer entre $\pm 4-6\%$ de la altura.

c) **Hipsómetro Merritt**

Consiste en una vara graduada, generalmente usada en conjunto con la vara Biltmore. La vara se mantiene vertical, a una distancia fija del ojo del observador y paralela al eje del

árbol. Su graduación, generalmente en términos de número de trozas de un tamaño determinado, está relacionada con el largo del brazo y la distancia al árbol (Figura 2-11).

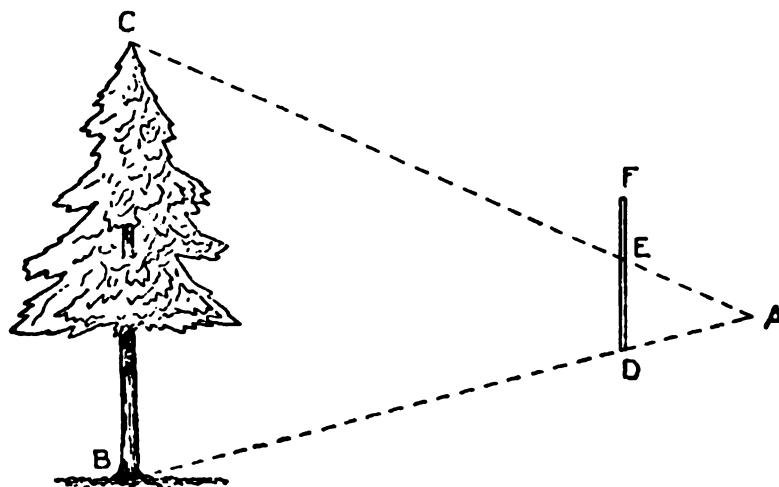


Figura 2-11. Hipsómetro Merritt (de BRUCE y SCHUMACHER 1935)

Siendo ABC y ADE triángulos semejantes

$$AD:DE = AB:BC \quad (2-10)$$

$$DE = \frac{AD \cdot BC}{AB} \quad (2-11)$$

DE es la graduación sobre la vara para una altura BC .

La mayor dificultad en el uso de este hipsómetro es mantenerlo vertical y a una distancia fija del observador. Cualquier desviación en su verticalidad y distancia al ojo genera importantes errores.

En el caso del hipsómetro danés JAL, la medición de alturas se simplifica mucho, pues ésta se lee directamente apuntando a la punta del árbol a través de una plancha de celuloide, donde se encuentra graficado un haz de líneas.

II.1.3.2 Hipsómetros basados en principios trigonométricos

Los más comunes son los hipsómetros Blume-Leiss y Haga, el nivel Abney y el clinómetro Suunto, variando sólo los mecanismos y el aspecto externo (Figura 2-13).

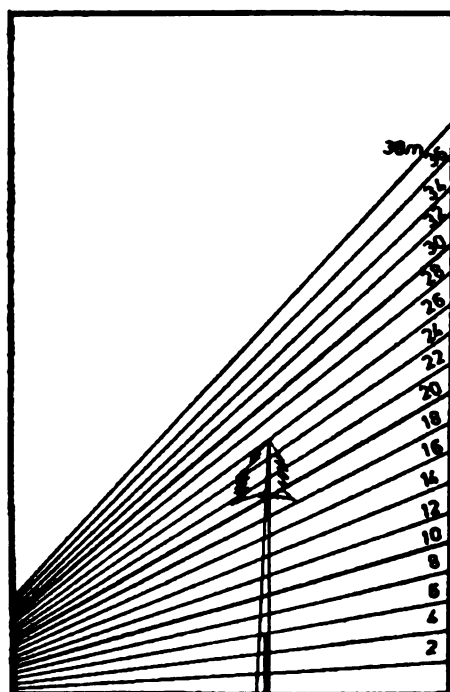


Figura 2-12. Hipsómetro danés JAL. Para un jalón de 6 m se lee una altura de 26 m

a) Hipsómetro Blume-Leiss

En el hipsómetro Blume-Leiss por un sistema pendular puede medirse el ángulo vertical α o β . Las alturas h_1 y h_2 son:

$$h_1 = E \operatorname{tg} \alpha \quad (2-12)$$

$$h_2 = E \operatorname{tg} \beta \quad (2-13)$$

donde E es la distancia horizontal desde el árbol. Según la Figura 2-14 la altura total es:

$$h = h_1 + h_2 \quad (2-14)$$

Por lo tanto, se deben hacer dos observaciones. Si ambas mediciones se encuentran al mismo lado de la horizontal, ellas se deben restar. El hipsómetro Blume-Leiss tiene un péndulo con un sistema que permite fijar los ángulos α y β automáticamente. La distancia E se puede determinar en forma óptica, mediante una mira colgada en el árbol. Con el telémetro óptico se pueden determinar distancias de 15, 20, 30 y 40 m. Los productos $E \operatorname{tg} \alpha$ o $E \operatorname{tg} \beta$ se

marcan sobre una escala de modo que las alturas h_1 y h_2 se leen directamente en función de la distancia elegida y del ángulo vertical (MÜLLER 1899).

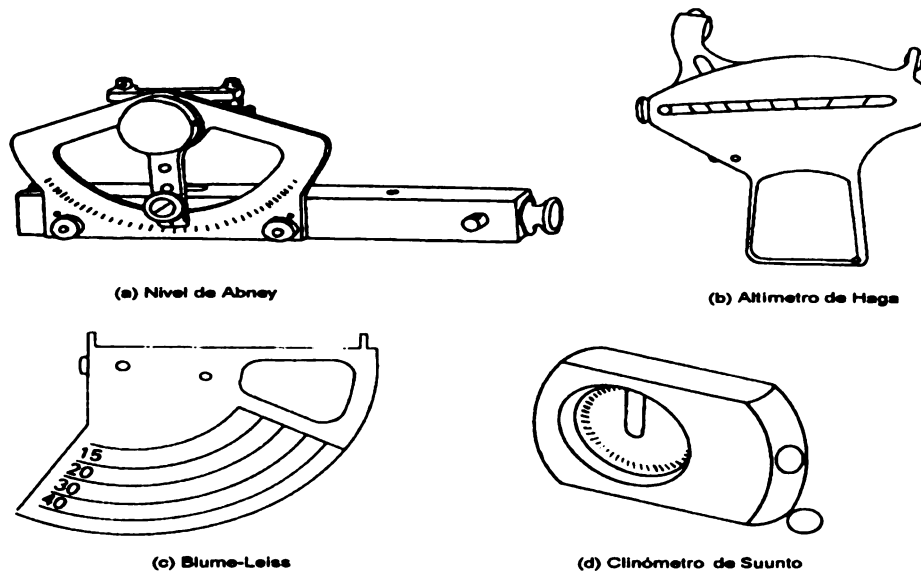


Figura 2-13. Hipsómetros basados en principios trigonométricos

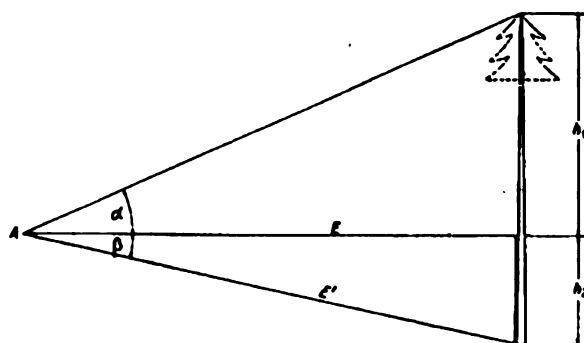


Figura 2-14. Principio trigonométrico de medición de altura

Si se tiene una distancia inclinada E' en vez de la distancia horizontal E , se hace necesario una corrección. Esta corrección se calcula en la medición taquimétrica de distancias y se debe aplicar doblemente, porque:

1. La mira forma un ángulo α con la vertical.
2. La distancia E' igualmente forma el ángulo α con la horizontal E .

Entonces la distancia corregida será $E' \cos^2 \alpha$ en vez de E' . Esta corrección está calculada en el envés del instrumento. Ella entrega la magnitud que se debe restar a la altura en función de α . Los ángulos se pueden obtener de una escala. Es aconsejable no medir en la segunda observación la base del árbol, sino el punto donde fue fijada la mira y luego sumar esta altura a la altura calculada. Las ventajas de este instrumento son una gran precisión ($\pm 1\%$) en condiciones de trabajo relativamente cómodas y la medición óptica de distancia. Se consideran como desventajas la difícil visibilidad para el telémetro, en especial dentro del rodal, y que se requieren dos observaciones, además de ser necesaria la medición de distancias.

De los cuatro instrumentos presentados en la Figura 2-14, el hipsómetro Suunto es el más compacto y el que permite un mayor rango en las distancias desde las cuales puede situarse el observador respecto del árbol. Su desventaja es que se deben realizar las actividades de apuntar y leer simultáneamente, mientras que Haga y Blume-Leiss permiten trabar el indicador de altura para una lectura posterior.

El nivel Abney es un instrumento más empleado en topografía; sin embargo, también se le usa para medir alturas. Permite mediciones muy precisas, pero su mayor inconveniente también se encuentra en la doble actividad de nivelarlo y apuntar.

Por último, el relascopio y el telerrelascopio de Bitterlich, ya mencionados en relación con la determinación de diámetros a distancia, son empleados también para mediciones de altura.

II.1.3.3 Instrumentos de última generación

Durante los últimos años han aparecido varios instrumentos para medición de diámetros y alturas, tanto directamente como a distancia, con una tecnología muy avanzada que las provee de otras muchas capacidades en el proceso de captura y procesamiento de los datos en terreno. Entre los más importantes se pueden citar la forcípula Mantax Computer, el hipsómetro Vertex y el Criterion.

a) Forcípula Mantax

Con una apariencia muy similar a una forcípula tradicional, este instrumento es un computador con una memoria de 512 KB completamente programable y de sólo un kilo de peso. Desarrollada en Suecia por la firma sueca Häglof es muy preciso, permite mediciones en el sistema métrico al milímetro, resistente a cualquier situación atmosférica y de muy fácil uso. La información registrada con este instrumento puede transmitirse directamente o vía modem a un computador personal, una impresora e incluso intercambiarse con instrumentos como el GPS (ver Sección VII.5) y el hipsómetro Vertex.

b) Hipsómetro Vertex

Este instrumento, que emplea impulsos ultrasónicos para medir, se compone de dos unidades, el hipsómetro propiamente tal y su emisor. De 500 gramos de peso en total, puede utilizarse de 0 a 50 metros de distancia del árbol objeto, con una resolución de 0.01 metros si la

medición de árboles individuales

medición se hace a menos de 20 metros. Para utilizarlo se fija el emisor al árbol y luego desde una distancia cualquiera (ojalá similar a la altura del árbol), se apunta al emisor hasta que en pantalla aparecen la distancia real y horizontal y el ángulo; luego se apunta a la copa, se oprime un botón y se lee la altura o alturas requeridas; permite registrar hasta tres alturas en una medición.

c) Criterion

Entre los nuevos instrumentos destaca éste ya que emplea tecnología láser y avanzados sistemas electrónicos para la medición de ángulos verticales (inclinación) y horizontales (azimut). El Criterion fue desarrollado por el Servicio Forestal de los EE.UU., con el fin de integrarlo a todas las operaciones de mensura de tierra y bosques. Es especialmente adecuado para medir distancias (horizontales y en pendientes), coordenadas x , y , z , y medir altura y diámetros a distancia y por lo tanto especialmente apto para delimitar unidades muestrales circulares de superficie fija o unidad de muestreo puntual horizontal. Dispone de una serie de cuatro modelos, 100, 200, 300 y 400 cuyas capacidades son crecientes.

II.1.4 Medición de corteza

Hay muchas ocasiones en que la medición de diámetro va acompañada por una medición del espesor de corteza. Para su medición se han ideado varios instrumentos siendo el más sencillo aquel que permite sacar un tarugo de corteza y medirlo directamente con una reglilla. Otros tipos muy usados son el calibrador de corteza sueco y el martillo extractor de corteza (Figura 2-14a). El símbolo de la corteza es b del inglés "bark".

La medición de corteza es recomendable hacerla en dos puntos opuestos del diámetro y promediar.

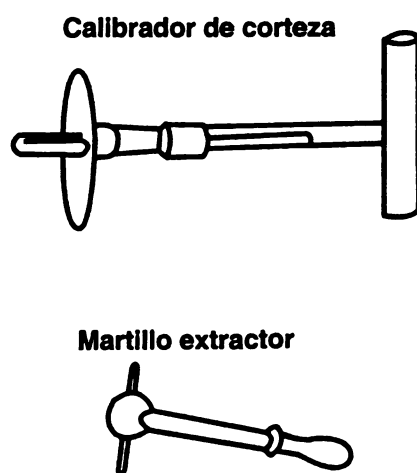


Figura 2-14a. Instrumentos de medición del espesor de corteza

II.1.5 Medición precisa de crecimiento diametral

En parcelas experimentales normalmente medidas en forma periódica cada cierto número de años, se utiliza la cinta o huincha diamétrica. Sin embargo, crecimientos en períodos mucho más cortos, de horas, días y hasta meses, no se pueden determinar con una cinta diamétrica, y es necesario utilizar otros instrumentos como microdendrómetros, dendrógrafos y dendroauxógrafos (Figura 2-15).

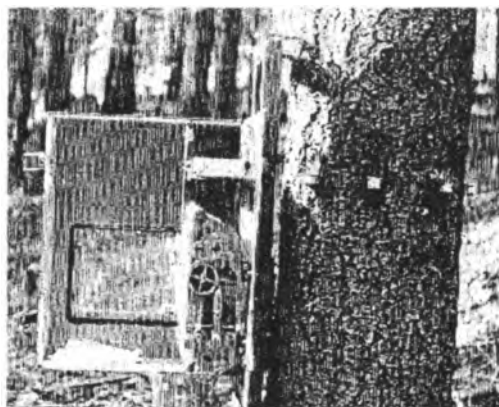


Figura 2-15. Dendroauxógrafo desarrollado por MITSCHERLICH *et al.* según el principio de FRIEDRICH (1877) En la foto se puede ver: el tipo de fijación, el mecanismo de relojería abierto y los rodillos para la cuerda de Wolfram

II.1.6 Medición de diámetro de copa

La medición del diámetro de la copa de los árboles plantea una problemática diferente. Este no puede ser medido con dendrómetros ópticos, porque el rango de diámetros que estos instrumentos permite medir es muy limitado. El diámetro de la copa se determina generalmente mediante la proyección de puntos de su contorno sobre el terreno. Hay varios instrumentos que permiten efectuar estas proyecciones; uno de ellos es el Moosehorn (GARRISON 1949). El diámetro de copa también puede determinarse en fotografías aéreas (sección VII.2.5). Una revisión de estas técnicas escapa a los propósitos de este capítulo.

En HUSCH *et al.* (1982) se hace referencia a instrumentos para determinar la proyección vertical de la copa.

II.1.7 Medición de área basal

Una de las dimensiones empleadas con mayor frecuencia para caracterizar el estado de desarrollo de un árbol es el área basal, que se define como el área de una sección transversal del fuste a 1.30 cm de altura sobre el suelo.

medición de árboles individuales

El área basal, por su forma irregular, nunca se mide en forma directa, sino que se deriva de la medición del diámetro o perímetro.

Siendo:

d = diámetro, cm

c = circunferencia, cm

g = área de la sección, cm² o m²

el área basal se obtiene a partir de las expresiones:

$$g = \frac{\pi}{4} d^2 \quad (2-15)$$

$$g = \frac{c^2}{4\pi} = \frac{c \cdot d}{4} \quad (2-16)$$

Normalmente, las secciones del fuste se alejan de la forma circular. Algunas presentan diferencias despreciables para los efectos prácticos; otras, en cambio, tienen grandes irregularidades, que en general se acentúan al aproximarse al suelo y al aumentar la edad.

El cálculo de la sección como si fuera circular a partir del perímetro sesgará siempre positivamente los diámetros, debido a que, para un perímetro dado, el círculo es la figura geométrica de mayor área posible.

II.1.8 Medición de la forma

Muchos árboles, especialmente las coníferas, se caracterizan por un fuste central definido; a este tipo de fuste se le llama excurrente. Las latifoliadas, en cambio, presentan sólo en su parte inferior hasta el comienzo de la copa un fuste definido, pero esta característica se pierde debido a la gran ramificación. A esta forma se le denomina delisquescente. Todos los árboles tienen una forma fustal típica, que varía de especie en especie, pero también depende del sitio y de la densidad del rodal.

No se puede medir la forma de un árbol o una troza como se hace con el diámetro o la altura, sino que sólo se pueden establecer parámetros o índices que la representen. El esfuerzo por obtener expresiones de forma que sean independientes de diámetro y altura ha fracasado (HUSCH *et al.* 1982). Justamente la captación de la forma se ha hecho realidad a través de la medición de diámetros a distintas alturas, y son expresiones como factores de forma, cuocientes

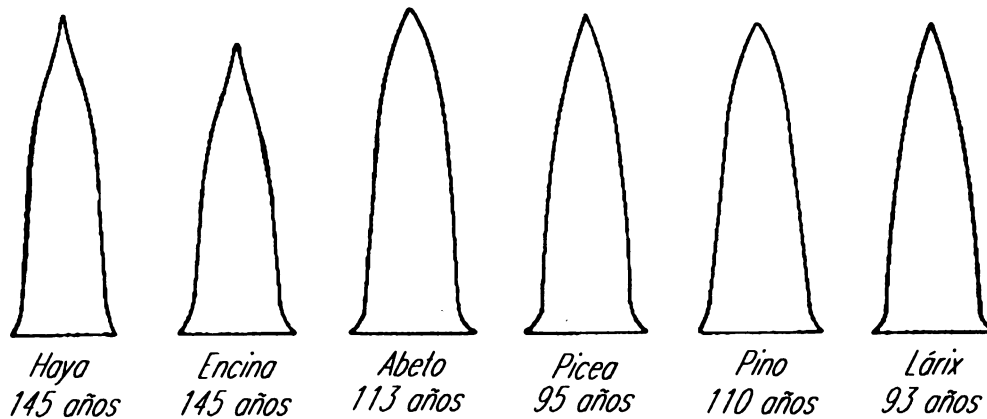


Figura 2-16. Formas promedio según GUTTENBERG

de forma, series de ahusamiento y tablas o funciones de ahusamiento las que se utilizan para definirla.

Otras denominaciones son factores y cuocientes mórficos, y series, tablas y funciones de conicidad. Estos últimos también son denominados modelos fustales, porque representan el perfil de los fustes.

II.1.8.1 Cuocientes de forma y series de ahusamiento

Un cuociente de forma se define como la razón entre un diámetro superior del fuste y un diámetro de referencia, que normalmente es el diámetro a la altura de pecho. Algunos cuocientes de forma son los siguientes:

$$\text{SCHIFFEL (1899)} \quad k_s = \frac{d_{0.5}}{d} \quad (2-17)$$

$$\text{JONSON (1910)} \quad k_j = \frac{d_{0.5(h-1.3)}}{d} \quad (2-18)$$

$$\text{GIRARD (1939)} \quad k_g = \frac{d_u^{17.3}}{d} \quad (2-19)$$

$$\text{GIERUSZINSKI (1959)} \quad k_{gic} = \frac{(d_{0.5})^2}{d} \quad (2-20)$$

$$\text{ZIMMERLE (1950)} \quad k_z = \frac{d_5}{d} \quad (2-21)$$

$$\text{POLLANSCHÜTZ (1961)} \quad k_p = \frac{d_{0.3}}{d} \quad (2-22)$$

Donde

- $d_{0.5}$ = diámetro en la mitad del fuste, cm
- $d_{0.5(h-1.3)}$ = diámetro a la mitad, entre 1.3 m y la altura total del árbol, cm
- $d_{u\ 17.3}$ = diámetro sin corteza, a 17.3 pies (equivalente al final de una troza de 16 pies + tocón, cm)
- $d_{0.3}$ = diámetro a tres décimos de la altura desde el suelo, cm
- d_5 = diámetro a 5 metros de altura, cm

La necesidad de describir la variación del diámetro a lo largo del fuste dio lugar a diversos métodos para expresar el ahusamiento o conicidad. Estos se llaman series de ahusamiento y se basan en la división relativa o absoluta del fuste.

HOHENADL (1936) define la serie de ahusamiento real o verdadera basándose en cinco secciones, para cada una de las cuales calcula el correspondiente cuociente de forma real dado por simples relaciones, refiriéndolas todas al diámetro central de la primera sección a un décimo de la altura o a nueve décimos desde la punta del árbol, $d_{0.1}$.

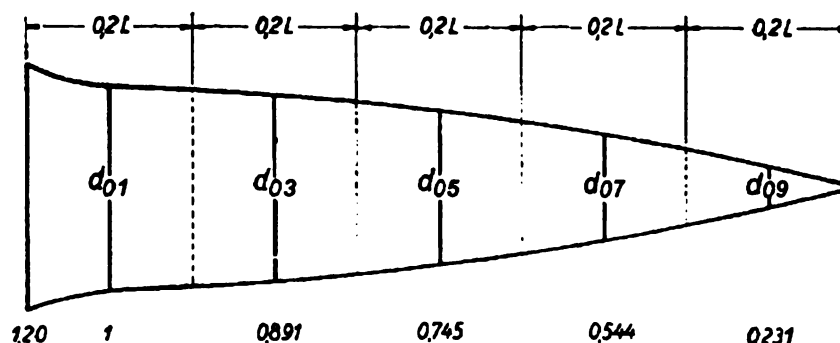


Figura 2-17. División del fuste según HOHENADL

$$k_{0.1} = \frac{d_{0.1}}{d_{0.1}} = 1 = ; \quad k_{0.3} = \frac{d_{0.3}}{d_{0.1}} \quad (2-23)$$

$$k_{0.5} = \frac{d_{0.5}}{d_{0.1}} ; k_{0.7} = \frac{d_{0.7}}{d_{0.1}} ; k_{0.9} = \frac{d_{0.9}}{d_{0.1}} \quad (2-24)$$

Una alternativa a esta serie real es la llamada serie de ahusamiento falsa o artificial constituida por cuocientes de forma cuyo diámetro de referencia es el diámetro a la altura de pecho. El fuste es dividido en secciones absolutas de igual o distinto largo y los cuocientes se calculan dividiendo el diámetro central de la sección por el diámetro a la altura de pecho.

$$k_j = \frac{d_j}{d} \quad (2-25)$$

Donde

d_j = diámetro a la altura j desde la base, cm

d = diámetro a la altura de pecho, cm

k_j = cuociente de forma falso a la altura j desde la base

Como se señaló anteriormente, la forma real de cada fuste se manifiesta en los diversos diámetros y en su disminución con la altura creciente (Figura 2-18).

Para comparar varios fustes, resulta conveniente expresar los diámetros en valores relativos.

La comparación de fustes diferentes con secciones de igual largo relativo se simplifica, debido a que el número de secciones, sin importar el largo del fuste, es igual.

A continuación se presentan los resultados de la medición de cinco secciones de igual

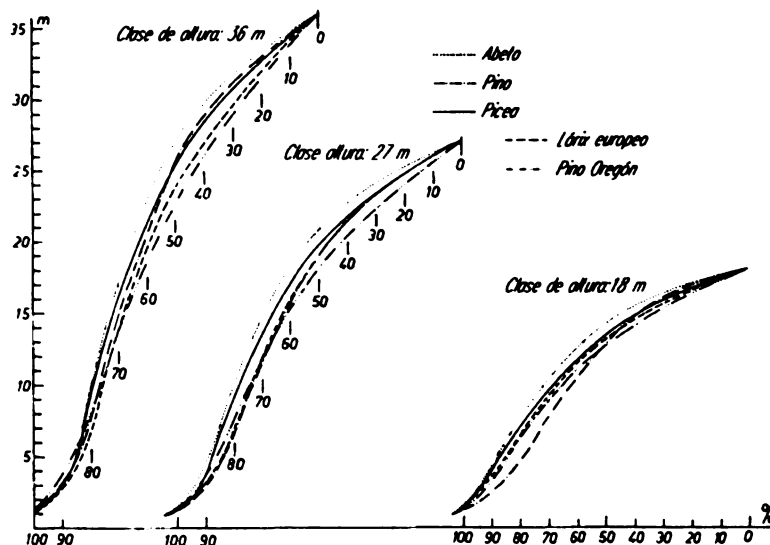


Figura 2-18. Series de ahusamiento falsas o artificiales para diferentes especies por clases de altura

medición de árboles individuales

largo absoluto y relativo para una *picea* (Cuadros 2-3 y 2-4, respectivamente).

La diferencia entre series de ahusamiento con igual largo absoluto e igual largo relativo

Cuadro 2-3. Secciones de igual largo absoluto (2 m)

a) Picea	L = 20 m		d = 25 cm								
Largo en m	1,0	1,3	3,0	5,0	7,0	9,0	11,0	13,0	15,0	17,0	19,0
Ahusamiento en d	102	100	93	89	83	76	68	59	47	35	23

b) Picea	L = 10 m		d = 14 cm		
Largo en m	1,0	3,0	5,0	7,0	9,0
Ahusamiento en d	101	90	76	57	27

es fundamental. Dos fustes de igual forma pero de dimensiones absolutas diferentes entregan series relativas de ahusamiento iguales, ya que todos los diámetros se miden a la misma distancia relativa y están referidos a un diámetro que siempre estará a la misma altura relativa. Por el contrario, con igual forma fustal, pero dimensiones absolutas diferentes, las series de ahusamiento también serán distintas. Los cuocientes de forma estarán en este caso referidos a un diámetro que estará siempre a una altura absoluta igual, es decir, que según la dimensión del fuste se encontrará en mayor o menor grado alejado de una sección dada.

Del Cuadro 2-4 siguiente se desprende que ambos árboles tienen la misma forma geométrica.

Las series de ahusamiento falsas tienen el inconveniente de no ser comparables y la

Cuadro 2-4. Secciones de igual largo relativo (0.2 L)

a) Picea	L = 20 m		d_{0.1} = 24 cm		
Largo en m	2	6	10	14	18
Ahusamiento en d	100,0	89,6	75,0	56,3	27,1

b) Picea	L = 10 m		d_{0.1} = 14,1 cm		
Largo en m	1	3	5	7	9
Ahusamiento en d	100,0	89,6	75,0	56,3	27,1

gran ventaja práctica es estar referidas al diámetro a la altura del pecho. Para obtener el diámetro a 0.1 de la altura, se necesita conocer previamente la altura del fuste. La medición más simple de d influye para que en la práctica, generalmente, se trabaje con los factores de forma falsos, a pesar de que con ello se oculta la funcionalidad de la forma fustal. Para algunas especies, se han construido series de ahusamiento falsas con secciones de 2 a 4 m, separadas por clase de altura (ALTHERR 1963; HAUSSEY y BOLSINGER 1956; MITSCHERLICH 1939; ZIMMERLE 1947). La separación es necesaria, ya que fustes de distinto largo tienen un número desigual de secciones. En el Cuadro 2-5 se muestra un ejemplo de serie de conicidad o de ahusamiento.

Más adelante se mostrará cómo HOHENADL pudo eliminar la desventaja del factor de ahusamiento verdadero, estableciendo una relación entre el diámetro a la altura del pecho y el diámetro a un décimo de la altura. La medición por secciones de numerosos fustes y el cálculo y desarrollo de series de ahusamiento promedio, establecieron las leyes de la forma fustal y comprobaron el parentesco con diversos modelos fustales teóricos y cuerpos de rotación (ALTHERR 1953, 1954, 1963; DITTMAR 1956, 1958; HENGST 1959; KRENN y PRODAN 1944; MITSCHERLICH 1939, 1942; PRODAN 1944, 1951; TIREN 1929; ZIMMERLE 1937, 1942).

De esta forma se han podido probar objetivamente diversos procedimientos prácticos y teóricos para la determinación del volumen fustal.

Cuadro 2-5. Series de ahusamiento para pino Oregón por clase de altura y diámetro (BOLSINGER 1956)

Clase de altura: 30 m

Altura	Porcentaje del diámetro a la altura de pecho						
	20/25	25/30	30/35	35/40	40/45	45/50	50/55
1	103,0	103,1	103,2	103,3	103,4	103,5	103,6
3	93,6	93,0	92,4	91,8	91,0	90,2	89,4
5	87,9	87,5	86,8	85,7	84,7	83,9	82,5
7	83,6	83,0	82,1	81,0	79,7	78,8	77,1
9	79,5	78,8	77,7	76,7	75,4	74,0	72,6
11	75,4	74,5	73,4	72,2	70,8	69,4	68,0
13	71,0	70,0	69,1	67,5	66,0	64,6	63,3
15	66,2	65,1	64,1	62,7	60,9	59,5	58,2
17	61,2	59,7	58,8	57,1	55,8	54,1	52,8
19	55,4	53,7	52,8	51,1	49,8	48,1	46,9
21	48,4	46,7	45,8	44,2	42,9	41,5	40,2
23	40,1	38,4	37,5	36,1	35,2	33,8	32,6
25	30,2	29,0	28,1	27,0	26,1	25,3	24,4
27	19,3	18,3	17,6	16,9	16,4	15,9	15,2
29	6,8	6,5	6,1	5,7	5,5	5,3	5,2

DE MILDE (1971) desarrolló otro tipo de series de ahusamiento para especies tropicales, cuya finalidad era permitir estimaciones de diámetro de secciones del fuste de diferentes largos y que debían ser asignadas a diferentes categorías de calidad.

medición de árboles individuales

Medidos los diámetros a intervalos regulares, se calcula el cuociente entre un diámetro dado y el que lo antecede. Se obtiene así para cada árbol una serie de cuocientes:

$$k_1 = d_1 / d_0, k_2 = d_2 / d_1, k_3 = d_3 / d_2 \cdots k_n = d_n / d_{n-1}$$

Estos cuocientes son tabulados por especie y clase diamétrica, obteniéndose los promedios correspondientes. La serie de ahusamiento se obtiene al multiplicar en sucesión los cuocientes promediados.

$$S_1 = k_1 ; S_2 = k_2 \cdot S_1 ; S_3 = k_3 \cdot S_2 ; S_4 = k_4 \cdot S_3 \quad (2-26)$$

Graficando estas series sobre las alturas de medición se obtiene una curva de ahusamiento.

Este procedimiento puede modificarse y ser más consistente al emplear alturas relativas.

II.1.8.2 Factores de forma

Surge la siguiente interrogante: ¿Es posible expresar una serie de ahusamiento con un solo número, de modo que éste represente la forma y con ello el volumen fustal?

El volumen del fuste se calcula con cinco secciones de largo ℓ con la fórmula de HOHENADL:

$$v = \frac{\pi}{4} \cdot \ell \cdot (d_{0.1}^2 + d_{0.3}^2 + d_{0.5}^2 + d_{0.7}^2 + d_{0.9}^2) \quad (2-27)$$

Factorizando por $d_{0.1}^2$ se obtiene:

$$v = \frac{\pi}{4} \cdot d_{0.1}^2 \cdot \ell \cdot \left(1 + \left(\frac{d_{0.3}}{d_{0.1}} \right)^2 + \left(\frac{d_{0.5}}{d_{0.1}} \right)^2 + \left(\frac{d_{0.7}}{d_{0.1}} \right)^2 + \left(\frac{d_{0.9}}{d_{0.1}} \right)^2 \right) \quad (2-28)$$

Reemplazando $\ell = 0.2 h$

$$v = \frac{\pi}{4} d_{0.1}^2 h \cdot 0.2 (1 + k_{0.3}^2 + k_{0.5}^2 + k_{0.7}^2 + k_{0.9}^2) \quad (2-29)$$

La expresión

$$\frac{\pi}{4} \cdot d_{0.1}^2 \cdot h = W_{0.1} \quad (2-30)$$

corresponde al volumen de un cilindro de diámetro $d_{0.1}$ y largo h , $W_{0.1}$

Por lo tanto de la expresión (2-29) se deduce que

$$0.2 \left(1 + k_{0.3}^2 + k_{0.5}^2 + k_{0.7}^2 + k_{0.9}^2 \right) = f_{0.1} \quad (2-31)$$

$f_{0.1}$ es un factor por el cual se multiplica el volumen del cilindro para obtener el volumen efectivo del fuste. HOHENADL denomina a la expresión anterior factor de forma real o verdadero.

$$v = W_{0.1} \cdot f_{0.1} = \frac{\pi}{4} d_{0.1}^2 \cdot h \cdot f_{0.1} \quad (2-32)$$

El factor de forma es, en consecuencia, un factor de reducción del volumen del cilindro al volumen real del árbol.

De aquí resulta evidente que $f_{0.1}$ es dependiente de cada serie de ahusamiento y que debe ser visto como un indicador de la forma fustal.

Al igual que en el caso de los cuocientes de forma, según PRESSLER y KUNZE (1873), si el diámetro del cilindro de referencia se mide a una altura relativa, el factor de forma se denomina real o verdadero; si se mide a una altura absoluta, el factor de reducción se llama falso o artificial. Los factores de forma verdaderos eran recomendados ya hacia fines del siglo XVIII y luego también por SMALIAN (1837) en los inicios del siglo XIX.

En contraposición al factor de forma fustal verdadero, el factor de forma falso se obtiene con la siguiente fórmula:

$$f_{1.3} = \frac{v}{W_{1.3}}, \quad (2-33)$$

$$v = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h \cdot f_{1.3} \quad (2-34)$$

En este caso, el diámetro a la altura del pecho es el diámetro del cilindro de referencia; $f_{1.3}$ es el factor de reducción correspondiente para llegar del volumen del cilindro al volumen real (Figura 2-19).

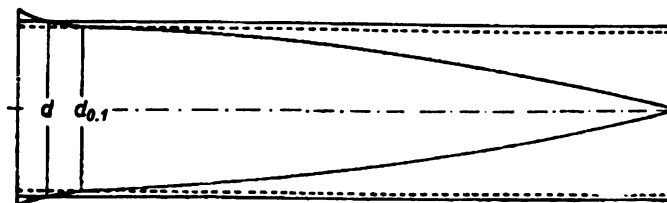


Figura 2-19. Relación entre d y $d_{0.1}$

En general, se puede definir el factor de forma con la siguiente fórmula:

$$f_j = \frac{v}{W_j}, \text{ y} \quad (2-35)$$

$$v = W_j \cdot f_j = \frac{\pi}{4} d_j^2 \cdot h \cdot f_j \quad (2-36)$$

El índice j indica la altura en el fuste a la cual se mide el diámetro del cilindro de referencia.

Por ejemplo:

$$j = 1.3 ; f_j = f_{1.3} \quad \text{factor de forma falso o artificial} \quad (2-37)$$

$$j = 0.1h ; f_j = f_{0.1} \quad \text{factor de forma verdadero o real} \quad (2-38)$$

$$j = 0 ; \quad \text{factor de forma absoluto propuesto por RINIKER (1873)} \quad (2-39)$$

La pregunta en torno a la relación del factor de forma y la forma fustal es una de las más interesantes de la mensura forestal. Este tema ha sido tratado tanto por la vía matemática formal como por la estadística (BEHRE 1923; BELYEA 1932; DITTMAR 1958; GIERUSZINSKI 1959; JONSON 1928; KRENN y PRODAN 1944; PRODAN 1944; SCHIFFEL 1902; SIMONY 1904).

II.1.8.2.1 El factor de forma verdadero

El factor de forma, en especial el real o verdadero, no es sólo un factor de reducción, sino también una expresión para la forma del árbol. Para una visualización de esto se plantea el siguiente ejemplo.

El Cuadro 2-6 muestra que, en el segundo caso, los cuocientes de forma son mayores que en el primero; por lo tanto también la reducción de los diámetros relativos es menor.

El factor de forma fustal verdadero confirma lo anterior, al ser mayor en el segundo caso.

Cuadro 2-6. Dos fustes de $d_{0,1} = 50$ cm y $h = 30$ m de diferente forma

a)	h:	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	$f_{0,1}$
	diámetro:	50	42,0	35,0	25,7	10,3	0,500
	k:	1,000	0,840	0,700	0,514	0,205	
b)	diámetro:	50	45,0	40,0	31,9	15,0	$f_{0,1}$
	k:	1,000	0,901	0,801	0,638	0,300	0,590

Numerosos estudios han concluido que también los cuocientes de forma están relacionados estadísticamente entre sí.

Como ejemplo se tomará el cuociente de forma:

$$k_{0,5} = \frac{d_{0,5}}{d_{0,1}} \quad (2-40)$$

el cual se denomina cuociente de forma verdadero a media altura.

Las investigaciones han demostrado que entre $f_{0,1}$ y $k_{0,5}$ existe una relación estadística lineal, que se expresa a través de la siguiente fórmula de aplicación general:

$$f_{0,1} = 0.894 k_{0,5} - 0.126 \quad (2-41)$$

Esta expresión representa un valor medio del rodal para todas las especies. La relación es muy estrecha (coeficiente de correlación ($r = \pm 0.974$)) (KRENN y PRODAN 1944; PRODAN 1944).

ROMAN (1988) determinó sin embargo que esta relación desarrollada para *Pinus radiata* en Bolivia subestimaba sistemáticamente al factor de forma del árbol, el cual fluctuó entre 0.39 y 0.55.

Existen también relaciones estadísticas entre cada cociente de forma real y $k_{0.5}$ y $f_{0.1}$ (Figuras 2-20 y 2-21). Estas relaciones son ampliamente coincidentes para todas las especies (PRODAN 1944), y se encuentran representadas en los Cuadros 2-7 y 2-8. Esto apunta a una interesante ley en la estructura de formas fustales (Figura 2-22).

Con los Cuadros 2-7 y 2-8, y la ayuda de $k_{0.5}$, se puede determinar la forma fustal con una gran aproximación. El factor de forma verdadero es un indicador adecuado de la respectiva forma fustal.

Cuadro 2-7. Tabla para la determinación de las relaciones entre los factores de forma $f_{0.1}$ y $k_{0.5}$

$k_{0.5}$	$f_{0.1}$ según fórmula			$k_{0.5}$	$f_{0.1}$ según fórmula		
	2-41	2-42	2-45		2-41	2-42	2-45
0,650	0,455	0,467	0,475	0,750	0,545	0,545	0,556
660	464	475	483	760	553	553	565
670	473	483	490	770	560	560	574
680	482	490	498	780	571	568	583
690	491	498	506	790	580	576	592
700	500	506	514	800	589	584	601
710	509	514	522	810	598	591	611
720	518	521	531	820	607	599	620
730	527	529	539	830	616	607	630
740	536	537	548	840	625	615	639

Cuadro 2-8. Tabla para la determinación de la serie de ahusamiento con $k_{0.1} = 1.0$ en KRENN y PRODAN (1944)

$f_{0.1}$	$k_{0.3}$	$k_{0.5}$	$k_{0.7}$	$k_{0.9}$
0,490	0,820	0,689	0,512	0,202
495	829	695	513	203
500	840	700	514	205
505	849	706	515	207
510	858	711	516	209
515	865	717	519	211
520	872	723	522	214
525	878	728	526	216
530	884	734	530	219
535	888	739	537	225
540	891	745	544	231
545	892	751	554	239
550	893	756	564	247
555	894	762	572	257
560	895	767	582	266
565	896	773	591	273
570	898	779	600	279
575	899	784	610	285
580	899	790	621	290
585	900	795	630	295
590	901	801	638	300
595	902	806	648	304
600	902	812	658	308
605	902	818	666	311

La función (2-41) se obtuvo de valores medios de rodal y es válida aproximadamente para todas las especies que tienen un fuste continuo (KRENN y PRODAN 1944) (forma excurrente):

Cuadro 2-9. Series de ahusamiento de diferentes especies

	$d_{0,1}$ cm	h m	$k_{0,3}$	$k_{0,5}$	$k_{0,7}$	$k_{0,9}$	$f_{0,1}$
1 Haya (Schönau)	24,9	25,7	0,950	0,855	0,693	0,293	0,640
Picea (Wolfach)	17,5	18,5	923	860	731	486	672
2 Haya (Todtmoos)	28,8	26,0	931	819	479	142	557
Picea (Sajonia)	16,0	18,0	950	855	693	293	640
Picea (Wolfach)	17,8	18,4	926	825	675	362	625
3 Haya (Todtmoos)	30,8	29,2	919	808	694	143	600
Pino (Langensteinbach)	51,3	35,8	903	790	660	300	593
Picea (Wolfach)	17,8	21,1	896	806	616	308	585
Picea (Lichtenstein)	26,4	28,5	910	810	606	250	583
4 Haya (Todtmoos)	26,2	31,0	893	782	592	179	558
Pino (Langensteinbach)	45,0	33,2	897	779	586	196	559
Picea (Lichtenstein)	43,6	35,6	917	785	592	227	572
5 Haya (Todtmoos)	10,5	18,0	896	743	477	181	523
Pino (Langensteinbach)	32,9	28,6	870	739	591	256	544
Picea (Wolfach)	33,3	25,7	875	751	520	168	526
6 Haya (Todtmoos)	16,2	18,7	902	729	531	167	531
Picea (Wolfach)	33,4	34,4	877	725	560	311	541
Picea (Lichtenstein)	31,2	28,3	882	731	541	279	537
7 Haya (Todtmoos)	20,8	23,0	826	677	428	236	476
Pino (Langensteinbach)	43,9	34,0	811	685	562	244	500
Picea (Wolfach)	38,1	27,0	853	695	483	197	497
8 Haya (Todtmoos)	35,1	29,0	864	667	578	108	507
Pino (Langensteinbach)	46,0	33,2	815	671	520	220	487
9 Haya (Todtmoos)	24,8	21,6	814	645	416	081	452
10 Haya (Schönau)	28,3	25,5	858	544	342	117	433

Cuadro 2-10. Resultados del ajuste entre $k_{0,i}$ y $f_{0,1}$ según ALTHERR (1953)

Picea

$$\begin{aligned} k_{0,3} &= 0,438 & k_{0,5} &+ 0,550 \\ k_{0,7} &= 0,836 & k_{0,5} &- 0,060 \\ k_{0,9} &= 0,633 & k_{0,5} &- 0,206 \\ f_{0,1} &= 0,6987 & k_{0,5} &+ 0,023 \end{aligned}$$

Pino Oregón

$$\begin{aligned} k_{0,3} &= 0,598 & k_{0,5} &+ 0,432 \\ k_{0,7} &= 0,911 & k_{0,5} &- 0,127 \\ k_{0,9} &= 0,500 & k_{0,5} &- 0,120 \\ f_{0,1} &= 0,71479 & k_{0,5} &+ 0,006632 \end{aligned}$$

Lárix japonés

$$\begin{aligned} k_{0,3} &= 0,765 & k_{0,5} &+ 0,319 \\ k_{0,7} &= 0,835 & k_{0,5} &- 0,063 \\ k_{0,9} &= 0,496 & k_{0,5} &- 0,113 \\ f_{0,1} &= 0,77197 & k_{0,5} &- 0,033107 \end{aligned}$$

Cuadro 2-11. Ecuación para $k_{0,i}$ y $f_{0,1}$ para *picea* según PRODAN (1965) y para abeto según ALTHERR (1963)

Picea

$$\begin{aligned} k_{0,2} &= 0,739 + 0,2733 k_{0,5} \\ k_{0,3} &= 0,479 + 0,5433 k_{0,5} \\ k_{0,4} &= 0,222 + 0,800 k_{0,5} \\ k_{0,6} &= -0,119 + 1,0366 k_{0,5} \\ k_{0,7} &= -0,194 + 1,000 k_{0,5} \\ k_{0,8} &= 0,175 - 0,17667 k_{0,5} + 0,64444 k_{0,5}^2 \\ k_{0,9} &= 0,544 - 1,35333 k_{0,5} + 1,28889 k_{0,5}^2 \\ f_{0,1} &= 0,3334 - 0,21867 k_{0,5} + 0,6667 k_{0,5}^2 \end{aligned}$$

Abeto

$$\begin{aligned} k_{0,3} &= 0,456398 + 0,560 k_{0,5} \\ k_{0,7} &= -0,275158 + 1,132 k_{0,5} \\ k_{0,9} &= -0,284332 + 0,714 k_{0,5} \\ f_{0,1} &= -0,0792 + 0,8342 k_{0,5} \end{aligned}$$

- Cuadro 2-11a.** a) Formas de cuerpos geométricos
 Cilindro, Ci
 Cono, C
 Neiloide, N
 Paraboloide, Pa
 Soportante uniformemente resistente, TIREN (1929), T
 Soportante uniformemente resistente, YLINEN (1952), Y
 b) Formas reales de fuste, PRODAN (1944)
 Pino
 Haya

Forma	$k_{0,1}$	$k_{0,3}$	$k_{0,5}$	$k_{0,7}$	$k_{0,9}$	$f_{0,1}$
Cilindro	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Cono		778	556	333	111	407
Paraboloide		882	745	577	333	555
Neiloide		686	414	192	037	336
Ylinen		901	750	516	210	537
Tiren		887	731	529	289	537
Pino		811	685	562	244	500
Haya		826	677	428	236	476

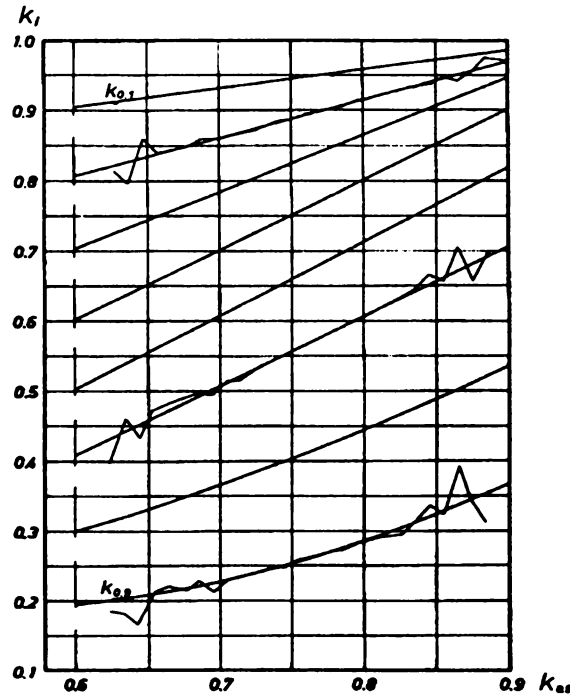


Figura 2-20. Relación entre el cociente de forma verdadero $k_{0.5}$ y las series de ahusamiento $k_{0.8}, k_{0.7}, k_{0.6}, k_{0.4}, k_{0.2}, k_{0.1}$ en *picea* (PRODAN 1965)

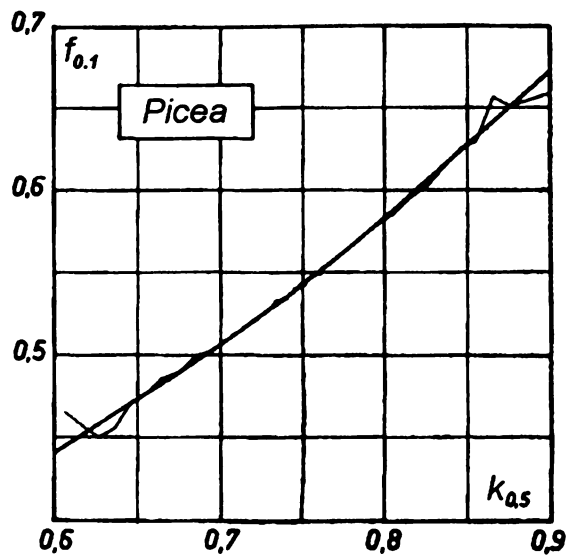


Figura 2-21. Relación entre $f_{0.1}$ y $k_{0.5}$ en *picea* (PRODAN 1965)
 $(f_{0.1} = 0.3333 - 0.21867 \cdot k_{0.5} + 0.6667 \cdot k_{0.5}^2)$

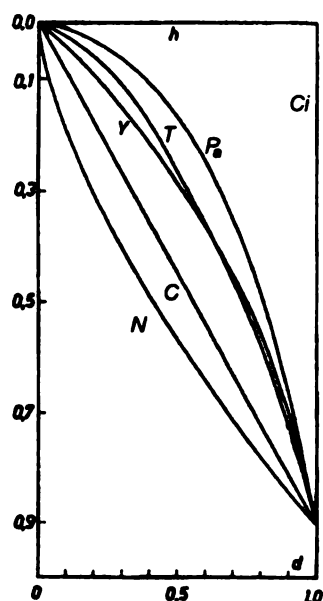


Figura 2-22. Formas geométricas teóricas que representan la forma fustal (véase Cuadro 2-11a)

Cuadro 2-12. Series de ahusamiento ($k_{0,1} = 1,0$) calculadas según el modelo para $k_{0,i}$ y $f_{0,1}$

$k_{0,2}$	$k_{0,3}$	$k_{0,4}$	$k_{0,5}$	$k_{0,6}$	$k_{0,7}$	$k_{0,8}$	$k_{0,9}$	$f_{0,1}$
0,903	0,805	0,702	0,600	0,503	0,406	0,301	0,196	0,442
904	808	706	605	508	411	304	197	445
906	810	710	610	513	416	307	198	448
907	813	714	615	519	421	310	199	451
908	816	718	620	524	426	313	200	454
910	819	722	625	529	431	316	202	458
911	821	726	630	534	436	319	203	460
913	824	730	635	539	441	323	204	464
914	827	734	640	544	446	326	206	467
915	829	738	645	550	451	329	207	470
917	832	742	650	555	456	332	209	473
918	835	746	655	560	461	336	211	477
919	838	750	660	565	466	339	212	480
921	840	754	665	570	471	343	214	483
922	843	758	670	576	476	346	216	487
923	846	762	675	581	481	349	218	490
925	848	766	680	586	486	353	220	493
926	851	770	685	591	491	356	222	497
928	854	774	690	596	496	360	224	500
929	857	778	695	601	501	363	226	504
930	859	782	700	607	506	367	228	507

Cuadro 2-13. Comparación de la forma de distintas especies forestales de acuerdo con series de ahusamiento reales

a) $d_{0,1} = 50 \text{ cm}$; $f_{0,1} \cong 0,550$; $h = 30\text{m}$

Nº	Diámetro a la altura de ... m				
	3	9	15	21	27
1	50,0	44,6	37,8	28,2	12,3
2	50,0	44,1	37,7	28,7	13,4
3	50,0	44,3	38,0	28,3	13,0
4	50,0	44,6	37,7	28,3	13,1
5	50,0	43,5	37,7	28,5	13,8
6	50,0	44,7	37,8	28,1	12,6
7	50,0	43,6	38,1	30,0	11,2
8	50,0	44,8	39,6	26,6	9,9
9	50,0	44,6	37,7	28,0	12,8

b) $d_{0,1} = 50 \text{ cm}$; $f_{0,1} \cong 0,500$; $h = 30 \text{ m}$

Nº	Diámetro a la altura de ... m.				
	3	9	15	21	27
1	50,0	42,0	35,0	25,7	10,2
2	50,0	42,4	34,1	25,5	11,3
3	50,0	42,3	34,5	25,2	11,2
4	50,0	42,0	34,5	25,7	11,3
5	50,0	41,4	34,5	26,7	11,2
6	50,0	41,9	34,7	25,5	11,5
7	50,0	41,3	34,7	26,8	10,7
8	50,0	43,2	35,0	24,0	8,7
9	50,0	42,7	34,5	24,8	11,2

Cuadro 2-14. Factores de forma de KUNZE (diámetro de referencia a 1/20 de la altura (MÜLLER 1899)

d medido a $1/20 \text{ h}$	Altura fustal	Edad, años					
		21—40	41—60	61—80	81—100	101—120	121—140
		Factor de forma de la madera de fuste					
Pino	0,75 h	0,419	0,421	0,426	0,433	0,456	0,462
	0,55—0,75 h	0,410	0,416	0,428	0,443	0,450	0,455
	0,35—0,55 h	0,397	0,398	0,429	0,443	—	—
Picea	0,75 h	0,517	0,518	0,524	0,523	0,510	0,523
	0,55—0,75 h	0,503	0,512	0,522	0,516	0,508	0,513
	0,35—0,55 h	0,478	0,492	0,511	0,508	0,500	0,502
	0,15—0,35 h	0,446	0,461	0,497	0,485	0,460	—
Haya	0,75 h	0,460	0,458	0,482	—	0,492	0,519
	0,55—0,75 h	0,458	0,460	0,474	0,497	0,501	0,490
	0,35—0,55 h	0,444	0,447	0,459	0,461	0,480	0,484
	0,15—0,35 h	0,376	0,400	0,441	—	—	—

Para árboles aislados se calculó la ecuación:

$$f_{0.1} = 0.777 \cdot k_{0.5} - 0.038 \quad (2-42)$$

Independiente de esto, GIERUSZINSKI (1959), a partir de su fórmula de cubicación del fuste:

$$v = \ell \cdot (0.23 g_{0.1} + 0.58 g_{0.5} + 0.19 g_n) \quad (2-43)$$

reemplazando para la sección apical $g_n = 0$,

$$v = \ell \cdot (0.23 g_{0.1} + 0.58 g_{0.5}) = \frac{\pi}{4} d_{0.1}^2 \cdot \ell \cdot (0.23 + 0.58 k_{0.5}^2) \quad (2-44)$$

derivó la siguiente expresión:

$$f_{0.1} = 0.58 k_{0.5}^2 + 0.23 \quad (2-45)$$

Esta fórmula es interesante ya que, a diferencia de las ecuaciones (2-41) y (2-42) que fueron obtenidas por ajuste estadístico, fue derivada a partir de fórmulas empíricas de cubicación. En el Cuadro 2-7 se entregan los valores de $f_{0.1}$ obtenidos de las ecuaciones (2-41), (2-42) y (2-45). Naturalmente, cada especie muestra una desviación sistemática, que sin embargo no es grande (Cuadro 2-13).

Entretanto, ALTHERR (1953, 1963), al igual que KRENN y PRODAN (1944), dedujo series de ahusamiento medias para las especies *picea*, *pseudotsuga*, *larix*, *pinus* y *abies*, con material de la Estación Experimental Forestal de Baden Württemberg. DITTMAR (1958), con material del norte de Alemania, confeccionó cuadros similares para las especies *picea* (Montes Harz), *pinus* (Alemania Nororiental) y *fagus* (Alemania Central y Nororiental).

El Cuadro 2-12 entrega los valores para *picea*, que se obtuvieron de 1146 árboles. Probablemente, luego de una evaluación exhaustiva de todo el material disponible a la fecha, resultaría una dependencia de la relación con el sitio, la clase diamétrica y la posición dentro del rodal, como lo comprobaron parcialmente DITTMAR, KÖNIG y SMALIAN por su subdivisión en clases de árboles (Cuadro 2-14).

Las relaciones de $k_{0.5}$ pueden considerarse como lineales en un segmento medio; sin embargo, para todo su rango de dispersión, una parábola de segundo grado permite un ajuste mejor (PRODAN 1944). También el material de *picea* se ajustó a una parábola.

El Cuadro 2-13 muestra para $d_{0.5} = 50$ cm; $f_{0.1} \approx 0.55$ y $f_{0.1} \approx 0.50$ la dimensión fustal bajo diferentes series de ahusamiento. Las tablas de conicidad con las series de ahusamiento verdaderas tienen la ventaja de ser válidas para todas las formas fustales. Esto da la posibilidad de construir tablas de clases y volúmenes para cualquier forma fustal deseada.

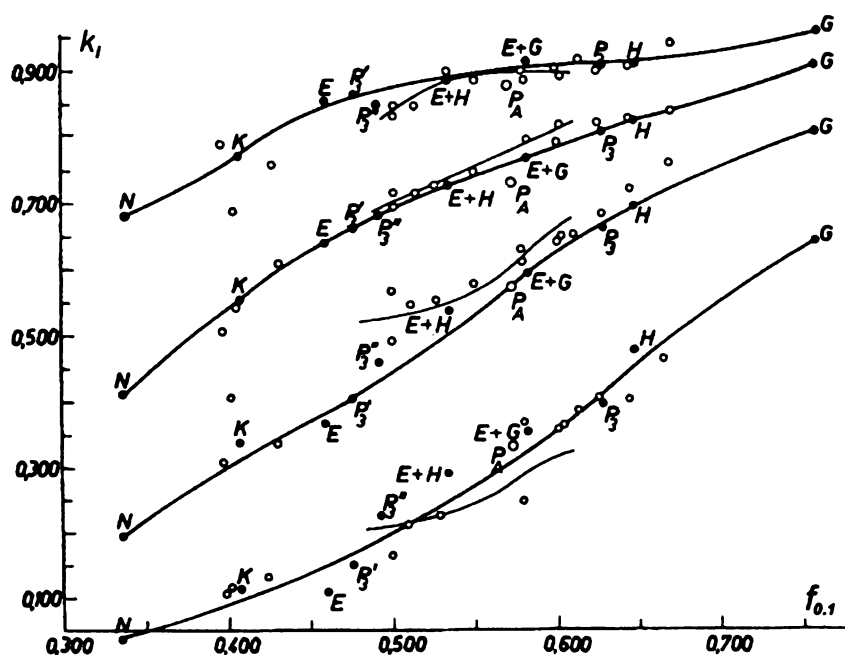


Figura 2-23. Comparación entre la forma fustal teórica y la real.
Relación entre las series k y $f_{0.1}$ (PRODAN 1944)

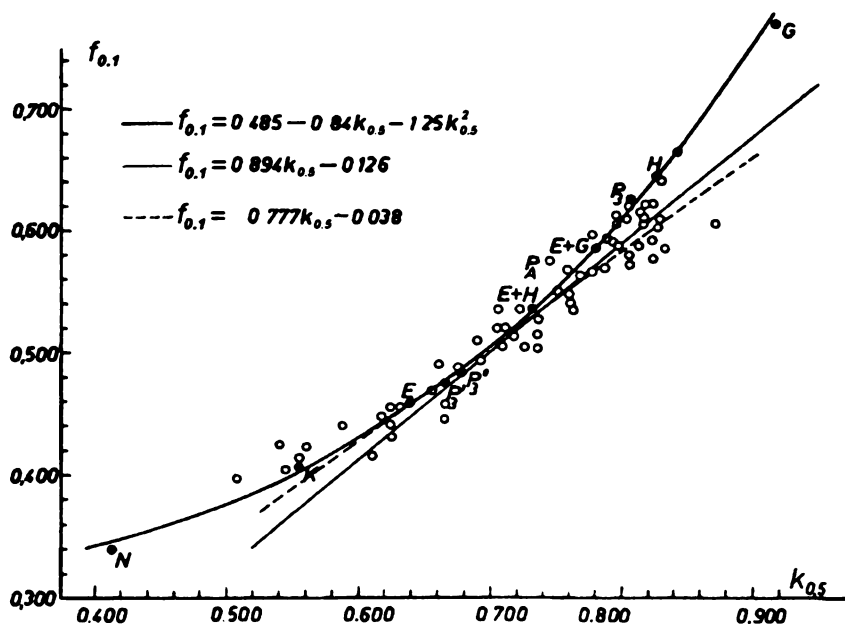


Figura 2-24. Comparación entre la forma fustal teórica y la real.
Relación entre $f_{0.1}$ y $k_{0.5}$ (PRODAN 1944)

II.1.8.2.2 El factor de forma falso o artificial

Ya se ha mencionado que los factores de forma falsos no son directamente comparables. Igualmente, los factores de forma falsos no permiten una representación directa de la forma geométrica del fuste, porque debido a su referencia al d , contienen un elemento distorsionante. BELYEA (1932) estudió la relación entre diversos cuocientes de forma y el factor de forma falso (Figura 2-25).

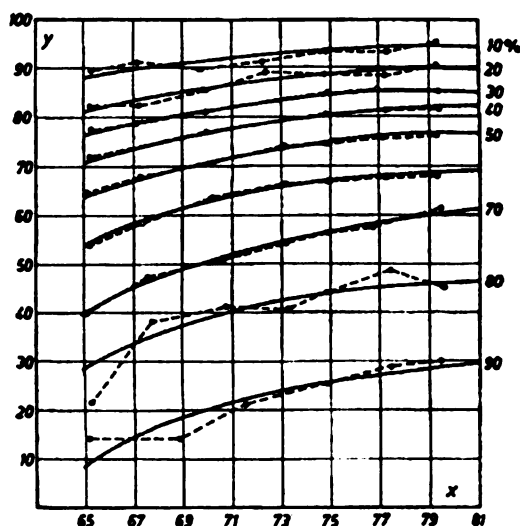


Figura 2-25. Relación entre las series de ahusamiento

$$k_{0.1}, \dots, k_{0.9}$$

$$x = d_{0.5} / d; y = \text{porcentajes del diámetro}$$

Esta relación se puede deducir a partir de la fórmula para el volumen de secciones de igual largo absoluto. Como ejemplo se tiene un fuste de 40 m de largo que fue medido por secciones de 2 m. El volumen queda dado por

$$v = \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot (d_1^2 + d_3^2 + d_5^2 + \dots + d_{17}^2 + d_{19}^2) \quad (2-46)$$

Multiplicando toda la expresión por

$$\frac{d^2}{d^2} \cdot \frac{h}{h}$$

resulta:

$$v = \frac{\pi}{4} \cdot h \cdot d^2 \cdot \frac{2}{h} \cdot \left(\frac{d_1^2}{d^2} + \frac{d_3^2}{d^2} + \dots + \frac{d_{19}^2}{d^2} \right) \quad (2-47)$$

El paréntesis incluye la suma de los cuadrados de los cuocientes de ahusamiento falsos. El volumen del cilindro de referencia es:

$$W_{1,3} = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h \quad (2-48)$$

El factor de forma $f_{1,3}$ en este caso está dado por:

$$f_{1,3} = \frac{2}{h} \cdot \left(\left(\frac{d_1}{d} \right)^2 + \left(\frac{d_3}{d} \right)^2 + \dots + \left(\frac{d_{19}}{d} \right)^2 \right) \quad (2-49)$$

y si ℓ = largo de la sección,

$$f_{1,3} = \frac{\ell}{h} \left(k_{1/2}^2 + k_{3/2}^2 + \dots + k_{i/2}^2 \right) \quad (2-50)$$

donde

$$k_{i/2} = \frac{d_{i \cdot 1/2}}{d} \quad (2-51)$$

Intentos más antiguos para deducir la forma fustal y el factor de forma falso con el conocimiento de pocos cuocientes de forma pertenecen a KUNZE (1891) y SCHIFFEL (1899).

Partiendo de la relación:

$$k_{1/2} = \frac{d_{0,5}}{d} = k_s \quad (2-52)$$

como cuociente de forma falso a media altura desde la base y de

$$k_{1/4} = \frac{d_{1/4}}{d} \quad (2-53)$$

medición de árboles individuales

como el cociente de forma falso a 1/4 de la altura desde la base y de

$$k_{3/4} = \frac{d_{3/4}}{d} \quad (2-54)$$

como el cociente de forma falso a 3/4 de la altura desde la base, SCHIFFEL planteó la siguiente fórmula para el cálculo del factor de forma falso:

$$f_{1.3} = 0.88 \cdot k_s - 0.15 + \frac{0.36}{k_s \cdot h} \quad (2-55)$$

La fórmula de KUNZE es:

$$f_{1.3} = 0.903 \cdot k_s - 0.15 + \frac{0.27}{h} \quad (2-56)$$

SIMONY (1901) dedujo la ecuación general para el factor de forma:

$$f_{1.3} = a + bk_s + ck_s^2 \quad (2-57)$$

SCHIFFEL planteó además las siguientes fórmulas para el cálculo de $k_{1/4}$ y $k_{3/4}$:

$$k_{1/4} = 0.61 k_s + 0.41 + \frac{0.41}{k_s \cdot h} \quad (2-58)$$

$$k_{3/4} = 0.865 k_s - 0.14 - \frac{0.20}{k_s \cdot h} \quad (2-59)$$

La aplicación de los factores de forma verdaderos tiene la ventaja que desaparece el largo, simplificándose las relaciones.

II.1.8.2.3 Relación entre el factor de forma falso y el verdadero

En contraposición al factor de forma falso, el factor de forma verdadero o real es una caracterización de la forma geométrica del fuste. Sin embargo, tiene el defecto de requerir un diámetro de referencia que se encuentra a una distancia variable desde la base y por lo tanto difícil de medir. El factor de forma falso, por su parte, se refiere al d , el cual se puede medir

fácil y cómodamente tanto en madera volteada como en árboles en pie, pero caracteriza sólo muy burdamente la forma fustal. Como demostración de lo anterior se compararon dos fustes con distinta forma. Uno tiene forma cónica y el otro es un paraboloide. Mientras el fuste cónico se caracteriza por un factor de forma real de 0.407 y el paraboidal por un factor real de 0.555, ambos fustes presentan el mismo factor de forma falso: $f_{1,3} = 0.407$ (Cuadro 2-15).

Cuadro 2-15. Árboles con distinta forma fustal pero con igual factor de forma falso

h en m	d	d _{0,1}	d _{0,3}	d _{0,5}	d _{0,7}	d _{0,9}	f _{0,1}	f _{1,3}
				en cm				
13,0	15,0	15,0	11,7	8,3	5,0	1,7	0,407	0,407
30,0	46,7	40,0	35,3	29,8	23,1	13,3	0,555	0,407

El factor de forma falso puede descomponerse en dos factores, uno es el factor de forma verdadero $f_{0,1}$, es decir, la característica de la forma geométrica del fuste; el otro muestra la influencia distorsionante (HOHENADL 1936; KLAUPRECHT 1846).

El volumen del mismo fuste se puede calcular por la fórmula:

$$v = \frac{\pi}{4} d_{0,1}^2 \cdot h \cdot f_{0,1} \quad (2-60)$$

6

$$v = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h \cdot f_{1,3} \quad (2-61)$$

Por lo tanto:

$$v = \frac{\pi}{4} d_{0,1}^2 \cdot h \cdot f_{0,1} = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h \cdot f_{1,3} \quad (2-62)$$

De aquí resulta:

$$f_{1,3} = \frac{f_{0,1}}{\left(\frac{d}{d_{0,1}}\right)^2} \quad (2-63)$$

El cuociente:

$$k_H = \frac{d}{d_{0.1}} \quad (2-64)$$

es el coeficiente de forma basal de HOHENADL.

KLAUPRECHT (1846) establece el método para el cálculo de factores de forma falsos y verdaderos a partir del coeficiente de forma basal de HOHENADL. Según esto, el factor de forma verdadero se multiplica por la relación de ambas secciones circulares $g_{0.1}$ y $g_{1.3}$ para obtener el factor de forma artificial:

$$f_{1.3} = f_{0.1} \cdot \frac{g_{0.1}}{g_{1.3}} = f_{0.1} \left(\frac{d_{0.1}}{d} \right)^2 = \frac{f_{0.1}}{\left(\frac{d}{d_{0.1}} \right)^2} \quad (2-65)$$

El coeficiente de forma basal de HOHENADL es una medida de la influencia de las raíces tabulares, aletones o costillas basales de las raíces. Para una altura del fuste de 13 m:

$$d_{0.1} = d \text{ y } k_H = 1$$

A mayor altura del árbol, mayor es la distancia entre d y $d_{0.1}$; d está siempre a la misma altura absoluta, pero con una altura total creciente, se acerca progresivamente a la zona de los contrafuertes o parte basal del tronco. Con el factor de forma verdadero, la relación con la forma fustal es clara y unívoca. El cuociente k_H no sólo depende de la especie y el sitio, sino también de la dimensión absoluta del árbol (diámetro y altura). Ello es un factor distorsionante en las relaciones entre el factor de forma falso y la forma fustal.

Por la división del factor de forma falso, en la práctica se pueden definir $f_{0.1}$ y k_H separadamente. Así, $f_{1.3}$ se deja calcular con mayor facilidad.

II.1.8.3 Cuerpos de rotación

Las relaciones funcionales de las formas fustales eran tan evidentes que tempranamente hubo preocupación por explicar su causa, es decir, por determinar los diversos factores que la controlan. Los intentos parten de hipótesis generales, tanto de tipo fisiológico como mecánico.

Estos estudios básicos que parten de hipótesis deductivas no han tenido resultados completamente satisfactorios. Los modelos calculados no captan suficientemente bien la base

y la parte alta del árbol. Se ve que las fuerzas y factores que actúan en la naturaleza aún no se explican satisfactoriamente como para presentar soluciones lógicas. Las hipótesis deductivas ofrecen fórmulas muy complicadas para la cubicación práctica. Unicamente la relación general, establecida estadísticamente entre los diferentes cuocientes de forma y los factores de forma, muestra resultados utilizables (PRODAN 1944).

Las instituciones experimentales forestales y los científicos han reunido y evaluado durante decenios un material estadístico muy rico. Mientras esto no existía, desde los inicios de la mensura forestal, se trató insistentemente de aproximar las partes del fuste a cuerpos de rotación simples. La utilidad de estos intentos fue considerable, ya que permitieron establecer fórmulas básicas de cubicación y validar las reglas de cubicación.

El tratamiento de las fórmulas utilizadas, que ocupaba una parte importante de los libros de mensura forestal antiguos, está en parte obsoleto, ya que ahora se tiene a disposición mucho material referido a la forma real de los fustes.

En las Figuras 2-22, 2-23 y 2-24 se representan los valores de cuerpos básicos en relación con la forma fustal real.

Los cuerpos de rotación más simples que se acercan a cada parte del fuste son: el cilindro, el paraboloide, el cono y el neiloide.

El cilindro se define como el cuerpo de rotación cuyo manto es paralelo al eje de rotación (Figura 2-26).

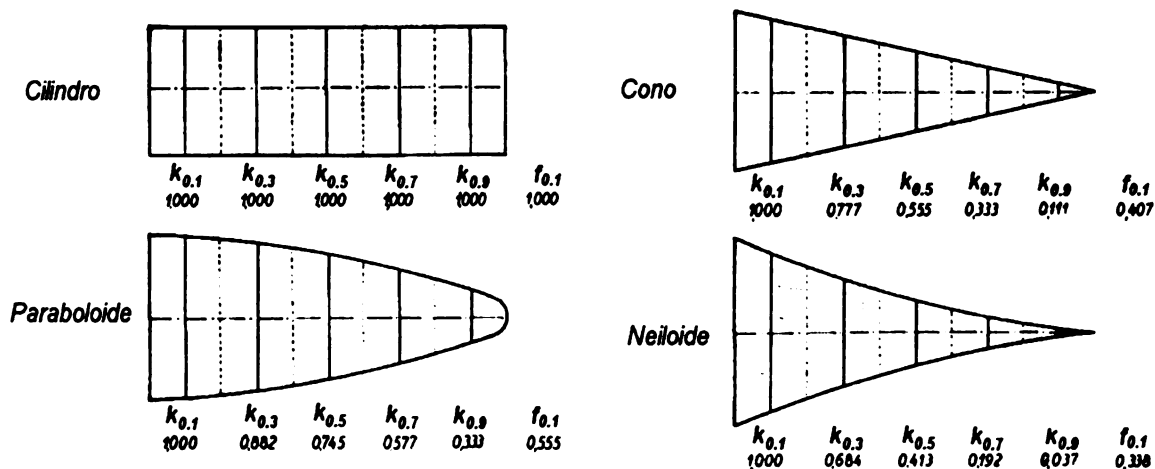


Figura 2-26. Cuerpos teóricos de rotación

medición de árboles individuales

Sea: $y =$ radio
 $d = 2y =$ diámetro
 $y =$ constante

El paraboloide apolónico es un cuerpo de rotación en el cual el área de la sección transversal crece en forma proporcional a la distancia de la cúspide. Asumiendo la cúspide del paraboloide en el origen del sistema coordenado, se desprende de lo dicho que:

$$y^2 = px \quad (2-66)$$

donde p es el factor de proporción y x es la distancia desde la cúspide.

De la fórmula se deduce:

$$\pi y^2 = p_1 x \quad (2-67)$$

Por lo tanto, el paraboloide apolónico se genera por una parábola en rotación.

El cono es un cuerpo de rotación cuyo radio crece en forma lineal, es decir, proporcional a la distancia x a la cúspide. Expresado en forma analítica:

$$y = px$$

y

$$\pi y^2 = \pi p^2 x^2 = p_1 x^2 \quad (2-68)$$

El neiloide es un cuerpo de rotación cuya área de la sección transversal está dada por la fórmula de la parábola semicúbica:

$$\pi y^2 = p_1 x^3 \quad (2-69)$$

Estos cuatro cuerpos simples de rotación se describen con la siguiente fórmula general:

$$y^2 = px' \quad (2-70)$$

ó

$$g = \pi y^2 = \frac{\pi}{4} d^2 = p_1 x' \quad \text{donde } p_1 = \pi p \quad (2-71)$$

Entonces, para:

el cilindro	$g = \text{constante}$	$r = 0$
el paraboloide apolónico	$g = p_1 x$	$r = 1$
el cono	$g = p_1 x^2$	$r = 2$
el neiloide	$g = p_1 x^3$	$r = 3$

Luego, la parte inferior del fuste tendría una forma cercana a un neiloide, la parte central sería parecida a un cilindro o un paraboloide y la parte superior tendría una forma similar al cono (Figura 2-26).

II.1.8.4 Fórmulas de cubicación

La estereometría ha deducido fórmulas tanto para los volúmenes de conoides completos como para conoides truncados. El volumen puede calcularse de las siguientes formas:

- A partir del diámetro basal (d_b) y del largo ℓ , en cuerpos completos (no truncados).
- A partir del diámetro medido a media altura y del largo del cuerpo.
- A partir de varios diámetros y largos (en este caso, las fórmulas tienen validez para varios cuerpos).
- A partir de los diámetros basal y superior (d_b y d_s) y también de otros diámetros adecuadamente escogidos, y del largo.

Las fórmulas básicas para el cálculo del volumen del cuerpo completo a partir del área de la base g_b son:

cilindro	$v = g_b \cdot \ell$
paraboloide apolónico	$v = 1/2 g_b \cdot \ell$
cono	$v = 1/3 g_b \cdot \ell$
neiloide	$v = 1/4 g_b \cdot \ell$

medición de árboles individuales

Estas fórmulas pueden deducirse fácilmente a partir de lo siguiente:

Como $y^2 = px^r$, entonces $\pi y^2 = p_1 x^r$ (2-72)

$$v = \int_0^{\ell} p_1 x^r dx = \left| \frac{p_1 x^{r+1}}{r+1} \right|_0^{\ell} = \left| g \cdot \frac{x}{r+1} \right|_0^{\ell}$$

$$v = g_b \cdot \frac{\ell}{r+1} \quad (2-73)$$

Reemplazando los valores por:

$$r = 0$$

$$r = 1$$

$$r = 2$$

$$r = 3$$

se obtienen las fórmulas básicas anteriores (BRUCE y SCHUMACHER 1935).

Las fórmulas volumétricas que utilizan el diámetro medio (diámetro en la mitad del largo) y el largo, son muy importantes. Definiendo el área de la sección media como:

$$\frac{\pi}{4} d_{1/2}^2 = g_{1/2} \quad (2-74)$$

se obtiene para el:

			Error %	
cilindro	$g_b = g_{1/2}$	$v = \ell \cdot g_{1/2}$	0	(2-75)

paraboloide	$g_b = 2g_{1/2}$	$v = \ell \cdot g_{1/2}$	0	(2-76)
-------------	------------------	--------------------------	---	--------

cono	$g_b = 4g_{1/2}$	$v = \ell \cdot \frac{\pi}{4} g_{1/2}$	-33.3%	(2-77)
------	------------------	--	--------	--------

neiloide	$g_b = 8g_{1/2}$	$v = \ell \cdot 2g_{1/2}$	-100.0%	(2-78)
----------	------------------	---------------------------	---------	--------

Las fórmulas demuestran que el cilindro y el paraboloide apolónico son correctamente estimados por la fórmula del área de la sección media:

$$v = g_{1/2} \ell \quad (2-79)$$

Contrariamente, las partes fustales que presentan forma de cono o neiloide pueden producir subestimaciones considerables.

La fórmula del área de la sección media ya era conocida en Francia y Alemania en los siglos XVII y XVIII. Se la llama también fórmula de HUBER, por un inspector de salinas bávaro. Para aplicaciones prácticas se propuso la fórmula llamada de áreas terminales o de Smalian (SMALIAN 1837).

$$v = \ell \cdot \frac{g_b + g_s}{2} = \ell \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{d_b^2 + d_s^2}{2} \right) \quad (2-80)$$

Esta fórmula cubica correctamente el paraboloide y el cilindro pero sobreestima el cono y el neiloide.

Las fórmulas correctas para conoides truncados son:

paraboloide truncado:

$$v = \frac{\pi}{4} \cdot \ell \cdot \left(\frac{d_b^2 + d_s^2}{2} \right) \quad (2-81)$$

cono truncado:

$$v = \frac{\pi}{4} \cdot \ell \cdot \left(\frac{d_b^2 + d_b d_s + d_s^2}{3} \right) \quad (2-82)$$

neiloide truncado:

$$v = \frac{\pi}{4} \cdot \ell \cdot \left(\frac{d_b^2 + \sqrt[3]{d_b^4 d_s^2} + \sqrt[3]{d_b^2 d_s^4} + d_s^2}{4} \right) \quad (2-83)$$

HOSSELD (1812), SMALIAN (1837), RIECKE (1840), BREYMANN (1868) y en especial SIMONY (1904) desarrollaron la teoría de la cubicación de cuerpos de rotación teóricos para fines forestales. SIMONY estableció un gran número de ecuaciones para cuerpos de rotación teóricos, con sus correspondientes factores de forma. Además, logró unir algunas fórmulas empíricas de cubicación de fustes completos de SCHIFFEL con cuerpos de rotación teóricos.

Si bien estos cuerpos analíticos no se ajustan bien al fuste completo, las fórmulas derivadas de ellos son de gran utilidad para determinar volúmenes de secciones fustales cortas y para el método de cubicación por secciones.

Debido a que en la investigación forestal las cubicaciones precisas tienen una gran significación, se presentan algunas fórmulas deducidas de varias secciones, que se refieren a conoides truncados y se aplican principalmente en secciones fustales. Algunas de estas fórmulas se deducen de la aplicación repetida de las fórmulas de áreas terminales o medias sobre el desarrollo de las curvas fustales (integración práctica). La exactitud de estas fórmulas depende de la cantidad de secciones.

Otras fórmulas suponen una forma dada, generalmente parabólica, de la forma fustal. De esta manera se logra una exactitud mayor con menos secciones. La forma del cuarto o quinto inferior se capta habitualmente con gran exactitud considerando tres a cuatro secciones, incluso cuando esta parte tiene una forma fuertemente decreciente por efecto de las costillas basales.

Cuadro 2-16. Datos de la sección inferior de $0.2 \cdot \ell$

1: $d = 34$ cm, $h = 20$ m

2: $d = 60$ cm, $h = 30$ m

3: $d = 68$ cm, $h = 40$ m

d	Diámetro en cm para		
	1	2	3
d_b	52.8	88.3	99.2
d_s	30.2	49.3	54.8
$d_{1/2}$	32.4	54.1	58.5
$d_{1/4}$	34.9	59.0	64.0
$d_{3/4}$	31.1	51.3	56.4
$d_{1/6}$	36.7	61.7	68.0
$d_{5/6}$	30.8	50.6	55.9
$d_{1/3}$	34.0	56.5	61.9
$d_{2/3}$	31.7	52.1	56.5
$d_{1/5}$	35.9	60.5	66.0
$d_{4/5}$	30.9	50.8	56.1
$d_{0.21}$	35.9	60.5	66.0
$d_{0.79}$	30.9	50.8	56.1

Cuadro 2-17. Datos de la sección inferior de 0.2 $\cdot$ l
(ver también Figuras 2-27 y 2-28)

Datos de la sección inferior de 0.2 h

- 1) $h = 20 \text{ m}$; $d_{1,3} = 34 \text{ cm}$ $l = 4,0 \text{ m}$
- 2) $h = 30 \text{ m}$; $d_{1,3} = 60 \text{ cm}$ $l = 6,0 \text{ m}$
- 3) $h = 40 \text{ m}$; $d_{1,3} = 68 \text{ cm}$ $l = 8,0 \text{ m}$

Resultados de las fórmulas de cubicación

Fórmula Nº	Nº 1		Fuste Nº 2		Nº 3	
	$v \text{ (m}^3\text{)}$	%	$v \text{ (m}^3\text{)}$	%	$v \text{ (m}^3\text{)}$	%
20 secc.	0,3672	100,0	1,5468	100,0	2,4715	100,0
1 secc.	0,3298	89,8	1,3792	89,2	2,1503	87,0
2-84	0,5812	158,3	2,4098	155,8	4,0350	163,3
2-86	0,4555	124,0	1,8945	122,5	3,0926	125,1
2-87	0,4136	112,6	1,7227	111,4	2,7785	112,4
2-90	0,3440	93,7	1,4146	91,5	2,2773	92,1
2-91	0,3513	95,7	1,4480	93,6	2,3070	93,3
2-93	0,3477	94,7	1,4606	94,4	2,3314	94,3
2-94	0,3503	95,4	1,4599	94,4	2,3397	94,7
2-95	0,3529	96,1	1,4700	95,0	2,3633	95,6
2-96	0,3685	100,4	1,5434	99,8	2,4811	100,4
2-98	0,3526	96,0	1,4705	95,1	2,3572	95,4
2-99	0,3526	96,0	1,4705	95,1	2,3572	95,4
2-100	0,3606	98,2	1,5003	97,0	2,4344	98,5

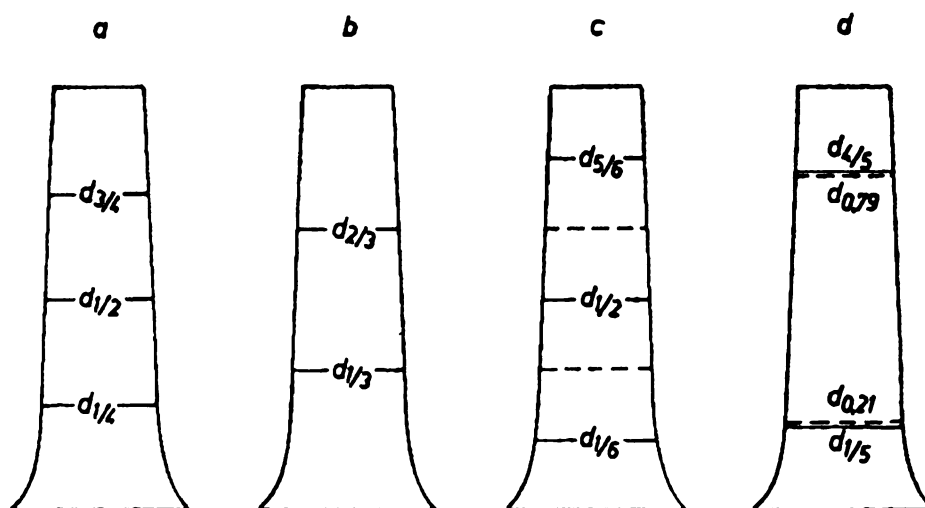


Figura 2-27. Forma del quinto inferior del fuste de abeto según ALTHERR (1960)
(ver también Cuadros 2-16 y 2-17)

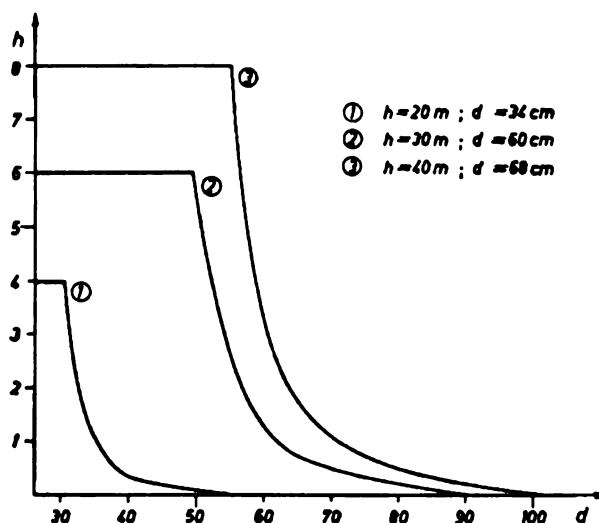


Figura 2-28. Diámetros a distintas secciones (correspondientes a los Cuadros 2-16 y 2-17)

II.1.8.4.1 Cubicación de secciones o trozas

En las fórmulas que siguen significan según la Figura 2-28a:

- ℓ = largo de la sección fustal
- g_b = área de la sección transversal del extremo más grueso
- g_s = área de la sección transversal del extremo más delgado
- $g_{1/3}$ = área de la sección a 1/3 del largo desde el extremo más grueso
- $g_{0.5} = g_{1/2}$ = área de la sección a medio largo
- $g_{0.05}$ = área de la sección a 1/20 del largo desde el extremo más grueso
- etc.

- Fórmula de áreas transversales conocidas como fórmula de SMALIAN (SMALIAN 1804, o antes) igual a un paraboloides truncado.

$$v = (g_b + g_s) \frac{\ell}{2} \quad (2-84)$$

- Fórmula del área media o central más conocida como fórmula de HUBER (KÄSTNER 1785, o antes; KRÜNITZ 1781; HUBER 1828).

$$v = \ell \cdot g_{1/2} \quad (2-85)$$

- Aplicación doble de la fórmula de áreas terminales

$$v = \frac{\ell}{4} (g_b + g_s + 2g_{1/2}) \quad (2-86)$$

- Fórmula de NEWTON (introducida en la práctica de la mensura forestal por RIECKE en 1849).

$$v = \frac{\ell}{6} (g_b + 4g_{1/2} + g_s) \quad (2-87)$$

Se originó a partir de:

$$g = b_0 + b_1x + b_2x^2 \quad (2-88)$$

con validez para la función de ahusamiento,

$$g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \quad (2-89)$$

Cubica correctamente los cuerpos de rotación analíticos (cilindro, paraboloides, cono y neiloides) completos y truncados.

- Fórmula de HOSSFELD (1849)

$$v = \frac{\ell}{4} (3g_{1/3} + g_b) \quad (2-90)$$

derivada a partir de (2-88)

Fórmula de aproximación, con desarrollo apoyado en la fórmula de HOSSFELD

$$v = \frac{\ell}{4} (3g_{1/3} + g_{2/3}) \quad (2-91)$$

Aplicación cuádruple de la fórmula de áreas terminales

$$v = \frac{\ell}{8} (g_b + 2g_{1/4} + 2g_{1/2} + 2g_{3/4} + g_s) \quad (2-92)$$

medición de árboles individuales

- **Fórmula de SIMONY**

$$v = \frac{\ell}{3} (2g_{1/4} - g_{1/2} + 2g_{3/4}) \quad (2-93)$$

deducida a partir de (2-89)

- **Aplicación triple de fórmula de áreas medias**

$$v = \frac{\ell}{3} (g_{1/6} + g_{1/2} + g_{5/6}) \quad (2-94)$$

- **Fórmula deducida a partir de (2-88)**

$$v = \frac{\ell}{8} (3g_{1/6} + 2g_{1/2} + 3g_{5/6}) \quad (2-95)$$

Para trozas basales, se logra mejorar los resultados cuando se le da una mayor ponderación al área de la sección a 1/6 del largo:

$$v = \frac{\ell}{4} (2g_{1/6} + g_{1/2} + g_{5/6}) \quad (2-96)$$

- **Fórmulas generales de cubicación por medio de dos áreas transversales medidas a igual distancia del centro (fórmulas de GAUSS y SIMONY):**

$$v = \frac{\ell}{2} (g_a + g_b), \text{ donde } a + b = 1 \quad (2-97)$$

- **Fórmula de GAUSS y SIMONY**

$$v = \frac{\ell}{2} (g_{0.21} + g_{0.79}) \quad (2-98)$$

donde los valores exactos de a y b dados por GAUSS y SIMONY son:

$$a = 0.2113249$$

$$b = 0.7886751$$

De aquí se puede aplicar también la fórmula aproximada de GAUSS y SIMONY:

$$v = \frac{\ell}{2} (g_{1/5} + g_{4/5}) \quad (2-99)$$

Otra fórmula de SIMONY es:

$$v = \frac{\ell}{2} (g_{1/6} + g_{5/6}) \quad (2-100)$$

Fórmula de varias secciones por aplicación repetida de la fórmula de área media.

$$v = \frac{\ell}{10} (g_{0.05} + g_{0.15} + \dots + g_{0.95}) \quad (2-101)$$

Fórmula de GIERUSZINSKI (1959) deducida a partir de (2-88)

$$v = \ell (0.23g_{0.1} + 0.58g_{0.5} + 0.19g_s) \quad (2-102)$$

Si $g_s = 0$, la fórmula se reduce a:

$$v = \ell (0.23g_{0.1} + 0.58g_{0.5}) \quad (2-103)$$

GIERUSZINSKI deduce de esta expresión la fórmula (2-45) para el factor de forma fustal verdadero.

Las fórmulas descritas, en especial las (2-93), (2-94), (2-95), (2-96) y (2-97), son de gran importancia para la medición exacta de árboles muestra en la experimentación forestal. Los árboles muestra se seccionan en largos relativos o absolutos y se cubican por secciones. En general, como consecuencia de la forma basal, la aplicación de la fórmula del área media genera un error negativo. También la aplicación reiterada de esta fórmula por medio de más subdivisiones, fórmula (2-94), conduce a un pequeño error negativo.

Una subdivisión de las secciones en tres o cuatro partes es ventajosa por motivos prácticos, cuando en vez de aplicar la fórmula de áreas medias compuesta, se elige la fórmula (2-96).

También la fórmula (2-100) da resultados muy buenos y se destaca por su simplicidad, en comparación con la fórmula de áreas centrales (2-96). Los Cuadros 2-16 y 2-17 entregan los resultados de las fórmulas anteriores sobre el 1/5 basal de un fuste de abeto según los datos de ALTHERR (1960) (Figura 2-28).

II.1.8.4.2 Fórmulas del centroide (PATTERSON *et al.* 1993)

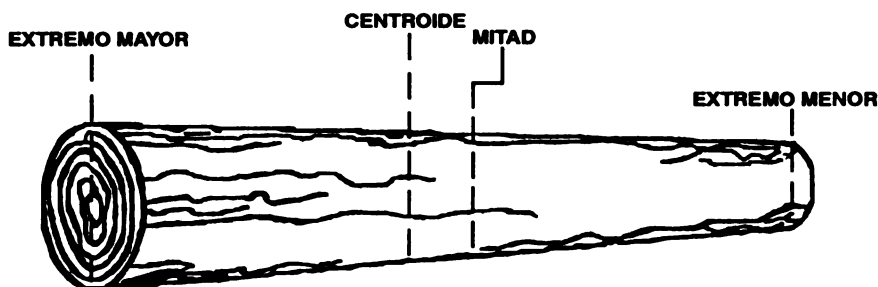


Fig. 2-28a. Puntos de medición de trozas

$$v = g_s \cdot \ell + (1/2)\alpha \cdot \ell^2 + (1/3)\beta \cdot \ell^3 \quad (2-103a)$$

Donde

$$\alpha = (g_b - g_s - \beta \cdot \ell^2) / \ell \quad \text{y} \quad \beta = (g_b - g_c(\ell / \delta) - g_s(1 - \ell / \delta)) / \ell^2 - \ell \cdot \delta$$

g_c = sección en el punto del centroide a una distancia j desde el extremo más grueso

$$\gamma = \ell - \left(\left(\left(\left((d_b / d_s)^4 + 1 \right)^{0.5} - \sqrt{2} \right) / \left(\sqrt{2} \left((d_b / d_s)^2 - 1 \right) \right) \right) \right) \ell$$

$$\delta = \ell - \gamma; \quad d_b = \text{diámetro mayor}; \quad d_s = \text{diámetro menor}$$

II.1.8.4.3 Normas de cubicación de trozas JAS

Para el intercambio comercial de trozas en Japón se desarrolló la norma JAS (Japanese Agricultural Standard) que son fórmulas de cubicación muy simplificadas (PETERS *et al.* 1985).

Troza menor de 6 metros

$$v = \frac{d^2 \ell}{10000}$$

Troza de 6 metros y más

$$v = \left(d + \frac{\ell - 4}{2} \right)^2 \frac{\ell}{10000} \quad (2-103b) \quad (2-103c)$$

Donde

v = volumen de la troza, m³

d = diámetro menor aproximado al par inferior, cm

ℓ = largo en metros aproximado a los 20 cm inferiores (ejemplo: 4.36 m son 4.20 m)

ℓ' = largo en metros aproximado al entero (ejemplo: 4.36 m son 4 m)

II.1.8.5 Comparación entre los cuerpos de rotación teóricos y la forma fustal. Expresiones matemático-estadísticas para la forma fustal

Con las series de ahusamiento reales y el factor de forma verdadero, se hizo posible representar la forma geométrica del árbol con buena aproximación.

Un árbol joven, que aún no ha alcanzado una densidad de competencia o árboles que crecen aisladamente, se asemejan al cono o al neiloide. Los árboles que se desarrollan en competencia tienen una forma paraboidal. En general, la forma fustal media con un mismo factor de forma no disminuye tan rápido como un paraboloides apolónico. Estas comprobaciones son importantes para verificar la aplicabilidad de las fórmulas de cubicación.

Paralelamente al estudio teórico y mecánico por deducción de la forma fustal, desde hace mucho se ha intentado también evaluarla estadísticamente y representarla en tablas o fórmulas. A continuación se presentarán brevemente los resultados y las investigaciones que se han realizado hasta el momento.

II.1.8.5.1 Sistemas para la captación y representación de cualquier forma fustal. El sistema de SCHIFFEL (1897)

Las ecuaciones (2-58) y (2-59) de SCHIFFEL permiten por medio del conocimiento de las magnitudes:

$$h, d, d_{1/2}$$

determinar adicionalmente la forma fustal en los puntos a 1/4 y 3/4 de la altura. Este sistema, basado en material observado, tiene como desventaja que se definen solamente dos puntos adicionales. En cambio, una ventaja sustancial es que se pueden representar todas las formas fustales.

La serie de ahusamiento de BELYEA

$$k_{0.1} = \frac{d_{0.1}}{d}, \frac{d_{0.2}}{d}, \dots, \frac{d_{0.8}}{d}, \frac{d_{0.9}}{d} \quad (2-104)$$

expresada en porcentaje, se estima a partir del cociente de forma $k_{0.5} = d_{0.5} / d$ (Figura 2-24). Así se da la posibilidad de definir la forma fustal para cualquier valor de $k_{0.5}$, expresado a

medición de árboles individuales

través de los cuocientes o las series de ahusamiento. También así se pueden captar todas las formas fustales.

II.1.8.5.2 Sistemas para la captación de formas fustales medias

Para determinar la forma fustal media de una especie hay dos posibilidades:

1. Construir un modelo fustal con un desarrollo característico para la especie. Si el material fuente se refiere al diámetro a la altura del pecho, los modelos fustales pueden tener validez para cada una o todas las clases de altura y pueden ser evaluados para diversos fines prácticos.
2. Series de ahusamiento falsas por especie. En los países de Europa central y oriental y en los EE.UU. se evaluaron datos para la construcción de series de ahusamiento promedio referidos al d (mediciones a 1 m, 3 m, etc.) por cubicación de secciones de igual largo absoluto de 2 m (Figura 2-18).

Estas series de ahusamiento están estratificadas por clase de altura y se expresan en porcentajes referidos al d . Sobre la problemática de estas series de ahusamiento y tablas informó MITSCHERLICH (1939). En casi todos los países existen series de ahusamiento para la mayoría de las especies. La manipulación práctica de estas series de ahusamiento resulta cómoda, y la interpolación de alturas intermedias es fácil de realizar. La aplicación es relativamente segura, a pesar de que en la comparación con la forma fustal observada pueden aparecer desviaciones mayores.

II.1.8.5.3 Sistemas referidos a un diámetro a igual altura relativa con la utilización de cuocientes de forma verdaderos

La ventaja de dividir el factor de forma falso $f_{1,3}$ en el factor de forma verdadero $f_{0,1}$ (que representa la forma geométrica) y el coeficiente de forma basal k_H fue destacada por HOHENADL (1936) y KRENN en múltiples ocasiones.

$$f_{1,3} = \frac{f_{0,1}}{k_H^2}$$

Como:

$$k_H = \frac{d}{d_{0,1}}$$

Debido a que a un mismo valor de $f_{0,1}$ se le pueden asociar distintos valores de k_H , la zona de inserción de raíces presenta una variación mayor, un cuadro menos claro. De aquí

resulta explicable la estrechez de la relación del coeficiente de forma y del factor de forma verdadero. Igualmente, las relaciones entre los cuocientes de forma y el factor de forma verdadero son más estrechas que entre cada uno de los valores de k con k_H .

Persiste la relación:

$$k_i = \frac{k_{0,i}}{k_H}$$

Por ejemplo:

$$k_{0,5} = \frac{d_{0,5}}{d} = \frac{d_{0,5}}{d_{0,1}} \cdot \frac{d_{0,1}}{d} = \frac{k_{0,5}}{k_H} \quad (2-105)$$

La evaluación de series de ahusamiento de árboles individuales o de valor medio de rodales por especie, permitió como primera aproximación la construcción de los Cuadros 2-7 y 2-8.

De esta forma se posibilita que, conociendo el cuociente de forma verdadero, pueda construirse cualquier forma fustal y evaluarse para fines prácticos.

Debido a que pueden presentarse desvíos unilaterales para cada especie, PRODAN (1950), ALTHERR y DITTMAR publicaron tablas por especie. Las ecuaciones para el material de ALTHERR se presentan en el Cuadro 2-10.

En el Cuadro 2-12 aparece una tabla estratificada por valores de $k_{0,5}$ para *picea*, construida por PRODAN. El ajuste de los valores de k_i en función de $k_{0,5}$ es más simple y las curvas obtenidas pueden considerarse paralelas (Figura 2-20).

$$\begin{aligned} k_{0,7} &= 0.479 + 0.5433 k_{0,5} \\ k_{0,3} &= 0.194 + 1.000 k_{0,5} \\ k_{0,1} &= 0.544 + 1.35333 k_{0,5} + 1.28889 k_{0,5}^2 \end{aligned} \quad (2-106)$$

Los valores intermedios de $k_{0,8}$, $k_{0,6}$, $k_{0,4}$ y $k_{0,2}$ se obtuvieron por interpolación lineal. Con este sistema es posible calcular los cuocientes de forma para cualquier especie.

Debido al estado del conocimiento actual, el desarrollo de tablas de cuocientes de forma verdaderos por especie (se expresen en fórmulas o no) es, aparentemente, la manera más corta y práctica de representar las más diversas formas fustales.

medición de árboles individuales

De la investigación que se ha llevado hasta aquí, se desprende que para fines prácticos el Cuadro 2-8 de KRENN y PRODAN se aplica a todas las especies, no sólo a coníferas con fuste continuo, sino que también a latifoliadas que crecen dentro de un bosque denso.

II.1.8.6 Expresión matemática de la forma

El primer intento de representar la forma fustal media por una ecuación estadística es la fórmula de HÖJER (1903).

$$k_i = \frac{d_i}{D} = C \log \frac{c + \ell}{c} \quad (2-107)$$

Donde

C y c = constantes

d_i = el diámetro del árbol a ℓ metros de la punta

D = el diámetro de la base

JONSON (1928) modifica la fórmula a:

$$k_i = \frac{d_i}{D} = C \log \frac{c + \ell - 2.5}{c} \quad (2.5 = \text{cte}) \quad (2-108)$$

Donde

k_i = es el cuociente diámetro superior/diámetro basal

ℓ = altura relativa expresada en porcentaje de h -1.3

h = altura fustal hasta el ápice

JONSON reemplaza las constantes C y c con los diferentes grados de cuociente de forma dentro del rango

$$0.55 < k_{1/2} < 0.80$$

Lamentablemente estas fórmulas tienen como desventaja que la zona de inserción de raíces (dentro de la cual cae el d) tiene una influencia distorsionante.

BEHRE (1923) usa para la representación de la curva fustal la ecuación de la hipérbola:

$$k = \frac{x}{a + bx} \quad (2-109)$$

Donde

x = altura relativa, expresada en porcentaje de la altura sobre 1.3 m

k = diámetro relativo a la altura x con respecto al diámetro normal a la altura del pecho

OSUMI (1959) usa para la especie *Cryptomaeria japonica* un polinomio del tercer grado:

$$k_i = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (2-110)$$

Donde

x = altura relativa h_i / h

El origen del eje de coordenadas se ubica en el ápice del árbol. El ajuste a formas fustales reales es bueno. En este sistema se desestima la representación de las diversas formas fustales manifestadas por el cuociente de forma verdadero.

La representación polinomial tiene la ventaja de ser fácilmente integrable a través de lo cual se puede conocer en forma exacta el volumen.

Algunos ensayos han demostrado que un polinomio de tercer grado no representa mejor la curva fustal de *picea*. Si se desea que la curva reproduzca bien los valores de los cuocientes de forma reales, se requiere una ecuación de cuarto grado.

Para la forma fustal promedio de *picea* con un $k_{0.5} = 0.750$ la función de ahusamiento polinomial es:

$$k_i = 0.041641 + 2.376875x - 2.709375x^2 + 1.812500x^3 - 0.468750x^4 \quad (2-111)$$

Reemplazando x por 0 en la punta, se obtiene un valor de $k_s = 0.041641$. Debido a que el fin del tallo apical de todas maneras tiene un cierto espesor, este resultado es bastante satisfactorio.

Por el contrario, la aproximación para la parte basal del fuste no es tan buena y por eso se debe tratar de representar en forma independiente.

Para $x = 1$

$$k_b = 1.052891$$

Siendo que el diámetro fustal basal es mucho mayor y se ubica dentro del rango:

$$1.2 d_{0.1} < d_b < 2.0 d_{0.1} \quad (2-112)$$

medición de árboles individuales

PETERS (1971) ajusta para la especie *Araucaria araucana* (Mol) Koch un polinomio de quinto grado donde la variable independiente es el diámetro relativo d_i/d y la variable independiente la altura relativa h_i/h .

Se puede representar cualquier forma fustal a partir del cociente de forma verdadero $k_{0.5}$. El Cuadro 2-12 muestra que los valores de $k_{0.5}$ para distintos $k_{0.5}$ pueden obtenerse con una gran precisión por interpolación lineal.

Si se deduce la ecuación de ahusamiento correspondiente a $k_{0.5} = 0.6$ y se requiere obtener por interpolación lineal las correspondientes a $k_{0.5} = 0.750$ y $k_{0.5} = 0.900$, se sigue el siguiente procedimiento:

A partir de la función base,

$$k_{i,600} = 0.063438 + 1.479375x - 1.781250x^2 + 2.562500x^3 - 1.250000x^4 \quad (2-113)$$

se genera la ecuación de la curva para cualquier valor de $k_{0.5}$, por ejemplo $k_{0.5} = 0.750$:

$$k_i = k_{i,0.750} \frac{k_{0.5} - 0.750}{0.150} (k_{i,0.75} - k_{i,0.6}) \quad (2-114)$$

y según (2-111)

$$k_i = 0.041641 + 2.376875x - 2.709375x^2 + 1.812500x^3 - 0.468750x^4 + \frac{k_{0.5} - 0.750}{0.150} (-0.021797 + 0.89750x - 0.928125x^2 - 0.750000x^3 + 0.781250x^4) \quad (2-115)$$

La evaluación matemática para cualquier valor de $k_{0.5}$ observado se logra de manera más eficiente mediante el cálculo previo del segundo miembro de la ecuación y la posterior determinación de los parámetros de x , x^2 , x^3 y x^4 .

Para $k_{0.5} = 0.9$

$$\frac{0.900 - 0.750}{0.150} = 1$$

La ecuación correspondiente es entonces:

$$k_{i,0.9} = 0.019844 + 3.274375x - 3.637500x^2 + 1.062500x^3 + 0.312500x^4 \quad (2-116)$$

La coincidencia con los valores del Cuadro 2-12 es notable. El cálculo de dimensiones absolutas conociendo $d_{0.1}$ es relativamente sencillo.

$$k_i = \frac{d_{0i}}{d_{01}}; \quad d_{0i} = k_i \cdot d_{01} \quad (2-117)$$

La forma fustal de *picea* también se puede representar por una ecuación de tipo hiperbólico:

$$k_{i, 0.750} = \frac{x^2}{-0.00595 + 0.3925x + 0.572x^2} \quad (2-118)$$

Para la curva fustal media ($k_{0.5} = 0.750$), el ajuste es del todo satisfactorio.

En la sección II.2.2 se realiza un análisis completo de las funciones de ahusamiento.

II.1.9 Comprobación de la fórmula de área central o media

La aplicación de la fórmula de diámetro central de HUBER está muy extendida. Para la forma paraboidal, basta esta fórmula. Sin embargo, debido a que los fustes se alejan de la forma paraboidal, se debe verificar la exactitud de esta fórmula para diferentes condiciones de forma. Para esto la utilización de las series de ahusamiento y el factor de forma fustal verdadero resultó ser de gran ayuda.

En este capítulo, se prueba la fórmula del área central en base a trozas de distinta forma fustal que fueron cubicadas por procedimientos habituales. Se compara la cubicación de la fórmula de áreas centrales con el seccionamiento de HOHENADL.

De la tabla se extraerán los fustes con largo $\ell = 24$ m; en ellos se calculará la diferencia entre el volumen determinado con la fórmula de área central y la cubicación por secciones.

Aquí v_s = volumen calculado con cuatro secciones

v_1 = volumen por la fórmula de área central

Ejemplo: $f_{01} = 0.440$

$$v_s = 6 \cdot (g_{01} + g_{03} + g_{05} + g_{07})$$

$$v_s = 6 \cdot (0.1963 + 0.1257 + 0.0707 + 0.0314) = 2.5446 \text{ m}^3$$

$$v_1 = 24 \cdot g_{0.6} = 24 \cdot 0.0962 = 2.3088 \text{ m}^3$$

$$\text{Diferencia en } \text{m}^3 \text{ y porcentaje de } v_1 = \frac{0.2358 \text{ m}^3}{2.3088 \text{ m}^3} = 10.2\%$$

Cuadro 2-18. Árboles con distintas series de ahusamiento con $d_{0,1} = 50$ cm y $h = 30$ m

$d_{0,1}$	$d_{0,2}$	$d_{0,3}$	$d_{0,4}$	Diámetro en cm					$f_{0,1}$
				$d_{0,5}$	$d_{0,6}$	$d_{0,7}$	$d_{0,8}$	$d_{0,9}$	
				A					
3	6	9	12	15	18	21	24	27	
metros de la base									
50,0	45,0	40,0	35,0	30,0	25,0	20,0	15,0	10,0	0.410
50,0	45,0	41,0	37,7	34,5	30,0	25,6	17,8	10,1	0.490
50,0	45,5	42,0	38,5	35,0	30,7	25,7	19,5	10,3	0.500
50,0	46,1	43,6	39,9	36,2	31,5	26,1	20,1	10,7	0,520
50,0	46,8	44,2	40,7	36,7	31,7	26,5	20,3	11,0	0.530
50,0	47,0	44,6	41,2	37,5	32,7	27,7	20,7	11,9	0.545
50,0	47,2	45,0	42,7	40,0	36,2	31,9	24,7	15,0	0.590
50,0	48,5	47,0	45,0	42,5	38,0	33,0	25,0	16,0	0.629

Series de ahusamiento correspondientes, en el mismo orden :

$d_{0,1}$	$d_{0,2}$	$d_{0,3}$	$d_{0,4}$	$d_{0,5}$	$d_{0,6}$	$d_{0,7}$	$d_{0,8}$	$d_{0,9}$	$f_{0,1}$
1,000	0,900	0,800	0,700	0,600	0,500	0,400	0,300	0,200	0,440
1,000	905	820	755	689	601	512	356	202	490
1,000	910	840	770	700	615	514	390	205	500
1,000	923	872	797	723	630	522	402	214	520
1,000	935	883	815	734	635	530	405	219	530
1,000	940	892	825	751	655	554	415	239	545
1,000	945	901	855	801	725	638	495	300	590
1,000	970	940	900	850	760	660	500	320	0,629

Cuadro 2-19. Cubicación por cuatro secciones (V_s) y con la formula de área central (V_1)

$f_{0,1}$	V_s	V_1	Diferencia	
	m ³	m ³	m ³	% v. V_1
0,440	2,5446	2,3088	— 0,2358	— 10,2
490	2,8398	2,6784	— 0,1614	— 6,0
500	2,8974	2,7936	— 0,1038	— 3,7
520	3,0120	3,0000	— 0,0120	— 0,4
530	3,0642	3,1224	+ 0,0582	+ 1,9
545	3,1392	3,1992	+ 0,0600	+ 1,9
590	3,3654	3,4368	+ 0,0714	+ 2,1
629	3,5832	3,8160	+ 0,2328	+ 6,1

Los resultados del cálculo se muestran en el Cuadro 2-19.

Considerando que el cálculo del volumen con cinco secciones, y con ello también $f_{0,1}$, está castigado por un error sistemático, puede deducirse a partir del ejemplo anterior una conclusión muy importante. En fustes cuya forma equivalga a un valor de $f_{0,1}$ de 0.520-0.550, se puede utilizar para la cubicación fustal la fórmula del área central, sin que se deba esperar errores significativos. En fustes con un $f_{0,1}$ bajo 0.520, se subestimaré el volumen, y con troncos con $f_{0,1}$ sobre 0.550, éste se sobrestimaré.

Se debe considerar:

- a. En fustes que presenten un valor de $f_{0,1}$ menor a 0.520, los errores negativos alcanzarán una dimensión absoluta mayor que los errores positivos en fustes con un valor de $f_{0,1}$ sobre 0.550.

En el ejemplo mencionado, los errores negativos llegan hasta 10% contra un error positivo de 6%. En árboles que han crecido aislados, cuyo $f_{0,1}$ puede ser aún menor, los errores negativos pueden ser aún mayores.

- b. La fórmula de área central vale para el paraboloide apolónico. La comparación entre el paraboloide ($f_{0,1} = 0.55$) y la correspondiente forma fustal media ($f_{0,1} = 0.55$) muestra que el diámetro en la mitad inferior del paraboloide decrece más rápidamente que su equivalente en el fuste.

Lo anterior hace sobrestimar los volúmenes para $f_{0,1}$ altos.

Cuadro 2-20. Cubicación con la fórmula de área central sin subdivisión (V_1) y dos secciones (V_2)

$f_{0,1}$	V_1	V_2	Diferencia	
	m ³	m ³	m ³	% v. V_1
0,440	2,3088	2,4972	— 0,1884	— 8,2
490	2,6784	2,7564	— 0,0780	— 2,9
500	2,7936	2,8392	— 0,0456	— 1,6
520	3,0000	2,9376	+ 0,0624	+ 2,4
530	3,1224	3,0108	+ 0,1116	+ 3,6
545	3,1992	3,0900	+ 0,1092	+ 3,4
590	3,4368	3,3348	+ 0,1020	+ 3,0
629	3,8160	3,5772	+ 0,2388	+ 6,3

II.1.9.1 Largo óptimo de los fustes para su cubicación

Importante es decidir el gran problema práctico de cuándo es ventajoso mantener el fuste en todo su largo y cuándo debe ser seccionado. La aplicación de una fórmula de cubicación debería dar en ambos casos el mismo resultado. Sin embargo, con la fórmula

medición de árboles individuales

del área central no da lo mismo calcular el volumen a partir de una o dos secciones. En el Cuadro 2-20 se calculó el volumen de los fustes del ejemplo anterior con la fórmula del área central.

- a. Sobre el largo total 24 m (V_1)
- b. Sobre dos secciones de 12 m c/u (V_2)

De aquí se desprende, considerando las relaciones de forma media de los fustes, que con formas fustales cuyo valor de $f_{0.1}$ sea menor a 0.520, es ventajoso separar el fuste en varias secciones cortas. Con formas fustales de un valor de $f_{0.1}$ superior a 0.520, conviene mantener el fuste completo.

II.1.9.2 Discusión y solución general

El valor encontrado en $f_{0.1}$ y el cálculo volumétrico según la fórmula del área central con sólo una sección vale para el volumen total del fuste y solamente en forma aproximada para el volumen comercial. Por la exclusión de la sección apical, baja la altura del diámetro central (diámetro a media altura), de manera que en la práctica las relaciones se complican.

Como marco para la cubicación correcta del fuste completo con la fórmula del área central se puede considerar:

$$0.520 < f_{0.1} < 0.550$$

con sus correspondientes valores de $k_{0.5}$

$$0.720 < k_{0.5} < 0.750$$

Cuando los resultados para el fuste completo son idénticos usando la fórmula del área central o la cubicación por secciones, se puede deducir matemáticamente el valor de $f_{0.1}$ para todo el fuste. Si la fórmula de área central entrega los valores correctos, se da generalmente que:

$$v = \frac{\pi}{4} d_q^2 \cdot h \cdot f_q = \frac{\pi}{4} d_{1/2} \cdot h \quad (2-119)$$

Y de aquí se desprende:

$$f_q = \left(\frac{d_{1/2}}{d_q} \right)^2 \quad (2-120)$$

Si $q = 0.1 h$, entonces:

$$f_q = f_{0.1}$$

$$f_{0.1} = \left(\frac{d_{1/2}}{d_{0.1}} \right)^2 = k_{0.5}^2$$

De las series de ahusamiento tabuladas resulta evidente para qué valores de $k_{0.5}$ es válida la ecuación, donde pueden desplazarse los rangos de $f_{0.1}$ en 2 a 4% hacia arriba por el error sistemático negativo.

Cuadro 2-21. Error de cubicación al aplicar la fórmula de área central con distinto seccionamiento (de igual largo relativo) abeto $f_{0.1} = 0.560$

Seccionamiento	Sección Hohenadl (0.2 l)					Error total
	1,0—0,8	0,8—0,6	0,6—0,4	0,4—0,2	0,2—0,0	
	Error en el volumen de sección (%)					%
a) 100 Secc.	0	0	0	0	0	0
b) 5 Secc.	— 10,36	— 0,03	+ 0,45	+ 0,77	— 12,13	— 4,13
c) 50 Secc.	— 0,91	— 0,01	+ 0,04	— 0,08	— 0,07	— 0,35
d) 25 Secc.	— 2,51	— 0,05	+ 0,06	— 0,09	— 0,37	— 0,97
e) 15 Secc.	— 4,59	+ 0,10	— 0,06	— 0,01	— 1,48	— 1,76
f) 10 Secc.	— 6,85	— 0,08	+ 0,12	+ 0,32	— 3,05	— 2,65
g) Sección 1 de b) en 3 secciones parciales	— 4,59	— 0,03	+ 0,45	+ 0,77	— 12,13	— 1,93
h) Sección 1 de b) en 5 secciones parciales	— 2,51	— 0,03	+ 0,45	+ 0,77	— 12,13	— 1,14

Estos cálculos coinciden con la comprobación empírica del Cuadro 2-20.

GIERUSZINSKI deduce $k_{0.5} = 0.74$ a partir de:

$$v = \frac{\pi}{4} d_{0.1}^2 \cdot h (0.23 + 0.58 k_{0.5}^2) = \frac{\pi}{4} k_{0.5}^2 d_{0.1}^2 \cdot h$$

y de aquí:

$$0.23 + 0.58 k_{0.5}^2 = f_{0.1} ; k_{0.5}^2 = 0.23 ; k_{0.5} = 0.74$$

A través del ejemplo anterior, se hace evidente la importancia del factor de forma verdadero $f_{0,1}$ y de la media de las series de ahusamiento verdaderas. Por medio del cálculo de algunos ejemplos simples, se hacen comprensibles interrelaciones cuya explicación y comprobación exigía hasta hace poco muchas mediciones y datos. Los numerosos datos obtenidos por SCHIFFEL (1902), KUNZE (1873), FLURY (1897) y KORSUN (1934) coinciden con los resultados de los ejemplos teóricos. Las investigaciones llevaron a la siguiente conclusión:

Los errores de cubicación con la fórmula del área central varían de -5 a +3%. En fustes muy cónicos, se pueden producir errores de hasta -15%. El error depende de la posición de la sección. Por ejemplo, si la sección basal tiene forma cónica o de neiloide, para esta parte fustal el error es siempre negativo y va de -5 a -10%, pudiendo llegar en casos extremos a -25%. En la segunda troza, el error puede ser positivo o negativo y fluctúa entre $\pm 2\%$ del volumen. Las trozas superiores corresponden aproximadamente a las secciones medias, pero con mayor frecuencia aparecen errores positivos.

Cuadro 2-22. Valores de $k_{0,5}$ y de $f_{0,1}$ para una cubicación sin error con la fórmula de área central

Según tabla	$k_{0,5}$	$k_{0,5}^2$	$f_{0,1}$
KRENN-PRODAN	0,723	0,522	0,520
	0,735	0,540	0,531
	0,750	0,562	0,545
ALTHERR Picea	0,733	0,537	0,535
" "	0,754	0,568	0,550
" Pino Oregón	0,725	0,526	0,525
" "	0,739	0,546	0,535
" Pino y Lárix japonés	0,729	0,531	0,530
" "	0,748	0,559	0,545
GIERUSZINSKI	0,740	0,548	0,548

Cuadro 2-23. Errores en la aplicación de la fórmula del área central (KORSUN 1934)

Parte del fuste	Nº de árboles	Error total en %		Límites del error en %	
		+	—	+	—
pie	502		3,9	6	16
parte media	475		0,8	10	12
copa	215	4,9		16	2
fuste completo	330	0,4		14	10
Total:	1522	—	0,9	16	16

Los resultados obtenidos por KORSUN (1934), en especial para *abies* y *picea*, se muestran en el Cuadro 2-23.

El error producido por la aplicación de la fórmula del área central se denomina error de forma (KRENN 1943; KORSUN 1934).

En relación con esto se deben aclarar los conceptos fuste cilíndrico y forma cilíndrica.

II.1.9.3 Medidas de conicidad del fuste

Todo cuerpo fustal representado por la curva teórica

$$y^2 = px^r$$

y con exponente $r < 1$ se considera de tipo cilíndrico.

El paraboloide apolónico para el cual $r = 1$ es válido, es cubicado correctamente tanto por la fórmula de área central (HUBER) como por la de áreas terminales (SMALIAN).

Los cuerpos fustales con un exponente de $r > 1$ se denominan de tipo cónico.

Por lo tanto, r puede considerarse un índice de conicidad, debido a que en él se refleja la disminución del diámetro en función de la altura relativa. Para cuerpos fustales teóricos, el error porcentual generado por el uso de la fórmula de área central (error de forma porcentual) depende solamente del grado de la forma cónica y no de la dimensión del cuerpo fustal.

En formas fustales reales, se puede interpretar su semejanza con el criterio de la forma cilíndrica, como la cubicación correcta de todo el fuste por medio de la fórmula de área central.

Puede valer como regla que fustes con un $f_{0.1}$ bajo 0.520 sean considerados como cónicos y sobre 0.520 como cilíndricos. Para estos últimos, la fórmula de área central permite la cubicación correcta de todo el fuste.

Para distintas especies, se pueden entregar valores medios y de rango para $f_{0.1}$ y $k_{0.5}$ (Cuadros 2-24 y 2-25).

En la cubicación de trozas, el error porcentual depende de la disminución absoluta del diámetro por unidad de longitud.

Cuadro 2-24. Valores medios de $f_{0,1}$ y $k_{0,5}$ para distintas especies, según a) ALTHERR, b) CROCOLL y RÄTZEL, c) DITTMAR, d) PRODAN

Especie	Rango		Valores medios	
	$k_{0,5}$	$f_{0,1}$	$k_{0,5}$	$f_{0,1}$
Picea a, d	0,60 — 0,90	0,44 — 0,67	0,75	0,55
Pino a	0,54 — 0,81	0,38 — 0,59	0,73	0,53
Abeto a, d	0,60 — 0,90	0,45 — 0,68	0,76	0,57
Lárix a	0,65 — 0,80	0,47 — 0,59	0,72	0,53
Lárix Japonés a	0,66 — 0,78	0,48 — 0,57	0,74	0,54
Pino Oregón a	0,65 — 0,76	0,47 — 0,55	0,70	0,51
Haya c, d	0,52 — 0,79	0,40 — 0,55	0,65	0,50
Álamo b	0,42 — 0,72	0,37 — 0,48	0,58	0,42

Cuadro 2-25. Valores según ZACHAROW en ANUTSCHIN (1960)

Tipo de madera	Diámetros como porcentajes del diámetro a 0.1 H en alturas relativas del árbol										
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Abedul	185,7	100	89,5	82,3	75,0	65,9	55,5	42,3	26,4	12,2	0
Encina	169,4	100	92,2	83,6	76,4	67,2	55,6	40,9	26,3	12,0	0
Fresno	162,3	100	91,3	83,5	77,1	69,8	60,0	46,4	30,0	12,8	0
Pino	140,9	100	91,6	84,4	78,3	71,8	64,6	55,4	43,3	25,0	0
Picea Sitichensis	169,9	100	92,5	85,5	79,7	72,6	63,2	51,6	34,7	17,0	0
Álamo	147,9	100	93,6	87,4	81,8	75,4	66,5	54,3	36,5	21,1	0
Picea	165,9	100	95,0	89,2	83,7	76,2	66,9	56,4	42,3	28,3	0

Ejemplo:

Un cono truncado de largo ℓ puede ser cubicado exactamente por la fórmula de NEWTON:

$$v = \frac{\ell}{6} (g_b + 4g_{1/2} + g_s)$$

Si se expresa la disminución media del diámetro por unidad de longitud (conicidad) como α :

$$\alpha = \frac{d_b - d_s}{\ell} \quad (2-121)$$

se pueden expresar los diámetros d_b y d_s , y las correspondientes áreas como:

$$d_b = d_{1/2} + \frac{\alpha \cdot \ell}{2} ; \quad g_b = \frac{\pi}{4} \left(d_{1/2} + \frac{\alpha \cdot \ell^2}{2} \right) \quad (2-122)$$

$$d_s = d_{1/2} - \frac{\alpha \cdot \ell}{2} ; \quad g_s = \frac{\pi}{4} \left(d_{1/2} - \frac{\alpha \cdot \ell^2}{2} \right) \quad (2-123)$$

El volumen se obtiene entonces con la expresión:

$$v = g_{1/2} \cdot \ell + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\ell^3 \alpha^2}{12}$$

El error volumétrico porcentual referido al volumen de la fórmula de área central es:

$$m_v \% = - \frac{\ell^2 \alpha^2}{12 \cdot d_{1/2}^2} \cdot 100 \quad (2-124)$$

Para $\ell = 6$ m, $\alpha = 2$ cm/m = 0.02 ; $d = 30$ cm = 0.3 m, el error alcanza a:

$$m_v \% = 1.33\%$$

La disminución α se denomina conicidad, y habitualmente se expresa en cm/m ó mm/m. Un fuste es cilíndrico cuando la disminución por metro lineal es menor a 1 cm, y cónico, cuando la disminución es mayor a 1 cm/m.

La conicidad de la mitad inferior de un fuste se expresa por el cuociente:

$$\alpha = \frac{d_{0.1} - d_{0.5}}{0.4h} \quad \text{ó} \quad \alpha = \frac{d - d_{0.5}}{0.5h - 1.3} \quad (2-125)$$

Una desventaja de la fórmula anterior es que el diámetro d está muy influido por la conicidad basal y por lo tanto no entrega una impresión correcta de la conicidad promedio.

En troncos volteados la conicidad por metro lineal se calcula habitualmente con el diámetro medido a 1 metro sobre el extremo más grueso y el diámetro del extremo menor.

La disminución absoluta en cm/m se puede calcular también para cada segmento.

En la Figura 2-29 se evalúan las curvas de conicidad para *picea*, suponiendo que:

- | | | | |
|----|-------------------|-------------------|------------|
| 1. | $k_{0.5} = 0.650$ | $d_{0.1} = 50$ cm | $h = 25$ m |
| 2. | $k_{0.5} = 0.750$ | $d_{0.1} = 50$ cm | $h = 25$ m |
| 3. | $k_{0.5} = 0.650$ | $d_{0.1} = 50$ cm | $h = 40$ m |
| 4. | $k_{0.5} = 0.750$ | $d_{0.1} = 50$ cm | $h = 40$ m |

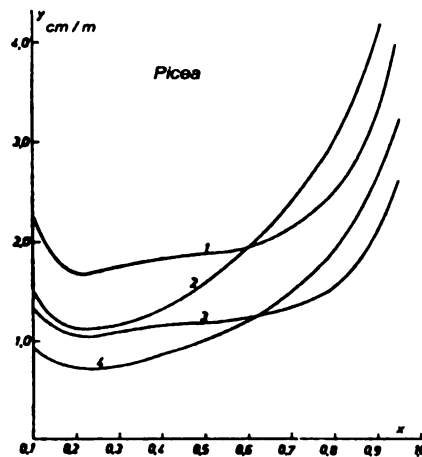


Figura 2-29. Curvas de ahusamiento ($Y = \text{cm/m}$) de *picea* en función de la altura relativa en el fuste ($= x$)

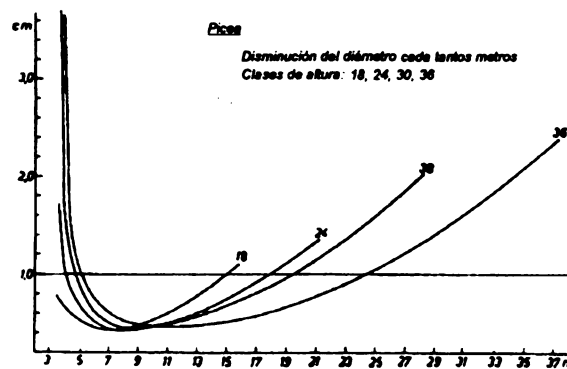


Figura 2-30. Curvas de conicidad en *picea* para las clases de altura 18, 24, 30 y 36, según BOLSINGER

La Figura 2-30 muestra las curvas de conicidad de formas medias de *picea* para diferentes clases de altura. Las series de ahusamiento falsas proporcionan una visión de la conicidad por especie (Figura 2-18).

El grado de esbeltez. En el estudio del crecimiento forestal se usa como medida de la conicidad el llamado grado o coeficiente de esbeltez, es decir:

$$a = \frac{d}{h} \quad (2-126)$$

Esta medida de conicidad es algo burda, ya que la forma del extremo superior se aleja de la inferior por la influencia de la copa.

II.1.9.4 Largos permitidos para la aplicación de la fórmula de área central

En la práctica, se usan secciones de entre 5 y 20 m. Para errores medios, véase Cuadro 2-22.

Los ejemplos de los Cuadros 2-17 y 2-21 son evidencia que también la cubicación por secciones de largo absoluto, en especial en el extremo inferior del árbol, puede estar afectada por un error.

Se desprende de lo anterior la necesidad de cubicar con secciones de 1 a 2 metros cuando se trata de fines científicos (análisis de tallo). El procedimiento habitual y esquemático de seccionar todo el fuste es superfluo y engorroso. Bastaría con subdividir la parte inferior del fuste hasta 5 a 6 m de altura.

La cubicación en cinco secciones de igual largo relativo está afectada por un error sistemático negativo. Este error se debe principalmente a la cubicación de la sección basal por medio de la fórmula de área central.

DITTMAR (1956) propuso, para fines de investigación en la medición de fustes volteados, dividir cada sección de HOHENADL en tres adicionales, es decir, en un total de 15 segmentos. Pero esta proposición parece ser demasiado complicada, puesto que se puede lograr la misma exactitud dividiendo en tres solamente la primera sección y manteniendo intactas las cuatro restantes (total siete secciones). Sin embargo, aplicando esquemáticamente la fórmula de área central en la sección inferior subdividida en tres, se origina un error volumétrico de 4 a 5%. Por esto es necesario cubicar la sección basal con una fórmula compuesta (ecuaciones 2-96 ó 2-100).

El error sistemático en la sección inferior se puede eliminar también por fórmulas estadísticas en función del coeficiente de forma basal de HOHENADL, PRODAN (1951).

Cuadro 2-26. Tabla para la corrección porcentual P_v de los volúmenes calculados con cinco secciones según fórmula (2-127)

a) De acuerdo a un valor de k_H :

k_H	P_v	k_H	P_v
1,00	0,0	1,16	4,3
1,02	0,5	1,18	4,9
1,04	1,1	1,20	5,4
1,06	1,6	1,22	5,9
1,08	2,2	1,24	6,5
1,10	2,7	1,26	7,0
1,12	3,2	1,28	7,6
1,14	3,8	1,30	8,1

La fórmula aproximadamente válida para todas las especies es:

$$P_v = 0.27 \frac{d - d_{0.1}}{d_{0.1}} \cdot 100 = 27 k_H - 27 = 27 (k_H - 1) \quad (2-127)$$

medición de árboles individuales

Mediante estas correcciones (Cuadro 2-26) el error medio cubicado por cinco secciones no debería exceder el $\pm 0.5\%$. El ahorro de trabajo frente a la medición de secciones de 2 m o de 10 a 20 secciones de igual largo relativo es considerable. ENGSTLER (1955) confeccionó tablas de corrección a partir de volúmenes determinados con secciones de 2 m para las cubitaciones por cinco secciones en función del coeficiente k_H . Investigaciones como ésta demuestran que cada especie tiene un desarrollo propio. Es así como todas las especies, con excepción del *abies* y *larix* europeos, se ajustan bastante a la fórmula (2-127). El *abies* se encuentra por debajo de los valores de la tabla del Cuadro 2-26 y el *larix* por encima.

El Cuadro 2-27 muestra los porcentajes de corrección según ENGSTLER.

Cuadro 2-27. Tabla para la corrección de los volúmenes calculados con 5 secciones (en porcentaje del volumen) según ENGSTLER (1955)

1. <i>Picea</i>	$P_v = 27.786$	$k_H - 27.462$
2. <i>Abies</i>	$P_v = 23.385$	$k_H - 23.318$
3. <i>Pinus</i>	$P_v = 27.686$	$k_H - 27.400$
4. <i>Larix europeo</i>	$P_v = 28.660$	$k_H - 27.911$
5. <i>Larix japonés</i>	$P_v = 22.172$	$k_H - 21.622$
6. <i>Pino Oregón</i>	$P_v = 22.991$	$k_H - 22.578$

$k_H = \frac{d}{d_{s,1}}$	p _v %					
	Picea	Abeto	Pino	Lárix europeo	Lárix japonés	Pino Oregón
0,98	—	—	—	0,2	0,1	—
0,99	—	—	—	0,5	0,3	0,2
1,00	0,3	0,1	0,2	0,7	0,5	0,4
1,01	0,6	0,3	0,4	1,0	0,8	0,6
1,02	0,9	0,5	0,7	1,3	1,0	1,0
1,03	1,2	0,8	1,0	1,6	1,2	1,1
1,04	1,4	1,0	1,3	1,9	1,4	1,3
1,05	1,7	1,2	1,6	2,2	1,7	1,6
1,06	2,0	1,5	1,8	2,5	1,9	1,8
1,07	2,3	1,7	2,1	2,7	2,1	2,0
1,08	2,5	1,9	2,4	3,0	2,3	2,3
1,09	2,8	2,2	2,7	3,3	2,5	2,5
1,10	3,1	2,4	2,9	3,6	2,8	2,7
1,11	3,4	2,6	3,2	3,9	3,0	2,9
1,12	3,7	2,9	3,5	4,2	3,2	3,2
1,13	3,9	3,1	3,8	4,5	3,4	3,4
1,14	4,2	3,3	4,0	4,7	3,7	3,6
1,15	4,5	3,6	4,3	5,0	3,9	3,9
1,16	4,8	3,8	4,6	5,3	4,1	4,1
1,17	5,0	4,0	4,9	5,6	4,3	4,3
1,18	5,3	4,3	5,2	5,9	4,5	4,6
1,19	5,6	4,5	5,4	6,2	4,8	4,8
1,20	5,9	4,7	5,7	6,5	5,0	5,0
1,21	6,2	5,0	6,0	6,8	5,2	5,3
1,22	6,4	5,2	6,3	7,0	5,4	5,5
1,23	6,7	5,4	6,5	7,3	5,7	5,7
1,24	7,0	5,7	6,8	7,6	5,9	5,9
1,25	7,3	5,9	7,1	7,9	6,1	6,2
1,26	7,5	6,1	7,4	8,2	6,3	6,4
1,27	7,8	6,4	7,6	8,5	6,5	6,6
1,28	8,1	6,6	7,9	8,8	6,8	6,9
1,29	8,4	6,8	8,2	9,1	7,0	7,1

En promedio, el alejamiento de la fórmula general (2-127) calculada en el Cuadro 2-26 no es más que un $\pm 0.5\%$ para cada especie. En aplicaciones prácticas (manejo forestal, construcción de tablas de volumen, etc.), las tablas de corrección son suficientes para satisfacer las más altas exigencias. Sin embargo, en la experimentación científica debería usarse la medición del fuste en 5 + 2 secciones (con cubicación de la sección basal por la fórmula 2-96).

II.1.10 Errores y fuentes de error en la medición de árboles volteados

Cualquier medición práctica está sujeta a errores. En mediciones cuidadosas con instrumentos precisos, los errores por lo general son muy pequeños. Aparecen con valores positivos y negativos frente a un valor "real" (compensación de errores). Estos pequeños errores se llaman errores aleatorios, porque ni su ocurrencia, ni su signo, ni su magnitud son predecibles, sino que son producto del azar.

Las instrucciones de la mensura forestal recomiendan aproximar toda fracción al centímetro en la medición del diámetro. Los "errores" que se producen por ello no son errores en la teoría de los errores, sino que son un descuento sistemático estimable, asumido por razones prácticas.

En contrapartida a los errores aleatorios, los errores sistemáticos se pueden predecir en su signo y, en caso dado, incluso en su magnitud.

Los resultados de la teoría de los errores son en general importantes para la evaluación de determinaciones y mediciones cuantitativas. Por el crecimiento de la magnitud del error se puede juzgar, caso a caso, si una comprobación está asegurada o si, por ejemplo, requiere mediciones adicionales.

A continuación se comentarán las principales fuentes de error y los producidos en la medición de árboles volteados.

Designación de los errores:

- Error absoluto del diámetro m_d
- Error absoluto del perímetro m_c
- Error absoluto del largo m_l
- Error absoluto del área basal m_g
- Error absoluto del volumen m_v
- Error porcentual del diámetro $m_{d\%}$
- Error porcentual del perímetro $m_{c\%}$

medición de árboles individuales

- Error porcentual del largo $m_l \%$
- Error porcentual del área basal $m_g \%$
- Error porcentual del volumen $m_v \%$

II.1.10.1 Relación entre el error del diámetro y el correspondiente error del área basal

El área basal se calcula para un círculo, según la fórmula:

$$g = \frac{\pi}{4} d^2$$

Si el diámetro está afectado por un error $\pm m_d$, entonces el área circular se calcula por la fórmula:

$$g \pm m_g = \frac{\pi}{4} (d \pm m_d)^2 = \frac{\pi}{4} (d^2 \pm 2d \cdot m_d + m_d^2) \quad (2-128)$$

y

$$\pm m_g = \frac{\pi}{4} (\pm 2d \cdot m_d + m_d^2) \quad (2-129)$$

Habitualmente m_d^2 puede ser desestimado en comparación a $2d \cdot m_d$. De aquí se desprende la fórmula de aproximación:

$$\pm m_g \approx \pm 2 \frac{\pi}{4} d \cdot m_d \quad (2-130)$$

El error porcentual del diámetro es:

$$m_d \% = \frac{m_d}{d} \cdot 100 \quad (2-131)$$

El error porcentual del área circular es:

$$m_g \% = \frac{m_g}{g} \cdot 100 \approx \frac{\frac{2\pi}{4} d \cdot m_d}{\frac{\pi}{4} d^2} \cdot 100 \approx \frac{2m_d}{d} \cdot 100 \approx 2m_d \% \quad (2-132)$$

La proporción del error para el área basal se puede deducir también por medio del cálculo diferencial. Si el error es igual al incremento infinitesimal d_g y se deja

$$g = \frac{\pi}{4} d^2 ; m_g \approx \pm \frac{\pi}{4} 2d \cdot m_d \quad (2-133)$$

En el caso de la medición del perímetro:

$$c = \pi \cdot d ; m_c = \pi \cdot m_d \quad (2-134)$$

De donde se desprende:

$$m_{c\%} = m_{d\%} \quad (2-135)$$

que el error porcentual del perímetro es igual al error porcentual del diámetro.

Si se calcula el área basal a partir del perímetro:

$$g = \frac{1}{4\pi} c^2 ; m_g = \pm \frac{1}{4\pi} (2c \cdot m_c + m_c^2) \approx \frac{1}{4\pi} 2c \cdot m_c \quad (2-136)$$

y

$$m_{g\%} = \frac{m_g}{g} 100 \approx 2m_{c\%} \quad (2-137)$$

Si la medición de diámetro está afecta a un error m_d , entonces el correspondiente error porcentual en el área basal es el doble. Lo mismo vale para la medición periférica, el error porcentual del área basal es el doble del error porcentual de medición del perímetro.

II.1.10.2 Propagación de los errores del área basal o diamétrica y del largo sobre el cálculo volumétrico

Si el área circular está afectada por un error m_g y el largo del fuste por un error m_l , entonces el error en volumen se calcula:

$$v = g \cdot \ell ; v = v \pm m_v = (g \pm m_g) \cdot (\ell \pm m_l) \quad (2-138)$$

$$\pm m_v = \pm g \cdot m_l + \ell \cdot m_g \pm m_g \cdot m_l$$

medición de árboles individuales

El miembro $m_g \cdot m_l$ puede despreciarse frente a los demás valores.

Entonces:

$$\pm m_v = \pm g \cdot m_l \pm l \cdot m_g \quad (2-139)$$

El error porcentual en volumen es:

$$m_{v\%} \equiv \frac{m_v}{v} \cdot 100 = \pm m_{l\%} \pm m_{g\%} \approx \pm m_{l\%} \pm 2m_{d\%} \quad (2-140)$$

De la fórmula se desprende que un error porcentual en el diámetro afecta doblemente el cálculo del volumen en comparación con el mismo error porcentual en el largo. Con la fórmula (2-139) se puede calcular cómo se manifiestan los errores en diámetro y largo sobre el error del volumen. Los dos ejemplos en la siguiente tabla son elocuentes.

Cuadro 2-28. Influencia del diámetro y de la altura en el error en volumen

Largo en m	10	20	30	10	20
Diámetro en cm	50	50	50	30	30
$m_v \%$	2	2	2	2	2
en cm	0,5	0,5	0,5	0,3	0,3
en m	0,2	0,4	0,6	0,2	0,4

El cuadro anterior muestra que, en un fuste de 50 cm de diámetro y 20 m de largo, un error diamétrico de 0.5 cm tiene la misma influencia que un error de 0.40 m en el largo.

Está demostrado que un error de 0.5 cm en el diámetro es más frecuente que un error de 0.4 m en una medición directa de longitud. Es por esto que se debe poner mayor atención a la medición exacta del diámetro.

En muchas mediciones de diámetro y largo, se produce la compensación de errores. El error en volumen se determina a través de la teoría de los errores:

$$m_v \equiv \pm \sqrt{(g \cdot m_t)^2 + (\ell \cdot m_k)^2} \quad (2-141)$$

y

$$m_v \equiv \pm \sqrt{m_{g\%}^2 + m_{\ell\%}^2} \quad (2-142)$$

II.1.10.3 La precisión de la determinación del área basal y sus errores

La determinación del área basal no es exclusiva para la medición de árboles volteados, sino que es de gran importancia para la mayoría de las estimaciones de rodal. Es por eso que ha sido tratada en numerosos trabajos de la literatura antigua y moderna (TISCHENDORF 1927; TIREN 1929; MEYER 1942; ABETZ 1960; KENNEL 1959; MATERN 1960; MÜLLER 1958; SOSTRZIOONEK 1958).

A través de los trabajos de H.A. MEYER y MATERN, se fijaron las fuentes de error y se hicieron estimables sus magnitudes.

Pueden originarse errores en la determinación de la sección por una obtención defectuosa del diámetro, debido a:

- a. Error de construcción de la forcípula
- b. Irregularidades de la superficie fustal
- c. Contracción del diámetro
- d. Errores aleatorios al usar la forcípula
- e. Desviación del área circular
- f. Aproximación prescrita del diámetro a centímetros enteros

II.1.10.3.1 Errores de construcción de la forcípula

Los brazos de la forcípula deben ser paralelos. Si por el contrario se encuentran en un ángulo α , entonces el error en el diámetro m_d es con gran aproximación igual a:

$$m_d = AB = \frac{d}{2} \operatorname{tg} \alpha \quad (2-143)$$

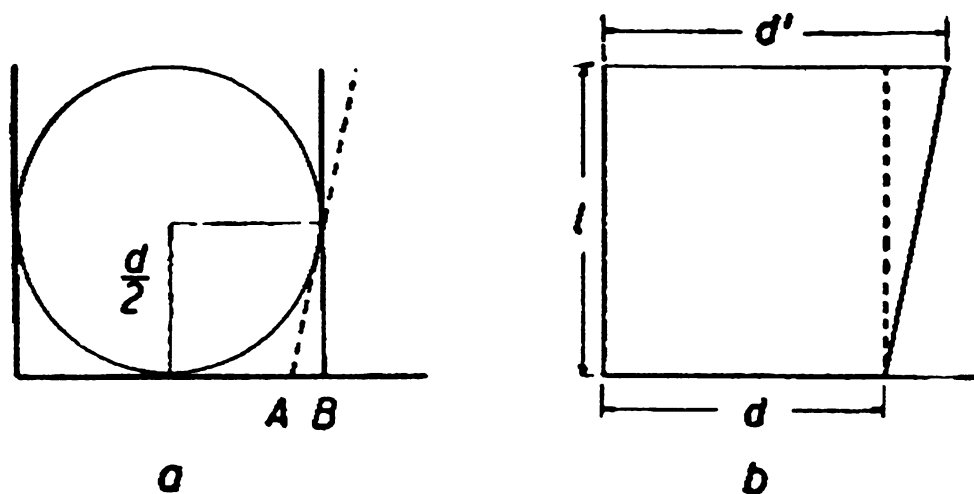


Figura 2-31. Error producido en la medición del diámetro con forcípula de brazos no paralelos

Cuadro 2-29. Error porcentual en área basal según ángulo de desviación de los brazos de una forcípula

α°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{tg } \alpha$	0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,123	0,141	0,150	0,176
$m_g\%$	1,7	3,5	5,2	7,0	8,7	10,5	12,3	14,1	15,0	17,6

Este error sistemático siempre se manifiesta con signo negativo. Puede ser definido en forcípulas usadas, aun desconociendo el ángulo α , en forma empírica, midiendo la distancia d' entre las dos puntas de los brazos y comparándola con la lectura d en el instrumento.

Según la ilustración "b" de la Figura 2-31, el largo de los brazos se define como ℓ :

$$\frac{d' - d}{\ell} = \text{tg } \alpha \quad (2-144)$$

$$m_d = \frac{d}{2} \text{tg } \alpha \quad (2-145)$$

El error porcentual del diámetro es entonces:

$$m_d \% = \frac{\frac{d}{2} \operatorname{tg} \alpha}{d} \cdot 100 = \frac{100}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \frac{d' - d}{\ell} \cdot 100 \quad (2-146)$$

y

$$m_g \% \approx 100 \operatorname{tg} \alpha = 100 \frac{d' - d}{\ell} \quad (2-147)$$

Por lo tanto, el error porcentual del área circular y el del diámetro pueden determinarse directamente. El error diamétrico es independiente del diámetro del árbol objeto. Por eso, deben utilizarse forcípulas en buen estado, o se debe eliminar el error sistemático por medio de una corrección.

II.1.10.3.2 Superficie fustal irregular

Los troncos pueden ser medidos con o sin corteza. Las mediciones con corteza en especies con corteza lisa son más precisas que las con corteza gruesa (pinos, lárix, encinas, acacias, etc.). El error en mediciones con corteza es en general positivo. En troncos descortezados, puede ser positivo o negativo. No es posible efectuar mediciones de diámetro con precisión inferior a 1 mm; el error de mediciones prolijas va de 1 a 5 mm y se considera como error aleatorio.

Está demostrado que los troncos descansan sobre un lado más plano. Por eso, al hacer sólo una medición, se capta el diámetro superior. Para la estimación de la sección transversal, se debe utilizar el valor medio de dos mediciones perpendiculares. De esta forma, se evita el error producido por una posición inadecuada del fuste.

II.1.10.3.3 Contracción diamétrica

La experiencia práctica y las investigaciones han demostrado que en todas las especies forestales se produce una contracción a lo más de $m_g = 1\%$ de la madera que es almacenada. La contracción va en promedio de 0.2 a 0.5% del área circular. La magnitud de la contracción depende entre otros, según DITTMAR (1958) y ETTER (1952), de:

- estación de volteo
- tiempo de almacenamiento
- exposición al sol

Como valores máximos de contracción, FLURY indica una cifra de hasta 4% para un tronco de *picea* y de *fagus*.

medición de árboles individuales

Estas cifras pueden sobrepasarse si las condiciones son adversas. Según MAYER-WEGELIN (1953) y KOLLMANN (1951), los valores de contracción para las especies de Europa Central son mucho mayores:

Contracción longitudinal	0.4%	(0.1 - 0.6%)
Contracción radial	4.3%	(2.3 - 6.8%)
Contracción tangencial	8.2%	(6.0 - 11.8%)
Contracción volumétrica	12.9%	(8.5 - 18.8%)

Estos valores de contracción se obtuvieron de muestras saturadas y secadas completamente, por lo cual no son coincidentes con aquellas almacenadas al aire libre.

Los diámetros de árboles en pie están sujetos a variaciones diarias que pueden llegar a $\pm 0.2\%$ de la sección circular.

II.1.10.3.4 Errores de medición aleatorios

El error producido por una localización incorrecta de la forcípula, dependiendo de la forma fustal, puede ser positivo o negativo; es aleatorio. Bajo el supuesto de una desviación del punto correcto de medición de ± 10 cm y una disminución diamétrica general de 1cm/m, se puede estimar el error en ± 1 mm.

II.1.10.3.5 Desviación del área circular

La sección transversal se aleja en mayor o menor grado de la circunferencia. Esta desviación se explica entre otros por:

- crecimiento irregular típico (*fagus, robinia*)
- influencia de contrafuertes
- influencia de las ramas
- crecimiento excéntrico por influencia de factores externos (pendiente, condiciones de luz y copa, viento, etc.)

El área transversal se calcula generalmente a partir del perímetro, de un diámetro o del promedio de dos diámetros perpendiculares, con la fórmula del área circular. Por la desviación que existe entre el área transversal y la del círculo, se produce un error que TISCHENDORF denominó desviación del área circular o déficit de convexidad (Figura 2-32).

Las investigaciones teóricas pasadas se basaban en la aproximación de la sección transversal del árbol a un óvalo o una elipse (BRUCE y SCHUMACHER 1935). Las investigaciones actuales señalan que para secciones regulares, el óvalo es más coincidente que la elipse. Las investigaciones teóricas de MATERN (1947) han hecho descubrimientos valiosos sobre la forma

de la sección transversal arbórea e introducen algunos conceptos matemáticos sobre contornos convexos.

Fundamentalmente se debe diferenciar entre:

- la medición interna, con visión de la forma de la sección (rodela, extremos de trozas) y
- la medición externa, sin visión de la forma de la sección (área central, d , área de la sección a cualquier altura de un árbol en pie).

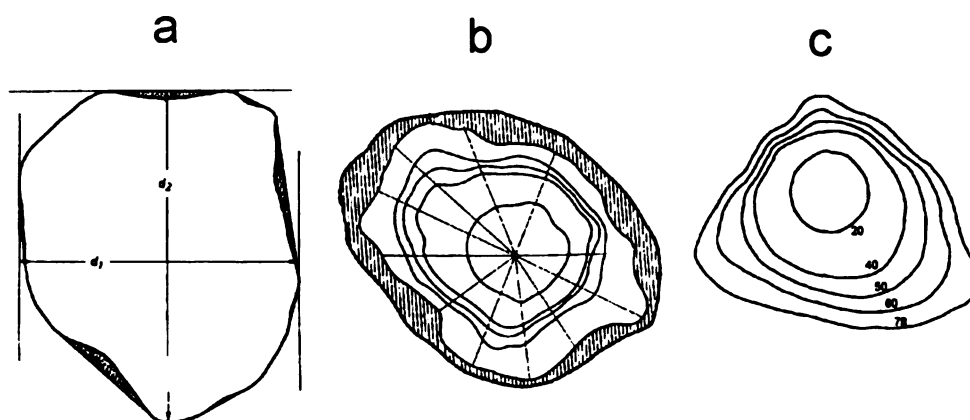


Figura 2-32. Cortes transversales del fuste a nivel del suelo demostrativos de a) déficit de convexidad ; b y c) efecto de la edad en la irregularidad de la sección

El área transversal, para todas las especies, en las cercanías de la base y de la copa, es más irregular que en las secciones intermedias del sector libre de ramas, donde el área transversal se asemeja más a un óvalo. Coníferas como *abies* y *picea* en posiciones protegidas del viento, tienen una sección transversal regular, lo cual puede representarse con gran aproximación por un círculo o por un óvalo compuesto por un semicírculo o un arco elíptico y un arco parabólico (MÜLLER 1957).

La irregularidad de los segmentos basales, y en general también la de otros, aumenta con la edad (Figura 2-32).

Como indicadores para los elementos de una sección transversal se utilizan:

- el diámetro promedio aritmético de una serie de mediciones sobre la misma sección transversal;
- la varianza s^2 de los valores diamétricos; y
- el coeficiente de correlación r o el coeficiente de determinación r^2 de dos mediciones diamétricas mutuamente perpendiculares. (El coeficiente de correlación es importante, porque es muy común que se midan dos diámetros perpendiculares.)

II.2 ESTIMACION DE ATRIBUTOS DE ARBOLES Y PRODUCTOS

La estimación del volumen del árbol individual es un problema relevante en dendrometría e inventarios forestales. La dificultad en la determinación directa del volumen mediante la cubicación de secciones hace conveniente contar con expresiones matemáticas que, basadas en una muestra objetivamente seleccionada y cuidadosamente medida, permitan estimar el volumen de los árboles sobre la base de mediciones simples.

Un árbol está compuesto del sistema radicular, el tronco o fuste y las ramas y hojas que en conjunto conforman la copa. Las especies cuyo tronco se prolonga para formar un fuste principal que no se divide, como el de las coníferas, es denominado excurrente, en contraposición al tronco de las latifoliadas, que presentan el fuste dividido en la porción alta denominado delicuescente (HUSCH *et al.* 1982). Según FAO (1981), tiene gran importancia definir clara y objetivamente a qué volúmenes se hace referencia, dado que existen muchos casos en que la ausencia de esta definición ha provocado malentendidos sobre las existencias en referencia y una errónea toma de decisiones.

Las técnicas que se describen en este libro se refieren a la estimación de volúmenes del fuste o tronco principal que, por lo general, representa la porción del árbol con mayor valor comercial y, en una gran mayoría de las veces, la única de interés.

El manual de FAO sobre inventarios forestales citado anteriormente presenta diversas definiciones de tipos de volúmenes.

Volumen bruto: Es el volumen de una parte específica de un árbol sin corteza y sin deducción por defectos; cuando se usa, el término debe calificarse por una palabra o declaración especificando la porción del árbol a la que se refiere. Por ejemplo, volumen bruto total del árbol.

Volumen neto: Volumen de una parte específica de un árbol sin corteza, hechas las deducciones por defecto o partes no útiles; este término también se calificará de acuerdo con la porción del árbol a la que se refiere.

Volumen total: Volumen correspondiente al fuste principal de un árbol; para los árboles de forma delicuescente, hasta el punto de inicio de la copa; para los árboles de forma excurrente, hasta la punta del árbol.

Volumen de ramas: Para los árboles de forma excurrente, el volumen de todas las ramas; para los árboles de forma delicuescente, el volumen por encima del punto de inicio de la copa (y algunas ramas que puedan salir más abajo).

Volumen industrial: El volumen neto potencialmente útil de madera rolliza, sin deducción por pérdidas debidas a la utilización de tipos de corta y procesos de manufactura; es igual a la suma de los volúmenes de trozas más otros volúmenes aprovechables.

Volumen de productos: Volumen neto de un árbol, considerado apropiado para trozas para chapas, trozas de aserrío, trozas para durmientes, pilotes y postes; este volumen se puede identificar también como madera pulpable, para tableros de partículas u otros usos industriales.

Otros volúmenes útiles: El volumen neto de un árbol no es apropiado para los fines reseñados en volumen de troza, pero sí lo es para el caso de postes, madera para pulpa, tableros de partículas y otros usos industriales.

II.2.1 Funciones de volumen

La determinación directa del volumen se ha descrito con detalle en las secciones precedentes. En esta sección se describirán los métodos utilizados para estimar esta variable, basados en su relación con otras variables del árbol individual. En general, el contenido volumétrico del fuste se considera función de las variables diámetro a la altura de pecho d , altura total o altura del fuste hasta su bifurcación h y alguna expresión de la forma f .

$$v = f(d, h, f)$$

El término "tabla de volumen" se ha utilizado frecuentemente para referirse a un modelo matemático para predecir el volumen fustal. Esta denominación proviene de los albores de la historia forestal, cuando para facilitar el uso de las ecuaciones o de los ajustes de tipo gráfico, se los entregaba en forma tabular. El uso de las calculadoras electrónicas y del computador personal ha desplazado fuertemente esta forma de presentación, por lo que en adelante nos referiremos a los términos funciones o ecuaciones de volumen.

II.2.1.1 Funciones de volumen local o tarifas

Las funciones de volumen local o tarifas relacionan el volumen del árbol con sólo una variable dependiente, generalmente el diámetro normal o de referencia d o transformaciones y potencias de esta misma variable. El calificativo de local se debe a que estas funciones son de aplicación limitada al área, para la cual es aplicable la relación diámetro/altura implícita en el modelo de volumen; generalmente una cierta clase de edad y un mismo sitio.

Los modelos de volumen local son simples y algunos de uso corriente se entregan a continuación:

DISSESCU-STANESCU (1956)	$v = b_0 + b_1 d^2$	(2-148)
--------------------------	---------------------	---------

HOHENADL, KRENN (1944)	$v = b_0 + b_1 d + b_2 d^2$	(2-149)
------------------------	-----------------------------	---------

KOPEZKI-GERHARDT (1899)	$v = b_0 + b_1 g$	(2-150)
-------------------------	-------------------	---------

El modelo local de volumen que emplea como variable independiente el área basal del árbol se denomina línea de volumen, debido a que esta transformación lineariza la relación volumen-diámetro y su diagrama de dispersión se muestra como una línea recta (Figura 2-32a).

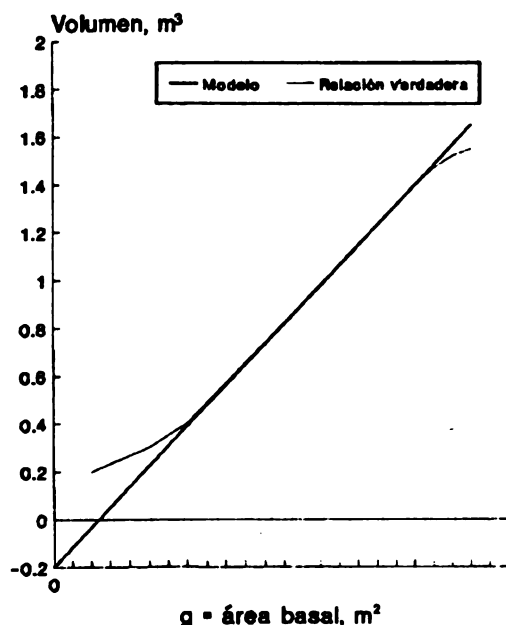


Figura 2-32a. Modelo lineal volumen-área basal

Un modelo comúnmente usado es el de BERKHOUT citado por MÜLLER (1915):

$$v = b_0 d^{b_1} \quad (2-151)$$

que al linearizarse queda:

$$\log v = b_0 + b_1 \log d \quad (2-152)$$

Es lógico pensar que los modelos de volumen pasan a través del origen, dado que si las variables independientes son cero, el volumen también es nulo. Sin embargo, si no existen datos observados (como generalmente ocurre) para modelar la porción inferior de la curva, siempre será estadísticamente sano conservar el intercepto.

Las tablas de volumen local pueden obtenerse a partir de ecuaciones de volumen con más de una variable dependiente. Esto ocurre cuando una de las variables de la ecuación se obtiene de una muestra de árboles con los que se ajusta un modelo con el fin de obtener su

predicción para el total de árboles medidos. Frecuentemente es la altura la que se muestrea y se estima para el total de la muestra de árboles, mediante un modelo que relaciona el diámetro y la altura.

$$v = 0.03949 + 0.00002495 d^2 h + 0.00005902 d^2$$

y con la función altura-diámetro

$$h = 35 - 52.2 e^{-0.08d}$$

por lo tanto la ecuación local de volumen derivada de estas relaciones es:

$$v = 0.03949 + 0.00002495 d^2 (35 - 52.2 e^{-0.08d}) + 0.00005902 d^2$$

$$v = 0.03949 + 0.00087325 d^2 - 0.00130239 d^2 e^{-0.08d} + 0.00005902 d^2$$

El modelo (2-151) es ampliamente utilizado en Honduras para estimar el volumen total de las especies latifoliadas (FERREIRA 1993).

II.2.1.2 Funciones de volumen general

Se denominan funciones generales de volumen los modelos que estiman el volumen con dos o más dimensiones del árbol, por lo general el diámetro y la altura total o comercial h y en algunos casos una expresión de la forma. Este último tipo de ecuaciones de volumen se denominan funciones de volumen de clase de forma; corrientemente se utilizan en Estados Unidos e incluyen como predictor, además del diámetro y altura, el cuociente de forma de Girard (HUSCH *et al.* 1982).

Las funciones generales de volumen son de aplicación más amplia que las locales, debido a que la relación diámetro-altura está explícita en el modelo, lo que facilita su uso para clases de edad y sitio diferentes. Muchos de los modelos de volumen general incluyen como predictores sólo el diámetro de referencia y alguna expresión de la altura; las razones que apoyan este tipo de formulación son citadas por CLUTTER *et al.* (1983):

1. Mediciones de diámetros en altura son difíciles de realizar.
2. Variaciones en la forma de los árboles: éstas tienen un impacto menor en el volumen que la variación en altura o diámetro.
3. Para algunas especies, la forma es relativamente constante e independiente del tamaño.

4. En algunas especies, la forma de los árboles está a menudo correlacionada con el tamaño de los árboles; de modo que diámetro y altura generalmente explican gran parte de la variación del volumen causada por la forma.

La función de volumen general más conocida es la denominada de variables combinadas (SPURR 1952):

$$v = b_0 + b_1 d^2 h \quad (2-153)$$

Este modelo, ajustado sin intercepto, se denomina de factor de forma constante, dado que la expresión $d^2 h$, al ser multiplicada por la constante $\pi / 40.000$, representa el volumen de un cilindro; de esta manera, en el modelo sin término constante, el coeficiente de regresión b_1 representaría el factor de forma falso que reduce el cilindro para transformarlo en volumen del árbol.

Una función de volumen general ajustada para *Pinus oocarpa* en la Región Central desarrollada por el Inventario Nacional de Honduras (FERREIRA 1993), es la siguiente para volumen en metros cúbicos, diámetro en centímetros y altura en metros.

$$v = -0.0063522 + 0.00002838 d^2 h - 0.000023077 d^2$$

El Cuadro 2-30 muestra otros modelos de volumen comúnmente utilizados:

Cuadro 2-30. Algunos modelos de volumen general

Factor de forma constante	$v = b_1 d^2 h$	(2-154)
Variables combinadas generalizadas	$v = b_0 + b_1 d^2 + b_2 h + b_3 d^2 h$	(2-155)
Logarítmico sin intercepto	$v = b_1 d^{b^2} h^{b^3}$	(2-156)
Logarítmico con intercepto	$v = b_0 + b_1 b d^{b^2} h^{b^3}$	(2-157)
Variables transformadas de HONER	$v = d^2 / (b_0 + b_1 h^{-1})$	(2-158)
Clase de forma	$v = b_0 + b_1 d^2 h k$	(2-159)
Australiana de STOAT	$v = b_0 + b_1 d^2 + b_2 d^3 + b_3 h + b_4 / h$	(2-160)
WENK	$v = g (h^2 / b_0 \sqrt{d} + b_1 \sqrt{d})$	(2-161)

II.2.1.3 Funciones de volumen hasta diferentes diámetros límites

Los variados objetivos del manejo forestal exigen la estimación del volumen potencial hasta diversos diámetros límites de utilización (IU). Tradicionalmente, este problema se ha

encarado a través del desarrollo de tantas funciones como diámetros límites sea preciso definir. En principio, es suficiente desarrollar estimadores de volumen para algunos de ellos, a partir de los cuales pueden determinarse otros por interpolación.

Este procedimiento es sin embargo imperfecto, ya que exige un gran esfuerzo para obtener una información poco flexible, que queda obsoleta ante cualquier cambio de la tecnología. El Instituto Forestal de Chile desarrolló este tipo de funciones para *Pinus radiata* en 1965. Los modelos son de la forma:

$$v_i = b_0 + b_1 d^2 h k_G \quad (2-162)$$

donde i es el índice de utilización y k_G es el cuociente de forma de GIRARD. Se desarrollaron ecuaciones para los índices 10, 15, 20 y 25 cm (INFOR 1965; PETERS 1979).

Cuadro 2-30a. Tabla de volumen para *Pino caribaea* Morelet en Guatemala

D.A.P. Centí- metros	ALTURA TOTAL, METROS											
	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42
	VOLUMEN, METROS CUBICOS											
10	0.096	0.106	0.115	0.124	0.133	0.143	0.152	0.161	0.171	0.180	0.189	0.198
12	0.109	0.122	0.135	0.149	0.162	0.175	0.189	0.202	0.216	0.229	0.242	0.256
14	0.123	0.141	0.159	0.178	0.196	0.214	0.232	0.250	0.269	0.287	0.305	0.323
16	0.140	0.164	0.187	0.211	0.235	0.259	0.282	0.306	0.330	0.354	0.377	0.401
18	0.159	0.189	0.219	0.249	0.279	0.309	0.339	0.369	0.399	0.429	0.460	0.490
20	0.180	0.217	0.254	0.291	0.328	0.366	0.403	0.440	0.477	0.514	0.551	0.588
22	0.203	0.248	0.293	0.338	0.383	0.428	0.473	0.518	0.563	0.608	0.653	0.698
24	0.229	0.282	0.336	0.389	0.443	0.496	0.550	0.603	0.657	0.710	0.764	0.817
26	0.257	0.320	0.382	0.445	0.508	0.571	0.633	0.696	0.759	0.822	0.884	0.947
28	0.287	0.360	0.432	0.505	0.578	0.651	0.724	0.796	0.869	0.942	1.015	1.087
30	0.319	0.403	0.486	0.570	0.653	0.737	0.820	0.904	0.988	1.071	1.155	1.238
32	0.354	0.449	0.544	0.639	0.734	0.829	0.924	1.019	1.114	1.209	1.304	1.399
34	0.390	0.498	0.605	0.712	0.820	0.927	1.034	1.142	1.249	1.356	1.464	1.571
36	0.429	0.550	0.670	0.790	0.911	1.031	1.151	1.272	1.392	1.512	1.633	1.753
38	0.471	0.605	0.739	0.873	1.007	1.141	1.275	1.409	1.543	1.677	1.811	1.945
40	0.514	0.663	0.811	0.960	1.108	1.257	1.405	1.554	1.702	1.851	2.000	2.148
42	0.560	0.724	0.887	1.051	1.215	1.379	1.542	1.706	1.870	2.034	2.197	2.361
44	0.608	0.787	0.967	1.147	1.327	1.506	1.686	1.866	2.046	2.225	2.405	2.585
46	0.658	0.854	1.051	1.247	1.444	1.640	1.837	2.033	2.229	2.426	2.622	2.819
48	0.710	0.924	1.138	1.352	1.566	1.780	1.994	2.207	2.421	2.635	2.849	3.063
50	0.765	0.997	1.229	1.461	1.693	1.925	2.157	2.389	2.622	2.854	3.086	3.318
52	0.822	1.073	1.324	1.575	1.826	2.077	2.328	2.579	2.830	3.081	3.332	3.583
54	0.881	1.151	1.422	1.693	1.964	2.234	2.505	2.776	3.046	3.317	3.588	3.859
56	0.942	1.233	1.524	1.815	2.106	2.397	2.688	2.980	3.271	3.562	3.853	4.144
58	1.005	1.318	1.630	1.942	2.253	2.565	2.877	3.189	3.504	3.816	4.129	4.441
60	1.071	1.405	1.740	2.074	2.408	2.742	3.076	3.411	3.745	4.079	4.413	4.748
62	1.139	1.498	1.853	2.210	2.567	2.923	3.280	3.637	3.994	4.351	4.708	5.065
64	1.209	1.590	1.970	2.350	2.730	3.111	3.491	3.871	4.251	4.632	5.012	5.392
66	1.282	1.686	2.091	2.495	2.899	3.304	3.708	4.113	4.517	4.921	5.326	5.730
68	1.356	1.786	2.215	2.644	3.073	3.503	3.932	4.361	4.791	5.220	5.649	6.079
70	1.433	1.888	2.343	2.798	3.253	3.708	4.163	4.618	5.073	5.527	5.982	6.437
72	1.512	1.994	2.475	2.956	3.437	3.919	4.400	4.881	5.363	5.844	6.325	6.806
74	1.594	2.102	2.610	3.119	3.627	4.136	4.644	5.152	5.661	6.169	6.678	7.186
76	1.677	2.213	2.750	3.286	3.822	4.358	4.895	5.431	5.967	6.503	7.040	7.576
78	1.763	2.328	2.893	3.457	4.022	4.567	5.112	5.647	6.182	6.717	7.252	7.787
80	1.851	2.445	3.039	3.634	4.228	4.822	5.416	6.010	6.604	7.199	7.793	8.387

Derivada de la ecuación $V = 0.0684728026 + 0.000030946 \text{ } (D^2H)$

PETERS (1977), dentro de un proyecto de asistencia de la FAO al Gobierno de Guatemala, preparó este mismo tipo de funciones de volumen para las diez especies coníferas principales del país. Un ejemplo de estas tablas se muestra para *Pinus caribaea* (Cuadro 2-30a).

Por otra parte, FERREIRA (1993) desarrolló la siguiente función para estimar el volumen hasta el índice de utilización 15 cm en *Pinus oocarpa* para el Inventario Nacional de Honduras:

$$v_{15} = -0.03949 + 0.00002495 d^2 h + 0.00005902 d^2 \quad (2-163)$$

II.2.1.4 Funciones de volumen de razón

Tal como se expresó en el capítulo precedente, por muchos años el procedimiento usual para obtener funciones de volumen hasta diferentes diámetros límites era ajustar modelos independientes para cada uno de ellos. Pero al utilizar esta aproximación aparecían tres problemas:

- 1) Las funciones para distintos índices de utilización pueden cruzarse, entregando estimaciones equivocadas en algunos casos (ej.: volumen hasta 10 cm menor que el volumen hasta 20 cm).
- 2) Hay que manipular un importante número de ecuaciones de volumen si se necesitan varios índices de utilización.
- 3) Rigidez en el sistema de procesamiento, que estará limitado a la estimación de volúmenes sólo para los índices de utilización en que exista función; la especificación de cualquier otro índice de utilización requiere un nuevo ajuste.

Para superar los inconvenientes planteados, se han desarrollado las denominadas funciones de volumen de razón, que permiten estimar en forma consistente el volumen hasta cualquier índice de utilización por medio de dos ecuaciones: a) una ecuación de volumen para predecir el volumen total del árbol; y b) una de transformación para estimar la proporción de volumen hasta un índice de utilización especificado.

El concepto de funciones de volumen de razón fue introducido por BURKHART (1977). Desde esa fecha, se han ido desarrollando algunas variantes que tienen interesantes perspectivas, por los excelentes resultados que ha demostrado poseer el método (CAO *et al.* 1980).

Estas ecuaciones permiten la predicción directa del volumen y son más simples de usar que los modelos de ahusamiento. Como los modelos se ajustan a datos minimizando la suma de cuadrados del volumen, proporcionarían estimaciones más precisas de esta variable que las funciones de ahusamiento, que son ajustadas minimizando sumas de cuadrados de los diámetros o diámetros al cuadrado.

$$v = f(d, h) \quad (2-164)$$

$$r = f(d_i, d) \quad (2-165)$$

$$v_{IU} = v \cdot r \quad (2-166)$$

Donde

v = volumen del fuste, calculado con la función de volumen

r = proporción del volumen hasta un diámetro límite de utilización = d_i

d = diámetro a la altura de pecho

v_{IU} = volumen hasta el índice de utilización

Básicamente las funciones de volumen de razón utilizan el cuociente del volumen comercial y el volumen total r , en función de variables predictoras del tipo d_i / d y $(h - \ell) / h$. Entre los modelos estimadores de la razón aplicados hasta la fecha se encuentran:

Modelos con variable dependiente que incluyen sólo diámetros:

$$r = 1 + b_0(d_i^{b_1} / d^{b_2}) \quad \text{BURKHART (1977)} \quad (2-167)$$

$$r = \exp(b_0 X^{b_1}) \quad \text{VAN DEUSEN (1981)} \quad (2-168)$$

$$r = 1 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3 + b_4 X^4 + b_5 X^5 + b_6 X^6 \quad \text{CAO et al. (1980)} \quad (2-169)$$

Modelos con variable dependiente que incluyen altura al diámetro límite:

$$r = 1 + b_1(Y / d) \quad \text{CAO et al. (1980)} \quad (2-170)$$

$$r = \exp(b_1 (Y / h) b^2) \quad \text{VAN DEUSEN (1981)} \quad (2-171)$$

$$r = b_0 X + b_1 X^2 h \quad \text{MATTNEY y SULLIVAN (1982)} \quad (2-172)$$

En ambos casos:

$$X = d_i / d$$

$$Y = (h - h_i)$$

medición de árboles individuales

En esta última función los autores, por transformación matemática e imponiendo las restricciones: 1) que la altura comercial para d sea 4.5 pies y 2) que $r = 0$ para $d_i = 0$, la transforman en una función que calcula la altura a la que se encuentra el diámetro límite.

$$h_i = h + X(4.5 - h) + (576/\pi)(V/d^2) X(a_1(X-1) + a_2(X^2-1) + a_3(X^3-1) + a_4 h(X^2-1)) \quad (2-173)$$

La precisión de estimación de alturas y volúmenes disminuye al aumentar el diámetro límite (r se acerca a 1), situación por lo demás similar a lo que ocurre con algunos modelos fustales (BRUCE *et al.* 1968). Con esta posibilidad de estimar alturas, los modelos de volumen de razón representan una alternativa interesante a los modelos fustales en los simuladores de trozado.

Desde que BURKHART introdujera el método, se han ido mejorando los modelos y estimaciones. VAN DEUSEN (1978) corrige con su modelo la estimación de valores negativos de r , cuando el cociente d_i/d es muy cercano a 1.

También PARRESOL *et al.* (1987) aplican esta metodología en cuatro especies, comparándola con funciones de ahusamiento y utilizando en vez del diámetro a la altura de pecho, el diámetro a 10 pies de altura, para salvar el efecto de los contrafuertes basales de la especie en la medición diamétrica.

ZEPEDA, ESTRADA y ESPARZA (1990) ajustaron las siguientes funciones para estimar alturas y volúmenes comerciales en tres especies de pino del noroeste de Chihuahua en México.

Función estimadora de altura comercial

$$h_i = h - \left[h - 1.3 \left[(ax^2 + bx^4 + cx^6 + dx^8 + ex^{10}) \right] \right] \quad (2-174)$$

Función de razón estimadora de volumen comercial

$$r = b_1 (h_i/h) + b_2 (h_i/h)^2 \quad (2-175)$$

Donde

h_i = altura comercial

h = altura total

r = v_i/v

v = volumen total

x = d_i/d

Por otra parte, ZEPEDA (1993) propone un sistema de cubicación para *Pinus patula* Schl. y Cham. en Veracruz, México. La función de volumen total ajustada para *Pinus patula* es:

$$v = 0.000071243(d^2 h)^{0.926994} \quad (2-176)$$

Se ajustaron además funciones de razón para estimar volúmenes comerciales a distintas alturas y a distintos diámetros respectivamente.

$$v_i = v \left(1 - 0.89248314 \left[(h - h_i)^{2.18922812} / h^{2.1665467} \right] \right) \quad (2-177)$$

$$v_i = v \left(1 - \left[1 - e^{-3.128353706 \tan x} \right]^{9.761573395} \right) \quad (2-178)$$

Donde

$$x = 0.813776084 h^{0.0139778376} (d_i / d_{0.1})$$

Para estimar $d_{0.1}$ se ajustó

$$\ln d_{0.1} = 0.2000025 + 0.921963 \ln d \quad (2-179)$$

Donde

- d = diámetro a la altura de pecho
- $d_{0.1}$ = diámetro a un 10% de la altura total
- h = altura total
- h_i = altura en el punto i
- d_i = diámetro en el punto i
- v = volumen total
- v_i = volumen hasta el punto i

MARTIN y REAL (1992) desarrollaron una investigación en *Pinus radiata* en Chile sobre el tema; en esta confirman la confiabilidad de los modelos de razón, especialmente aquellos que incluyen la altura en donde se encuentra el diámetro límite. Modelos con esta variable predictora se muestran superiores al modelo fustal de BRUCE *et al.* utilizado como comparación.

FERREIRA (1993) presenta los siguientes modelos desarrollados por PEREZ *et al.* (1990), con una muestra de 550 árboles de la especie *Pinus oocarpa* en Honduras:

$$v = 0.000028402 d^2 h - 0.002525 \quad (2-180)$$

$$v_i = v \left(1 - 1.2668 (d_i^{3.6119} / d^{3.57}) \right) \quad (2-181)$$

II.2.1.5 Funciones de volumen con más de un diámetro

Tanto las funciones tradicionales de volumen locales, que sólo utilizan como variable predictora el diámetro de referencia, como las funciones generales con d y h , son confrontadas por SCHMID-HAAS (1981) con funciones a las cuales agrega un diámetro extra medido en altura, obtenido en una submuestra en la parcela.

Para la medición del diámetro en altura probó diferentes instrumentos: relascopio, telerrelascopio, pentaprisma de Wheeler, dendrómetro Barr y Stroud y forcípula finlandesa. El instrumento más eficiente para medir el segundo diámetro resultó ser la forcípula finlandesa, con la que se realiza una medición directa del diámetro en altura.

Este segundo diámetro se midió a una altura relativa de 0.3% de la altura total y a una altura absoluta de 7 m, con el objeto de probar cuál era más eficiente. El diámetro a 7 m probó ser mejor que el diámetro a 0.3 h.

El estudio desarrollado en *picea*, con una muestra de 14 000 árboles, demostró que la incorporación del segundo diámetro mejora significativamente la estimación de volumen, reduciendo la desviación estándar de las estimaciones. Esto se muestra en la Figura 2-33a. La desviación estándar del volumen estimado con funciones sin el diámetro extra es entre 30% y 110% mayor que aquella que lo incluye.

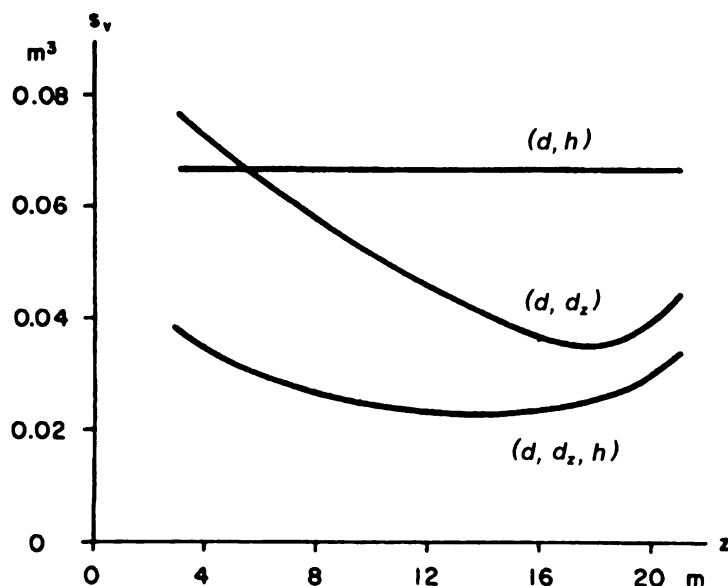


Figura 2-33a. Disminución del error de estimación del volumen incorporando un diámetro superior d_z

Otra conclusión interesante del estudio es que la estimación de volumen mediante una función con dos diámetros, supera la precisión de la expresión de diámetro y altura, siempre y cuando el diámetro en altura sea medido sobre los 5 m.

Esta evidencia podría significar el reemplazo de la medición de altura por un segundo diámetro, con las consiguientes ventajas operacionales. SCHMID-HAAS concluye, además, que las funciones con diámetro extra son más independientes del sitio.

En la Figura 2-33b se muestra la desviación estándar de los errores de medición del segundo diámetro según el mismo autor y para diferentes instrumentos.

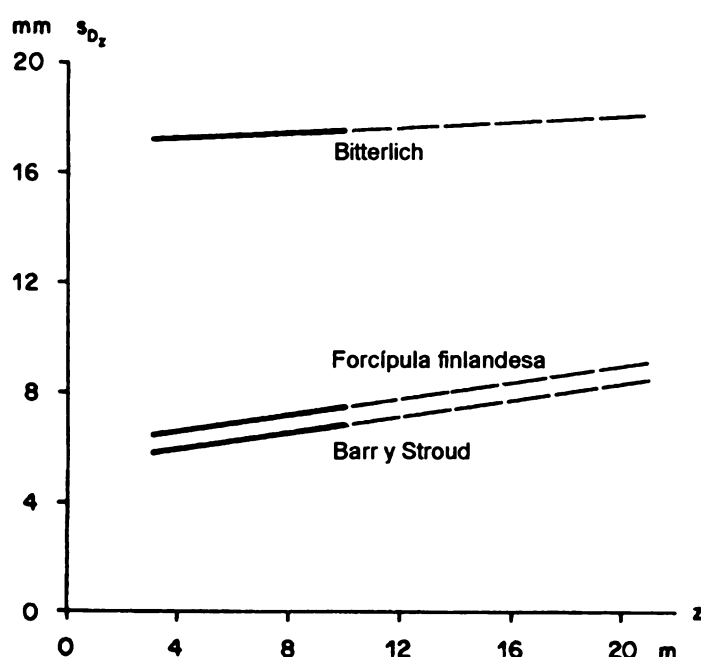


Figura 2-33b. Desviación estándar de los errores de medición del segundo diámetro

II.2.1.6 Estructura volumétrica del fuste

Las series de ahusamiento permiten deducir una relación muy estrecha en la distribución del volumen en diferentes segmentos del fuste (BRABAENDER 1957; EIDMANN 1956; KÜNSTLE 1873; SPEIDEL 1955).

A partir de la fórmula de HOHENADL de las cinco secciones, la porción de cada segmento de $0.2 h$ con respecto al volumen total del fuste es:

medición de árboles individuales

$$\text{I} \quad \frac{v_{0.1}}{v} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 0.2 \cdot h \cdot d_{0.1}^2}{\frac{\pi}{4} \cdot h \cdot d_{0.1}^2 \cdot f_{0.1}} = \frac{0.2}{f_{0.1}} \quad (2-182)$$

$$\text{II} \quad \frac{v_{0.3}}{v} = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 0.2 \cdot h \cdot d_{0.3}^2}{\frac{\pi}{4} \cdot h \cdot d_{0.1}^2 \cdot f_{0.1}} = \frac{0.2k_{0.3}^2}{f_{0.1}} \quad (2-183)$$

Análogamente,

$$\text{III} \quad \frac{v_{0.5}}{v} = \frac{0.2k_{0.5}^2}{f_{0.1}} \quad (2-184)$$

$$\text{IV} \quad \frac{v_{0.7}}{v} = \frac{0.2k_{0.7}^2}{f_{0.1}} \quad (2-185)$$

$$\text{V} \quad \frac{v_{0.9}}{v} = \frac{0.2k_{0.9}^2}{f_{0.1}} \quad (2-186)$$

En el Cuadro 2-31 se entregan para cinco valores de $f_{0.1}$ proporciones volumétricas de los cinco segmentos de igual largo y los correspondientes valores acumulados hasta el extremo superior de las secciones.

Cuadro 2-31. Estructura volumétrica del fuste para distintos factores de forma verdaderos

Secciones de Hohenadl	Porcentajes de volumen para $f_{0.1} =$									
	0,407		0,442		0,500		0,550		0,600	
	Vol %	Σ	Vol %	Σ	Vol %	Σ	Vol %	Σ	Vol %	Σ
I	49,1	49,1	45,3	45,3	40,0	40,0	36,4	36,4	33,3	33,3
II	29,7	78,8	29,3	74,6	28,2	68,2	29,0	65,4	27,1	60,4
III	15,1	93,9	16,3	90,9	19,6	87,8	20,8	86,2	22,0	82,4
IV	5,5	99,4	7,4	98,3	10,5	98,3	11,6	97,8	14,4	96,8
V	0,6	100,0	1,7	100,0	1,7	100,0	2,2	100,0	3,2	100,0

Cuadro 2-32. Estructura volumétrica del fuste para distintas especies

Sección	Picea $f_{a,1} = 0,550$		Pino Oregón $f_{a,1} = 0,520$		Pino $f_{a,1} = 0,530$		Lárix $f_{a,1} = 0,510$		Abeto $f_{a,1} = 0,567$	
	Vol %	Σ	Vol %	Σ	Vol %	Σ	Vol %	Σ	Vol %	Σ
I	36,4	36,4	38,5	38,5	37,7	37,7	39,2	39,2	35,3	35,3
II	29,0	65,4	28,6	67,1	27,7	65,4	28,3	67,5	28,2	63,5
III	20,8	86,2	19,8	86,9	20,0	85,4	19,5	87,0	21,1	84,6
IV	11,6	97,8	10,8	97,7	12,2	97,6	10,8	97,8	13,8	98,4
V	2,2	100,0	2,3	100,0	2,4	100,0	2,2	100,0	1,6	100,0

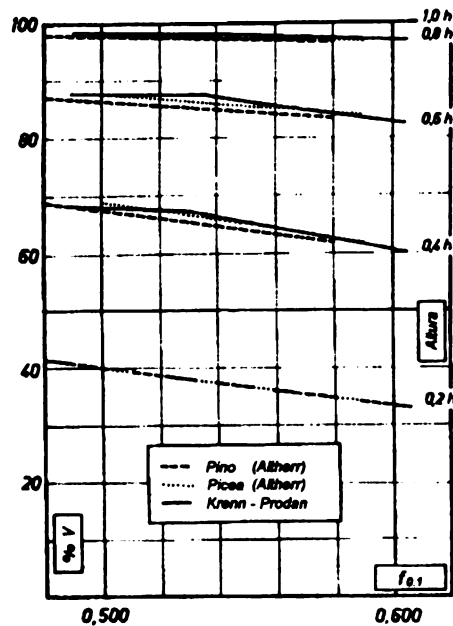


Figura 2-34. Estructura volumétrica del fuste según diferentes series de ahusamiento (BRABAENDER 1957)

El Cuadro 2-32 contiene las cifras calculadas para diferentes especies y relaciones de forma promedio. De este cuadro y de los resultados de los estudios de BRABAENDER (1957) se desprende que, con la excepción de formas fustales extremas, que son escasas, la distribución porcentual del volumen para diferentes secciones fustales permanece bastante constante (Figura 2-34).

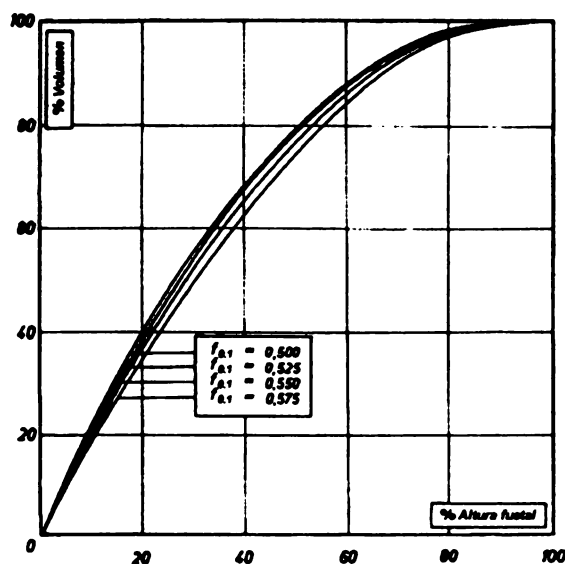


Figura 2-35. Distribución del volumen en el fuste para distintos factores de forma según KRENN-PRODAN, BRABAENDER (1957)

Cuadro 2-33. Estructura volumétrica del fuste. Largo de las secciones 0.1 h

Troza	Vol %	Σ	Troza	Vol %	Σ
1	22,0	22,0	I	39,7	39,7
2	17,7	39,7	II	28,5	68,2
3	15,3	55,0	III	19,6	87,8
4	13,2	68,2	IV	10,1	97,9
5	10,9	79,1	V	2,1	100,0
6	8,7	87,8			
7	6,3	94,1			
8	3,8	97,9			
9	1,7	99,6			
10	0,4	100,0			

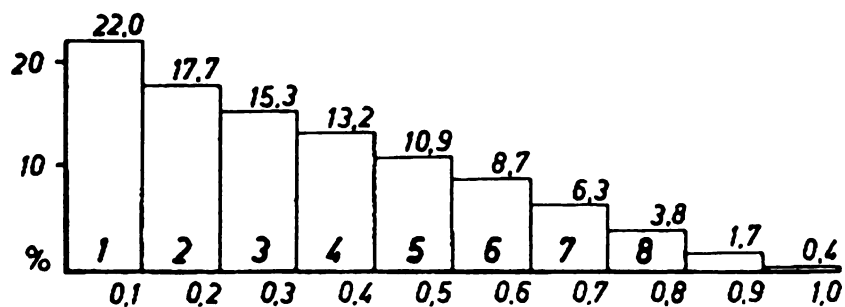


Figura 2-36. Estructura volumétrica del fuste según secciones de 0.1 de la altura total

Para comparar sirve una tabla preparada por ANUTSCHIN (1960) (Cuadro 2-33 y Figura 2-36) sobre la distribución porcentual del volumen fustal en diez secciones de igual largo y las cifras resultantes para cinco secciones. La coincidencia entre las cifras dadas por ANUTSCHIN y los valores para $f_{0,1} = 0.500$ (Figura 2-37) es sorprendente. Esta relación consistente puede ser aprovechada para la estimación volumétrica, o la clasificación por calidades o valores de árboles individuales.

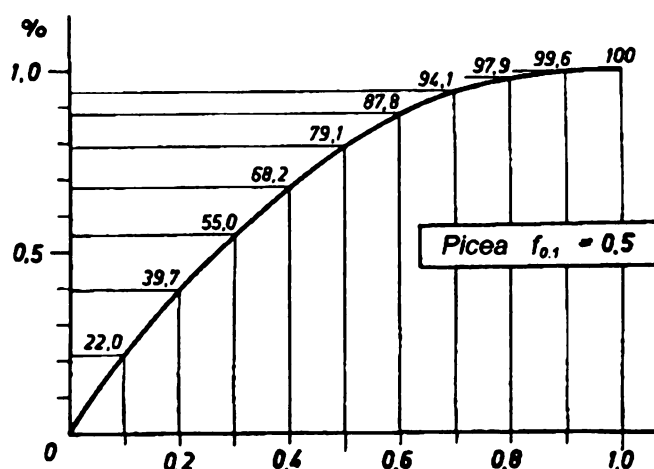


Figura 2-37. Estructura volumétrica del fuste de *picea* con un $f_{0,1} = 0.500$

Aproximando las cifras de los cuadros anteriores, se obtiene el siguiente Cuadro 2-34 para la distribución del volumen en el fuste.

Cuadro 2-34. Valores aproximados de volumen por sección

Altura relativa	Secciones	Vol %
(0 — 0,2)	I	40
(0,2 — 0,4)	II	30
0,4 — 0,6	III	20
0,6 — 0,8	IV	10
0,8 — 1,0	V	—

Este cuadro puede servir para el cálculo de volumen de cada clase.

Ejemplo: Pino con $h = 25$ m y $d_{0,1} = 50$ cm

medición de árboles individuales

El largo de las cinco secciones es $25:5 = 5$ m. El diámetro central del primer segmento se ubica a 2.5 m, y puede ser medido con una escalera o una forcípula especial. Se asume que tiene 45 cm. El contenido de la primera sección es entonces:

$$v_1 = \frac{\pi}{4} d_{0.1}^2 \cdot 0.2h = 0.795m^3$$

El contenido de todo el fuste

$$v = \frac{0.795}{0.4} = 1.99m^3$$

Las cinco secciones según el Cuadro 2-35 tendrían los siguientes volúmenes aproximados:

0.795	0.597	0.398	0.199	0	m ³
0.80	0.60	0.40	0.20	0	m ³

SPEIDEL (1955) divide el árbol en pie en cuatro partes de igual volumen para la formación de clases.

En el Cuadro 2-35 se indican las alturas relativas para la distribución volumétrica con $f_{0.1} = 0.500$ (también ANUTSCHIN) y $f_{0.1} = 0.550$.

Cuadro 2-35. Cuadro comparativo de la distribución volumétrica según diferentes métodos

% Altura relativa en el árbol					
Para Vol %	1	2	3	4	Observaciones
25	12,6	13	12	12	1 = SPEIDEL (1955)
50	30,0	28	27	30	2 = $f_{0.1} = 0,500$
75	51,5	48	46	50	3 = $f_{0.1} = 0.550$
95	---	74	72	75	4 = aprox.
100	100	100	100	100	

A esta consistente estructura volumétrica le corresponde una estructura de calidades igualmente estricta. En general, el valor de las clases de madera por el aumento de las ramas a mayor altura va disminuyendo, y el precio por unidad de volumen aumenta con el diámetro, siendo siempre las secciones inferiores de mayor calidad.

II.2.2 Funciones de ahusamiento

La medición de diámetros a lo largo del fuste y su expresión gráfica se utilizan en la determinación del volumen de árboles individuales. Para este efecto, los diámetros se miden mediante un muestreo destructivo, registrando sus valores con y sin corteza. La flexibilidad de la información proporcionada por la gráfica de ahusamiento ha motivado la generación de ecuaciones para describir la forma y conicidad de los árboles, conocidas corrientemente como funciones de ahusamiento. En la actualidad, se prefiere denominar las ecuaciones de ahusamiento como modelos fustales o de perfil, ya que la función describe tanto la forma geométrica del árbol (cono, parábola, etc.) como el ahusamiento o abombamiento, entendido como la tasa de decrecimiento del diámetro a medida que se incrementa la altura fustal (NEWBERRY 1976).

Los modelos fustales son funciones que representan la variación diamétrica a lo largo del fuste como función del diámetro normal d y la altura total h . Al igual que las funciones de volumen, este tipo de ecuaciones puede incluir otras variables independientes, como la razón de copa.

Los modelos fustales constituyen una importante herramienta estadística de uso corriente en la determinación de volúmenes de árboles y trozas; permiten al usuario estimar tres características básicas de los árboles:

1. Diámetros en cualquier punto del fuste.
2. Altura del fuste en que se encuentra un diámetro límite especificado.
3. Volumen entre dos puntos cualesquiera del fuste, o volumen hasta cualquier índice de utilización.

Las características mencionadas son parte fundamental de cualquier sistema flexible de procesamiento de datos para determinar existencias que consideren la evaluación de productos. Por otra parte, los modelos fustales tienen aplicación en los simuladores de crecimiento y rendimiento y en la simulación de trozado, cuando un usuario tiene interés en conocer el surtido de productos posible de obtener de la simulación de diferentes estrategias de manejo.

Variables dependientes

La variable dependiente de una función de ahusamiento es el diámetro a una altura dada (d_i). Si el interés del modelo estuviera centrado únicamente en la estimación de diámetros, la minimización de la suma de cuadrados con respecto a esta variable proporcionaría buenas estimaciones; sin embargo, consideraciones estadísticas u otros usos del modelo justifican en muchos casos utilizar transformaciones.

Se ha demostrado en múltiples investigaciones (BRUCE *et al.* 1968; KOZAK *et al.* 1969; REAL y MOORE 1987) que transformaciones del tipo d_i / d homogenizan la varianza en prácticamente todo el rango de alturas en el fuste h_i , con excepción de la porción basal entre tocón y diámetro de referencia. Por otra parte, el uso de los modelos en estimación de volumen ha llevado a utilizar la transformación propuesta al cuadrado d_i^2 / d^2 , ya que al minimizar la suma del cuadrado del diámetro, por su alta correlación con el volumen, proporcionaría mejores estimaciones volumétricas (BRUCE *et al.* 1968; REAL y MOORE 1987). Este supuesto ha sido en alguna medida contradicho por CARRASCO (1986), quien realizó ajustes en latifoliadas del bosque chileno, encontrando que la transformación no cuadrática proporcionaba mejores estimaciones volumétricas que la lineal.

Variables independientes

La variable dependiente es la altura a la que se encuentra un cierto diámetro en el fuste h_i . Consideraciones prácticas para obtener una unidad de altura comparable en árboles de dimensiones distintas, hacen recomendable utilizar una expresión de altura relativa de la forma h_i / h . Una propiedad deseable en las ecuaciones de ahusamiento que se ajustan a especies de fuste excurrente es que estimen un diámetro cero cuando la altura en el fuste h_i se iguale a h . Esto se ha logrado condicionando la ecuación mediante procedimientos matemáticos (KOZAK *et al.* 1969), o por nuevas transformaciones de la variable independiente para facilitar un ajuste sin intercepto. Para lograr este objetivo, MAX y BURKHART (1976) utilizan una transformación del tipo $h_i / h - 1$ que pone el origen de la ecuación en la altura total y diámetro cero del árbol.

Una segunda propiedad deseable es que el modelo estime el diámetro de referencia cuando la altura en el fuste es la altura de medición del diámetro (1.30 m). BRUCE *et al.* (1968) utilizaron la transformación $(h - h_i) / (h - 1.3)$; esta forma de variable dependiente permite el condicionamiento del modelo sin intercepto para estimar d cuando h_i es 1.3, bajo la condición de ajustar diámetros con o sin corteza en forma exclusiva. La utilización de d como diámetro con corteza y d_i sin corteza implica la estimación de un parámetro que se puede interpretar como el factor de corteza, razón entre d_u / d (Figura 2-37a).

Desde el siglo XIX se han estudiado métodos para expresar la forma y ahusamiento de las especies arbóreas como función del diámetro y altura. Con el mejoramiento de las herramientas computacionales, se pasó de métodos gráficos a analíticos (GRAY 1956), desarrollándose en el curso de los últimos años numerosos modelos. El primero en publicar un modelo de ahusamiento fue HÖJER en 1903 (fórmula 2-107) con la presentación de una ecuación logarítmica de amplio uso en Escandinavia. ORMEROD (1973) y BEHRE (1923, 1927) encontraron que la misma no entregaba resultados satisfactorios al ensayarla en especies americanas.

II.2.2.1 Modelos generales de árbol completo

La forma más común para describir los cambios diamétricos que se presentan desde la base hasta el fin del fuste contempla el empleo de una única función. Como ejemplos de esta forma de ajuste pueden nombrarse los modelos propuestos por MATTE (1949), OSUMI (1959), KOZAK *et al.* (1969). Modelos de este tipo serán denominados modelos generales de árbol completo.

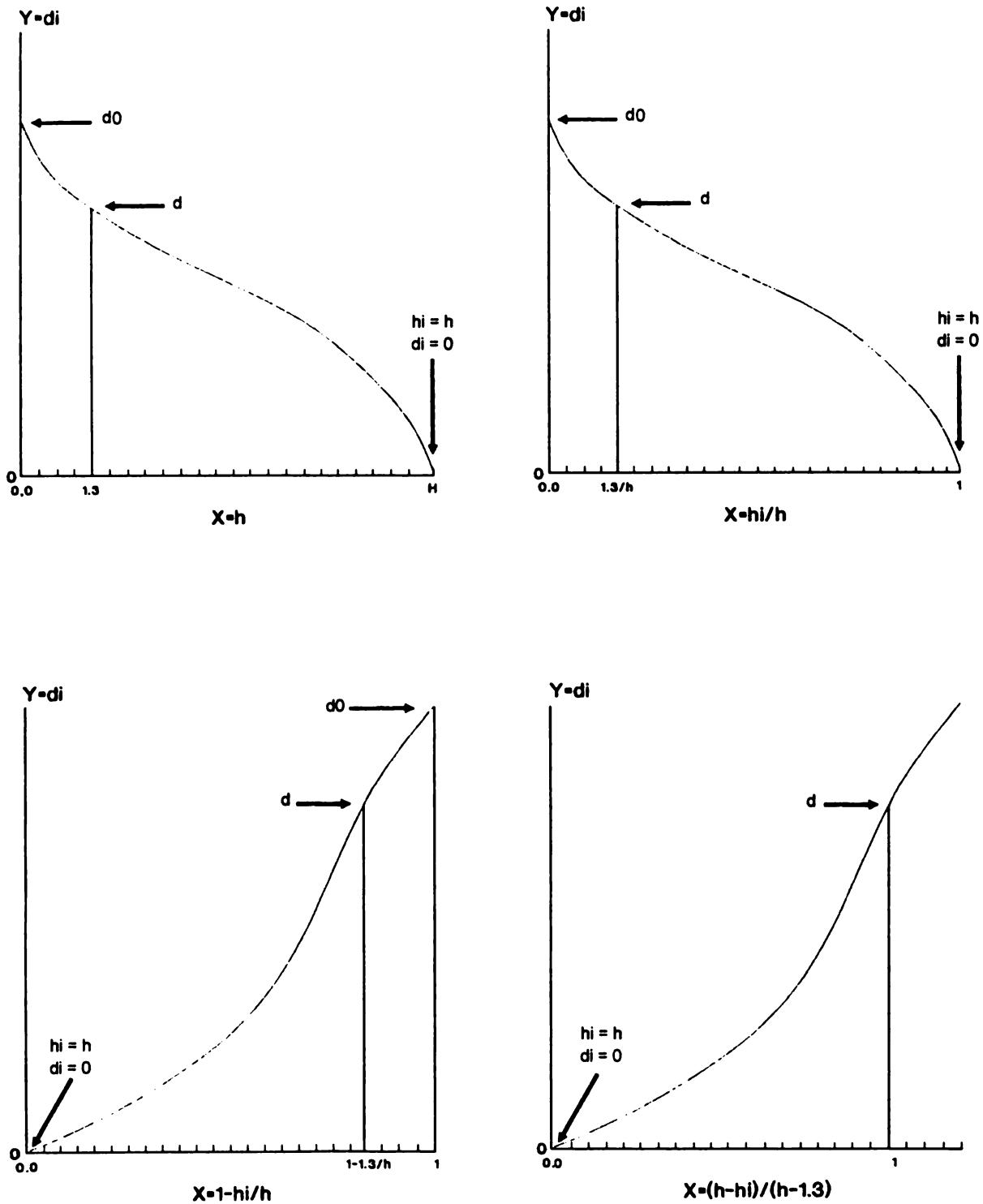


Figura 2-37a. Diversas expresiones utilizadas como variables independientes en modelos fustales

Entre ellos, algunos utilizados en América Latina son: el desarrollado por BRUCE *et al.* (1968), que ha sido ajustado para pino insignie en Chile y de amplio uso en plantaciones de la VII, VIII y IX regiones de ese país (INFORA 1984, 1985). El modelo tiene la forma:

$$\begin{aligned} d_i^2 / d^2 = & b_1 X^{1.5} + b_2 (X^{1.5} - X^3) d + b_3 (X^{1.5} - X^3) h \\ & + b_4 (X^{1.5} - X^{32}) h d + b_5 (X^{1.5} - X^{32}) h^{0.5} + b_6 (X^{1.5} - X^{40}) h^2 \end{aligned} \quad (2-187)$$

Donde

- $X = (h - h_i) / (h - 1.3)$
 d_i = diámetro medido a la altura h_i del fuste, cm
 d = diámetro a 1.30 m con corteza, cm
 h = altura total del árbol, m
 h_i = altura de medición desde el suelo hasta el diámetro d_i , m
 b_j = coeficientes de regresión

Debido a que el modelo incluye altas potencias en X , ajusta y tiene un buen comportamiento en la parte basal del fuste; por otra parte, como en él se incluyen funciones de d y h , el modelo representa una familia de curvas de ahusamiento.

El modelo de KOZAK *et al.* (1969) fue ajustado por REID y COLLINS para la especie *Pinus oocarpa* en Olancho, Honduras. Tomando como muestra 270 árboles, obtuvo el siguiente ajuste (FERREIRA 1993):

$$d_i = d \sqrt{(0.76722 - 0.85002(h_i / h) + 11.43929(h_i / h)^2)} \quad (2-188)$$

Otro modelo muy simple es el presentado por ORMEROD (1973), un modelo no lineal que posee la característica de presentar un coeficiente que controla el ahusamiento del árbol (b_1) y otro que controla su forma o perfil (b_2):

$$d_i = b_1 d \cdot X^{b_2} \quad (2-189)$$

Esta característica del modelo de ORMEROD permitió a NEWBERRY y BURKHART (1976) utilizarlo en un modelamiento de dos etapas en un estudio de la forma de *Pinus taeda* en Estados Unidos.

THOMAS y PARRESOL (1991) describen un modelo que incluye funciones trigonométricas en su estructura; éste fue ajustado a una muestra de árboles de *Pinus radiata* en Chile en una investigación de modelos de ahusamiento para un modelo de crecimiento y

rendimiento (REAL 1993). Los resultados obtenidos con esta forma no fueron satisfactorios para la especie.

$$d_i^2 / d^2 = b_1 (L - 1) + b_2 \operatorname{sen}(c \cdot 3.14159 \cdot L) + b_3 c \operatorname{tg}(3.14159 \cdot L / 2) \quad (2-190)$$

Donde

$$\begin{aligned} L &= h_i / h \\ c &= 1.5 \text{ para coníferas y } 2 \text{ para latifoliadas} \\ \operatorname{sen} &= \text{función seno} \\ c \operatorname{tg} &= \text{función cotangente} \end{aligned}$$

II.2.2.2 Modelo general segmentado

La ventaja de modelar todo el fuste a través de una expresión única es que los modelos resultantes son fáciles de ajustar y usar; habitualmente se integran con facilidad para transformarlos en ecuaciones de volumen, y pueden en muchos casos reordenarse para el cálculo de alturas comerciales. Su desventaja es que presentan un sesgo significativo en la estimación de diámetros, tanto en la base del fuste como en otras porciones del tronco (KOZAK 1988). Se ha sugerido que el uso de diferentes modelos para la parte superior e inferior del fuste puede mejorar considerablemente el sistema de predicción. HUSCH *et al.* (1982) proponen que en el fuste pueden diferenciarse diferentes formas, dependiendo de la ubicación de la sección en el árbol: un neiloide en la base, un paraboloide en la sección central y un cono en la parte superior.

Los modelos polinomiales segmentados descritos por FULLER (1969) consisten en una secuencia de submodelos. En el caso de una variable independiente, se divide su dominio y se define un submodelo para cada sección de la partición. Estos submodelos son luego unidos, con la condición de que las funciones se conecten correctamente en los puntos de unión para formar un modelo polinomial segmentado.

Un modelo clásico de este tipo es el investigado por MAX y BURKHART (1976) para *Pinus taeda*. El mejor y más usado de sus modelos une tres parábolas bajo las restricciones de continuidad, igual estimación de diámetro, y pendientes iguales en los puntos de unión.

$$\begin{aligned} d_i^2 / d^2 &= b_1 (h_i / h - 1) + b_2 (h_i^2 / h^2 - 1) + b_3 (a_1 - h_i / h)^2 \cdot I_1 \\ &\quad + b_4 (a_2 - h_i / h)^2 \cdot I_2 \end{aligned} \quad (2-191)$$

Donde

$$\begin{aligned} I_i &= 1. & \text{si} & & h_i / h \leq a_i ; & & i = 1, 2 \\ &0. & \text{si} & & h_i / h > a_i \end{aligned}$$

medición de árboles individuales

Un modelo de esta forma fue ajustado por ZEPEDA (1993), para generar un sistema de cubicación para *Pinus patula* Schl. y Cham. de Perote, en Veracruz, México; el modelo ajustado es de la forma:

$$d_i / d = 7.23028x_i - 44.40331x_i^2 + 44.2749 [0.07342376 - x_i] \cdot I_1 \\ + 5.215252 [0.82671059 - x_i]^2 \cdot I_2 \quad (2-192)$$

Donde

$$x_i = h - h_i / h - 1.3$$

$$I_1 = 0, \quad 0.07342376 - x_i > 0$$

$$I_1 = 0, \quad 0.07342376 - x_i \leq 0$$

$$I_2 = 0, \quad 0.82671059 - x_i > 0$$

$$I_2 = 0, \quad 0.82671059 - x_i \leq 0$$

La supuesta ventaja de estos modelos es la predicción de los diámetros en las diferentes porciones del fuste con valores de sesgo inferiores a los encontrados al trabajar con funciones simples. Sin embargo, aun cuando ellos utilizan diferentes modelos para las diferentes partes del fuste, generalmente fallan en solucionar el problema del sesgo. DEMAERSCHALK y KOZAK (1977) presentan como razones para explicar esto que: i) los modelos se han mantenido muy simples; ii) los sistemas no se condicionaron adecuadamente, de forma de hacerse continuos en los puntos de unión donde los diferentes modelos se unen; iii) o las ecuaciones no estaban condicionadas a entregar cero diámetro en el ápice e interceptar el diámetro a la altura de pecho.

II.2.2.3 Modelos compatibles generales y segmentados

Los modelos de ahusamiento compatibles fueron introducidos por DEMAERSCHALK (1972, 1973). La compatibilidad se refiere a que ellos, al ser integrados, entregan el mismo volumen que una ecuación de volumen previamente ajustada a los datos. El concepto de compatibilidad es útil cuando existen funciones de volumen que seguirán en uso junto al modelo de ahusamiento por un período de tiempo considerable, situación en que será deseable no tener discrepancias entre ambos elementos de estimación. Por otra parte, la compatibilidad de los modelos está dada para el volumen total, y no existe forma de asegurarla para la determinación de volúmenes de secciones o trozas del fuste.

Un modelo polinomial compatible es el presentado por GOULDING y MURRAY (1976), de amplio uso en plantaciones de *Pinus radiata* en Nueva Zelandia:

$$d_i^2 = v / (Kh) (b_1 Z + b_2 Z^2 + b_3 Z^3 + b_4 Z^4 + b_5 Z^5) \quad (2-193)$$

Donde

$$Z = (h - h_i) / h$$

$$K = \pi / 40000$$

v = volumen total en m^3 , obtenido mediante una ecuación de volumen; el resto de los términos ya ha sido definido

Para que la ecuación recién presentada sea compatible, debe ser reordenada y ajustada en la siguiente expresión:

$$(d_i^2 K h / v - 2Z) = b_1 (3Z^2 - 2Z) + b_2 (4Z^3 - 2Z) + b_3 (5Z^4 - 2Z) + b_4 (6Z^5 - 2Z) \quad (2-194)$$

CAO *et al.* (1980) presentan un modelo general compatible segmentado de la forma:

$$(d_i^2 K h / v - 2Z) = b_1 (3Z^2 - 2Z) + b_2 (Z - a_1) I_1 + b_3 (Z - a_2) I_2 \quad (2-195)$$

Donde

$$I_i = 1. \quad \text{si } Z \leq a_i ; \quad i = 1, 2$$

$$0. \quad \text{si } Z > a_i$$

II.2.2.4 Modelos de forma o exponente variable

Para explicar la variación en la forma del fuste, los trabajos recientes en ecuaciones de ahusamiento incluyen un número mayor de variables o nuevas técnicas para modelos con las dos clásicamente usadas d y h . Ejemplos de ecuaciones de esta naturaleza son las denominadas de forma o exponente variable, en los cuales el exponente de la variable que iguala la altura en el fuste con su respectivo diámetro $d_i / DI = X^c$ es una función que varía con la altura a la que se encuentra ese diámetro en el fuste y otras dimensiones del árbol (KOZAK 1988). NEWNHAM (1990) es el autor original de la idea pero KOZAK en la publicación previamente referida presenta diversos modelos con esta estructura.

KOZAK (1988) ajustó para diversas especies de Columbia Británica, Canadá, un modelo de exponente variable:

$$d_i / DI = X^c \quad (2-196)$$

Donde

$$X = \left(1 - \sqrt{(h_i / h) / (1 - \sqrt{p})} \right)$$

medición de árboles individuales

$$\begin{aligned}C &= b_2 Z^2 + b_4 \ln(Z + 0.001) + b_5 \sqrt{(Z)} + b_6 e^Z + b_7 (d / h) \\Z &= h_i / h \\DI &= \text{diámetro sin corteza en el punto de inflexión, cm} \\HI &= \text{altura del punto de inflexión, m} \\p &= (HI) / h\end{aligned}$$

En trabajos anteriores, el autor encontró que el punto de inflexión se encuentra a un 20-25% de la altura total y que se podía estimar a través de la expresión:

$$DI = a_0 d^{a_1} a_2 d \quad (2-197)$$

Al reemplazar DI y transformar linearizando la ecuación original, se obtiene:

$$\begin{aligned}\ln(d_i) &= \ln(a_0) + a_1 \ln(d) + \ln(a_2) d + b_1 \ln(X) Z^2 \\&+ b_2 \ln(X) \ln(Z + 0.001) + b_3 \ln(X) \sqrt{(Z)} \\&+ b_4 \ln(X) e^Z + b_5 \ln(X) (d / h)\end{aligned} \quad (2-198)$$

Este modelo fue modificado por PEREZ *et al.* (1991), quienes utilizaron una muestra de 590 árboles de *Pinus oocarpa* en Olancho, Honduras, para desarrollar el modelo:

$$\begin{aligned}\log d_i &= -0.463871 + 1.022897 \log(d) + 0.553862 \log(X) z^2 \\&- 0.67647 \log(X) \log(Z + 0.001) + 0.126413 \log(X) d / h\end{aligned} \quad (2-199)$$

Donde

$$\begin{aligned}Z &= h_i / h \\X &= (1 - \sqrt{(z)}) / (1 - \sqrt{(I)}) \\I &= (h \cdot 0.25) / h\end{aligned}$$

Los autores concluyen que este modelo, más simple que el de KOZAK, entrega estimaciones de igual calidad, por lo que esta expresión más simple puede reemplazar a la original en esta especie.

Variaciones del modelo de NEWNHAM (1988) se ajustaron para *Pinus radiata* y su modelo nacional de simulación de crecimiento y rendimiento en Chile. Una expresión con buenos resultados es la variante:

$$\ln(d_i / d) = b_1 \ln(X) + b_2 \ln(X) d / h + b_3 \ln(X) (d / h) X + b_4 \ln(X) h / \sqrt{(h_i)} \\ + b_5 \ln(X) (d / h) X^2 + b_6 \ln(X) (d / h) X^3 \quad (2-200)$$

II.2.2.5 Modelos de árbol individual

Los modelos de árbol individual o en dos etapas son modelos en los cuales una ecuación de ahusamiento se ajusta al perfil de cada árbol para, posteriormente, en una segunda etapa, construir modelos predictores de los coeficientes de esta ecuación.

En el ajuste de modelos de ahusamiento de árboles individuales, la primera etapa consiste en generar una matriz de $n \cdot p$ coeficientes (n = número de árboles muestra; p = parámetros de la ecuación de ahusamiento); esto se consigue al ajustar un modelo de ahusamiento a cada uno de los árboles muestra. En la segunda etapa, con la matriz obtenida y usando las variables del árbol, rodal y ambiente como variables predictoras, se ajusta un sistema de ecuaciones para estimar los parámetros del modelo fustal en cada árbol.

Un sistema de ahusamiento de esta naturaleza fue probado con buenos resultados por REAL y MOORE (1987) en bosques de segundo crecimiento de pino Oregón, en el noroeste de Estados Unidos. La formulación del sistema es la siguiente:

$$d_i^2 / d_u^2 - X^2 = b_1 (X^3 - X^2) + b^2 (X^8 - X^2) + b_3 (X^{40} - X^2) \quad (2-201)$$

Donde

$$X = (h - h_i / (h - 1.3))$$

d_u = diámetro normal sin corteza

Los modelos predictores de los parámetros son:

$$b_1 = a_0 + a_1 h + a_2 Q + a_3 CR \\ b_2 = a_0 + a_1 h + a_2 Q + a_3 CR \\ \ln(b_3) = a_0 + a_1 h^{0.3333} + a_2 Q + a_3 CR \quad (2-202)$$

Donde

$$Q = h / (d / 100)$$

CR = razón de copa = largo de copa / h

El modelo ajusta las diferencias entre $(d_i / d_u)^2$ en un árbol y la expresión $[(h - h_i / (h - 1.3))]^2$; esta definición de la variable dependiente corresponde a la diferencia entre

medición de árboles individuales

las razones al cuadrado de los diámetros de un árbol y de un cono de diámetro igual al d_u y altura total del árbol. La ecuación está doblemente condicionada a estimar cero diámetro cuando h_i es igual a h , y d_u cuando h_i es igual a 1.30 m. De la Figura 2-37b se desprende que si el cono y el árbol tienen igual d y h y el eje horizontal Z_i se define como $h - h_i$, el diámetro del cono en cualquier punto se expresa como:

$$d_{i \text{ (cono)}} = k \cdot Z_i$$

donde k es una constante que depende de d y h . La razón del diámetro del cono a una altura dada y d es

$$(k \cdot Z_i) / (k \cdot Z_{1.3}) = (h - h_i) / (h - 1.3)$$

El cuadrado de la expresión de la derecha se utiliza en la definición de la variable dependiente del modelo de ahusamiento que puede ser escrito como:

$$Y = (d_{i \text{ arbol}} / d)^2 - (d_{i \text{ cono}} / d)^2$$

Si un exponente de 1 ó 3 se usara en la segunda parte de la ecuación anterior se obtendrían las diferencias con respecto a un paraboloide o un neiloide respectivamente.

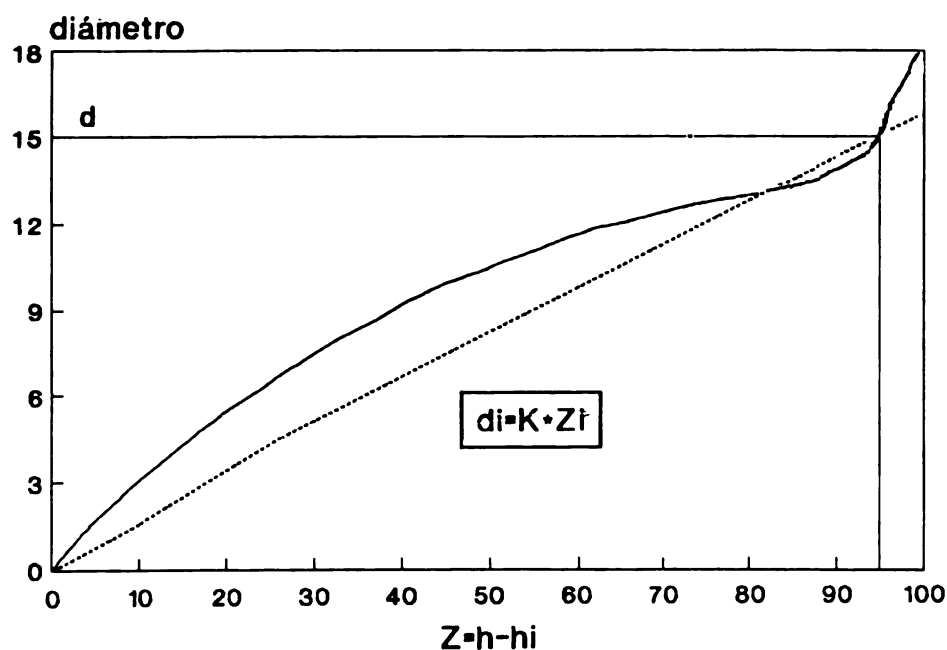


Figura 2-37b. Función de ahusamiento del árbol y de un cono

El uso de potencias de alto grado le confieren al modelo la propiedad de actuar como una ecuación segmentada cuyo término en b_3 se conecta o desconecta (X^{40} con valores prácticamente cero) según las cercanías del diámetro a estimar con el diámetro d . La misma razón le confiere al modelo la propiedad de diferenciar el efecto de los coeficientes, ya que b_1 y b_2 controlan en general la forma del fuste del árbol, en tanto que b_3 actúa como un coeficiente que representa el mayor o menor grado de ahusamiento basal.

Existen teorías sobre la influencia de la copa en la forma de los árboles; éstas expresan que gran parte de la variación en la forma del fuste puede ser atribuida a cambios en el tamaño y distribución de la copa viva (LARSON 1963). Existen, por lo tanto, razones para aseverar que el manejo intensivo de plantaciones con podas y raleos fuertes genera cambios en la forma de los árboles que pueden afectar las estimaciones de diámetro y volumen obtenidas con funciones de ahusamiento tradicionales (MEAD 1990).

BURKHART y WALTON (1985) trataron de incorporar sin éxito y sin disminución del error de estimación, la variable razón de copa (largo de copa / altura total) en un modelo de ahusamiento general para plantaciones de *Pinus taeda*.

Por otra parte, REAL (1988, 1989) desarrolló un modelo de ahusamiento de árboles individuales para renovales de pino Oregón (*Pseudotsuga menziessi*) en el noroeste interior de Estados Unidos, en que la variable razón de copa resultó ser el mejor predictor en las ecuaciones utilizadas para estimar los coeficientes de la función de ahusamiento. Este modelo fue ajustado a plantaciones de pino insigne en Chile (INFORA 1989, 1990), y sus resultados, comparados también en términos del error de estimación, no fueron superiores, pero sí equivalentes a otros modelos de ahusamiento corrientemente en uso en la región de aplicación.

II.2.3 Problemas estadísticos en la construcción de funciones de volumen y modelos fustales

En la actualidad el procedimiento de mayor uso, si no el único utilizado, para la construcción de funciones de volumen y modelos fustales es el análisis de regresión. Por lo tanto, si en los datos se encuentran características contrarias a los supuestos de esta técnica estadística, deberán investigarse alternativas de estimadores para producir las funciones requeridas. A continuación se presentan aspectos de la recolección de datos para constituir una muestra y algunas metodologías de análisis.

II.2.3.1 Selección de la muestra

Usualmente los árboles muestra para la construcción de modelos provienen de muestreos destructivos que se realizan sobre la población objetivo. La distribución geográfica de los puntos o parcelas dentro de los cuales se seleccionan los árboles tipo debe basarse de preferencia en un diseño de muestreo objetivo, ya sea aleatorio o sistemático (FAO 1980), que asegure la representatividad de la muestra a utilizar.

Por razones logísticas o económicas, en algunas ocasiones se prefiere concentrar la muestra en sectores de fácil acceso; al respecto es necesario considerar que individuos que crecen a orillas de camino tienen en general hábitos de crecimiento diferentes a los que lo hacen dentro de la masa. Otra práctica común es obtener las mediciones en lugares en que se realizan cortas, lo que tiene el inconveniente de concentrar la muestra en rodales e individuos con ciertas características especiales. Ambas formas de recolección de datos tienden a limitar severamente la representatividad de la muestra, lo que pudiera conducir a sesgar los modelos que se ajusten y a estimaciones erróneas de existencias cuando las funciones se utilizan en la práctica.

Otra fuente de sesgo que generalmente está presente en la etapa de selección de árboles tipo es la tendencia a concentrar la muestra en los mejores individuos, desechando en algunos casos a los de inferior calidad. Al respecto, debe tenerse presente que los modelos tienen que representar a la población objetivo, por lo que todos los miembros de ella, sin excepción, deben tener la probabilidad de ser seleccionados para el ajuste.

Al planificar la selección de los lugares geográficos en unidades muestrales (parcelas) de superficie fija, debe cuidarse de no concentrar la muestra en unos pocos rodales, sacrificando la calidad y diversidad de los datos, que deben representar el máximo de condiciones de tipos forestales y estructuras, edades, sitios y clases de manejo de los bosques. Los datos también deben contener una amplia variabilidad en información ambiental susceptible de ser analizada por su influencia en la forma de los árboles (ej.: pendiente, altitud, exposición, etc.).

Contrariamente a lo que ocurre cuando se desea seleccionar una muestra para estimar un cierto parámetro, no existe en el caso de regresiones una expresión explícita para determinar el tamaño muestral n de árboles tipo necesarios para obtener una precisión dada. Cuanto mayor sea el número, más precisa será la estimación. La experiencia en la construcción de modelos fustales indica que el número de árboles muestra necesario para construir un buen modelo es cercano a los 500 árboles bien distribuidos sobre la población objetivo. Sin embargo, la calidad de los ajustes estará influida también por otros factores tales como la distribución de la frecuencia diamétrica observada, la relación altura-diámetro, la extensión del área geográfica en que se aplicarán los modelos y la necesidad de agrupar especies en bosques mixtos. Según LANLY (1974) se han construido ecuaciones de volumen para una especie o grupos de especies con incluso 100 ó menos árboles tipo o muestra.

Los modelos que se han discutido son dinámicos en el tiempo, y la nueva información que permita una validación multitemporal de ellos puede ingresarse a un banco de datos y administrarse para lograr una ampliación de la base muestral que sustente los modelos. Así será posible capturar la variabilidad proveniente de nuevos regímenes y técnicas de manejo, la expansión de la cobertura espacial patrimonial de una empresa forestal o de la administración del Estado.

Una consideración de mucho interés corresponde a la distribución diamétrica de los árboles muestra. Si se actúa con un muestreo objetivo y parcelas convencionales, la distribución resultante será representativa; esto es, proporcional a la presencia de árboles de una cierta especie

y diámetro en el bosque (LANLY 1974). Muestras de esta naturaleza pueden fallar en la representación de los árboles de gran tamaño aumentando el error en las estimaciones del modelo para este tipo de árboles, que generalmente representan un alto porcentaje de las existencias. SCHMID-HAAS y WINZELER (1981) recomiendan seleccionar la muestra de árboles para funciones de volumen proporcionalmente al diámetro al cuadrado. Esta metodología es simple de llevar a la práctica mediante la utilización de un prisma o relascopio, seleccionando los árboles tipo con muestreo puntual horizontal, lo que naturalmente concentrará la muestra en los árboles más grandes. Si se conoce el área basal del bosque, será posible establecer a priori el factor de área basal (FAB) apropiado para obtener una cuenta promedio de árboles deseada en cada punto de muestreo. Una selección de árboles con esta tecnología se aproximará en muchos casos a la afijación de NEYMAN (LANLY 1974).

II.2.3.2 Heterogeneidad de varianzas

Uno de los supuestos del modelo de regresión es que la varianza de la variable dependiente Y sea constante para cualquier nivel de la o las variables independientes. Este supuesto es conocido como homocedasticidad u homogeneidad de la varianza. Si un conjunto de datos posee varianzas heterogéneas, las estimaciones de los parámetros del modelo de regresión obtenidos por mínimos cuadrados no serían los mejores estimadores lineales insesgados, pero de ninguna forma invalidarían el uso de esta minimización matemática en el ajuste.

Es común, en relaciones que involucran variables biológicas, encontrar varianzas heterogéneas. Esto se manifiesta al observar el gráfico de dispersión entre dos variables, en donde la tendencia presenta una banda con dispersión mayor de los datos al avanzar hacia la derecha en el eje de las X . Al tener el modelo, se puede recurrir a la gráfica de los residuales versus las variables independientes. La heterocedasticidad se manifiesta en una dispersión del tipo embudo, tal como se muestra en la Figura 2-38.

Se presentan como alternativas dos formas de corregir una situación de heterogeneidad de varianza: a) transformar la variable dependiente; o b) ponderar las variables por el inverso de una función que represente la relación entre la varianza de Y y las variables independientes X . El caso de heterocedasticidad en funciones de volumen es uno de los más estudiados en estadística forestal. CUNIA (1962) constató que la varianza del volumen tenía una relación directa con el valor d^2h^2 , factor que se utiliza frecuentemente como factor de ponderación en ajustes de funciones de volumen. Por otra parte, GERRARD (1966) recomendó el empleo de la siguiente función para relacionar la varianza del volumen con las variables independientes diámetro y altura:

$$\log(\text{var}\{Y\}) = b_0 + b_1d + b_2d \quad (2-203)$$

En el Cuadro 2-36 se presentan tres ejemplos de modelos de volumen y su forma de ajuste al utilizar dos ponderaciones distintas.

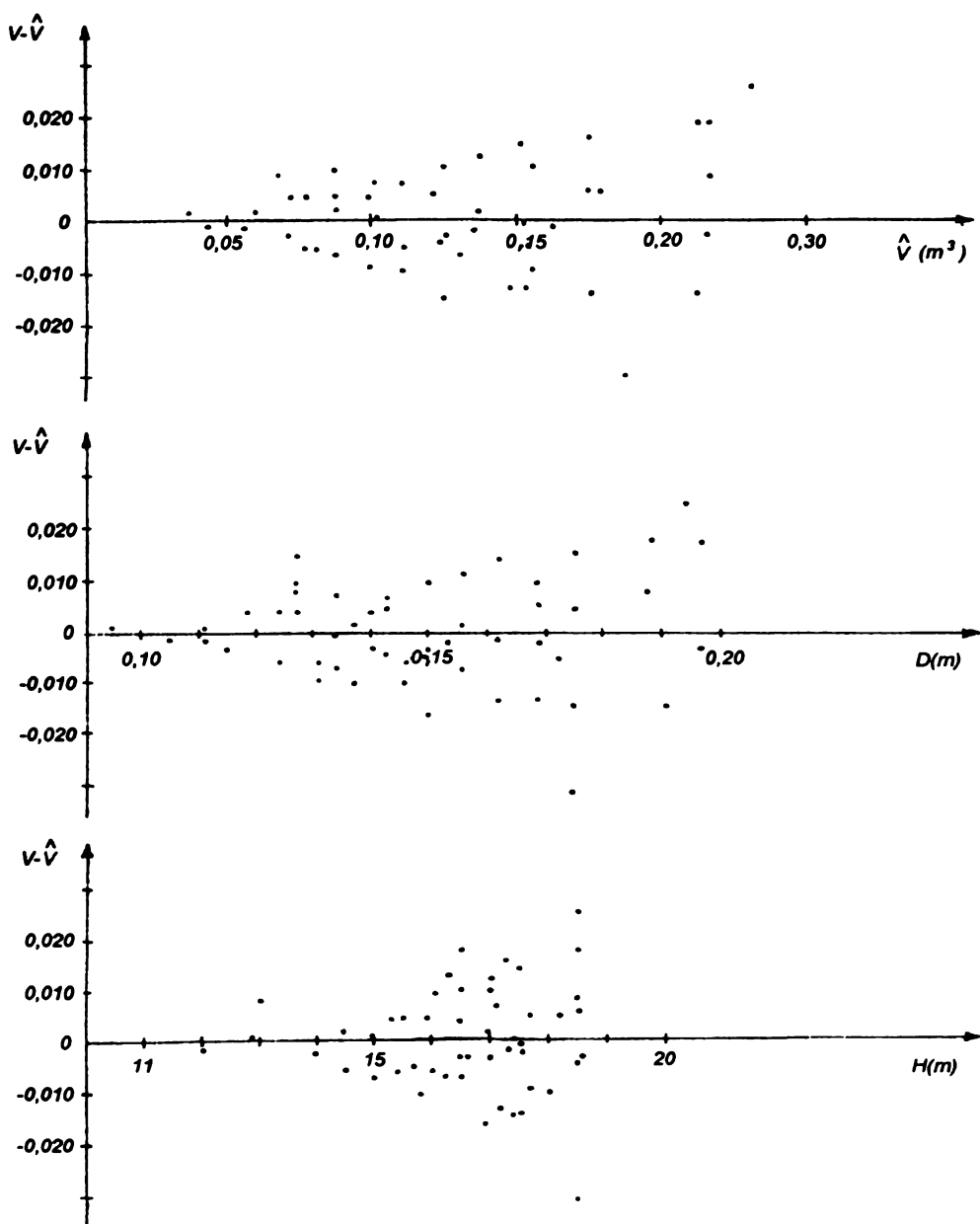


Figura 2-38. Heterogeneidad de varianzas en análisis de residuales, con respecto al volumen estimado, al diámetro y a la altura (FAO 1980)

El uso de mínimos cuadrados ponderados no asegura que el modelo transformado presente mejores cualidades predictivas que el modelo sin ponderar. Esto sucede porque en el caso original la minimización de la suma de cuadrados se realiza directamente sobre la variable de interés y no en una transformación, como es el caso en la expresión ponderada.

Cuadro 2-36. Forma de ajuste de modelos de volumen al utilizar dos ponderaciones diferentes

Modelo original	Ponderaciones	Modelo de regresión
1. Modelo de factor de forma constante		
$v_i = b_1 d_i^2 h_i + E$	(a) $d_i^2 h_i$	$Y_i = b_0$ donde $Y_i = v_i / d_i^2 h_i$
	(b) $\sqrt{(d_i^2 h_i)}$	$Y_i = b_1 X_i$ donde $Y_i = v_i / \sqrt{(d_i^2 h_i)}$ $X_i = \sqrt{(d_i^2 h_i)}$
2. Modelo de variables combinadas		
$v_i = b_0 + b_1 d_i^2 h_i + E$	(a) $d_i^2 h_i$	$Y_i = b_0 + b_1 X_i$ donde $Y_i = v_i / d_i^2 h_i$ donde $X_i = 1 / (d_i^2 h_i)$
	(b) $\sqrt{(d_i^2 h_i)}$	$Y_i = b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i}$ donde $Y_i = v_i / \sqrt{(d_i^2 h_i)}$ $X_{1i} = 1 / \sqrt{(d_i^2 h_i)}$ $X_{2i} = \text{sqrt}(d_i^2 h_i)$
3. Modelo de variables combinadas generalizado		
$v_i = b_0 + b_1 d_i^2 h_i + b_2 h_i + b_3 d_i^2 h_i + E$	(a) $d_i^2 h_i$	$Y_i = b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + b_3 X_{3i}$ donde $Y_i = v_i / d_i^2 h_i$ $X_{1i} = 1 / d_i^2$ $X_{2i} = 1 / h_i$ $X_{3i} = 1 / (d_i^2 h_i)$

Cuadro 2-36. (continuación)

Modelo original	Ponderaciones	Modelo de regresión
3. Modelo de variables combinadas generalizado (continuación)		
(b) $\sqrt{(d_i^2 h_i)}$		$Y_i = b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} + b_3 X_{3i} + b_4 X_{4i}$
		donde $Y_i = v_i / \sqrt{(d_i^2 h_i)}$
		$X_{1i} = 1 / \sqrt{(d_i^2 h_i)}$
		$X_{2i} = \sqrt{(d_i^2 / \text{sqrth}_i)}$
		$X_{3i} = \sqrt{(d_i / \text{sqrtd}_i)}$
		$X_{4i} = \sqrt{(d_i^2 h_i)}$

Como al ponderar se cambia la expresión de la variable independiente (cambio de espacio muestral), no es posible comparar los modelos con los estadísticos comunes coeficientes de determinación, R^2 , y el error estándar de la estimación, $S_{y,x}$, por lo que modelos con y sin ponderación deben ser comparados sobre una base común. FURNIVAL (1961) propone un procedimiento basado en ajustar el error mediante un factor adecuado que los hace comparables al situarlos conceptualmente en el mismo plano muestral. Esta prueba, sin embargo, es paramétrica y necesita del supuesto de normalidad de los residuales. Hoy, la forma universalmente aceptada para decidir sobre la calidad de los modelos que se adopten, corresponde a procedimientos de validación que se discuten en detalle a continuación.

II.2.4 Validación de modelos de volumen y ahusamiento

Después del desarrollo de un modelo de regresión para el que se han evaluado buenas medidas de ajuste, se procede a usarlo en predicciones o estimaciones, control de actividades, o en aprender y concluir sobre los mecanismos que generan los datos. Hay conciencia en los usuarios de modelos que antes de que éstos puedan ser utilizados, deben realizarse pruebas y controles sobre su validez y calidad de sus predicciones (SNEE 1977), para así establecer la confianza en el modelo desarrollado.

Aun cuando las medidas de ajuste tales como el coeficiente de determinación R^2 y el error estándar de la estimación $S_{y,x}$ son criterios importantes para evaluar el ajuste de una ecuación de regresión, su uso en predicciones hace necesario además utilizar criterios que permitan evaluar la calidad predictiva en todo el rango de las variables independientes.

Cuando se comprueba que un modelo entrega buenas estimaciones dentro del rango observado de las variables independientes (interpolación), generalmente existe la tentación o necesidad de utilizarlo fuera del rango de los datos observados en su construcción (extrapolación), razón por la que examinar las propiedades de extrapolación de los modelos es también un objetivo importante del proceso de validación.

La validación de modelos fustales debe considerar la capacidad predictiva para estimar:

1. Diámetros en cualquier punto del fuste.
2. Altura del fuste en la que se encuentra un diámetro límite especificado.
3. Volumen entre dos puntos cualesquiera del fuste, o volumen hasta cualquier índice de utilización.

En los párrafos siguientes se entregan consideraciones sobre tamaño muestral, estimaciones a evaluar y análisis para corroborar el comportamiento de un modelo fustal en validación.

II.2.4.1 Muestra de validación

Los residuos independientes de observados menos estimados, $R_i = (O_i - E_i)$, deben ser representativos de la población a la cual se aplica el modelo. Por lo tanto, la muestra de validación debe cubrir todas las condiciones de edades, sitios y manejos en donde operan el o los modelos. De aquí se derivan dos recomendaciones importantes.

1. La muestra de validación debe ser grande, con un tamaño mínimo de $n > 100$.
2. Los árboles que se utilicen en la validación deben proceder de mediciones muestrales realizadas (grupos de árboles) de manera que sea posible analizar la muestra según distintas variables de estado de los rodales. Así, será posible extraer conclusiones sobre el comportamiento de la ecuación en una determinada condición, por ejemplo estimación en rodales jóvenes con poda intensa.

Por otra parte, al seguir la recomendación anterior, debe cuidarse de no concentrar la muestra en unos pocos rodales, sacrificando la calidad y diversidad de los datos, que deben representar el máximo de edades, sitios y clases de manejo; como también contener una amplia variabilidad en variables ambientales.

II.2.4.2 Evaluación de modelos

Para comparar los modelos, deben utilizarse medidas de exactitud y sesgo de las estimaciones. Tres estadísticos para medir exactitud se presentan frecuentemente en la literatura (CAO *et al.* 1980; MAX *et al.* 1985; REAL 1989):

- a) Raíz cuadrada del error medio cuadrático (REMC).

$$\text{REMC} = \sqrt{\sum (O_i - E_i)^2 / n} \quad (2-204)$$

- b) El error medio absoluto (EMA).

$$\text{EMA} = \sum |O_i - E_i| / n \quad (2-205)$$

- c) Desviación estándar de los residuos (DSR).

$$\text{DSR} = \sqrt{\sum (R_i - R_{\text{MED}})^2 / n} \quad (2-206)$$

La diferencia entre los estadísticos a) y b) es mínima y será notoria sólo si se presentan en los modelos valores de residuales extremos; la expresión cuadrática es sensible a ellos. En tanto, el estadístico c) es una medida de la dispersión de los residuales con respecto a su media. Ante dos valores iguales de error, el modelo que estime con una menor DSR puede considerarse superior.

Como medida de sesgo se utiliza la media de los residuales, denominada frecuentemente diferencia agregada. Si el modelo es insesgado, se espera que esta suma sea cercana a cero. Sin embargo, si el modelo resulta sesgado, la suma de los residuales será diferente de cero.

La expresión de la medida de sesgo es la siguiente:

- d) Diferencia agregada (DA).

$$\text{DA} = \sum (O_i - E_i) / n \quad (2-207)$$

En las cuatro fórmulas presentadas, O_i es un valor observado, E_i es un valor estimado y n es el número total de observaciones. En el análisis de modelos fustales conviene utilizar las expresiones tanto en unidades de medición como porcentuales, para permitir una evaluación exhaustiva de las estimaciones del modelo en las diferentes porciones del fuste.

En el estadístico usado para la detección del sesgo, los signos negativos están asociados con sobreestimaciones, en tanto que los valores positivos de la DA indican subestimación.

Las medidas de error y sesgo deben ser aplicadas a todos los árboles muestra, tanto para el total del fuste como para porciones de él. En el caso de las estimaciones de diámetro a lo largo del fuste y altura en la que se encuentra un diámetro especificado, se recomienda la división del fuste en secciones de igual longitud, para comprobar las características y «performance» del modelo en las diversas porciones del fuste de donde provendrán los surtidos de productos posibles de obtener. Es recomendable una amplia desagregación de esta información para el análisis, por lo que el uso de 5 a 10 secciones de igual longitud corresponde a tamaños de trozas adecuados.

II.2.4.3 Examen de las capacidades predictivas

Los estadísticos descritos deben aplicarse a la evaluación de la capacidad predictiva de los modelos. Concordante con el uso de los modelos fustales, su capacidad predictiva debe evaluarse en la estimación de diámetros en diferentes porciones del fuste d_i , estimación de la altura a la que se encuentra un diámetro especificado h_i y estimación de volúmenes.

Estimaciones diamétricas: se deben generar residuales para comparar las estimaciones de diámetros en cada punto de medición en el fuste. Los residuales generados pueden ser clasificados por clases de diámetro a la altura del pecho d , altura total h y sección o porcentaje de medición con respecto a la altura total h_i / h .

Estimaciones de altura para un diámetro especificado: en este caso se deben generar estimaciones de h_i para cada uno de los diámetros d_i , determinados en los árboles muestra. Al igual que en el caso anterior, los estadísticos que miden sesgo y calidad de predicción deben examinarse clasificando los residuos según clases de d , h y h_i / h .

Estimaciones volumétricas: en el caso de estimaciones volumétricas deben evaluarse: i) la estimación de volúmenes hasta diferentes diámetros límites (uso del modelo como función de volumen); e ii) la estimación de productos con un simulador de trozado.

II.2.4.4 Estimación de volumen hasta distintos índices de utilización

En este caso, deben generarse para los árboles muestra los volúmenes reales hasta diferentes índices de utilización (IU). Se sugiere por lo menos considerar los IU 0, 5, 10, 15, 20 y 25 cm. Para realizar estas determinaciones deben interpolarse las mediciones diamétricas en los árboles muestra. El efecto de la interpolación en estos tipos de volúmenes agregados no debería ser importante y, en todo caso, la magnitud de su error es despreciable con respecto a los posibles sesgos y falta de operatividad que se generaría al especificar la medición de todos los IU en terreno.

Generados los volúmenes hasta los diferentes IU, éstos deben compararse con los valores estimados por la función; los residuos de cada IU deben examinarse clasificados por clases de d y h .

II.2.4.5 Estimación de volumen de productos

Al realizar este análisis debe definirse, en primer término, el surtido de productos rollizos a obtener y un esquema de trozado (prioridades en la obtención de productos). Para cada árbol muestra deberá generarse por interpolación el volumen de productos, en tanto que con el simulador de trozado se debe aplicar el esquema definido utilizando el modelo fustal.

El análisis, en este caso, debe realizarse a nivel de unidad muestral (conglomerado de árboles) y los residuos examinarse por clases de diámetro cuadrático medio, altura dominante y volumen medio. Los valores generados deben ser graficados con respecto a las variables de rodal descritas y también con respecto a otras ambientales que pueden tener influencia en el comportamiento del modelo (pendiente, elevación, etc.).

II.2.4.6 Pruebas de consistencia de los modelos

Estas revisiones del modelo están destinadas a descubrir posibles comportamientos erráticos en las estimaciones. Especial importancia tiene, en esta etapa, el análisis gráfico y la realización de estimaciones fuera de los rangos de los datos con los que se estimaron sus coeficientes. Pueden tomarse los siguientes cursos de acción.

- i) **Capacidad de extrapolación.** Deben generarse pares de d y h que abarquen un amplio rango, extrapolando la muestra de ajuste fuera de su rango, de manera de cubrir valores máximos y mínimos que puedan alcanzarse en la población en que se aplica el modelo. Para estos valores, deberá generarse la línea de ahusamiento y graficarla para tener una imagen visual del comportamiento del modelo.
- ii) **Estudio de la secuencia diamétrica.** Para todos los árboles muestra deben calcularse con el modelo los diámetros en distancias muy cortas (ej.: cada 20 cm). La función de diámetros ha de ser monotónica decreciente desde la base a la punta; de esta misma manera puede observarse la estimación de alturas h_i , que debe presentar una función creciente desde la base a la punta del fuste.
- iii) **Estudio adicional sobre volumen.** Se recomienda comparar las estimaciones volumétricas del modelo de ahusamiento con estimaciones proporcionadas por una ecuación o tabla de volumen que haya sido construida con una muestra muy amplia y de la que se tengan evidencias de buen comportamiento.
- iv) **Curvas isovolumen.** Se crean mapas de curvas de igual volumen y se observa su comportamiento en forma gráfica. Estos mapas deben crearse graficando líneas de igual volumen generadas por distintos pares de d y h . Un comportamiento irregular de las líneas con quiebres o depresiones, indica que hay problemas en el modelo. De esta manera podrá probarse también la capacidad de extrapolación del volumen.

- v) **Búsqueda de estimaciones negativas.** Deben analizarse exhaustivamente los modelos en su estimación dentro y fuera del rango de los valores observados buscando estimaciones negativas en d_i , h_i y v .

Una forma interesante de aplicar los criterios de validación presentados es la publicada por CAO *et al.* (1980). Los autores aplican para comparar modelos de estimación de volumen los estadísticos b), c) y d) a diferentes modelos. En un paso posterior, asignan un valor "ranking" a cada una de las ecuaciones comparadas resultante de sumar tres valores (uno por cada estadístico) asignados a cada modelo. En todos los casos, el modelo que presenta un estadístico con menor valor tiene el valor 1; y el valor se incrementa hasta un máximo que corresponde al número total de modelos comparados; finalmente, se considera mejor el modelo con menor valor total.

II.2.4.7 Inferencia estadística

Los antecedentes de la literatura sobre validación de modelos, en general no recomiendan la realización de inferencia estadística al realizar una validación; la razón invocada es que las pruebas adecuadas son paramétricas, requiriendo supuestos como el de normalidad de los residuos y aleatoriedad e independencia estadística de los datos bajo análisis (SNEE 1977; REYNOLDS 1984; MAX *et al.* 1985; CZAPLEWSKI *et al.* 1989). Por otra parte, si el supuesto de normalidad se cumple al expresar el error en unidades de medición, la expresión porcentual de los residuos no sigue una normal y viceversa (REYNOLDS 1984).

Tradicionalmente, se han usado dos pruebas de hipótesis cuando se desea examinar si una nueva técnica de predicción es igual o puede sustituir a una ya existente: la Prueba t para observaciones pareadas (OSTLE 1973) y el Test de Freese (FREESE 1960).

II.2.5 Reglas madereras

Es común en la práctica forestal entregar las existencias de la materia prima madera (fustes completos o trozas) en unidades del producto final a obtener; las ecuaciones o fórmulas que entregan la cuantía de producto para el caso de la madera con destino aserrable se denominan reglas madereras.

En el caso de trozas destinadas a aserradero, la cuantía de producto se comercializa y mide generalmente en pies madereros (o pies tablares); en Chile se utiliza la unidad denominada pulgadas madereras, unidad equivalente a 10 pies madereros.

Las estadísticas de producción emplean con frecuencia el metro cúbico como unidad. Un m³ equivale a 42.37 pulgadas madereras o 423.7 pies madereros, pies cuadrados o pies tablares (sección I.4.4).

El rendimiento en volumen aserrado de madera rolliza se estima tradicionalmente empleando las reglas madereras. Estas corresponden a representaciones gráficas de la relación

medición de árboles individuales

entre dimensiones características de las trozas y el volumen de producto aserrado que rendiría una troza bajo una serie de supuestos o experiencias prácticas. Algunas reglas madereras de uso corriente en la práctica forestal se describen a continuación.

II.2.5.1 Reglas madereras basadas en diagramas. Regla Scribner

Se basan en el dibujo a escala, sobre secciones circulares que representan la cara correspondiente al diámetro menor de una troza, de las piezas de madera aserrada que pueden obtenerse durante el proceso de aserrío. El estudio de aprovechamiento potencial se repite en una serie de círculos de diámetro creciente para obtener los rendimientos teóricos de trozas con diferentes diámetros menores.

Los supuestos utilizados para simular los rendimientos teóricos pueden ser establecidos por los usuarios de la información en cuanto a pérdidas por tapas y cantoneras, contracción y ancho de corte.

Una regla de esta naturaleza está aún en uso en los Estados Unidos y se denomina Regla Scribner. Los siguientes supuestos se utilizaron en su construcción:

- Circularidad de la cara menor y rectitud de la troza.
- No se aprovechan piezas de largo menor a la longitud de la troza.
- El espesor de las piezas es 1".
- El ancho de corte de 1/4".
- El largo de las trozas es de 16 pies.

Los volúmenes aserrables obtenidos en la serie de diámetros bajo estos supuestos fueron ajustados posteriormente a una función. Así se originó la regla SCRIBNER DECIMAL-C, que corresponde a la siguiente expresión:

$$V = 0.79 D^2 - 2 D - 4 \quad (2-208)$$

V = pies madereros

Donde

D = diámetro menor, pulgadas

El volumen de trozas de otras longitudes se obtiene proporcionalmente al nuevo largo (L' en pies).

$$V' = L' / 16 \cdot V \quad (2-209)$$

Otras reglas de menor importancia han sido derivadas mediante similares procedimientos.

II.2.5.2 Reglas madereras basadas en fórmulas matemáticas

a) Regla Doyle

Representada por una función muy simple

$$v = \frac{(D-4)^2 L}{12} (1-0.25) \quad (2-210)$$

El factor de ajuste (1-0.25) se explica por una supuesta pérdida por ancho de corte y contracción que alcanza un 25%. La reducción impuesta al diámetro de las trozas ($D-4$) vendría a compensar las pérdidas de tapas y cantoneras. Se ha comprobado que esta regla subestima para diámetros pequeños y sobreestima para diámetros grandes. Las estimaciones son ajustadas en general cuando el diámetro de las trozas fluctúa entre 26 y 36 pulgadas.

b) Regla internacional

Se basa en la reducción en volumen que experimenta el cilindro correspondiente al diámetro menor de una troza (D); la longitud unitaria asumida por las trozas es de 4 pies. Otros supuestos:

- Troza circular y recta.
- Conicidad de 0.5 pulgadas cada 4 pies.
- Ancho de corte de 1/8" y reducción por contracción de 1/16".
- Se obtienen sólo piezas de 1 pulgada de espesor.

El volumen cúbico del cilindro de diámetro D y largo L es:

$$V = \frac{\pi}{4} \frac{D^2}{144} L \cdot 12 = 0.7854 \frac{D^2 L}{12} \quad (2-211)$$

$V =$ volumen en pies madereros (1 pie maderero = 1/12 pies cúbicos)

En consideración al ancho de corte y contracción por cada pieza de 1 pulgada de espesor se produce la siguiente pérdida:

medición de árboles individuales

$$\text{Porcentaje de pérdida} = 1 - \frac{(1/8 + 1/16)}{(1 + 1/8 + 1/16)} \cdot = \frac{3}{19} \cdot 100 = 15.8\%$$

$$\text{Porcentaje de aprovechamiento} = (1 - 3/19) \cdot 100 = 84.2\%$$

El volumen, descontadas las pérdidas de aserrío y contracciones, es el siguiente:

$$V = 0.7854 \cdot \frac{D^2}{L} \cdot 0.842 = 0.66 \cdot \frac{D^2 L}{12} \quad (2-212)$$

Las pérdidas por tapas y cantoneras se asumen proporcionales al diámetro de las trozas. El autor MARK (1960) sugirió una pérdida por tal concepto equivalente a $2.12D$:

$$V = (0.66D^2 - 2.12D) \frac{L}{12}$$

Para el largo básico de trozas (4'), el volumen final es:

$$V = 0.22D^2 - 0.71D$$

Si el supuesto ancho de corte se modificara, asumiendo para el valor $1/4''$, la expresión debería modificarse proporcionalmente:

$$V = (0.22D^2 - 0.71D) 0.905 \quad (2-213)$$

$$V = 0.199D^2 - 0.642D$$

Para trozas de 16 pies, el volumen aserrable corresponde a la suma del volumen de sucesivas trozas de 4 pies, en las cuales el diámetro menor se incrementa cada vez en 0.5 pulgadas por efectos de la conicidad.

$$0.199 D^2 \quad -0.642 D$$

$$0.199 (D + 0.5)^2 - 0.642 (D + 0.5)$$

$$0.199 (D + 1.0)^2 - 0.642 (D + 1.0)$$

$$0.199 (D + 1.5)^2 - 0.642 (D + 1.5)$$

$$V = 0.796 D^2 - 1.374 D - 1.2294 \quad (2-214)$$

Las siguientes funciones han sido derivadas para trozas de 8', 12', 16' y 20', para un ancho de corte de 1/4".

$$V_8 = 0.398 D^2 - 1.085 D - 0.2712$$

$$V_{12} = 0.597 D^2 - 1.329 D - 0.7142$$

$$V_{16} = 0.796 D^2 - 1.374 D - 1.2294$$

$$V_{20} = 0.995 D^2 - 1.220 D - 1.7174 \quad (2-215)$$

Los volúmenes para largos intermedios se obtienen como se explicó antes:

$$V_{14} = \frac{14}{12} (0.597 D^2 - 1.329 D - 0.7142) \quad (2-216)$$

II.2.5.3 Funciones de volumen aserrable derivadas mediante estudios en aserraderos

Las reglas madereras que se han presentado, como todas aquellas que se basan en un conjunto de supuestos generales, no permiten efectuar estimaciones insesgadas del rendimiento de un determinado proceso de aserrío, o de la cantidad potencial de madera aserrable en pie. Cuando se precise tal información será necesario ajustar funciones de estimación de volumen aserrable. Ellas pueden construirse mediante medición de una muestra representativa de trozas, empleando como modelo de regresión una expresión similar a las fórmulas de la regla internacional. Si se considera el largo de las trozas como una variable independiente, los modelos serán algo más complejos.

El uso de modelos complejos puede obviarse si se emplea como variable dependiente la cantidad de pies madereros obtenidos por metro cúbico (PVA). El empleo de diámetro menor como variable independiente no es recomendable si el largo de las trozas es variable, como normalmente ocurre. En tal caso parece recomendable usar como variable independiente el diámetro al centro de las secciones D_c .

$$PVA = f(D_c)$$

Se ha propuesto el siguiente modelo (COX 1976):

$$PVA = b_0 + b_1 \frac{1}{D_c} + b_2 \frac{1}{D_c^2} \quad (2-217)$$

medición de árboles individuales

Este tipo de funciones ha sido ajustado en estudios realizados en bosque nativo, empleando un modelo más simple. Las funciones obtenidas para algunas especies del bosque nativo chileno son las siguientes:

Para olivillo (*Aextoxicon punctatum*, R. et. Pav):

$$PVA = 267.3 - \frac{3275.5}{D_c} \quad (2-218)$$

II.2.5.4 Producción real *versus* estimada por reglas

El rendimiento de un proceso de aserrío puede expresarse en función de la proporción de volumen producido respecto al estimado por una regla maderera en particular. Como base de comparación se emplea con frecuencia la regla internacional:

$$R = \frac{V_o - V_r}{V_r} \quad (2-219)$$

R = rendimiento

V_o = volumen real (observado)

V_r = volumen estimado con una regla maderera

Cuando R es positivo se dice que hay "overrun". Cuando es negativo se habla de underrun; esta medida no es en sí un indicador válido del proceso de aserrío, dado que su valor depende en gran medida de las características de la regla maderera empleada.

Un indicador más consistente es el porcentaje de recuperación. Se define como el rendimiento en madera aserrada como proporción del volumen cúbico total de las trozas.

$$\text{Porcentaje de recuperación} = 0.0236 \frac{V_a}{V_c} \quad (2-220)$$

V_a = volumen aserrado obtenido en pulgadas madereras

V_c = volumen cúbico total de la troza, en metros cúbicos

El porcentaje de recuperación observado para un aserradero alternativo que procesa pino insignie alcanza para diámetros entre 20 y 39 cm un porcentaje de recuperación entre 46 y 50% (KAWAS y ZILLER 1975).

En procesos de aserrío en bosque nativo los rendimientos pueden superar el 60%, dependiendo de los diámetros, especies y proceso de aserrío. Para raulí en aserraderos de huincha, considerando un diámetro promedio de 60 cm, el porcentaje de recuperación es aproximadamente un 62%.

II.2.6 Estimación de existencias netas

Si se analizan los inventarios forestales realizados hasta la década del 60, se puede comprobar que sólo se proporcionaban antecedentes de volúmenes brutos de madera en pie, máxime sin corteza, pero sin ningún descuento, ya sea por accesibilidad, restricciones legales, ni tampoco calidad y menos con una clasificación por tipo de producto. De esta forma, muchos proyectos industriales que aparecían como factibles en primera instancia, una vez puestos en marcha, terminaban fracasando.

Este enfoque ha sido modificado gradualmente durante los últimos 30 años evaluándose la madera realmente explotable. En la actualidad este nuevo enfoque es exigido por cualquier inventario y más aún debe ser consecuente con el impacto ambiental que tenga el proyecto industrial que se piensa establecer sobre la base del recurso inventariado.

Las existencias netas corresponden a los volúmenes efectivamente aprovechables, descontadas las pérdidas atribuibles a los siguientes factores:

- Accesibilidad
- Restricciones legales (bosque de protección, normas silviculturales de aprovechamiento)
- Especies no utilizables
- Defectos de la madera
- Calidad y dimensiones de las trozas
- Pérdidas de explotación y transporte (simuladores de fractura)

Las restricciones legales en cuanto a la posibilidad de aprovechamiento de áreas consideradas de protección afectan principalmente a la superficie aprovechable. La aplicación previa de estas restricciones evita la medición de bosques que bajo ninguna forma son explotables.

Los métodos de aprovechamiento definidos por la ley también constituyen un factor de reducción de volumen utilizable, al fijar ciertos mínimos en cuanto a árboles remanentes a dejar desde el punto de vista silvicultural, lo que reduce significativamente el volumen útil.

El segundo aspecto vital en el proceso de estimación de volúmenes netos es la accesibilidad económica del recurso. En la situación tecnológica actual, la inaccesibilidad está dada sólo por razones de orden económico. La factibilidad de extracción de la madera va a depender del volumen y del valor de mercado del producto que se puede obtener. Es por lo tanto necesario obtener información de existencias en este caso, para luego evaluar económicamente su extracción y eventualmente deducirlo del volumen neto útil.

En una situación de bosque constituido por varias especies, es también importante reducir los volúmenes de aquellas especies no utilizables para los fines industriales que consulta el inventario y de esta forma no crear falsas expectativas con volúmenes sobreestimados.

El descuento por defecto de sanidad y forma de los árboles es indudablemente de más difícil cuantificación y exige, en casi todos los casos, un estudio local de presencia e incidencia de defectos en árboles volteados y seccionados, durante el llamado muestreo dendrométrico. Este procedimiento está muy subordinado a las condiciones locales de homogeneidad o heterogeneidad del bosque, y especialmente al tipo de producto que se busca obtener; exige la clasificación de los árboles en pie, en clases de calidad durante el inventario y su asociación con el aprovechamiento de los árboles volteados. En muchas publicaciones, a la calidad determinada en el inventario se le denomina calidad aparente y a la calidad obtenida directamente en el trozado, calidad real.

HOSIUS (1988) de la Misión Forestal Alemana en Bolivia describe en el Manual del Técnico Forestal los principales defectos por forma, estructura y aquellos derivados del ambiente.

Este procedimiento se aplica tanto a bosques naturales como a plantaciones, siendo el problema mucho más complejo en los primeros. La clasificación de calidad puede tener como objetivo mínimo la clasificación de las existencias en tipos de productos en pie, como es el caso normal de los inventarios realizados en plantaciones. En el caso del bosque natural, la clasificación de calidad tiene normalmente el doble objetivo de estimar pérdidas por defectos, para la estimación de existencias netas posterior a la clasificación por productos.

Las restricciones en cuanto a calidad y dimensión son controladas mediante una adecuada clasificación de las existencias brutas.

Por último, deberán descontarse de los volúmenes disponibles las pérdidas producto del proceso de explotación y transporte, normalmente mediante factores de reducción promedio muy relacionados con la dimensión de los árboles, la topografía y el método de aprovechamiento.

La determinación de existencias netas de productos en plantaciones es mucho más simple, porque no requiere la evaluación de defectos. Basta aplicar, a partir de los volúmenes brutos, ya sea factores de conversión a distintos índices de utilización, funciones de productos sobre la base de variables de rodal o, por último, simuladores de trozado y de fractura, para obtener los volúmenes netos de productos, descontadas las pérdidas por explotación y trozado. La necesidad de uno u otro procedimiento dependerá especialmente de las diferencias de precios de los diversos productos; mientras mayores, más ajustada debe ser su evaluación.

II.2.7 Estudio de defectos

La estimación de existencias netas, casi sin excepción, supone en el caso de los bosques naturales la realización de un estudio de defectos y su asociación con la clasificación de los

árboles en pie. Sólo en bosques muy homogéneos será factible aplicar, disponiendo de una base de datos idónea, los llamados factores de transformación o "cull factors", utilizados comúnmente en los Estados Unidos.

El estudio de defectos y desechos se realiza paralelamente al muestreo dasométrico y en aquellos árboles que serán volteados para obtener, ya sea el volumen o los modelos fustales que permiten su posterior cubicación.

Estudio de defecto

FORMULARIO A

Medición del árbol

Fecha: _____

Brigada: _____

Predio: _____

Rodal: _____

Nº de Línea	Nº de Parcela	Nº de Árbol	UBICACIÓN	ALTITUD	POSICIÓN	EXPOSICIÓN	Pendiente %	ESPECIE	D A P mm	Altura c.c. dm	Calidad Sección 1			ALT. COM. S 2	Calidad Sección 2			ALT. COM. S 3	Calidad Sección 3		
											Sanidad	Forma	CAUSA		Sanidad	Forma	CAUSA		Sanidad	Forma	CAUSA
											S	F			S	F			S	F	

SECCIÓN	LARGO dm	DIÁMETRO HUINCHA C/C mm	DIÁMETRO MENOR		DIÁMETRO MAYOR		CENTRO DIÁMETRO HUINCHA C/C	CALIDAD	CALIDAD CAUSA	
			C/C	S/C mm	C/C	S/C mm		S	F	FORMA
TOCÓN										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Figura 2-39. Formulario utilizado para registro y cubicación de defectos (INFORA 1988)

La selección de los árboles a voltear debería hacerse aleatoriamente, dentro de las mismas parcelas de muestreo dasométrico, en un número mínimo por especie estimado de 50 árboles

medición de árboles individuales

que cubran todo el espectro de diámetros, alturas de comienzo de copa y calidades presentes en el bosque. Ante una calidad más heterogénea, es vital aumentar la muestra para obtener mejores estimaciones. La calidad de los estimadores de las existencias netas está directamente relacionada con la cantidad y representatividad de los árboles muestra.

INVENTARIO MELTUNE-CARRANCO

FORM. IN-82

INVENTARIO DENDROMÉTRICO

TRANSECTO ÁRBOL PREDIO SECTOR ROTAL TIPO FORESTAL ESPECIE

TAJE ALTITUD PEND.X EXPOSICIÓN POSIC. TIPO SUELO ALTURA DOMINANTE

SILICOLA

FECHA HORA COM. HORA FIN. TIPO ÁRBOL MSFP MUEF

DAP DOBLE CONT. CALIDAD SECCIÓN PRINCIPAL

S	F
---	---

 N.TOT. MCC MFT MRF MDCO

CALIDAD SECCIÓN FINAL

[illegible][illegible]

Figura 2-40. Formulario de toma de datos para muestreo dendrométrico (INFORA 1992)

Luego de seleccionados los árboles se clasifican en pie, de acuerdo con el procedimiento establecido para el muestreo dasométrico, antecedentes que permitirán luego calcular los porcentajes de incidencia de defectos y de aciertos, respecto de su calidad real verificada después del trozado.

El método tradicional para realizar el estudio de defectos consiste en seccionar el árbol y medir en los diferentes casos el área afectada por eventuales problemas de sanidad y la extensión del daño, para su cubicación y descuento. El mismo principio rige para defectos de forma que suponen también una pérdida de volumen. En la Figura 2-39 se muestra un formulario característico para la evaluación de defectos, en un proyecto realizado en Chiloé Continental, Chile. Dependiendo del inventario, el estudio puede hacerse extensivo incluso a ramas aprovechables, como se muestra en el formulario utilizado en bosque siempreverde chileno que incluye evaluación de astillas en ramas (Figura 2-40).

Una alternativa al volteo de árboles desarrollada y aplicada por HALLER (1969) y DE MILDE (1971) en Malasia e Indonesia es taladrar los árboles con barrenos especialmente diseñados, que permiten verificar la presencia de defectos. Este método, si bien tiene la ventaja de no ser destructivo, difícilmente puede estimar la extensión y volumen del defecto. Sin embargo, puede aprovecharse esta información para segregar árboles sanos y defectuosos, posibilitando una mejor aproximación al volumen utilizable.

II.2.8 Factores de transformación ("cull factors")

Este procedimiento es de uso muy general, especialmente en los Estados Unidos. Parte de la base que el volumen bruto está afecto a un menor error de estimación. Este volumen multiplicado por el "cull factor" o factor de pérdida, que corresponde a las pérdidas causadas por defectos, explotación, fracturas, etc., ya sea en su conjunto o en forma individual, produce el volumen neto aprovechable.

Estos factores de pérdida pueden obtenerse promedios por especie, por especie y clase diamétrica, por especie, clase diamétrica y tipo de producto, etc., dependiendo de la información base utilizada para calcularlo. Los métodos para establecer estos factores pueden ser estudios históricos de aprovechamiento o estudios de rendimiento específicos de tipo local. La utilización de los primeros está condicionada a que el bosque sea similar, como también su forma de aprovechamiento. El segundo método es el uso local y no puede aplicarse a otras áreas sin la calibración correspondiente. Las divergencias, especialmente con las prácticas de explotación, pueden producir estimaciones sesgadas.

Normalmente los factores de transformación se establecen como promedios, previa estratificación de acuerdo con el tipo y proporción de defectos, o bien por análisis de regresión sobre la base de divisiones convencionales de los árboles con diámetro y altura.

medición de árboles individuales

Un ejemplo chileno para factores de transformación promedio son los desarrollados por MOLINOS (1969), para estimar el volumen pulpable en rodales jóvenes de *Pinus radiata*. En este caso en vez de representar un factor de pérdida, representa un factor de utilización (Cuadro 2-37).

Cuadro 2-37. Coeficientes de utilización para la estimación de existencias netas pulpables (C)

$$\text{Coeficiente de utilización} = \frac{\text{volumen neto pulpable sólido}}{\text{volumen bruto en pie}}$$

Diámetro medio	Pendiente	Calidad explotación	Coeficiente de utilización, C
< 20 cm	< 15%	Buena	0.982
		Mala	0.964
	> 15%	Buena	0.921
		Mala	0.876
> 20 cm	< 15%	Buena	0.936
		Mala	0.906
	> 15%	Buena	0.873
		Mala	0.798
Promedio general		0.906	
Promedio general en EE.UU.		0.960	

El volumen neto puede expresarse en metros ruma, multiplicado por un coeficiente de transformación que vale aproximadamente 0.65.

$$\text{Volumen neto metro ruma} = V \cdot \text{bruto} \cdot C \cdot 0.65$$

Como ejemplo de factores de transformación estimados a partir de regresión, el estudio de HANKS (1971), realizado en los Estados Unidos, obtuvo funciones de estimación de volumen aserrable del tipo

$$V = b_0 + b_1 d^2 + b_2 h$$

para diferentes calidades para cada árbol individual (Cuadro 2-38).

El ejemplo de HANKS se aplica al árbol individual, pero también pueden obtenerse funciones a nivel de rodal.

Cuadro 2-38. Presentación parcial de los coeficientes de la función de transformación de HANKS (1971)

Calidad árbol	Calidad madera aserrable	Coeficiente de regresión		
		b_0	b_1	b_2
1	I	-81.6	0.2508	0.948
	II	4.9	0.0627	-
	III	0.9	0.0046	0.161
	IV	-131.3	0.3091	2.169
2	I	-26.4	0.0915	0.425
	II	-11.9	0.0534	0.288
etc.				

II.2.9 Funciones de producto

Son funciones generales de gran utilidad que entregan volumen por hectárea de productos específicos, en base a variables del rodal. Es importante destacar que la desventaja de estas funciones es que se deben desarrollar tantas funciones como productos se deseen evaluar. Idealmente estos modelos deberían obtenerse de explotaciones reales de áreas importantes, lo que representa un costo muy alto.

La variable predictora más significativa de la función de productos es el diámetro cuadrático medio del rodal. Eventualmente pueden ser importantes también la densidad y la altura.

Para los diferentes productos evaluados se obtienen, por ejemplo, modelos del tipo:

$$Vp_i \% = a_0 (1 - \exp(a_1 D_g)) \quad (2-221)$$

$$Vp_i \% = b_0 (b_1 + b_2 D_g + b_3 \log D_g + b_4 D_g^2) \quad (2-222)$$

Donde

Vp_i % = porcentaje producto respecto del volumen total por hectárea

D_g = diámetro cuadrático medio del rodal, cm

Estos modelos son altamente flexibles y especialmente interesantes por su carácter asintótico en los diámetros mayores.

Estas funciones simplifican y acortan significativamente los procesos de inventario con un nivel de exactitud y de precisión comparables a la aplicación de un simulador de trozado. Eso sí, las funciones de productos deben ser compatibles en el programa de trozado utilizado en la práctica.

II.2.10 Simuladores de trozado

Frente a los métodos señalados anteriormente, la metodología usual de estimación de volúmenes de productos es a través de los llamados trozadores o simuladores de trozado. En su aplicación a inventarios, ha resultado ser una herramienta eficaz para la determinación de productos, pero tiene la desventaja de ser un proceso muy lento y consumidor de recursos computacionales.

El procedimiento consiste en establecer esquemas de seccionamiento del fuste, de acuerdo con especificaciones de diámetro máximo y mínimo, longitud máxima y mínima y calidades aceptables para los productos a evaluar.

El volumen de productos rollizos se determina con el simulador de trozado, equipado con un modelo fustal, que opera del siguiente modo:

Partiendo del tocón, se comprueba si el primer producto califica por calidad y dimensiones. Si califica, se determina un volumen con el modelo fustal y se repite la operación. Si no califica, se prueba con el segundo producto y así hasta probar todos los productos y alcanzar el diámetro límite establecido para el producto menor.

El simulador de trozado es altamente dependiente del modelo de ahusamiento o modelo fustal sobre la base del cual se estiman los diámetros y alturas de las secciones.

Un ejemplo de las especificaciones que se entregan normalmente a un simulador de trozado es el siguiente:

Producto	Diámetro menor (cm)		Longitud (m)		Calidad
	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	
Foliable	30	999	2.0	2.9	1
Aserrable	35	999	2.4	4.9	1 - 2
Pulpable	10	999	2.4	2.4	1 - 3

El resultado de aplicar un simulador de trozado lo constituyen las existencias clasificadas según tipo de producto y clase diamétrica. La rigidez en los puntos de corte, situación que en la práctica no es tal, se está actualmente resolviendo dándole cierta flexibilidad, para aprovechar un determinado largo.

II.2.11 Volúmenes aprovechables en bosques naturales

En bosques naturales debe necesariamente existir, posteriormente a la determinación de productos por la vía de funciones o del simulador de trozado, la estimación de las existencias netas efectivamente aprovechables, luego de descontar las pérdidas por defectos.

Sobre la base de algunos ejemplos de reciente aplicación en Chile, se muestran procedimientos complementarios o los tradicionalmente utilizados, descritos en la literatura.

En un inventario de la costa de Valdivia, realizado por INFORA (1975), se aplicó el siguiente procedimiento para estimar existencias netas.

Muestreo dasométrico: Se midió a todos los árboles el d , altura de inicio de copa HCC , diámetro al comienzo de copa DCC y se clasificaron las secciones del fuste por sanidad y forma, con notas de 1 a 3. El número de secciones era variable, de 1 a 4, según el largo fustal:

4	a	7.9 m	1 sección
8	a	15.4 m	2 secciones
15.5	a	23 m	3 secciones
más de		23 m	4 secciones

De esta forma el fuste siempre tuvo secciones con longitud variable entre 12 y 24 pies.

Muestreo dendrométrico: Sobre la base de los árboles volteados localmente se desarrollaron las siguientes funciones:

- a) Función de volumen bruto fustal total

$$\frac{v}{d^2 h} = b_0 + b_1 h \quad (2-223)$$

- b) Coeficientes de distribución del volumen bruto por secciones

No. Sección	No. Sección			
	1	2	3	4
1	1.00	-	-	-
2	0.58	0.42	-	-
3	0.44	0.31	0.25	-
4	0.37	0.25	0.21	0.17

- c) Funciones para estimar el diámetro en el centro de las secciones

$$\frac{DCS_i}{d} = b_0 + b_1 \frac{DCC}{d} \quad (2-224)$$

medición de árboles individuales

Donde

DCS_i = diámetro centro de la sección i

DCC = diámetro comienzo de copa

En total se obtuvieron 10 funciones: 4 para la primera sección, 3 para la segunda, 2 para la tercera y 1 para la cuarta sección.

d) Funciones de defectos de tipo

$$PVS = b_0 + b_1 DCS + b_2 SN + b_3 FN + b_4 NRN \quad (2-225)$$

Donde

PVS = proporción de volumen sano respecto del total

DCS = diámetro en el centro de la sección

SN = nota de sanidad

FN = nota de forma

NRN = nota de nudosidad y ramas

Ejemplo de esta función para *laurelia*

$$PVS = 0.995 - 0.000407 DCS \cdot SN \quad (2-226)$$

Procedimiento de cálculo:

- Se calcula el volumen bruto total del árbol.
- Se distribuye el volumen bruto por sección.
- Se calculan los diámetros de los centros de las secciones.
- Se aplica la función de defectos por sección.

Un método similar utilizaron LANLY y LEPITRE (1970) para bosques tropicales en Costa de Marfil, África.

Una metodología novedosa que incorpora un proceso de calibración de la clasificación en pie, sobre la base de los resultados obtenidos en los árboles muestra volteados, es la aplicada en el inventario de Contao, Chiloé Continental (INFORA 1988).

Muestreo dasométrico: Para todos los árboles se registró la especie, el diámetro, la altura de comienzo de copa y la calidad de hasta tres secciones en puntos de discontinuidad, además de la altura en los mismos puntos.

Muestreo dendrométrico: Se desarrollaron a partir de los árboles volteados las siguientes funciones:

- a) Modelo fustal constituido para su operación por tres funciones:
 - Función estimadora de diámetro sin corteza en función de diámetro con corteza, $d_u = f(d)$
 - Función estimadora de diámetro al comienzo de la copa
 - Función estimadora de diámetro a cualquier altura fustal
- b) Función de estimación de la proporción de volumen neto por sección y especie en función de las notas de sanidad y forma
- c) Desarrollo de la matriz de conciliación entre la clasificación en pie de sanidad y forma (calidad aparente) y la clasificación después de voltear el árbol (porcentaje de acierto) (Cuadro 2-39)

Cuadro 2-39. Matriz de conciliación para la clasificación de calidades en pie (S = sanidad, F = forma, notas de 1 a 3)

Calidad aparente S F	Porcentaje de aciertos											
	S F	S F	S F	S F	S F	S F	S F	S F	S F	S F	S F	S F
	1 1	1 2	1 3	2 1	2 2	2 3	3 1	3 2	3 3			
1 2	60	15										
1 2	30	50	20									
1 3	40	5	45	10								
2 1	10	5	5	70	5	5						
2 2	-	10	5	30	45	10						
2 3	-	-	-	30	50	10	5	5				
3 1	-	5	-	30	20	10	35	-				
3 2	-	-	-	-	30	-	10	60				
3 3	-	-	-	-	-	40	-	10	50			

Procedimiento de cálculo:

- Se calcula el d y DCC sin corteza.
- Por integración analítica se calculan los volúmenes brutos por sección.
- Se generan códigos de calidad "reales" para cada sección mediante un proceso estocástico tipo Montecarlo, según la matriz de conciliación.
- Se calcula la proporción de volumen neto por sección, de acuerdo con calidad y forma reales.

La presencia de defectos en bosque natural tiene una extraordinaria y muy directa relación con el diámetro y por ello, en los últimos inventarios realizados, se optó por hacer la reducción de pérdidas discriminando en tres grandes clases diamétricas (INFORA 1992).

medición de árboles individuales

Muestreo dasométrico: Para todos los árboles se registraron la especie, el diámetro, la altura de comienzo de copa *HCC* y la calidad, también en hasta cinco secciones según puntos de discontinuidad del fuste.

Muestreo dendrométrico:

- a) Se obtuvo un modelo fustal similar al indicado en el ejemplo anterior, compuesto por el mismo tipo de funciones.
- b) Se estableció una matriz de defectos del tipo
 $PDF(I, J, K, L)$

Donde

PDF = proporción de defectos

I = especie

J = clase diamétrica

K = clase calidad

L = proporción de trozas con clase de defecto

L	= 1	0 - 5% de defecto	($\bar{x}$ = 2.5%)
	2	5.1 - 25.0%	($\bar{x}$ = 1.5%)
	3	25.1 - 55	($\bar{x}$ = 40%)
	4	> 55%	($\bar{x}$ = 70%)

Procedimiento de cálculo:

- Se calcula el volumen de la sección según el modelo fustal.
- Mediante un proceso de simulación tipo Montecarlo, se decide qué clase de defecto porcentual corresponde a cada sección. Para ello se opera con la distribución acumulada. El procedimiento de asignación de cada troza consiste en generar un número aleatorio uniformemente distribuido entre 0 y 1, que se compara en la distribución acumulada.

Ejemplo:

Para la especie *Nothofagus dombeyi*, clase diamétrica 10-40 y clase de calidad 2, se genera un número aleatorio de 0.4832. La troza queda asignada a la clase de defecto $L=2$ y su volumen neto es en consecuencia:

$$V_{\text{neto}} = VB \cdot (1 - 15 / 100)$$

Cuadro 2-40. Matriz de defectos determinada para la especie coigüe y clase diamétrica 10-40 cm

Calidad (K)	Clase defecto(L)	Proporción trozos	Acumulado
1	1	0.20	0.20
	2	0.33	0.53
	3	0.47	1.00
	4	0	1.00
2	1	0.35	0.35
	2	0.35	0.70
	3	0.30	1.00
	4	0	1.00
3	1	0.40	0.40
	2	0.40	0.80
	3	0.10	0.90
	4	0.10	1.00

III. MEDICION DE RODALES

III.1 UNIDADES MUESTRALES

Uno de los objetivos centrales de la mensura forestal es describir poblaciones (bosques) en términos del valor total de algún atributo de todos los árboles (área basal, volumen).

Dado que las poblaciones forestales son por lo general muy extensas y de difícil acceso, su descripción se basa en una pequeña muestra de árboles, seleccionados de modo que representen a toda la población.

Por razones prácticas, los árboles no se seleccionan individualmente, sino en grupos, llamados **unidades muestrales**.

La Figura 3-1 muestra una población que fue presentada por LOETSCH Y HALLER (1964), quienes adaptaron una población de BRUCE y SCHUMACHER (1950). Representa un bosque de 40 hectáreas, dividido en 400 unidades de 0.1 ha, dispuestas en una red fija de parcelas cuadradas que no se traslapan ni dejan espacios entre ellas. El valor registrado en cada cuadrado (y_i) corresponde a la suma del volumen de los m_i árboles que incluye:

$$y_i = \sum^{m_i} y_j$$

En varias unidades ocurre que $y_i = 0$, es decir, las parcelas se encuentran vacías o contienen árboles con volumen no computable.

En una población con unidades de la forma descrita, el número total de unidades muestrales es el siguiente:

$$N = A / a$$

Donde

A = superficie del bosque

a = superficie de la unidad (ambas en hectáreas)

El promedio poblacional del atributo y es:

$$\bar{Y} = \sum^N y_i / N \quad (3-1)$$

medición de rodales

	I					II					III					IV					
1	130	153	153	112	200	106	100	147	118	165	—	—	12	—	35	—	18	—	—	24	A
2	124	106	136	130	165	141	194	212	136	88	100	—	12	65	88	—	100	30	12	47	
3	177	165	136	124	171	106	82	177	147	165	118	82	47	6	88	12	30	—	—	24	
4	165	112	124	118	153	118	224	136	118	159	141	65	35	24	—	30	30	53	53	30	
5	100	82	118	153	147	130	130	112	88	118	147	153	88	53	71	—	—	94	47	30	
6	224	247	217	230	130	259	277	100	147	171	200	171	118	141	82	59	71	6	—	—	B
7	253	280	135	271	277	271	230	206	242	177	141	200	135	153	106	153	124	71	30	6	
8	212	277	265	212	206	171	289	259	183	247	194	277	183	165	88	106	118	136	53	71	
9	224	283	247	300	100	318	277	306	177	200	177	271	141	71	124	71	188	171	159	94	
10	100	141	265	277	306	165	253	265	271	159	234	188	300	165	147	241	118	159	82	124	
11	277	330	253	218	177	353	330	253	171	194	241	177	177	118	88	106	118	188	77	165	C
12	224	212	159	224	141	183	283	188	147	183	206	183	130	88	59	130	141	112	106	94	
13	271	318	200	271	218	253	260	200	147	259	253	77	165	242	153	194	106	224	59	141	
14	277	277	206	236	230	230	294	165	294	212	259	159	94	124	212	100	159	124	218	200	
15	130	218	65	171	165	194	171	206	312	94	153	118	171	71	136	147	88	100	153	124	
16	218	130	118	130	82	171	147	124	177	183	159	94	124	212	100	159	124	100	82	71	D
17	106	147	153	118	159	153	153	130	112	177	88	12	41	18	24	88	53	41	—	18	
18	130	200	194	100	141	165	153	147	177	194	106	35	—	18	—	—	35	30	41	35	
19	77	165	159	159	183	118	124	124	94	159	71	—	100	18	6	6	—	—	—	30	
20	188	183	177	130	94	153	47	188	112	118	18	18	—	—	—	12	—	30	59	12	
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	

Figura 3-1. Población integrada por 400 individuos (parcelas) de 0.1 hectárea (LOETSCH y HALLER 1964)

En la población de la Figura 3-1, el valor promedio por unidad es 13.6425 m³ y el valor total es:

$$Y = 400 \cdot 13.6425 = 5457 \text{ m}^3$$

y el total poblacional:

$$Y = N \bar{Y} \quad (3-2)$$

Para estimar alguna característica de una población constituida por una red fija de parcelas que no dejan espacios entre ellas, se selecciona una muestra representativa de n de éstas, entre N . Mediante algún procedimiento, se estima la media poblacional ($\bar{Y}$); por ejemplo:

$$\hat{\bar{Y}} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \bar{y}$$

Luego, se estima el total poblacional (Y):

$$\hat{Y} = N \hat{\bar{Y}}$$

En la práctica, casi no existe un tipo de unidad muestral como el de la Figura 3-1, consistente en una red fija de parcelas cuadradas, donde N puede definirse exactamente, sea debido a la configuración espacial de las poblaciones o al tipo y distribución de las unidades muestrales empleadas. Luego, al no tener a N como factor de expansión, se deben usar estimadores del total poblacional, como el siguiente:

$$\hat{Y} = A \cdot \hat{Y}_{ha} \quad (3-3)$$

Donde $\hat{Y}_{ha}$ es un estimador del total poblacional, dividido por la superficie del bosque (Y/A). A esta expresión se le llama también total por unidad de superficie. Para que éste sea un buen estimador, su esperanza debe ser la siguiente:

$$E[\hat{Y}_{ha}] = Y/A$$

La esperanza del producto $A \cdot \hat{Y}_{ha}$ será, entonces, igual o muy cercana al total poblacional.

El valor $\hat{Y}_{ha}$ se obtiene a partir de un cierto número (n) de unidades de muestra. Cada unidad produce una estimación puntual llamada Y_{ha_i} .

Estas unidades de muestra pueden generarse mediante la selección de árboles desde puntos, líneas u otros elementos geométricos localizados en terreno.

La localización de los puntos desde los cuales se seleccionan árboles se asume como aleatoria. La cantidad de posibles puntos de selección o unidades muestrales es entonces infinita. DE VRIES (1986) las llama unidades muestrales flotantes.

III.1.1 Unidades muestrales probabilísticas

Para que una unidad muestral sea probabilística, deben cumplirse las siguientes condiciones:

medición de rodales

- a) Se asigna a cada árbol de la población una determinada probabilidad de ser seleccionado en una unidad muestral.
- b) Se localizan aleatoriamente puntos de muestreo, de modo que cualquier lugar de la superficie donde se distribuye la población de árboles tenga la misma probabilidad de ser elegido.
- c) Todos los árboles de la población son susceptibles de ser seleccionados en cada punto de muestreo instalado, con la probabilidad preasignada.

Las unidades muestrales probabilísticas son capaces de generar estimaciones puntuales (Y_{ha_i}) cuya esperanza es exactamente (Y / A).

Entre las unidades muestrales probabilísticas más comunes se encuentran las parcelas convencionales, las parcelas concéntricas y las unidades de muestreo puntual y lineal horizontal.

III.1.1.1 Parcelas convencionales

La ilustración a) de la Figura 3-2 muestra el sector de un rodal donde se ha localizado aleatoriamente un punto de muestreo (x). Cada árbol, representado por un punto, se encuentra rodeado por un círculo de radio r_0 . Se ha establecido como regla de selección que si un punto de muestreo cae dentro de su círculo, el árbol j es contado y medido en ese punto. En el ejemplo de la ilustración a) de la Figura 3-2, cuatro árboles incluyen en sus respectivos círculos el punto de muestreo. Luego, se trata de una unidad con $m = 4$ árboles.

Si la población se distribuye sobre una superficie de A hectáreas y el círculo en torno a cada árbol es de a hectáreas, la probabilidad que el árbol j sea seleccionado en un punto es:

$$p_j = \frac{a}{A} = \frac{\pi r_0^2 / 10000}{A} \quad (3-4)$$

El ejemplo corresponde a un muestreo con parcelas circulares de tamaño constante. Como se ve en la figura, el resultado de la selección es el mismo, si se considera cada árbol en el centro de un área de tamaño a (líneas punteadas), o si el punto de muestreo se encuentra al centro de un área del mismo tamaño. Esto puede hacerse extensivo a cualquier forma de parcelas convencionales.

Las unidades muestrales probabilísticas tienen la propiedad de generar variables cuya esperanza es igual al total poblacional.

$$Y_i = \sum \frac{y_j}{p_j} \quad (3-5)$$

Donde m_i es el número de árboles contados en un punto i localizado al azar, y_j es la dimensión del árbol j y p_j la probabilidad de selección preasignada.

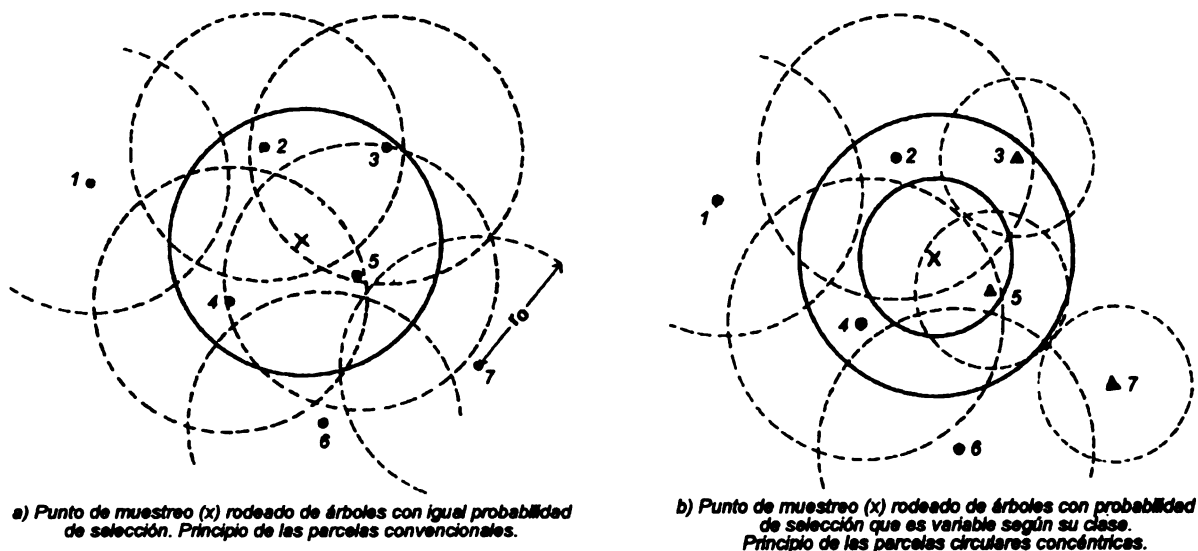


Figura 3-2. Muestreo probabilístico con unidades muestrales convencionales y parcelas concéntricas

Se demostrará que la esperanza de la variable y_j es igual al total poblacional.

El siguiente modelo, aplicado a cualquier punto de muestreo localizado al azar en un bosque, tiene idéntico valor al de la expresión (3-5), sólo que incluye a todos los árboles de la población:

$$Y_i = \sum \frac{y_j}{p_j} \cdot t_j \quad (3-6)$$

Donde

- M = número total de árboles en la población
- y_j = valor del atributo y en el árbol j ($j = 1, M$)
- p_j = probabilidad de selección asignada al árbol j
- t_j = variable aleatoria que puede valer 1 ó 0
- $t = 1$ si el árbol es seleccionado en el punto
- $t = 0$ si no es seleccionado

En efecto, como t_j vale 1 sólo para los m_i árboles contados en el punto, y para todos los restantes vale 0, la expresión (3-6) se reduce a la suma de las razones y_j / p_j de los m_i árboles contados:

medición de rodales

$$Y_i = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{y_j}{p_j} \cdot 1 + \sum_{j=m_i+1}^{M-m_i} \frac{y_j}{p_j} \cdot 0 = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{y_j}{p_j}$$

Cuando es elegido el árbol j , t_j en (3-6) vale 1. Por lo tanto, la probabilidad p_j de que j sea elegido es igual a la probabilidad de que t_j valga 1. Luego, la esperanza de t_j es:

$$E(t_j) = 1 \cdot p_j + 0 \cdot (1 - p_j) = p_j$$

La esperanza de Y_i es, en consecuencia, la siguiente:

$$E[Y_i] = E\left[\sum_{j=1}^M \frac{y_j}{p_j} t_j\right] = \sum_{j=1}^M \frac{y_j}{p_j} E[t_j]$$

$$E[Y_i] = \sum_{j=1}^M \frac{y_j}{p_j} \cdot p_j = \sum_{j=1}^M y_j = Y$$

Y_i es entonces una variable aleatoria, cuya esperanza es el total poblacional.

El cociente Y_i / A que corresponde a la variable aleatoria generada en una unidad muestral, llamada anteriormente Yha_i , tiene como esperanza el valor Y / A y puede definirse del siguiente modo:

$$Yha_i = Y_i / A = \sum_{j=1}^{m_i} \left(y_j / (p_j \cdot A) \right) \quad (3-7)$$

Al término $(p_j A)^{-1}$ se le llama factor de expansión F_j . Representa la contribución del individuo j (seleccionado en la unidad muestral i con probabilidad p_j) al total poblacional estimado por unidad de superficie en el punto.

El factor de expansión para parcelas convencionales es el siguiente:

$$F_j = (p_j \cdot A)^{-1} = \frac{1}{(a / A) \cdot A} = \frac{1}{a} \quad (3-8)$$

El total por hectárea:

$$Yha_i = \sum_{j=1}^m y_j \cdot F_j \quad (3-9)$$

Al emplear parcelas circulares localizadas aleatoriamente como unidades muestrales probabilísticas, la siguiente expresión corresponde a una estimación puntual insesgada del total por unidad de superficie:

$$Yha_i = \sum_{j=1}^{m_i} y_j F_j = \frac{1}{a[ha]} \sum_{j=1}^{m_i} y_j = \frac{10000}{a[m^2]} \sum_{j=1}^{m_i} y_j \quad (3-10)$$

Ejemplo:

En un punto de muestreo localizado al azar en un rodal de 10 hectáreas, se han medido todos los árboles ubicados a una distancia no mayor que 5 metros. Los diámetros de los árboles medidos son: 15, 20, 18, 25 y 35 cm ($m = 5$).

$$a = \pi r_0^2 = 78.54 m^2 = 0.007854 ha$$

$$p_j = a / A = 0.0007854$$

$$F_j = F = (P_j A)^{-1} \frac{1}{a[ha]} = 127.32$$

- Para y_j = área basal del árbol j en m^2 :

$$g_j = \frac{\pi}{40000} d_j^2$$

el área basal por hectárea en el punto i es:

$$Gha_i = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m_i} g_j = 127.32 \cdot 0.2198 = 27.99 m^2 / ha$$

- Para $y_j = 1$, Yha_i es el número de árboles por hectárea estimado en el punto i :

$$Nha_i = F \cdot m_i = 636.6 \text{ árboles/ha}$$

Por extensión, la expresión (3-10) permite estimar puntualmente el total por unidad de superficie, empleando parcelas de superficie fija, cualquiera sea su forma.

Delimitación de parcelas circulares

En su texto original, PRODAN (1965) menciona numerosos trabajos realizados con el fin de implementar sistemas eficientes para delimitar parcelas circulares.

En parcelas pequeñas, con una cantidad reducida de árboles cercanos al límite de la parcela, puede emplearse una simple apreciación ocular y una huincha o cuerda de dimensión estable para comprobar la inclusión o exclusión de árboles dudosos. Este procedimiento puede resultar sesgado debido a la subjetividad en la identificación de los árboles dudosos.

Otros procedimientos, más seguros y eficientes, consisten en emplear distanciómetros ópticos o electrónicos que permiten determinar con rapidez y objetividad la posición de los árboles respecto al límite de la parcela.

NYLAND y REMELE (1975) propusieron un método basado en el empleo de prismas para muestreo puntual horizontal, MPH (sección III.1.1.3), que fue perfeccionado más tarde por WHITE y LEWIS (1982).

KIRCHHOFF *et al.* (1986) describen varios procedimientos para la comprobación ocular auxiliada de distancias, usando prismáticos y el relascopio de espejos.

El siguiente procedimiento (COX 1993) se basa en proposiciones de KIRCHHOFF *et al.* que emplea un relascopio de espejos y una mira horizontal. El procedimiento permite comprobar directamente la distancia en proyección horizontal.

Se construye una mira cuyo ancho s en cm es función del radio de la parcela r y del número de “unidades relascópicas” U que se hacen coincidir con la mira ubicada a la distancia r . El ancho de la mira d se calcula de la siguiente forma:

$$d = 2 \cdot r \cdot U / 100 \text{ m} \quad (3-10a)$$

Ejemplo:

En la Figura 3-3, las unidades relascópicas que se hacen coincidir con la mira son cinco. La inclinación del terreno es 6%. Si la distancia horizontal es 12.62 metros (radio de parcela circular de 500 m²), el ancho de la mira debe ser $2 \cdot 12.62 \cdot 5 / 100 = 1.26$ metros. Si se usan dos unidades relascópicas (relascopio tradicional), el ancho de la mira sería 50.48 cm. La mira contiene una “zona dudosa” (área sombreada). Si las U bandas se proyectan dentro de esta zona, la distancia es comprobada con huincha.

Para graduar el área dudosa, debe repetirse cuidadosamente, en varias operaciones independientes, el calce de las U bandas con la mira, y se mide la distancia. De esta manera, se determina la distancia máxima y mínima para cada operador, y se registra en la vara como los límites del área dudosa mediante la expresión (3-10a). Estas distancias mínimas y máximas

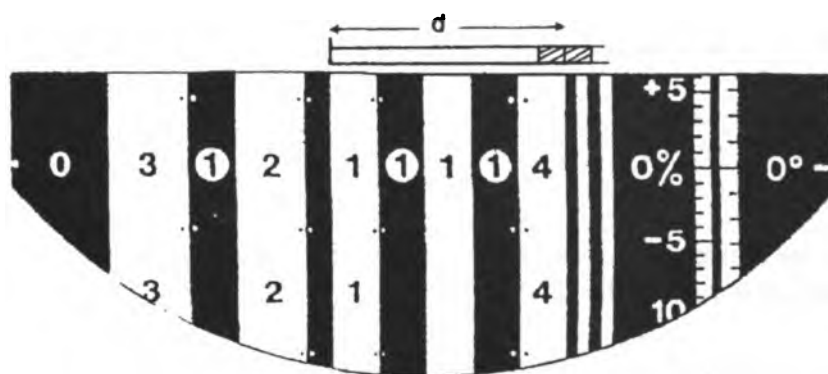


Figura 3-3. Empleo de relascope de espejos $U = 5$ y mira horizontal de dimensión constante para delimitación de parcelas circulares

deben ser el efecto conjunto de todas las fuentes de variación: calibración de los instrumentos, características personales, posición de la vara, pendiente, etc.

Al visar hacia la vara, el tambor pendular donde se encuentran graduadas las escalas debe liberarse, de manera que el ancho de las bandas proyectadas se ajuste de acuerdo a la pendiente. Si, por el contrario, el radio de la parcela es constante en la pendiente, las comprobaciones deben hacerse con la escala en la posición de pendiente cero.

Otros tipos de parcelas convencionales

a) Parcelas cuadradas

La mejor forma de delimitar parcelas cuadradas es trazando las diagonales desde el centro (DUMBAR 1940). Esta operación puede hacerse con eficiencia y precisión empleando un cuadrante de material estable y resistente con las diagonales marcadas, que se monta en el centro de la parcela.

Las parcelas de forma cuadrada se emplean principalmente cuando las unidades muestrales son de gran tamaño.

b) Parcelas cuadradas *versus* circulares

Según WIAANT (1987), las parcelas cuadradas son más eficientes que las circulares cuando es necesario medir más de cuatro árboles para delimitar estas últimas con la misma precisión.

En las parcelas circulares, debe medirse la distancia a todos los árboles en posición incierta, esto es, a los árboles ubicados a menos de x metros del borde de la parcela. El área

medición de rodales

ocupada en la parcela por cuatro árboles inciertos se puede expresar en función de la densidad (número de árboles por hectárea):

$$a_4 = \frac{4 \cdot 10000}{Nha}$$

La misma área puede expresarse también en términos de la distancia de un árbol incierto al borde de la parcela x y del radio de ésta r :

$$a_4 = \pi \left((r+x)^2 - (r-x)^2 \right) = 4\pi rx$$

Igualando ambas expresiones, se obtiene la siguiente función para el radio de una parcela circular con cuatro árboles dudosos rc :

$$rc = \frac{10000}{Nha \cdot x \cdot \pi} \quad (3-10b)$$

La distancia de incertidumbre x depende del radio de la parcela. Una expresión alternativa para rc es el resultado de expresar la distancia de incertidumbre x como proporción del radio de la parcela ($Px = x/rc$):

$$rc = \sqrt{\left(\frac{10000}{\pi Nha Px} \right)} \quad (3-10c)$$

El radio rc es el radio de una parcela circular de igual eficiencia que una parcela cuadrada. Parcelas de superficie mayor que πrc^2 , dada una cierta distancia de incertidumbre x , son más eficientes si su forma es cuadrada.

Ejemplo:

Se ha determinado que la distancia de incertidumbre es de un 20% ($Px = 0.2$) del radio de la parcela, para la apreciación ocular sin ayuda, y de 5% ($Px = 0.05$) para determinación asistida mediante relascopio de espejos y mira. Para un bosque de 500 árboles por hectárea, las superficies máximas de parcelas circulares son de 100 y 400 m², respectivamente.

c) Parcelas rectangulares o fajas

Las parcelas rectangulares o fajas se emplean corrientemente en inventarios de bosques naturales (MALLEUX 1982). El ancho de las fajas corresponde a una distancia que permita comprobar fácilmente la situación de árboles en el límite, aun en condiciones de visibilidad

muy adversas. El ancho de las fajas varía en general entre 5 y 20 metros, mientras que su longitud puede variar entre 50 y varias centenas de metros.

Las fajas permiten delimitar con facilidad, unidades de gran magnitud, a la vez que captan una alta proporción de la variabilidad del bosque. LOETSCH *et al.* (1973), refiriéndose a la experiencia de su empleo en el inventario nacional de Suecia, indican la existencia de sesgos asociados a su delimitación y describen un procedimiento que permitiría reducirlos.

d) **Parcelas elípticas**

Las parcelas elípticas se originan al delimitar las parcelas circulares sobre terreno inclinado. Pueden resultar de alta eficiencia cuando se delimitan empleando distanciómetros ópticos o electrónicos que no permiten ajustar automáticamente a distancias horizontales.

Parcelas elípticas de superficie variable

Cuando se delimita una parcela circular de radio r y superficie $a = \pi r^2$ en un terreno con pendiente α , éste se proyecta como una elipse de menor superficie a' en el plano horizontal. Siendo el área de un elipse $a = \pi \cdot r_{min} \cdot r_{max}$ se tiene:

$$a' = \pi r(r \cdot \cos \alpha) = \pi r^2 \cdot \cos \alpha = a \cos \alpha \quad (3-10d)$$

Parcelas elípticas de superficie constante

Si la parcela se delimita, en cambio, con un radio ajustado r' :

$$r' = r / \sqrt{\cos \alpha} \quad (3-10e)$$

entonces el área de la parcela elíptica en el plano horizontal tendrá una superficie a :

$$a = \pi \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{\cos \alpha}} \right)^2 \cdot \cos \alpha = \pi r^2$$

Ambos tipos de parcelas elípticas pueden emplearse en inventarios forestales, pero con diferentes estimadores. Cuando se usan parcelas elípticas de superficie variable deben emplearse estimadores de razón (sección III.2.5).

III.1.1.2 Parcelas concéntricas

En la ilustración b) de la Figura 3-2 se muestra el mismo punto de muestreo de la ilustración a) de la misma figura, pero los árboles se han clasificado ahora en dos categorías.

medición de rodales

Los árboles de la clase 1 (círculos) tienen probabilidad de selección p_1 igual que en ilustración a). A los árboles de la clase 2 (triángulos), en cambio, se les ha asignado la probabilidad más baja de selección p_2 , representada por un círculo de menor radio.

Los árboles contados en la nueva unidad son ahora solamente tres, puesto que el árbol 3, al que se le ha asignado una baja probabilidad de selección, no incluye el punto de muestreo dentro de su círculo.

Como en el caso de la ilustración a) de la Figura 3-2, aquí también es equivalente rodear los árboles o el punto de muestreo, con los radios máximos de selección. Como se han definido dos diferentes probabilidades de selección, se tiene ahora un sistema de dos parcelas concéntricas. En el círculo mayor se cuentan los árboles representados por círculos, y en la parcela de radio pequeño se cuentan los árboles representados por triángulos.

Unidades de este tipo son empleadas, por ejemplo, en Tailandia (THAMMINCHA 1993), (SCOTT *et al.* 1993), en Brasil (PELLICO 1981) y en Alemania (PRODAN 1965).

Si se asignan árboles a tres clases, cada una con diferente probabilidad de selección, se generarán unidades compuestas de tres círculos concéntricos, y así sucesivamente.

PRODAN (1965) describe las unidades muestrales empleadas en los inventarios de Alemania Central (Figura 3-4, ilustr. a). Cada parcela consiste en tres círculos concéntricos de:

- 400 m² para árboles dap $\geq$ 25 cm ($r = 11.28$ m)
- 100 m² para árboles 25 > dap $\geq$ 10 cm ($r = 5.64$ m)
- 25 m² para árboles 10 > dap $\geq$ 7 cm ($r = 2.82$ m)

Los factores de expansión resultantes de las probabilidades de selección asignadas son, en este caso, los siguientes:

$$\begin{aligned} F_1 &= 10000 / (\pi \cdot 11.28^2) = 25 \text{ para árboles} & d \geq 25 \text{ cm} \\ F_2 &= 10000 / (\pi \cdot 5.64^2) = 100 \text{ para árboles} & 10 \leq d < 25 \text{ cm} \\ F_3 &= 10000 / (\pi \cdot 2.82^2) = 400 \text{ para árboles} & 7 \leq d < 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

Ejemplo:

En una parcela como la descrita por PRODAN (1965) se han medido los siguientes árboles, representados por su diámetro (18, 26, 11, 35, 8, 31, 20, 29).

- El número de árboles por hectárea es:

$$\begin{aligned} N h a_i &= F_1 m_1 + F_2 m_2 + F_3 m_3 \\ &= 25 \cdot 4 + 100 \cdot 3 + 400 \cdot 1 = 800 \text{ árboles/ha} \end{aligned}$$

- El área basal por hectárea:

$$Gha_i = F_1 \sum_{j=1}^{m1} g_j + F_2 \sum_{j=1}^{m2} g_j + F_3 \sum_{j=1}^{m3} g_j$$

$$= 25 \cdot 0.291 + 100 \cdot 0.0664 + 400 \cdot 0.00503 = 15.93 \text{ m}^2/\text{ha}$$

El muestreo con parcelas de diferentes tamaños puede generalizarse a otras formas. En la Figura 3-4, se presenta una parcela concéntrica circular, una cuadrada y una rectangular, diseñadas para inventarios extensivos en bosques naturales (COX 1980).

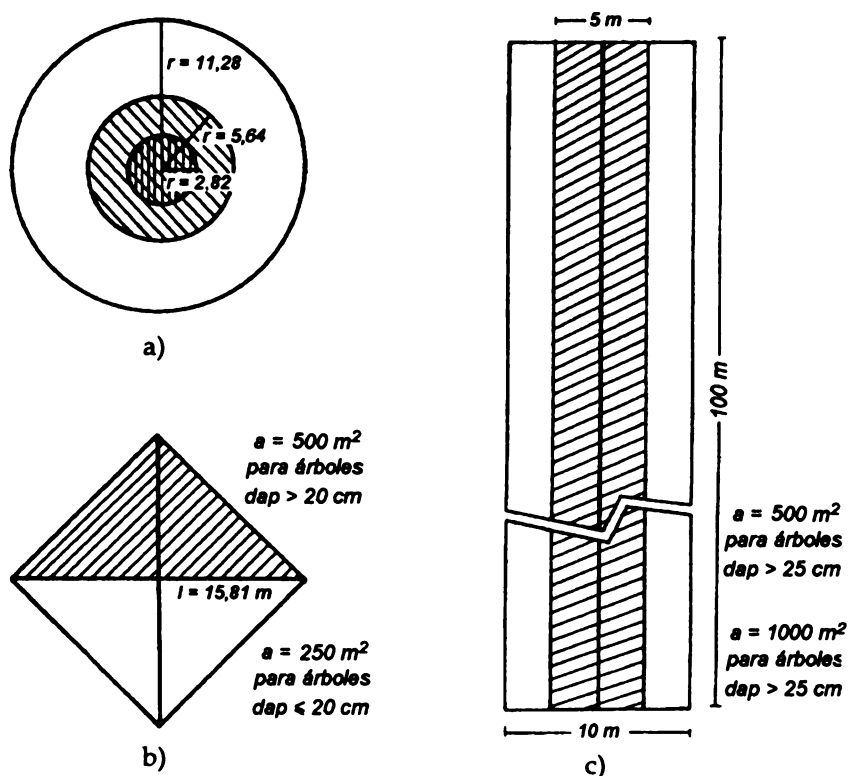


Figura 3-4. Diferentes tipos de parcelas concéntricas

III.1.1.3 Muestreo puntual horizontal (MPH)

Las unidades muestrales MPH, también llamadas unidades muestrales relascópicas o parcelas Bitterlich, debido a su creador BITTERLICH (1948) citado por LOETSCH *et al.* (1973), corresponden a un tipo de unidades muestrales probabilísticas, donde la probabilidad de seleccionar un árbol es proporcional a su área basal.

Al muestrear con unidades MPH, el operador se ubica en puntos localizados al azar en el bosque y proyecta desde ellos un ángulo horizontal (θ) hacia todos los árboles del entorno. Se cuentan todos los árboles que se incluyen exactamente dentro del ángulo o lo rebasan, y el resto es excluido (Figura 3-5, ilustr. a).

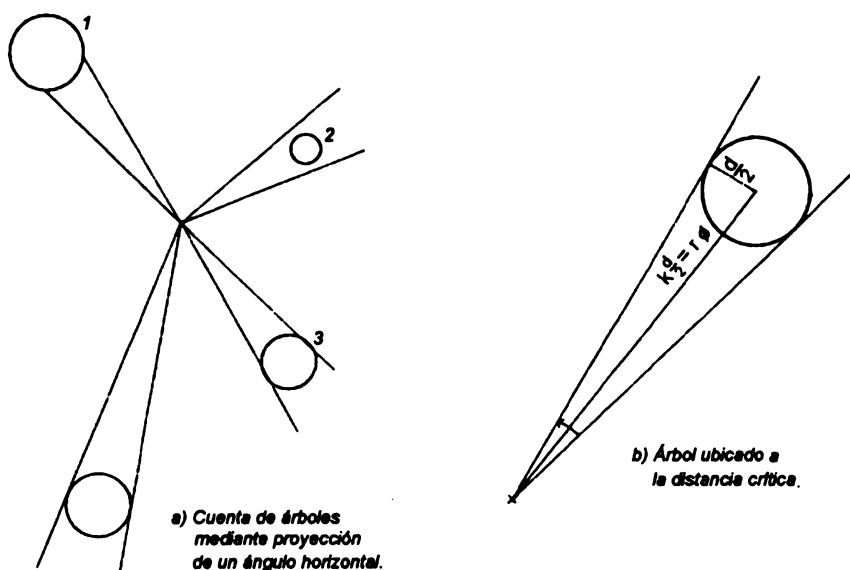


Figura 3-5. Muestreo puntual horizontal (MPH)

Probabilidad de selección y factores de expansión

Como en el caso de las parcelas convencionales, al emplear unidades MPH, cada árbol se puede considerar rodeado de un círculo, cuyo radio r_0 , sin embargo, depende del diámetro del árbol d (metros) y de una constante k :

$$r_0 = k \frac{d}{2} \quad (3-11)$$

Si el punto de muestreo se ubica dentro del círculo de radio r_0 , el árbol es contado. La probabilidad de seleccionar el árbol es, en consecuencia, la siguiente (3-4):

$$p_j = \frac{a_{0j}}{A} = \frac{\pi r_0^2 / 10000}{A} = \frac{\pi \left(k \frac{d_j}{2} \right)^2 / 10000}{A} = \frac{k^2}{10000} \cdot g_j$$

Donde g_j es el área basal del árbol j en m^2 y d_j , su diámetro en metros.

Como en toda unidad muestral probabilística, el factor de expansión de cada árbol contado al total por unidad de superficie es, de acuerdo con (3-8):

$$F_j = (P_j A)^{-1} = \frac{10000}{k^2} \cdot \frac{1}{g_j} \quad (3-12)$$

Según (3-9), el valor total por unidad de superficie correspondiente a un atributo cualquiera de los árboles, estimado en la unidad muestral, es el siguiente:

$$Yha_i = \sum^m y_j F_j = \frac{10000}{k^2} \cdot \sum^m \frac{y_j}{g_j}$$

Al término constante de la expresión anterior se le llama FAB.

$$Yha_i = FAB \cdot \sum^m \frac{y_j}{g_j} \quad (3-13)$$

Si el atributo y de cada árbol es su área basal g , Yha_i es el área basal por hectárea estimada en el punto i :

$$Gha_i = FAB \cdot \sum^m \frac{g_j}{g_j} = FAB \cdot m \quad (3-14)$$

El muestreo MPH se empleó originalmente para estimar el área basal por hectárea. El término FAB (factor de área basal) representa el aporte que hace cada árbol contado en un punto al área basal por hectárea.

Cuenta de árboles en un punto MPH

La ilustración b) de la Figura 3-5 representa un árbol que se encuentra exactamente a la distancia límite r_0 . Para el ángulo θ que incluye al árbol exactamente a la distancia límite, vale la siguiente relación:

$$\text{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{d/2}{k \cdot d/2} = \frac{1}{k} = 1 / \sqrt{\left(\frac{10000}{FAB} \right)} \quad (3-15)$$

El ángulo θ , llamado también ángulo crítico, es, en consecuencia, independiente de la dimensión (diámetro) de los árboles y sólo se relaciona con la constante k . Cualquier árbol que

se encuentre a la distancia crítica quedará exactamente incluido en el ángulo θ . Por el contrario, aquellos árboles que proyecten un ángulo menor que θ respecto al observador se encuentran fuera de la unidad muestral y no son contados.

Operación en terreno con pendiente

La Figura 3-6 muestra un árbol de diámetro d ubicado a la distancia crítica r_0 , usando un instrumento con un determinado FAB. El ángulo de inclinación entre el observador y el árbol es α grados.

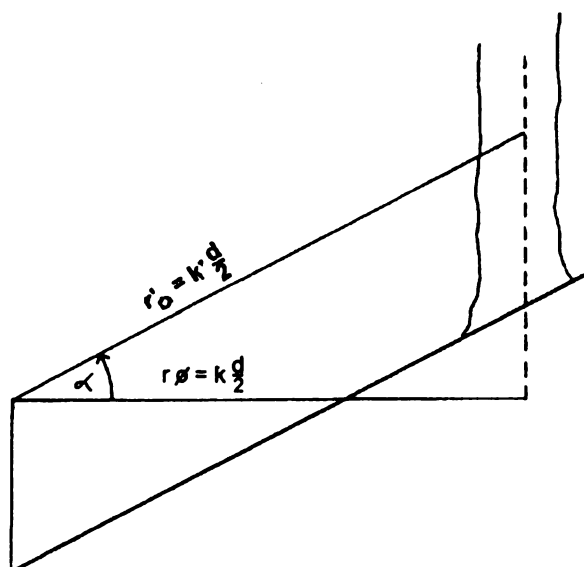


Figura 3-6. Árbol a la distancia crítica en un terreno con pendiente

Como la superficie del bosque y el área favorable a la selección del árbol πr_0^2 se proyectan sobre el plano horizontal, la distancia crítica en pendiente r_0' será:

$$r_0' = \frac{k}{\cos \alpha} \cdot \frac{d}{2} = k' \cdot \frac{d}{2} \quad (3-16)$$

Donde k' es la constante ajustada según la pendiente del terreno. El ángulo crítico ajustado θ' es el siguiente:

$$\theta' = 2 \arcsin(1/k') \quad (3-17)$$

Ejemplo:

Operando con un instrumento que posee un $FAB = 4 \text{ m}^2/\text{ha}$ se cuentan siete árboles en un punto, cuyos diámetros y volúmenes son los siguientes:

Arbol	1	2	3	4	5	6	7
d, cm	32	21	36	18	40	35	17
v, m ³	0.79	0.31	1.02	0.21	1.28	0.97	0.18

La información correspondiente a este punto se presenta en el Cuadro 3-1.

Cuadro 3-1. Resultados del MPH en un punto de muestreo

ITEM	PROCEDIMIENTO	VALOR
Constante K	$k = \frac{10000}{FAB}$	50
Angulo θ	$\theta = 2 \text{ arc sen } (k)^{-1}$	2.29 grados
Angulo crítico para una pendiente de 15 grados	$\theta' = 2 \text{ arc sen } \left(\frac{k}{\cos \alpha} \right)^{-1}$	2.21 grados
Area basal por ha	$Gha = FAB \cdot m$	28 m ² /ha
Número de árboles por ha	$Nha = FAB \cdot \sum \frac{1}{g_j}$	611.0 árboles/ha
Volumen por ha	$Vha = FAB \cdot \sum \frac{v_j}{g_j}$	260.98 m ³ /ha
Suma diámetros por ha	$Dha = FAB \cdot \sum \frac{d_j}{g_j}$	139.84 m
Diámetro promedio aritmético	$Dm = \frac{Dha}{Nha} = \left[\sum 1/d_j \right] / \left[\sum 1/d_j^2 \right]$	22.9 cm
Diámetro promedio cuadrático	$Dg = \sqrt{\left(\frac{Gha}{Nha} \cdot \frac{4}{\pi} \right)} = \sqrt{\frac{m}{\sum 1/d^2}}$	24.1 cm
Distancia crítica para árbol de 30 cm	$r_0 = k \frac{d}{2}$	7.5 m

Elección del FAB

Cualquier FAB proporciona, en teoría, estimaciones puntuales insesgadas del total por unidad de superficie. Sin embargo, la eficiencia y el riesgo de sesgamiento en las estimaciones varían según el FAB elegido.

medición de rodales

La eficiencia del muestreo MPH depende principalmente de los siguientes elementos:

- Densidad del rodal y distribución espacial de los árboles, que determinan la cuenta media por punto y su variabilidad.
- Visibilidad en el rodal que, junto con la densidad, determina el tiempo necesario para decidir la inclusión o exclusión de los árboles del entorno en la unidad.

Algunos autores recomiendan cuentas entre 5 y 15 árboles como las más adecuadas (LOETSCH *et al.* 1973; ZOEHRER 1980; HUSCH *et al.* 1982). ZOEHRER (1980) sugiere, además, que en caso de dudas se opte por FAB que aseguren cuentas pequeñas; DEADMAN y GOULDING (1979), por su parte, recomiendan emplear factores que generen cuentas promedio de entre seis y ocho árboles.

El Cuadro 3-2 presenta el rango de áreas basales asociadas a diferentes FAB, para cuentas promedio $\bar{m}$ entre 5 y 15 árboles, y las distancias críticas para árboles de diferentes dimensiones.

Cuadro 3-2. Muestreo MPH con diferentes FAB: rangos de áreas basales para una operación eficiente y algunas distancias críticas

FAB m ² /ha	k	Angulo crítico θ , grados	Area basal, m ² /ha correspondiente a		Distancias críticas r_0 , m para árboles de diferentes diámetros		
			m = 5	m = 15	d=30 cm	80 cm	160 cm
1	100.00	1.15	5	15	15.00	40.00	80.00
2	70.71	1.62	10	30	10.61	28.28	56.57
4	50.00	2.29	20	60	7.50	20.00	40.00
10	31.62	3.62	50	150	4.74	12.65	25.30
20	22.36	5.13	100	300	3.35	8.94	17.89

Ejemplo:

En un bosque natural, la visibilidad máxima es cercana a 15 metros. El área basal promedio puede estimarse en 100 m²/ha y los diámetros máximos pueden llegar a 100 cm. ¿Qué FAB conviene emplear?

- Respecto al tamaño de la cuenta media y conforme a las referencias citadas, el FAB debe cumplir la siguiente condición:

$$5 \leq \bar{m} = \frac{Gha}{FAB} \leq 15, \text{ es decir, } 6.7 \leq FAB \leq 20$$

- Considerando ahora las restricciones de visibilidad:

$$r_{\max} = 15 \geq r_0 \text{ para } d = 100 = k \cdot \frac{1.00}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{10000}{FAB}\right)}$$

Es decir, $FAB \geq 11.1 \text{ m}^2/\text{ha}$

En consecuencia, debe elegirse un FAB entre 11 y 20 m^2/ha .

Instrumentos para muestreo MPH

- **Instrumentos domésticos**

Para muestrear MPH, puede emplearse cualquier elemento que permita proyectar un ángulo horizontal θ correspondiente a un determinado FAB.

Los instrumentos más simples consisten en una mira de ancho b que se sostiene a una distancia s del observador, de modo que proyecte el ángulo θ . Una distancia s , de al menos 50 cm, permite al observador un buen enfoque de la mira y el árbol que se visa.

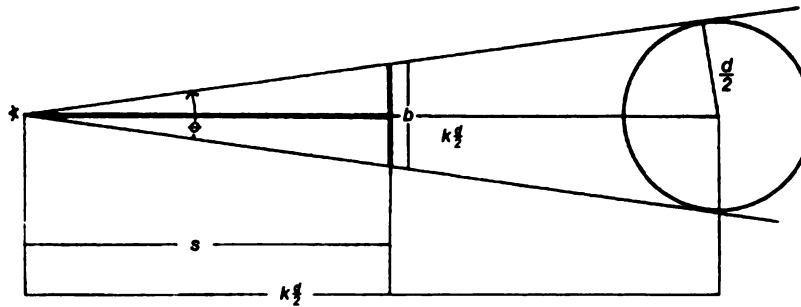


Figura 3-7. Proyección del ángulo crítico para muestreo MPH mediante instrumento simple

La siguiente relación permite diseñar el instrumento (Figura 3-7):

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{b/2}{s} = \tan(\arcsin(1/k)) = \tan\left(\arcsin\left(\sqrt{\left(\frac{FAB}{10000}\right)}\right)\right) \quad (3-18)$$

Ejemplo:

Para un FAB=4, el ancho de la mira sostenida a una distancia de 50 cm es el siguiente:

$$b = 2 \cdot 50 \cdot \tan \left(\arcsen \left(\sqrt{\left(\frac{4}{10000} \right)} \right) \right) = 2.00 \text{ cm}$$

Instrumentos de este tipo sólo permiten muestrear MPH en terreno plano, pues no es posible ajustar el ángulo θ según la pendiente.

- **Relascopio de espejos**

La ilustración a) de la Figura 3-8 muestra el relascopio de espejos y la ilustración c) sus escalas graduadas. Al visar por A se observa en el campo superior el árbol y su entorno, y en el campo inferior, una parte de las escalas (Figura 3-8, ilustr. b). Las bandas numeradas 1 y 2 permiten proyectar ángulos críticos θ correspondientes a FAB 1 y 2. La banda 1 más las cuatro bandas angostas a su derecha, que en total tienen el mismo ancho que la banda 1, proyectan un ángulo que corresponde a un FAB 4.

El ancho de la banda 1 corresponde a la llamada Unidad Relascópica U . Otras versiones del relascopio de espejos tienen varias bandas sucesivas correspondientes a 1 U , de modo que permiten proyectar una variedad prácticamente ilimitada de ángulos críticos. La versión más moderna corresponde al modelo "Metric CP". Este posee cinco bandas de 1 U , además de las cuatro bandas angostas.

El FAB correspondiente al ángulo proyectado por U unidades relascópicas es igual a U^2 . Por ejemplo, al operar con el relascopio "Metric CP" empleando dos bandas de 1 U más una banda angosta, el FAB correspondiente es el siguiente:

$$\text{FAB} = U^2 = \left(2 \frac{1}{4} \right)^2 = 5.06 [m^2 / ha]$$

El relascopio "Metric CP" permite operar con FAB de hasta 36 m²/ha.

Al visar hacia un árbol a la altura de 1.30 metros, el operador libera el tambor pendular y la escala se desplaza, según la inclinación, de manera que el ancho de las bandas en el extremo superior del campo observado (Figura 3-8, ilustr. b), corresponda a ángulos críticos ajustados por pendiente, de acuerdo con el principio en que se basan las expresiones (3-16) y (3-17).

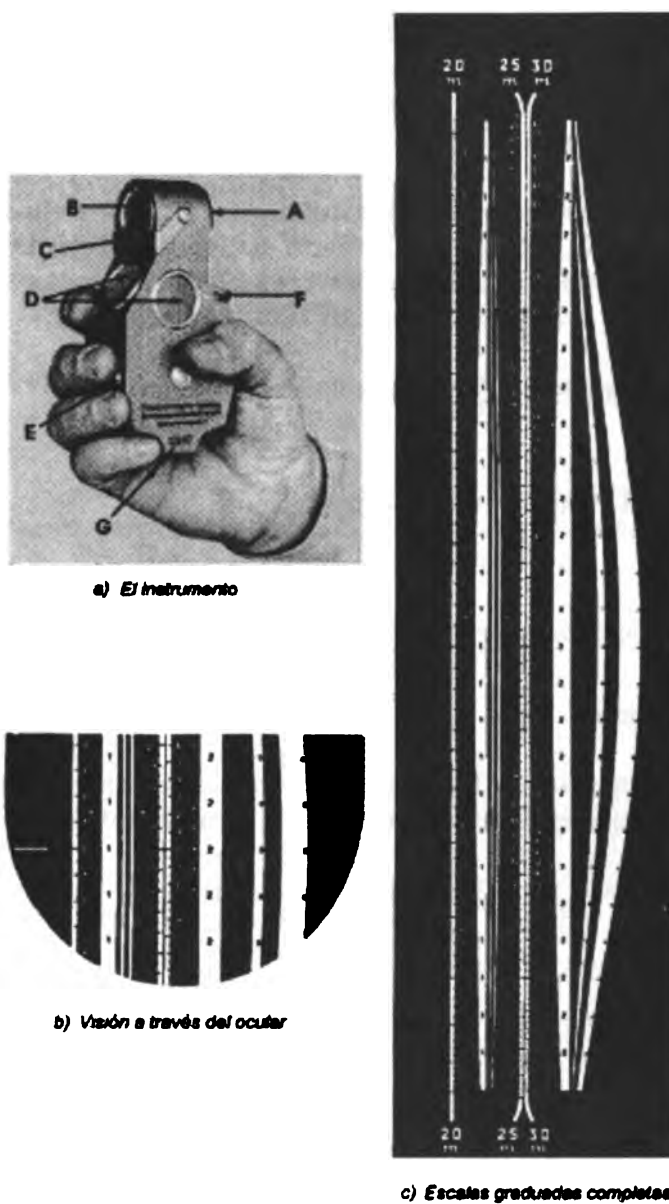


Figura 3-8. Relascope de espejos de Bitterlich (primer modelo)

KIRCHHOFF *et al.* (1986) proponen el siguiente procedimiento para muestreo MPH con relascope de espejos.

- El relascope debe ubicarse exactamente sobre el punto de muestreo.
- Las visadas se realizan en los 360°, con el péndulo liberado.
- Al visar árboles inclinados, debe ladearse igualmente el relascope.

medición de rodales

- La parcela comienza con el árbol más cercano y progresa estrictamente en el sentido de los punteros del reloj.
- Los árboles son numerados con números plásticos, removibles al final de la medición.
- La altura de pecho se mide exactamente y corresponde al borde inferior del plástico numerado.
- Los árboles que subtienden un ángulo tal que su inclusión o exclusión sea dudosa, deben controlarse midiendo, además del diámetro, la distancia horizontal o en su defecto, la distancia en pendiente r_j y la inclinación α entre árbol y punto.

$$\text{El árbol } j \text{ es incluido si: } r_j [m] \leq \frac{k}{\cos \alpha} \cdot \frac{d[cm]}{200}$$

Para el factor FAB 4 en terreno plano la relación es:

$$r_j [m] \leq \frac{d[cm]}{4}$$

• Árboles cerca del borde

En los puntos cercanos a bordes se emplea el proceso de reflexión (Figura 3-9). Consiste en establecer puntos reflejados de M fuera del rodal, equidistantes del borde (M' y M'').

Desde estos puntos se visan los árboles dentro del rodal.

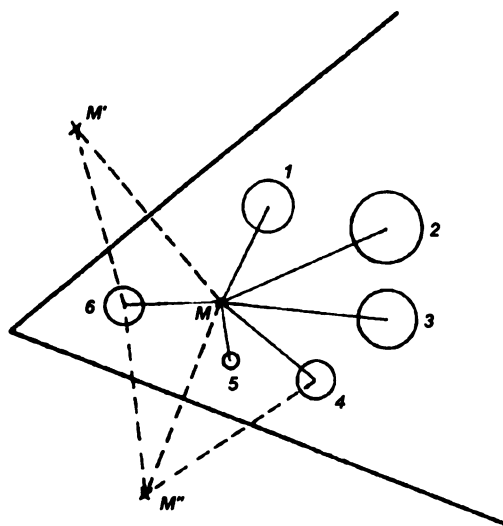


Figura 3-9. Proceso de reflexión para los árboles del borde

En la Figura 3-9, todos los árboles unidos al punto M y sus reflejos con una línea son "árboles contados". Los árboles unidos a dos puntos son árboles contados dos veces. Los árboles unidos con tres líneas se cuentan tres veces.

• Prismas

Un prisma para muestreo MPH es una pieza de vidrio o plástico transparente, cuyas caras forman un cierto ángulo de refracción (Figura 3-10, ilustr. a).

El operador, al visar a través del prisma, ve el fuste del árbol desplazado respecto a su posición real, por efecto de la refracción.

La ilustración b) de la Figura 3-10 muestra las tres situaciones posibles de encontrar al visar un árbol con prismas, mientras que en la ilustración c) se observa el efecto óptico de la refracción.

Al operar con un prisma, es éste y no el observador el que debe ubicarse sobre el punto de muestreo.

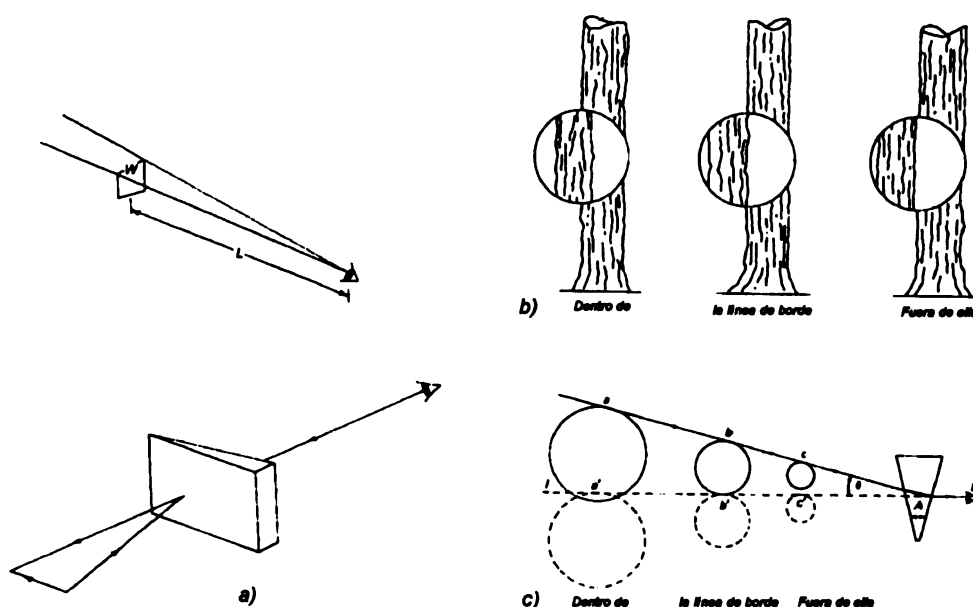


Figura 3-10. Operación de MPH con prisma

- a) Refracción al visar a través del prisma
- b) Árboles en diferentes situaciones respecto a si se cuenta o no en un punto
- c) Efecto óptico correspondiente

- **Calibración de prismas**

Antes de usar un prisma, es necesario comprobar el ángulo θ y FAB exactos que corresponden a un ángulo particular de refracción. Para ello puede seguirse el procedimiento descrito por HUSCH *et al.* (1982):

- Se pega o dibuja sobre una muralla, un rectángulo de ancho w .
- El observador se aleja perpendicularmente del rectángulo, hasta que el desplazamiento a través del prisma coincida exactamente con su ancho. Se repite el proceso varias veces, calculando la distancia media B .
- El ángulo crítico θ correspondiente al prisma se determina de la siguiente forma:

$$\theta = \arctan \frac{w}{B} \quad (3-19)$$

- Las constantes k y FAB se obtienen empleando las relaciones indicadas en (3-15).

- **Operación con prisma en terreno con pendiente**

El efecto de la pendiente puede compensarse rotando el prisma en el plano perpendicular a la línea de visión, en un ángulo igual a la pendiente del terreno entre el observador y el árbol.

LOETSCH *et al.* (1973) indican que este procedimiento de corrección puede generar sesgos, por la exclusión de árboles muy cercanos al límite. Este puede eliminarse mediante la comprobación directa: en casos dudosos, se mide la distancia y el diámetro. Otros procedimientos más sofisticados de compensación por pendiente han sido analizados por BEERS y MILLER (1964).

- **Comprobación de árboles en situación límite**

Cuando un árbol se encuentra cercano a la distancia crítica, es difícil decidir sobre su inclusión sólo en base al ángulo crítico proyectado. ZOEHRER (1980) indica que en cada punto de muestreo, la inclusión de aproximadamente un 10% de los árboles debe ser comprobada con medición de diámetro y distancia horizontal.

Si un árbol se encuentra a una distancia en pendiente r y su diámetro exacto es d y la inclinación del terreno es α grados, el árbol se cuenta cuando se cumple la siguiente condición:

$$r \leq \frac{kd}{2 \cdot \cos \alpha} \quad (3-20)$$

La versión "Metric CP" del relascopio de espejos contiene marcas especiales en las bandas que establecen cuándo la situación de un árbol debe ser comprobada exactamente.

Algunas operaciones de muestreo MPH se ejecutan sin control de árboles dudosos; se sigue el criterio de incluir la mitad de dichos árboles. La ocurrencia de sesgos en operaciones de este tipo es, sin embargo, altamente probable, por lo que sólo se recomienda en reconocimientos que no requieran estimaciones precisas e insesgadas.

III.1.1.4 Muestreo lineal horizontal (MLH)

STRAND (1957, 1958) propuso seleccionar árboles con un ángulo horizontal θ a lo largo de líneas, en lugar de hacerlo desde puntos (Figura 3-11).

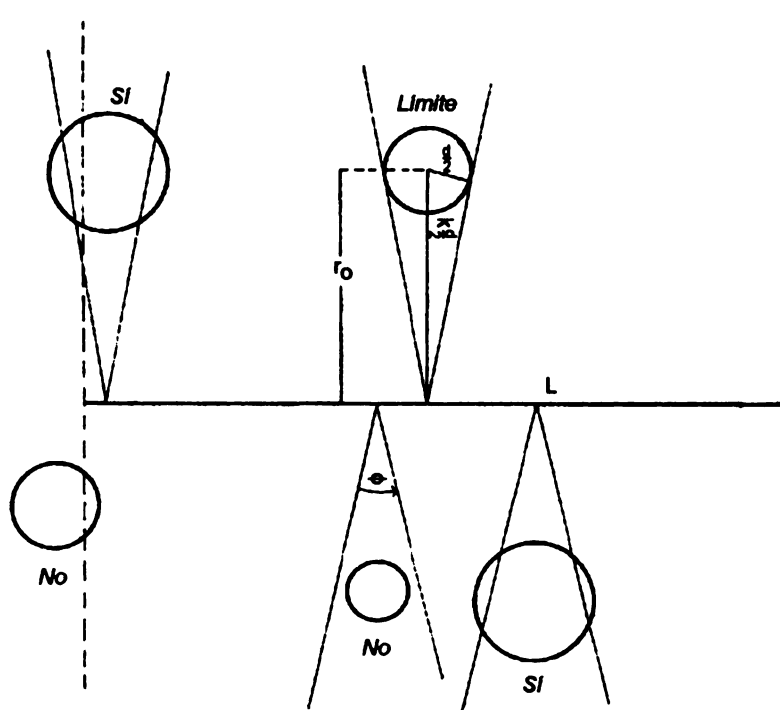


Figura 3-11. Muestreo lineal horizontal con líneas de longitud L

La distancia límite r_{oj} y el ángulo crítico θ para seleccionar árboles es, como en MPH (3-11):

$$r_{oj} = k \cdot d_j / 2 ; \theta = 2 \cdot \arcsen (1 / k)$$

medición de rodales

El área favorable a la selección de un árbol cualquiera de diámetro d es la siguiente:

$$a_{oj} = 2k \cdot \frac{d_j}{2} \cdot L / 10000 [\text{ha}] \quad (3-21)$$

Donde d_j y L se expresan en metros y a_{oj} en hectáreas.

De acuerdo con las expresiones (3-8) y (3-9), un estimador puntual no sesgado del total por unidad de superficie de cualquier atributo y es el siguiente:

$$Yha_i = \sum \frac{y_j}{a_{oj}} = \frac{10000}{kL} \sum \frac{y_j}{d_j} \quad (3-22)$$

El atributo y_j es, por ejemplo, v , g , l , etc., y los valores totales por hectárea estimados, son correspondientemente Vha , Gha , Nha , etc.

STRAND propone el empleo de una línea de $5 \cdot \pi$ metros (15.71 m) para estimar el área basal por hectárea, y un ángulo θ correspondiente a un $k = 100$ (FAB = 1), proyectado hacia un solo lado de la línea. De acuerdo con las expresiones (3-21) y (3-22), definidas en los términos propuestos por STRAND, y para diámetros en centímetros:

$$Gha = \frac{1}{10} \cdot \sum d_j \quad (3-23)$$

El mismo estimador (3-23) vale para un muestreo con un FAB de 4 m²/ha, seleccionado hacia ambos lados de la línea.

El muestreo lineal horizontal permite emplear unidades muestrales que incluyan cualquier número de árboles considerado deseable, usando un ángulo crítico que permita decidir la inclusión de los árboles y comprobar casos de árboles en situación límite en forma segura y eficiente.

Unidades muestrales de este tipo han sido empleadas en el inventario nacional de Taiwán (YANG 1981).

III.1.1.5 Muestreo puntual vertical (MPV) y lineal vertical (MLV)

HIRATA (1955) describió un procedimiento de selección basado en contar árboles desde un punto, proyectando un ángulo vertical ϕ , como en la Figura 3-12. Más tarde, STRAND

(1957) describió un procedimiento similar, donde los árboles se seleccionan desde una línea. Los procedimientos de selección con un ángulo vertical son similares a los que emplean un ángulo horizontal. En la Figura 3-12 se muestran árboles de dos alturas: 1 y 2, ubicados a diferentes distancias del punto en un terreno plano.

Los árboles 1 *B* y 2 *B*, que se encuentran a la distancia crítica *R* 1 y *R* 2, son incluidos exactamente en el ángulo vertical ϕ , mientras que los árboles 1 (*i*) y 2 (*i*) se encuentran dentro y los árboles 1 (*o*) y 2 (*o*) se encuentran fuera de la unidad.

Para un muestreo como en la Figura 3-12, la distancia crítica de selección para un árbol de altura h_j , empleando un ángulo crítico ϕ , es:

$$r_{oj} = h_j \cdot \tan \phi$$

El factor de expansión al total por unidad de superficie para el árbol *j*, de acuerdo con la expresión (3-12) en la sección III.1.1.3, es el siguiente:

$$F_j = \frac{10000}{\pi r_{oj}^2} = \frac{10000}{\pi \tan^2 \phi} \cdot \frac{1}{h_j^2}$$

No existen referencias sobre la aplicación de muestreos MPV o MLV en prácticas normales de inventarios forestales. La selección de árboles mediante ángulos verticales implica un alto riesgo de estimar con sesgo, debido a la dificultad de visar hacia todos los árboles del entorno en rodales densos (LOETSCH *et al.* 1973).

Unidades muestrales mixtas

Algunos conflictos entre las condiciones de eficiencia que dependen de factores estadísticos (error) y operativos (tiempo) pueden resolverse empleando unidades muestrales probabilísticas de tipo mixto.

Muestreo MPH con distancia máxima

El procedimiento consiste en establecer un radio máximo r_{max} y muestrear MPH dentro de él, con un determinado FAB. Los factores de expansión en unidades de este tipo son los siguientes:

- para árboles con $d \leq 2 r_{max} / k$: $F_j = FAB / g_j$

- para árboles de mayor diámetro, $F_j = \frac{10000}{\pi \cdot r_{max}^2}$

Unidades muestrales de este tipo son empleadas, por ejemplo, en el inventario nacional de Finlandia, TOMPPO (1993).

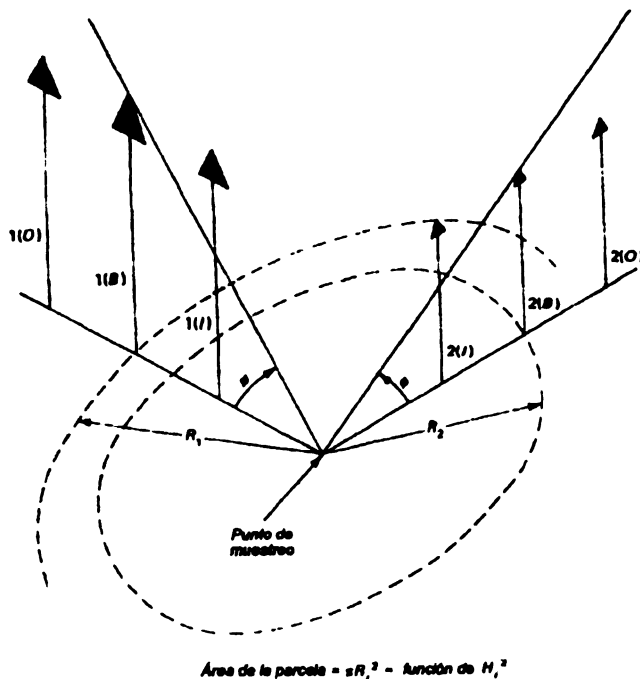


Figura 3-12. Muestreo puntual vertical (HUSCH *et al.* 1982)

III.1.1.6 Generalización del MPH

El Cuadro 3-3 presenta algunas variables de rodal (totales por unidad de superficie), cuya estimación se obtiene por simple multiplicación de una constante por el número de árboles seleccionados en la unidad muestral.

DE VRIES (1986) muestra que el estimador del total poblacional Y , con mínima varianza, para un tamaño de unidad muestral dado, es aquel donde la probabilidad de selección de los árboles es proporcional a la dimensión de cada árbol, o bien, proporcional a cualquier otra variable que tenga proporcionalidad directa con y .

ZOEHRER (1978) propone una generalización del MPH, que él llama "muestreo SPP" (muestreo con selección programada de árboles).

Cuadro 3-3. Estimadores de algunas variables de rodal basados en el número de árboles contados en la unidad muestral

Variable	Tipo de unidad muestral	Estimador	Probabilidad de selección de árboles
Número de árboles por hectárea Nha	Parcela convencional	$Nha = \frac{1}{a} \cdot m$	Constante: $p_j = cg^0$
Suma de diámetros Dha , m/ha	M. lineal horizontal (MLH)	$Dha = \frac{10000}{KL} \cdot m$	$p_j = cg^{0.5}$
Area basal Gha , m ²	M. puntual horizontal (MPH)	$Gha = \frac{10000}{K^2} \cdot m$	$p_j = cg^1$

El procedimiento parte del hecho que algunas variables importantes de rodal, como el volumen o el valor, guardan una relación con el área basal de los árboles g , del tipo:

$$y = bg^c$$

Según ZOEHRER, la constante c para el volumen se sitúa en el rango $1.2 < c < 1.6$, mientras que para el valor, c puede ser aún mayor.

Si el costo de seleccionar un árbol fuese independiente del sistema de selección, un procedimiento más eficiente de selección que el MPH se basaría en una probabilidad de selección proporcional a g^c .

Una expresión general para el área crítica sería, entonces:

$$a_{oj} = Fg_j^c$$

Tal como en el MPH, una variable Yha con esperanza (Y / A) es la siguiente:

$$Yha_i = \sum_{j=1}^m \frac{y_j}{a_{oj}} = F^{-1} \sum_{j=1}^m \frac{y_j}{g_j^c}$$

La constante F determina el "tamaño" de la unidad muestral o el área crítica para seleccionar cualquier árbol.

ZOEHRER propone dimensionar F de modo que el área crítica para un árbol de diámetro d_k sea igual al de un árbol de igual diámetro con selección MPH:

$$a_{oj} = Fg_k^c = \pi \cdot \left(k \cdot \frac{d_k}{2} \right)^2 / 10000$$

Despejando para F :

$$F^{-1} = \frac{10000}{k^2} \cdot \frac{g_k^c}{g_k} = FAB \cdot g_k^{c-1} \quad (3-24)$$

Una expresión para Yha_i con selección probabilística proporcional a cualquier g^c es la siguiente:

$$Yha_i = FAB \cdot g_k^{c-1} \sum \frac{y_j}{g_j^c} \quad (3-25)$$

El área crítica en m² para muestreo SPP de ZOEHRER será, por lo tanto:

$$a_{oj} = \frac{10000}{FAB} \cdot \frac{g_j^c}{g_k^{c-1}} \quad (3-26)$$

El radio crítico, como en los otros tipos de unidades, es el siguiente:

$$r_{oj} = \sqrt{\left(\frac{a_{oj}}{\pi} \right)} = \sqrt{\left(\frac{10000}{FAB} \cdot \frac{g_j^c}{\pi g_k^{c-1}} \right)}$$

Puede comprobarse que para $c = 1$, la expresión da el mismo valor que en muestreo MPH. El ángulo crítico θ , como en el muestreo MPH, es el siguiente:

$$\theta = 2 \arcsin \left(\frac{d}{2r_{oj}} \right)$$

Para cualquier muestreo puntual con probabilidad proporcional a g^c , donde $c \neq 1$, el ángulo crítico no es constante. Luego, el empleo del procedimiento generalizado propuesto

por ZOEHRER depende de un desarrollo tecnológico que permita determinar rápidamente si un árbol debe ser o no contado en un punto de muestreo SPP.

Ejemplo:

- Para un $d_k = 30$ cm y un $FAB = 4$ [m^2/ha] y suponiendo una proporcionalidad entre y y g de tipo $y = bg^{1.4}$

$$Yha_i = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{4} 0.3^2 \right)^{0.4} \cdot \sum \frac{y_j}{g_j^{1.4}} = 1.3861 \sum \frac{y_j}{g_j^{1.4}}$$

- Si se han contado 10 árboles en un punto SPP y la función estimadora de volumen de árbol fuese $v = 30.62 \cdot g^{1.4}$, el volumen por hectárea estimado en el punto sería:

$$Vha_i = 1.3861 \sum \frac{v_j}{g_j^{1.4}} = 1.3861 \cdot 30.62 \cdot m = 424.4 m^3 / ha$$

El ángulo crítico y el área crítica para árboles de 30 y 60 cm, comparados con los correspondientes para muestreo MPH, ambos con FAB 4, son los siguientes:

Tipo de muestreo	Area crítica $a_{oj} = m^2$		Angulo crítico θ , grados	
	$d = 30$	60	$d = 30$	60
SPP (según ZOEHRER 1980)	176.71	1230.71	2.29	1.74
MPH (según BITTERLICH)	176.71	706.71	2.29	2.29

En el ejemplo puede observarse que, en el muestreo SPP, el ángulo crítico θ varía según la dimensión de los árboles, generando probabilidades de selección crecientes a medida que aumenta el diámetro de los árboles y el valor del exponente c .

III.1.2 Unidades muestrales no probabilísticas

Desde hace muchos años se han usado mediciones de distancia entre árboles $a - a$, o desde puntos de muestreo a árboles cercanos $p - a$, para estimar la densidad de rodales

(BAUERSACHS 1942; KÖHLER 1952; WECK 1955; STOFFELS 1955; ESSÉD 1956). Las unidades $a - a$ y $p - a$ tienen la virtud de adaptarse automáticamente a la densidad puntual del rodal.

Un estudio basado en una simulación de muestreo sobre poblaciones con distribución espacial heterogénea (COX 1971) mostró que todos los métodos basados en distancias estiman con sesgos crecientes, a medida que aumenta el grado de agrupamiento en la distribución espacial de los árboles. En poblaciones con alto grado de agrupamiento, los sesgos pueden fácilmente superar el 200%.

Uno de los métodos $p - a$ que resulta menos sesgado es propuesto por STOFFELS:

$$\hat{N}ha_1 = \frac{10000}{\pi} \cdot (j - 1/2) \cdot \frac{1}{\bar{r}_j^2} \quad (3-27)$$

Donde $\bar{r}_j^2$ es el promedio de las distancias al cuadrado al j -ésimo árbol más cercano al punto de muestreo.

Un estimador similar resulta al emplear la media armónica de las distancias al cuadrado:

$$\hat{N}ha_2 = \frac{10000}{\pi} \cdot (j - 1/2) \cdot \frac{1}{Hr^2} \quad (3-28)$$

Donde Hr^2 es la media armónica de las distancias al cuadrado:

$$Hr^2 = \frac{n}{\sum_{i=1}^n 1/r_{ij}^2}$$

En poblaciones cuya distribución espacial presenta tendencia agregativa, Nha_1 tiende a subestimar y Nha_2 a sobreestimar, de modo que el promedio de ambas estimaciones se sitúa cerca del valor real.

PRODAN (1968) propone un procedimiento basado en el mismo principio para estimar el área basal:

$$Gha_i = \frac{2500}{r_6^2} \cdot \left(\sum_j^5 d_j^2 + d_6^2 / 2 \right) \quad (3-29)$$

Donde Gha_i es el área basal en m^2/ha estimado en el punto i considerando el diámetro de los seis árboles más cercanos y la distancia al sexto árbol r_6 .

La expresión puede generalizarse fácilmente a cualquier orden.

BATCHELER Y HODDER (1975) probaron procedimientos de distancia para estimar el número de árboles por unidad de superficie en plantaciones de pino insigne en Nueva Zelanda. El estimador emplea la distancia al árbol más cercano y un término de ajuste de sesgo consistente en un índice de no aleatoriedad basado en distancia punto-árbol y la correspondiente distancia árbol-árbol, ambas respecto al individuo más cercano.

Métodos de distancia en cuadrantes

Cuando se emplean los métodos de distancia, existe una creciente dificultad en identificar el j -ésimo árbol, a partir del cuarto o quinto árbol.

Por otra parte, al determinar distancias de orden muy reducido ($J < 5$), la variabilidad entre unidades es excesiva y las estimaciones se ven afectadas por fuertes sesgos procedentes de la distribución espacial y de la localización de los puntos de muestreo.

Una alternativa consiste en dividir el campo en torno al punto de muestreo en cuadrantes (MORISITA 1954; COTTAM y CURTIS 1956) o en sectantes (DICE 1952).

COX (1971) empleando cuadrantes, probó diferentes tipos de estimadores, concluyendo que entre los más estables frente a variaciones de la distribución espacial se encontraba el siguiente:

$$Nha = \frac{1740}{n} \sum_i \left(\sum_j 1 / r_{i,j3} \right)^2 \quad (3-30)$$

Donde $r_{i,j3}$ es la distancia al tercer árbol más cercano al punto i en el cuadrante j , y n el número de puntos de muestreo distribuidos al azar o sistemáticamente. La constante del modelo se determinó en base a poblaciones simuladas, con una gran variedad de distribuciones espaciales.

III.1.3 Relación entre el tamaño de las parcelas y variabilidad

La variabilidad entre unidades de una población puede estimarse en base a una muestra de n unidades seleccionadas al azar. En cada unidad i se determina el valor de un atributo y_i en base a los m_i árboles medidos. La variabilidad entre unidades se estima del siguiente modo:

$$sy = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}} \quad (3-31)$$

medición de rodales

Donde $\bar{y} = \sum y_i / n$

La variabilidad se expresa también en forma relativa mediante el coeficiente de variación:

$$c\% = (s / \bar{y}) \cdot 100 = s\% \quad (3-32)$$

Al aumentar el tamaño de las unidades, la variabilidad $c\%$ normalmente se reduce. La tasa de reducción es variable, según la población, como se verá a continuación.

Relación tamaño/variabilidad en un bosque aleatorio

El bosque aleatorio se caracteriza por dos elementos:

- a) La localización de cualquier árbol es el resultado de un proceso aleatorio, equiprobabilístico e independiente. La cuenta de árboles en parcelas de superficie fija se distribuye, según POISSON, como sigue:

$$p(x) = e^{-\mu} \mu^x / x!$$

Donde

$p(x)$ = probabilidad de contar x árboles en una parcela

μ = cuenta media por parcela $\mu = a \cdot N$ donde a = superficie de la parcela en hectáreas y N = densidad promedio (número de árboles por hectárea)

- b) La dimensión del atributo y en los árboles (y = diámetro, altura, volumen, etc.) tiene una varianza Sy^2 . Los valores que adopta y en cada árbol son aleatorios e independientes, de modo que la vecindad no los afecta. Esto se manifiesta en una correlación nula entre la dimensión de individuos vecinos.

En una parcela de un tamaño tal, que incluya m árboles, el atributo $\bar{y}_i = \sum y_j / m$ tiene como esperanza $\bar{Y}$ y como varianza $S\bar{y}_i^2 = Sy^2 / m$. El coeficiente de variación es:

$$c\% = \frac{Sy / \sqrt{m}}{\bar{y}} \cdot 100 = \frac{Sy}{\sqrt{m} \cdot \bar{y}} \cdot 100$$

Para el atributo $y_i = \sum y_j / m = \bar{y}$, en cambio, la esperanza es $m\bar{Y}$ y la varianza $Sy_i^2 = m \cdot Sy^2$. El coeficiente de variación es igual al anterior:

$$c\% = \frac{Sy \cdot \sqrt{m}}{m \cdot \bar{y}} \cdot 100 = \frac{Sy}{\sqrt{m} \cdot \bar{y}} \cdot 100$$

El número promedio de árboles m que contiene una parcela depende de su tamaño y de la densidad del bosque Nha .

$$m = a \cdot Nha$$

El tamaño de una parcela es, pues, proporcional al número promedio de árboles que contiene:

$$a = Nha^{-1} \cdot m$$

En consecuencia, para un bosque aleatorio, con una cierta variabilidad entre individuos Sy y una densidad Nha , el siguiente producto es constante e independiente del tamaño de las parcelas:

$$Sy^{-2} \cdot a = \frac{Sy^2}{m} \cdot \frac{m}{Nha} = \text{constante} = \frac{Sy^2}{Nha}$$

Para un bosque dado, Sy^2 y Nha son parámetros fijos, luego su cociente es constante. Para dos tamaños diferentes de parcelas vale, pues, la siguiente relación:

$$S_i^2 \cdot a_i = S_j^2 \cdot a_j$$

$$S_i = S_j \cdot \left(\frac{a_j}{a_i} \right)^{1/2}$$

Igualmente:

$$C_i \% = C_j \% \cdot \left(\frac{a_j}{a_i} \right)^{1/2} \quad (3-33)$$

En un bosque aleatorio, conociendo la variabilidad para un cierto tamaño de parcelas, es posible determinar la variabilidad correspondiente a cualquier otro tamaño.

medición de rodales

Ejemplo:

Empleando parcelas de 500 m², el coeficiente de variación es de 25%. Para parcelas de 1000 m², el coeficiente de variación es el siguiente:

$$C\% = 25 \cdot \left(\frac{500}{1000} \right)^{1/2} = 17.7\%$$

La expresión (3-33) se puede transformar en la siguiente:

$$C_i \% = (C_j \% \cdot a_j^{-k}) a_i^k \quad (3-34)$$

o más simplemente:

$$C_i \% = b \cdot a_i^k \quad (3-35)$$

Donde

b = constante que es función de cualquier tamaño de parcela por su correspondiente coeficiente de variación

k = exponente que vale -1/2 para un bosque aleatorio

ZEIDE (1980) analiza varios casos, concluyendo que la relación propuesta por FREESE (1961), similar a (3-34), con $k = -1/4$, resulta adecuada para un gran número de bosques estudiados.

El Cuadro 3-4 resume algunas experiencias, observándose grandes diferencias en la relación entre tamaño de parcelas y variabilidad.

Se puede observar una clara relación entre el coeficiente k y la estructura del bosque. Bosques homogéneos (plantaciones jóvenes) poseen valores k menores que -0.5. A medida que aumenta la heterogeneidad del bosque, k tiende a aumentar hasta llegar a valores cercanos a -0.2.

Un estudio sistemático de rodales que representen diversas estructuras tipo, probablemente permitiría desarrollar modelos de variabilidad de gran utilidad para optimizar el tamaño de las unidades muestrales.

Cuadro 3-4. Valor del exponente k en la expresión $c_i \% = ba_i^k$, para diferentes bosques

FUENTE	DESCRIPCION	VALOR k
PRODAN (1961)	Rodal maduro de abeto y <i>picea</i> (A=15 ha): Rodal experimental, Europa Central	-0.249
PRODAN (1965)	11 rodales con diferentes edades y composiciones, Europa Central	-0.527; -0.482; -0.478; -0.467; -0.427; -0.396; -0.392; -0.369; -0.246; -0.244; -0.194
COX (1971)	Poblaciones simuladas con grado creciente de agrupamiento en la distribución espacial Poblaciones 1 a 3 son uniformes, 4 y 5 son aleatorias	1. -0.849; 2. -0.761; 3. -0.577; 4. -0.547; 5. -0.457; 6. -0.451; 7. -0.445; 8. -0.354; 9. -0.358; 10. -0.351; 11. -0.267; 12. -0.192
LOETSCH <i>et al.</i> (1973)	Douglas-fir, sobremaduro (d=114 cm)	-0.301
CABALLERO Y VILLA (1970)	Varios rodales naturales de <i>Pinus</i> y <i>Quercus</i> , México	-0.255 > k > -0.379
TARDIF (1964)	Bosque mixto, Balsam-fir y White Birch, Quebec, Canadá	-0.271
GAMBILL <i>et al.</i> (1985)	Latifoliadas, 55-60 años, Apalaches - Madera pulpable - Madera aserrable	-0.139 > k > -0.217 -0.331 > k > -0.361
AGUIRRE (1984)	<i>Pinus cooperi</i> y <i>Pinus leiophylla</i> Edad 50 años, M=15 cm - Sin raleo - Con raleo	k = -0.336 k = -0.523

En el Cuadro 3-5 se muestra una serie de tamaños de parcelas y su correspondiente variabilidad, presentada por LOETSCH *et al.* (1973) y adoptada de JOHNSON e HIXON (1952). Se trata de un bosque sobremaduro de pino Oregón, cuyo diámetro medio es de 114 cm.

Empleando el modelo (3-35), se determinó para el bosque un coeficiente $k = -0.301$.

En base a las parcelas de 0.04 ha y su variabilidad real, se estimó la variabilidad, empleando el coeficiente k local (-0.301) y el supuesto de bosque aleatorio ($k = -0.5$).

Puede observarse que el empleo del coeficiente local proporciona estimaciones bastante cercanas a la variabilidad real correspondiente a otros tamaños de parcelas, mientras que la aproximación de bosque aleatorio genera estimaciones muy diferentes de los valores reales.

Cuadro 3-5. Coeficientes de variación (%) reales y estimados para diferentes tamaños de parcelas. Bosque presentado por LOETSCH *et al.* (1973:333)

Tamaño de parcela a, ha	C% real	Coeficiente de variación estimado	
		K = -0.301	Bosque aleatorio K = -0.5
0.01	139.0	113.2	149.2
0.02	96.1	91.9	105.5
0.04	74.6	74.6	74.6
0.16	48.8	49.1	37.3
0.32	42.3	39.9	26.4
0.64	39.4	32.4	18.6

III.1.4 Unidades muestrales en el borde del rodal

En las ilustraciones a) y b) de la Figura 3-13 se observan dos árboles rodeados de un anillo, que representa el área favorable a su selección (área crítica) desde puntos de muestreo localizados al azar. Se observan también dos puntos de muestreo (x_1 y x_2), ambos incluidos dentro del anillo de selección correspondiente al árbol 1. Ambos árboles poseen áreas críticas de igual radio ro .

La probabilidad de seleccionar los árboles 1 y 2 es:

$$p_1 = \frac{\pi ro^2 - U}{A}; p_2 = \frac{\pi ro^2}{A}$$

Esta diferencia en la probabilidad de selección se debe a que el árbol 1 se encuentra cercano al borde del rodal (árbol-borde), de modo que la parte de su área crítica que cae fuera del rodal U no es efectiva.

Los árboles-borde se diferencian, además, de los restantes árboles en su forma y dimensión, debido a que su desarrollo está influido por factores diferentes.

Si se realiza una selección probabilística de árboles desde puntos de muestreo ubicados cerca del límite, sin tomar en cuenta la alteración probabilística que se produce en los árboles-borde, se genera un sesgo negativo o subestimación (DE VRIES 1986).

Una forma de eliminar este sesgo consiste en aplicar el método llamado de reflexión (SCHMID 1969, 1982).

Este método sugiere proyectar el área de selección del árbol que cae fuera del rodal hacia el interior (área achurada en el árbol 1 de la Figura 3-14) y considerar para esta área el doble de probabilidad de selección, con lo cual se obtiene para los árboles-borde la misma

probabilidad que para los restantes árboles. En la práctica, esta probabilidad duplicada se manifiesta en que si un punto de muestreo cae en el área achurada, el árbol se cuenta dos veces.

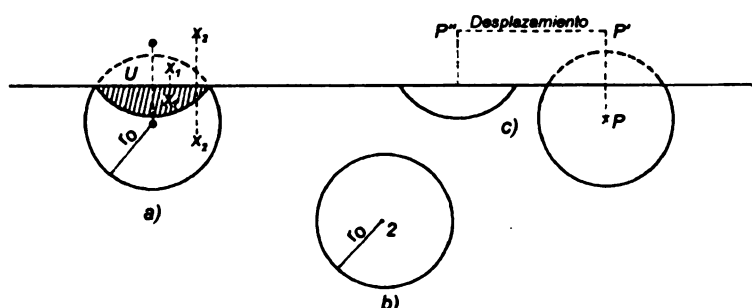


Figura 3-13. Inclusión de árboles cercanos al borde del rodal en unidades muestrales: método de reflexión con y sin desplazamiento

Para ejecutar en terreno un muestreo con reflexión, es preciso generar para cada punto de muestreo x_i cercano al borde, un punto exterior x'_i , equidistante del borde y en dirección perpendicular, desde el cual se cuentan por segunda vez los árboles que cumplen con la condición de selección. En la ilustración a) de la Figura 3-13, el árbol 1 sería contado dos veces en el punto de muestreo x_1 , no así en el punto de muestreo x_2 , donde sería contado una sola vez.

A medida que el punto de muestreo cae en un lugar más próximo al borde, aumenta la probabilidad de que los árboles-borde sean contados dos veces. En el caso extremo, cuando el punto cae exactamente en el borde, todos los árboles, sin excepción, son contados dos veces.

Una mayor eficiencia muestral se logra al desplazar el segmento reflejado fuera de la parcela, como se muestra en la ilustración c) de la Figura 3-13.

SCHMID (1969) estudió otras opciones de muestreo en los bordes, que se presentan en la Figura 3-14. Si bien todos ellos son sesgados, algunos como el procedimiento *d* reducen los sesgos a valores que pueden ser insignificantes.

Las ilustraciones a-d de la Figura 3-15 muestran diversas situaciones resueltas satisfactoriamente mediante el método de reflexión, a pesar de que se generan áreas donde la probabilidad de selección se duplica o triplica y donde el punto de muestreo debe proyectarse dos y hasta tres veces hacia afuera del rodal (SCHMID 1982). Las situaciones e) y f), en cambio, no permiten una reflexión adecuada.

SMALTSCHINSKI (1990), empleando información del inventario nacional alemán, comparó el método de reflexión de SCHMID con un procedimiento propuesto por BEERS (1966), basado en el empleo de un estimador de razón, donde se pondera cada árbol-borde incluido en

la muestra mediante el cuociente: superficie nominal del área de selección (πr_o^2), dividido por la superficie del área de selección realmente incluida dentro del rodal.

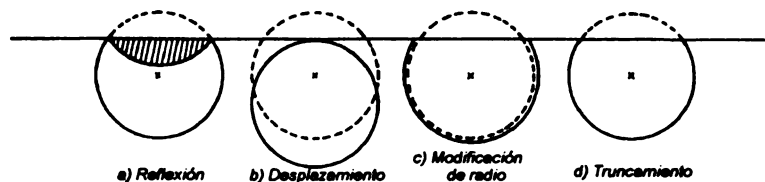


Figura 3-14. Diferentes procedimientos para unidades muestrales cercanas al límite del bosque

Considerando todos los puntos de muestreo con árboles-borde en los cuales el método de reflexión era factible, SMALTSCHINSKI comprobó que el método de reflexión subestimaba con respecto al método de estimadores de razón. Este resultado coincide en parte con lo observado por SCHMID, ya que el procedimiento llamado de BEERS es el mismo aplicado por SCHMID en el caso de la ilustración d) de la Figura 3-14, para el cual se comprobaron pequeños sesgos.

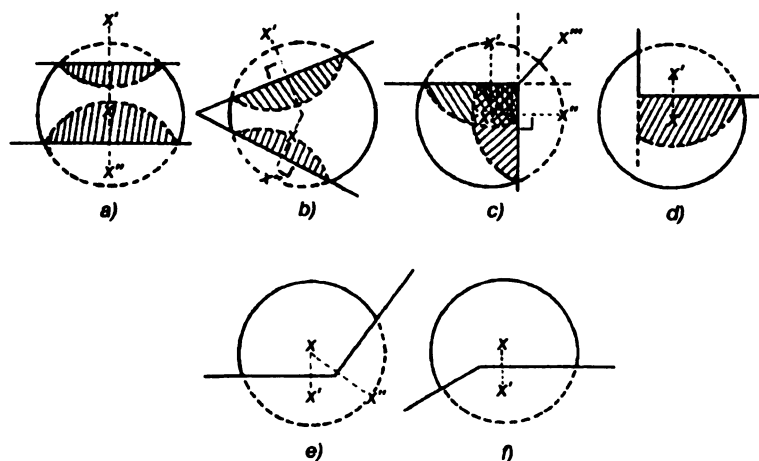


Figura 3-15. Aplicación del método de reflexión a diversas situaciones de borde

III.1.5 Unidades muestrales en conglomerados

En muchas ocasiones resulta conveniente muestrear en inventarios forestales con parcelas de terreno formando conglomerados, en lugar de distribuir las uniformemente sobre la población.

Los conglomerados pueden generarse a partir de diferentes procesos:

- a) Por concentración de unidades muestrales: La población se divide en bloques y las unidades muestrales se localizan sólo en una muestra (aleatoria) de los bloques.
- b) Por desagregación de unidades muestrales de gran tamaño: En ciertas ocasiones, cuando los costos de acceso a puntos de localización de unidades muestrales son muy altos en relación con los costos de medición en dichos puntos, el tamaño óptimo de las unidades muestrales puede ser muy grande. Sin embargo, por razones estadísticas y operacionales, en lugar de una gran parcela, es preferible emplear pequeñas parcelas distribuidas en torno al punto de muestreo, conforme a una geometría regular, como se muestra en la Figura 3-16.

Si es factible que los conglomerados se superpongan, el número posible de unidades muestrales es infinito. En la mayoría de los casos, sin embargo, su número es indeterminado.

Los diseños muestrales como los de la Figura 3-23 (pág. 247) se denominan muestreo por conglomerados bietápico MCB (ver sección III.2.7). Cada parcela en estos diseños se localiza aleatoriamente dentro de un bloque y es una unidad muestral independiente.

Los diseños presentados en la Figura 3-16 se denominan muestreo por conglomerados sistemáticos (MCS). Algunos autores, como DE VRIES (1986), lo denominan muestreo por conglomerados monoetápico. Sin embargo, esta denominación resulta confusa, pues otros autores, como RAJ (1968) y COCHRAN (1977), han designado con el mismo nombre diseños diferentes. Para estimar los parámetros poblacionales, se asume un muestreo aleatorio simple (MAS) (ver sección III.2.2) cuando los conglomerados son todos de igual tamaño.

Puede ocurrir que en un diseño tipo MCB la selección de la segunda etapa sea sistemática en lugar de aleatoria (Figura 3-23, ilustr. c, e, f, g, h). En este caso pueden emplearse también los estimadores MCB, asumiendo que las unidades dentro de los bloques se ordenan al azar, en cuyo caso es indiferente si la selección en la segunda etapa es aleatoria o sistemática.

Ciertos tipos de conglomerados sistemáticos, como los de la Figura 3-16 (ilustr. 2, 3 y 5), pueden asimilarse a un MCB con selección sistemática en la segunda etapa. Cada conglomerado puede dar origen a un bloque de cierto tamaño c , de modo que la población se compone de un número finito de $N = A / c$ bloques, perfectamente identificables, cada uno integrado por $M = c / a$ unidades muestrales.

Algunos estudios basados en simulación, como los de KORHONEN y PÄIVINEN (1990), han comprobado que al emplear estimadores MAS para muestreo por conglomerados sistemáticos, se puede producir una subestimación del error muestral.

Cuando los conglomerados sistemáticos son de tamaño variable, o cuando éstos son grandes conglomerados de tamaño constante, como los empleados en los inventarios nacionales de Suecia

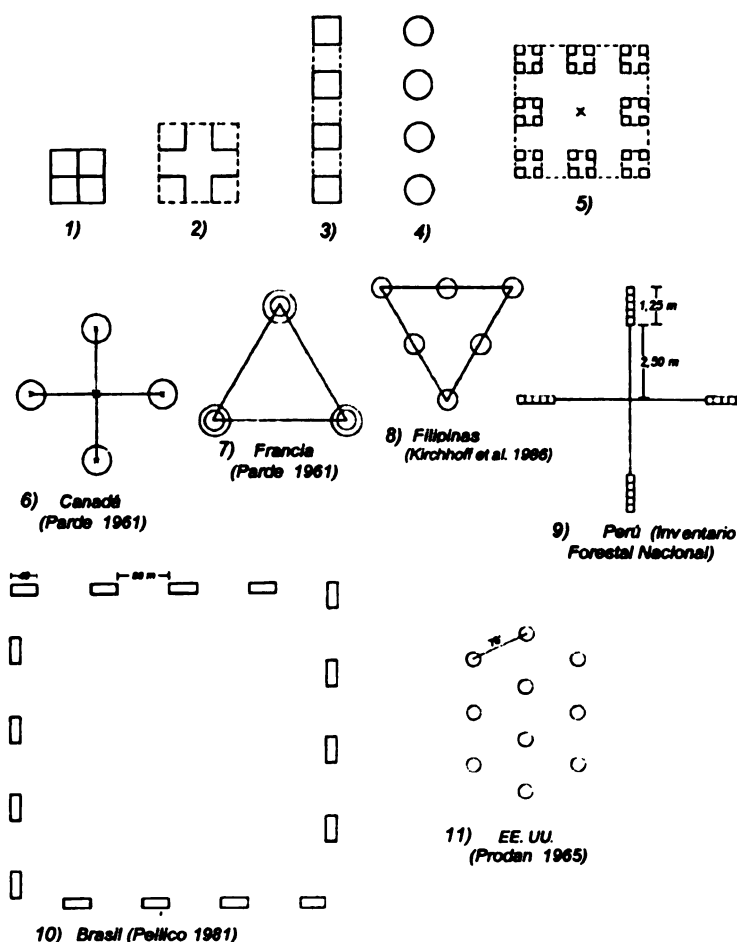


Figura 3-16. Unidades muestrales en conglomerados

(BENGTSSON 1978) o de Austria (FBVA 1981), que se fraccionan al cubrir más de un estrato, se adopta usualmente un diseño de muestreo con estimadores de razón de medias (sección III.2.5.1).

Conglomerados sistemáticos

En la Figura 3-16 se presentan varios tipos de conglomerados empleados en inventarios forestales. KIRCHHOFF *et al.* (1986) presentan numerosos otros diseños.

En un conglomerado sistemático pueden reconocerse cuatro elementos esenciales:

- Unidades de registro o parcelas: pueden ser parcelas convencionales, sistemas de parcelas concéntricas, puntos de muestreo MPH, líneas de muestreo MLH, etc.
- Número de unidades de registro UR

- Distanciamiento entre UR
- Ordenamiento geométrico de las UR

Para la determinación del número óptimo de UR en conglomerados, frecuentemente se emplean modelos de optimización basados en diseños de muestreo MCB (sección III.2.7).

DE VRIES (1986) y SCHABENBERGER (1990) emplean con el mismo fin una metodología más general, basada en el índice de correlación “intracluster”.

Estos modelos de optimización suponen que:

- a) Las funciones de rendimientos y tiempos (o de costo) son continuas dentro de un amplio rango de tamaños de conglomerados.
- b) La variabilidad entre y dentro de conglomerados es función del tamaño de la muestra, del tamaño de los conglomerados y de ciertos coeficientes (como el coeficiente de correlación intracluster) o varianzas que se asumen conocidas.

Desgraciadamente, ninguno de estos dos supuestos es válido:

Respecto al punto a), los rendimientos y costos dependen de elementos logísticos y operativos, como limitaciones de abastecimiento, longitud de jornadas y períodos de trabajo, etc., que introducen discontinuidad en las funciones.

Respecto al punto b), la variabilidad entre y dentro de conglomerados depende del tamaño de las unidades, de su distanciamiento y de su ordenamiento geométrico. Incluso la variabilidad entre y dentro de conglomerados puede variar con el número de UR.

Una mejor aproximación a la optimización de conglomerados puede lograrse con modelos de simulación, como el propuesto por KORHONEN y PÄIVINEN (1990).

Estos modelos permiten determinar los cambios en la variabilidad entre y dentro de conglomerados, al variar el tipo y tamaño de las parcelas, su número, su distanciamiento y su ordenamiento geométrico. Su mayor inconveniente radica en el costo de construcción de los modelos y en la validez meramente local de los resultados.

Con frecuencia, los conglomerados se diseñan eligiendo intuitivamente un cierto distanciamiento y orden geométrico, mientras que su tamaño (número de UR) se define en base al rendimiento normal de una brigada por jornada.

Cuantificación de unidades en conglomerado

Los valores descriptores de conglomerados bietápicos se presentan en la sección III.2.7. Aquí se verán los que describen conglomerados sistemáticos.

- a) Conglomerados de tamaño constante, integrados por L parcelas de superficie fija a .

El valor total de un conglomerado y_i se representa así:

$$y_i = \sum_j y_{ij} = \sum_j \sum_k^{m_j} y_{ijk} \quad (3-35)$$

Donde y_{ijk} es la dimensión del árbol k en la unidad de registro j del conglomerado i

La superficie del conglomerado es:

$$a_i = L \cdot a \quad (3-35a)$$

El valor promedio por unidad de registro es:

$$\bar{y}_i = \frac{y_i}{L} \quad (3-35b)$$

y el valor expandido al total por unidad de superficie:

$$yha_i = \frac{y_i}{a_i} = \frac{\bar{y}_i}{a} \quad (3-35c)$$

- b) Conglomerados integrados por unidades de registro, cuyo valor se expresa en términos de total por hectárea yha_i

El valor del conglomerado, expresado en valor por unidad de superficie, es el siguiente:

$$yha_i = \frac{1}{L} \sum_j yha_j \quad (3-35d)$$

III.1.6 Determinación de variables en unidades muestrales mediante submuestreo

Las variables de rodal, como número de árboles por hectárea, área basal por hectárea, volumen por hectárea, etc., se evalúan en forma puntual en las unidades muestrales y en forma global de acuerdo con los estimadores propios de cada diseño muestral. Anteriormente, en esta sección se ha visto cómo se determinan los valores puntuales de cualquier variable Yha , cuando el atributo es de interés y se mide en todos los árboles de la unidad (3-9):

$$Y_{ha} = \sum_j^m y_j F_j$$

Donde F_j es un factor de expansión para el árbol j , cuyo valor depende del tipo de unidad muestral.

Muchas veces la variable y se mide, por conveniencia, en sólo una muestra de los árboles incluidos en la unidad.

Los estimadores por submuestreo se construyen en base a la combinación de dos elementos: un plan de submuestreo y un estimador.

Plan de submuestreo

O. GARCIA (1992) emplea cuatro planes para seleccionar la submuestra:

- Selección aleatoria simple (SRS)
- Estratificación con selección aleatoria (STR)
- Selección sistemática con probabilidad proporcional a la predicción (SP)
- Selección sistemática sobre lista ordenada, con probabilidad variable (OSP)

Selección aleatoria simple (SRS)

Se selecciona al azar una muestra de ℓ individuos entre m . En los ℓ individuos seleccionados, se mide el atributo y , y eventualmente también un atributo auxiliar z . La probabilidad de seleccionar cada árbol es constante:

$$\pi_j = \ell / m$$

Estratificación con selección aleatoria (STR)

Los m árboles de la parcela se agrupan en clases o estratos, de modo que los valores agregados de una variable auxiliar z son aproximadamente los mismos en cada estrato. Para maximizar la eficacia se elige un árbol en cada estrato. El número de estratos es, en consecuencia, ℓ .

El procedimiento es el siguiente:

- Se ordenan los m árboles de la unidad en orden creciente de z y se acumulan sus valores. El rango de los z acumulados se divide en clases de igual amplitud Z / ℓ . El número de árboles en cada estrato h es $m h$.

medición de rodales

- Todos los árboles cuyo z_j es mayor que Z / ℓ son puestos en una lista aparte, que es censada.
- Se selecciona uno de mh árboles en cada estrato, al azar, con probabilidad de selección constante.

La probabilidad de seleccionar un árbol cualquiera varía en cada estrato:

$$\pi_j = 1 / mh$$

Selección sistemática con probabilidad proporcional a la predicción (SP)

Hay varias formas de selección con probabilidad variable: PPS, PPP, sistemático sobre una lista acumulada de z , etc. Los procedimientos se describen en las secciones III.2.9.1 (Muestreo de lista a priori-PPS) y III.2.9.2 (Muestreo de lista a posteriori-PPP). El procedimiento para el último es el siguiente:

- Se produce una lista acumulada de z .
- Se determina un intervalo $L = Z / \ell = \sum^m z_j / \ell$.
- Los árboles cuyo $z_j > L$ son asignados a un estrato que es censado.
- Se selecciona al azar un valor s en el rango $0 - L$.
- Los primeros árboles en la lista cuyos valores acumulados exceden a s , $s + L$, $s + 2L$, etc. son seleccionados.

La probabilidad de seleccionar un árbol es:

$$\pi_j = \ell z_j / Z$$

Selección sistemática sobre lista ordenada, con probabilidad variable (OSP)

El procedimiento es igual al anterior, excepto que los árboles son ordenados en orden creciente de z_j .

$$\pi_j = \ell z_j / Z$$

Estimadores

El valor Y_{ha} (estimación puntual de Y / A) se puede determinar con estimadores como los siguientes (ver expresión 3-9):

- a) Estimador insesgado de varianza mínima (MVU):

$$Yha = \sum_{j=1}^{\ell} y_j F'_j$$

$$\text{Donde } F'_j = F_j / \pi_j$$

- b) Estimador de razón (RAT):

$$Yha = Zha \cdot \sum_{j=1}^{\ell} y_j F'_j / \sum_{j=1}^{\ell} z_j F'_j$$

$$\text{Donde } Zha = \sum_{j=1}^m z_j F_j, \text{ según expresión (3-9)}$$

- c) Estimador de regresión (REG):

$$Yha = \left(\bar{y} + b(\bar{Z} - \bar{z}) \right) \cdot \sum_{j=1}^m F_j$$

Donde

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^{\ell} y_j F'_j / \sum_{j=1}^{\ell} F'_j$$

$$\bar{z} = \sum_{j=1}^{\ell} z_j F'_j / \sum_{j=1}^{\ell} F'_j$$

$$\bar{Z} = \sum_{j=1}^m z_j F_j / \sum_{j=1}^m F_j$$

$$b = \frac{\sum_{j=1}^{\ell} (z_j - \bar{z})(y_j - \bar{y}) \cdot F'_j}{\sum_{j=1}^{\ell} (z_j - \bar{z})^2 F'_j}$$

Ejemplo:

El Cuadro 3-6 presenta la información recogida en una parcela (unidad muestral) de 400 m², con m = 41 árboles, en un rodal de pino insignie de 20 años. Sobre esta unidad muestral se ha seleccionado una submuestra de tamaño $\ell = 6$, empleando los cuatro planes de muestreo descritos, y se ha estimado el volumen por unidad de superficie Yha para cada muestra, empleando los estimadores MVU, RAT y REG. Antes de efectuar las selecciones STR y OSP, fue preciso ordenar la población de acuerdo con la variable auxiliar, que en este caso es el diámetro al cuadrado. Las selecciones SRS y SP se efectuaron antes de ordenar la población.

medición de rodales

Cuadro 3-6. Datos de una unidad muestral de 400 m² de superficie, en un rodal de pino insigne de 20 años, ordenados según diámetro

N	Diámetro (d), cm	Altura (h), m	d ² (zj)	Z.acumu.	Volumen (yj), m ³	Selección			
						SRS	STR	SP	OSP
1	10	14.0	100	100	0.031				
2	11	17.0	121	221	0.051	*			
3	11	13.6	121	342	0.038				*
4	15	18.0	225	567	0.113	*			
5	15	17.4	225	792	0.109				
6	15	17.4	225	1017	0.109		*		
7	17	21.2	289	1306	0.178	*		*	
8	17	19.0	289	1595	0.158				
9	17	18.3	289	1884	0.152				
10	17	18.0	289	2173	0.149				
11	18	21.0	324	2497	0.199				
12	18	22.2	324	2821	0.211				
13	19	21.5	361	3182	0.229				
14	19	21.8	361	3543	0.233	*			
15	19	23.2	361	3904	0.248				
16	20	18.0	400	4304	0.212		*		*
17	20	18.0	400	4704	0.212				
18	21	21.1	441	5145	0.277				
19	21	21.8	441	5586	0.287				
20	21	22.0	441	6027	0.290	*			
21	22	24.1	484	6511	0.351				
22	22	22.0	484	6995	0.319	*			
23	24	24.5	576	7571	0.427				
24	24	24.4	576	8147	0.422				*
25	25	26.0	625	8772	0.494				
26	25	26.0	625	9397	0.494		*		
27	26	25.3	676	10073	0.521				
28	26	23.3	676	10749	0.478				
29	27	28.1	729	11472	0.626				
30	27	24.7	729	12207	0.549				*
31	27	25.3	729	12936	0.563				
32	28	24.0	784	13720	0.574		*		
33	29	28.0	841	14561	0.722			*	
34	29	28.0	841	15402	0.722			*	
35	29	23.9	841	16243	0.614			*	*
36	31	28.0	961	17204	0.827				
37	32	29.5	1024	18228	0.930		*	*	
38	32	31.0	1024	19252	0.977			*	
39	34	24.9	1156	20408	0.885				*
40	35	27.9	1225	21633	1.053		*		
41	38	29.0	1444	23077	1.294				

El Cuadro 3-7 presenta el resultado de aplicar los tres estimadores sobre las cuatro selecciones muestrales.

Los valores yha estimados por submuestreo mediante las diferentes combinaciones de planes de muestreo y estimadores (ejemplo: para SRS - MVU $\hat{Yha} = 202.3$, etc.) comparan con el valor censal de la parcela = 433.2 $[m^3 / ha]$.

$$\sum^m z_j = 23077; \sum^m y_j = 17.328; \bar{Z} = 562.85; \bar{Y} = 0.4226$$

$$F_j = \text{constante} = \frac{1}{0.04} = 25$$

$$\sum^m F_j = Nha = 1025; \sum^m y_j F_j = Yha = 433.2$$

$$\sum^m z_j F_j = Zha = 576925; \bar{Z} = \frac{Zha}{Nha} = 562.854$$

Cuadro 3-7. Estimación de volumen por submuestreo en una unidad muestral del Cuadro 3-6: empleo de planes de muestreo SRS, STR, SP y OSP y estimadores MVU, RAT y REG

j	SRS			STR			SP			OSP		
	yj	zj	F'j	yj	zj	F'j	yj	zj	F'j	yj	zj	F'j
1	0.113	225	170.84	0.109	225	375.000	0.722	841	114.33	0.038	121	794.66
2	0.051	121	170.84	0.212	400	200.000	0.722	841	114.33	0.212	400	240.38
3	0.233	361	170.84	0.494	625	150.000	0.930	1024	93.90	0.422	576	166.93
4	0.319	484	170.84	0.574	784	125.000	0.178	289	332.71	0.549	729	131.90
5	0.178	289	170.84	0.930	1024	100.000	0.614	841	114.33	0.614	841	114.33
6	0.290	441	170.84	1.053	1225	75.000	0.977	1024	93.90	0.885	1156	83.18

$$\sum^t y_j F_j' = 202.27 \quad 401.1 \quad 473.58 \quad 367.83$$

$$\sum^t z_j F_j' = 328183.64 \quad 550440 \quad 576914.98 \quad 576917.9$$

$$\sum^t F_j' = 1025.0 \quad 1025.0 \quad 863.5 \quad 1531.4$$

medición de rodales

$F_j \cdot \frac{1}{.04} \cdot \frac{m}{\ell}$	$\frac{mh}{0.04}$	$\frac{Z}{.04 \cdot \ell \cdot z_j}$	$\frac{Z}{.04 \cdot \ell \cdot z_j}$
<i>MVU Yha</i> = 202.3	401.1	473.58	367.83
<i>RAT Yha</i> = 355.6	420.3	473.58	367.83
<i>REG Yha</i> = 390.8	426.9	454.1	402.3
$\bar{z} = 320.18$	536.976	668.112	376.726
$\bar{y} = 0.1973$	0.3913	0.5484	0.2402
$b = 0.00075815$	0.0009728	0.0010012	0.00081840
$\bar{Z} = 562.854$	562.854	562.854	562.854

III.1.7 Determinación del valor promedio de atributos en unidades muestrales

a) Promedio de todos los árboles

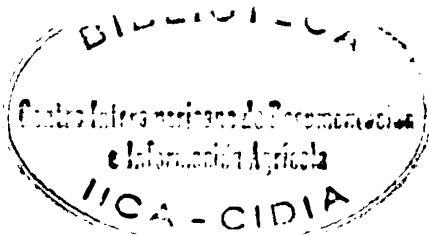
Una expresión general para el promedio aritmético del atributo y de los árboles de un rodal es la siguiente:

$$\hat{\bar{Y}} = \frac{\hat{Y}_{ha}}{\hat{N}_{ha}}$$

Donde $\hat{Y}_{ha}$ y $\hat{N}_{ha}$ son estimaciones puntuales (o globales) del total y del número de árboles por unidad de superficie.

En el caso de unidades muestrales consistentes en parcelas de tamaño constante, la expresión se simplifica, puesto que el factor de expansión es igual para todos los árboles:

$$\hat{\bar{Y}} = \sum^m y_j / m$$



b) Promedios de los N árboles más grandes por unidad de superficie

A diferencia de la altura media de todos los árboles, los valores esperados de variables de rodal, como la altura o el diámetro promedio de los N árboles de mayor diámetro por hectárea (H_N, D_N), varían con el tamaño de las unidades muestrales y la distribución espacial de los árboles.

El siguiente ejemplo lo demuestra (RENNOLLS 1978):

Considérese un rodal de una hectárea, donde se precisa estimar la altura promedio de los 100 árboles más gruesos. Para ello se divide el rodal en 100 unidades (parcelas) de 0.01 ha (100 m²). Cada unidad contendrá un número variable de árboles correspondientes a los 100 más gruesos. La esperanza es que cada unidad contenga un árbol, pero habrá parcelas que contengan 0, 1 ó 2 árboles de entre los 100 más gruesos, en cantidades que dependen de la distribución espacial de los árboles.

Las parcelas que contengan un árbol de los 100 más gruesos proporcionarán una estimación insesgada de H_{100} . En cambio, las parcelas que contengan cero (0) árboles generarán un sesgo negativo y las que contengan 2 ó más, un sesgo positivo. Los sesgos pueden compensarse o no, dependiendo de la forma de la distribución espacial.

Es recomendable emplear un tamaño estandarizado de parcelas donde se seleccionen los m' árboles que se promediarán para calcular H_N ($m' = N \cdot a$, donde a es el tamaño de la parcela en hectáreas).

Ejemplo:

Para determinar H_{100} con parcelas de 300 m² (0.03 ha), el número de árboles más gruesos que se promedia es:

$$m' = 100 \cdot 0.03 = 3 \text{ árboles}$$

MATERN (1976) propone medir los 10 árboles más gruesos en parcelas de 1000 m² para determinar H_{100} .

Estudios citados por RENNOLLS (1978) sugieren el empleo de parcelas mucho más pequeñas. El mismo RENNOLLS propone como definición de altura predominante el promedio de las alturas medidas en una muestra aleatoria de parcelas no vacías de 100 m² de superficie.

III.2 DISEÑOS MUESTRALES

III.2.1 Generalidades

El propósito de este capítulo es servir de referencia a profesionales y estudiantes para la comprensión y empleo de los principales diseños muestrales usados en inventarios forestales.

Este texto debe complementarse con otros especializados, donde se describe detalladamente el origen y desarrollo de los estimadores y de sus varianzas. Con este fin, se sugieren textos como RAJ (1968), COCHRAN (1977) y DE VRIES (1986).

III.2.1.1 Estadística de poblaciones

Una población es un conjunto de individuos o unidades de la misma naturaleza. Cada individuo es definido por uno o más atributos o variables.

Una población forestal puede ser cualquier superficie arbolada.

En inventarios forestales, las poblaciones se llaman **unidades de inventario**. Cada unidad de inventario está integrada por uno o más rodales que se describen mediante un conjunto único de parámetros.

Las poblaciones forestales están integradas por individuos cuya naturaleza y número depende de cómo ellos se definen (ver sección III.1). El atributo y_i de un individuo cualquiera puede corresponder a:

- a) La dimensión y de un árbol i , si cada árbol de la población es un individuo (y = diámetro, altura, volumen, etc.). Su número es finito.
- b) El valor agregado de la dimensión y de todos los m árboles incluidos en una parcela de superficie fija a . Su número N es finito.

$$y_i = \sum_{j=1}^m y_j ; \quad N = A / a$$

- c) El valor agregado de la dimensión de cada árbol incluido en una unidad probabilística de tipo flotante (ver sección III.1.1), expandido a valores totales por unidad de superficie. Su número es infinito o indeterminado.

$$y_i = \sum_{j=1}^m y_j F_j = Y h a_i$$

- d) Otros.

En la Figura 3-1 del capítulo III.1 se presenta una población de juego, correspondiente a una superficie arbolada de forma cuadrada de 40 hectáreas.

La población se compone de 400 parcelas cuadradas (individuos) de 0.1 ha de superficie cada una. El valor y_i registrado de cada celdilla o parcela corresponde a la suma del volumen de todos los árboles incluidos en ella, expresado en décimos de m³. El mismo valor puede

interpretarse como el valor expandido a total por ha (m^3/ha), dado que el factor de expansión es:

$$F_j = F = 1 / a_0 = 1 / 0.1 = 10$$

Parámetros de posición o de estado

Las poblaciones finitas se describen mediante parámetros tales como:

- total poblacional: $Y = \sum_{i=1}^N y_i$ (3-36)

- promedio poblacional: $\bar{Y} = \sum_{i=1}^N y_i / N = Y / N$ (3-37)

- cociente entre totales o promedios: $R = Y / Z = \bar{Y} / \bar{Z}$ (3-38)

En poblaciones con un número infinito de individuos que poseen atributos y , se emplea como parámetro poblacional de estado la esperanza de y .

Por ejemplo, para la variable llamada Yha_i , que se genera al distribuir unidades probabilísticas flotantes en números teóricamente infinitos sobre una población de M árboles, cada uno de dimensión y_j que se distribuyen sobre A hectáreas, se tiene el siguiente parámetro poblacional de estado:

$$E[Yha_i] = Y / A = \sum_{j=1}^M y_j / A$$

Esta expresión se denomina total por unidad de superficie y es la más corrientemente usada como parámetro de estado en poblaciones forestales (ver sección III.1.1).

Parámetros de dispersión o de variabilidad poblacional

El parámetro de variabilidad poblacional más usado es la varianza. Para individuos que poseen un atributo y y que integran una población cualquiera, la varianza de y se expresa así:

$$V(y) = E[y - E[y]]^2 \quad (3-39)$$

En poblaciones finitas, la varianza puede expresarse como:

$$V(y) = \sigma y^2 = \sum (y - \bar{Y})^2 / N = \left[\sum y^2 - \left(\sum y \right)^2 / N \right] / N \quad (3-40)$$

Muchas veces se emplea la llamada varianza corregida como expresión de varianza en poblaciones finitas:

$$Sy^2 = \sigma y^2 \frac{N}{N-1} = \sum (y - \bar{Y})^2 / (N-1) \quad (3-41)$$

La variabilidad entre individuos de la población también se expresa en forma relativa, mediante el coeficiente de variación:

$$CV(y)\% = \sqrt{V(y)} / E[y] \cdot 100 \quad (3-42)$$

o también:

$$C\% = \sigma \% = \frac{\sigma y}{\bar{Y}} \cdot 100 \quad (3-43)$$

$$S\% = \frac{Sy}{\bar{Y}} \cdot 100 \quad (3-44)$$

En poblaciones donde los individuos poseen dos atributos, y y z , la variabilidad conjunta de ambos atributos se expresa mediante la covarianza:

$$COV(y, z) = E[(y - E[y])(z - E[z])] \quad (3-45)$$

En el caso de poblaciones finitas:

$$COV(y, z) = \sigma yz = \left[\sum (y - \bar{Y})(z - \bar{Z}) \right] / N \quad (3-46)$$

El Cuadro 3-9 presenta los parámetros descritos, para la población I (Figura 3-1, pág. 152).

Cuadro 3-9. Parámetros de estado y de variabilidad para la población I

Parámetro	Símb.	Expresión	Valor
Promedio	$\bar{Y}$	3-37	$(13.0+15.3+...+1.2)/400$ 13.6425 m ³
Total	Y	3-36	$(13.0+15.3+...+1.2)=400 \cdot 13.6425$ 5457 m ³
Total por ha	Yha	Y / A	$(13.0+...+1.2)/40=5457/40$ 136.425 m ³ /ha
Varianza	σy^2	3-40	$[(13.0^2+...+1.2^2)-(13.0+...+1.2)^2/400]/400$ 66.598
V. corregida	Sy^2	3-41	$66.598 \cdot (400/399)$ 66.765
Coef. de variación, %	$C\%$	3-42	$(\sqrt{66.598} / 13.6425)100$ 59.82%

III.2.1.2 Descripción muestral de poblaciones: estimaciones

Los parámetros que describen el estado de poblaciones forestales son determinados casi siempre en base a muestras que incluyen un pequeño número de los individuos de la población, seleccionados de manera que la representen adecuadamente. De esta manera, los parámetros no son determinados sino estimados y las expresiones empleadas se denominan estimadores.

Cada muestra diferente producirá una estimación también diferente. La cantidad de distintas muestras que pueden seleccionarse de una población es prácticamente infinita, aun cuando la población sea pequeña.

Ejemplo:

Para la población I, si el muestreo es sin reposición, la cantidad de posibles muestras (diferentes) de 30 individuos seleccionados entre 400 es:

$${}_{400}C_{30} = 400! / (30! \cdot (400-30)!) = 1.42 \cdot 10^{45}$$

Si se denomina $\hat{Y}$ a un estimador del total poblacional Y , construido en base a una muestra, la expresión:

$$Y = \hat{Y}$$

significa que el total poblacional Y es estimado insesgadamente mediante el estimador $\hat{Y}$.

Esto implica que la esperanza del estimador $\hat{Y}$ es igual al total poblacional.

$$E[\hat{Y}] = Y$$

Si se expresara, en cambio, lo siguiente:

$$Y = \hat{Y}$$

significaría que $\hat{Y}$ es un buen estimador del total Y , pero no necesariamente insesgado.

La variabilidad de un estimador se expresa mediante su varianza:

$$V(\hat{Y}) = E\left[\hat{Y} - E[\hat{Y}]\right]^2 \quad (3-47)$$

Como medida del error con que $\hat{Y}$ estima a Y se emplea, en cambio, el error cuadrático medio:

$$ECM(\hat{Y}) = E\left[\hat{Y} - Y\right]^2 = V(\hat{Y}) + B(\hat{Y})^2 \quad (3-48)$$

Donde $B(\hat{Y})$ es el llamado sesgo del estimador $\hat{Y}$.

Si un estimador es insesgado, entonces la varianza del estimador es al mismo tiempo medida del error de estimación:

$$ECM(\hat{Y}) = E\left[\hat{Y} - Y\right]^2 = E\left[\hat{Y} - E[\hat{Y}]\right]^2 = V(\hat{Y})$$

Esto ocurre por ejemplo en el muestreo aleatorio simple (sección III.2.2), donde la media muestral es un estimador insesgado de la media poblacional, de manera que el llamado error típico de la media $S_{\bar{y}}^2$ es al mismo tiempo medida de variabilidad de las medias muestrales y medida del error con que $\bar{y}$ estima a $\bar{Y}$.

La variabilidad de cualquier estimador, $\hat{Y}$, se expresa también en forma relativa mediante el coeficiente de variación:

$$CV(\hat{Y})\% = \frac{\sqrt{V(\hat{Y})}}{E[\hat{Y}]} \cdot 100 \quad (3-49)$$

El objetivo de todo diseño muestral es estimar adecuadamente los parámetros de estado de una población y el error que afecta a la estimación. En adelante se llamará genéricamente error de estimación $S\hat{Y}$ a este estimador, que corresponderá a una estimación de $V(\hat{Y})$ si es insesgado, o a una estimación de $ECM(\hat{Y})$ si es sesgado.

III.2.2 Muestreo aleatorio simple (MAS)

Usos

El MAS es el diseño básico para prácticamente todos los otros diseños muestrales. Es aplicable a la descripción muestral de cualquier población, cuya estructura permite el acceso a la muestra para todos los individuos que la integran, a los que previamente se les ha asignado una misma probabilidad de selección.

El MAS es probablemente la estrategia más ineficiente de muestreo, pero presenta la ventaja de que las estimaciones del total y promedio poblacional y sus errores serán insesgadas, siempre que las dimensiones de los individuos se determinen sin sesgo.

Su empleo es recomendable cuando ningún otro diseño muestral garantice estimaciones más eficientes e insesgadas (o con sesgos irrelevantes).

Cuando las unidades muestrales se distribuyen al azar en inventarios, usualmente se establece una distancia mínima entre parcelas, que al menos impide que sus áreas se traslapen, pero frecuentemente esta distancia supera varias veces el tamaño de las unidades muestrales.

El procedimiento de localización de las unidades muestrales se puede realizar superponiendo al plano del bosque una red sistemática de puntos distanciados conforme a la distancia mínima establecida y eligiendo n puntos al azar localizados en terreno.

Se puede emplear MAS en inventarios cuando las unidades muestrales son de tamaño constante, es decir, cuando la misma regla probabilística se aplica a todas ellas.

Cuando se emplean unidades muestrales probabilísticas de tipo flotante en inventarios, sean parcelas circulares, fajas, parcelas concéntricas, puntos MPH, etc., se usan estimadores del llamado MAS-alternativo (sección III.2.3), mientras que el MAS propiamente tal sólo es aplicable cuando se emplean parcelas convencionales de superficie fija.

En inventarios que emplean parcelas convencionales de superficie fija, es posible estimar el número total de unidades N en función del tamaño de la unidad a y de la superficie del bosque A :

$$N = \frac{A}{a}$$

Para muchos tipos de parcelas, como las circulares, esta determinación de N es inconsistente con la realidad (DE VRIES 1986). Sin embargo, ello no invalida el empleo de N .

así calculado en los estimadores propios del MAS, pues en dicho caso los estimadores MAS tradicionales para muestreo con reposición son idénticos a los alternativos.

Principios

En una población finita de N individuos, se selecciona una muestra de tamaño n , de modo que todas las posibles muestras del mismo tamaño tienen igual probabilidad de ser seleccionadas.

En la práctica, basta con seleccionar cada uno de los n individuos de una muestra en forma independiente y aleatoria para que la selección corresponda a un MAS.

Las unidades seleccionadas pueden devolverse o no antes de una nueva selección, dando origen al muestreo con o sin reposición.

Estimadores

El promedio poblacional $\bar{Y}$ es estimado insesgadamente mediante la media muestral $\bar{y}$

$$\bar{Y} \hat{=} \bar{y} = \sum^n y_i / n \quad (3-50)$$

El total poblacional es estimado, también insesgadamente, en base al siguiente estimador:

$$Y \hat{=} \hat{Y} = N \cdot \bar{y} \quad (3-50a)$$

Varianza de los estimadores

Puesto que los estimadores son insesgados, sus varianzas son también medida del error con que estiman los parámetros poblacionales:

- Para muestreo sin reposición:

$$V(\hat{\bar{Y}}) = \frac{Sy^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad (3-51)$$

- Para muestreo con reposición:

$$V(\hat{\bar{Y}}) = \frac{\sigma y^2}{n} = \frac{Sy^2}{n} \quad (3-51a)$$

Donde Sy^2 corresponde a la expresión (3-41).

El coeficiente de variación de las medias muestrales es:

$$CV(\bar{y}) = \sigma_{\bar{y}}\% = \frac{\sigma_{\bar{y}}}{\bar{Y}} 100 \quad (3-52)$$

Errores de estimación

La varianza muestral sy^2 es estimador insesgado de la varianza poblacional Sy^2 :

$$sy^2 = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2 / n}{n-1} \quad (3-53)$$

$$E[sy^2] = Sy^2$$

Se obtienen estimadores insesgados de la varianza de las medias muestrales empleando la varianza muestral:

$$V(\bar{y}) \hat{=} \hat{V}(\bar{y}) = S\bar{y}^2 = \frac{sy^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad \text{para muestreo sin reposición} \quad (3-54)$$

$$S\bar{y}^2 = \frac{sy^2}{n} \quad \text{para muestreo con reposición} \quad (3-55)$$

El coeficiente de variación estimado de las medias muestrales es:

$$S\bar{y}\% = \frac{S\bar{y}}{\bar{y}} \cdot 100 \quad (3-55a)$$

En este caso, por ser el estimador insesgado, el estimador de la varianza de $\bar{y}$ es lo mismo que el error de estimación de $\bar{Y}$, llamado $S\bar{y}$ (sección III.2.1.2).

El error de estimación del total será el siguiente:

$$S_{\hat{Y}}^2 = S_{N\bar{y}}^2 = N^2 S\bar{y}^2 = N^2 \frac{sy^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad (3-56)$$

Distribución de los estimadores

Los valores de cualquier variable tienden a distribuirse en forma característica. La Figura 3-17 presenta la distribución de frecuencias de los volúmenes por unidad muestral de la población I.

De acuerdo con el teorema central del límite, cualquiera sea la distribución de y , la media de una muestra aleatoria de n valores de y tiende a una distribución normal al crecer n . La aproximación depende de cuánto se aparta y de la normalidad.

Mediante estudios de simulación, se ha comprobado que incluso para distribuciones extremadamente alejadas de la normal, la distribución de y es muy próxima a la normal cuando n excede 50.

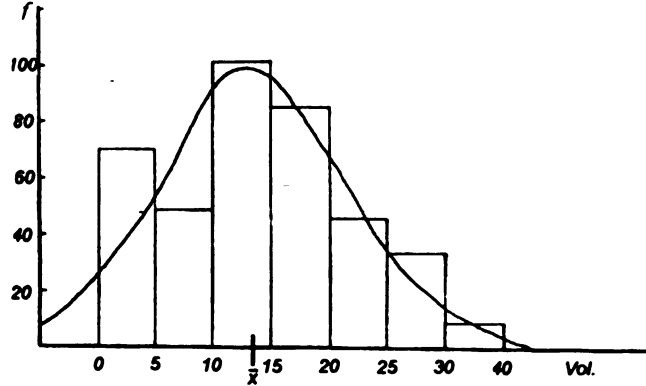


Figura 3-17. Distribución de frecuencia de volúmenes por unidad muestral en la población I (Figura 3-1)

La distribución normal

La distribución normal es simétrica, tiene forma de campana y su expresión es la siguiente:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3-57)$$

Donde μ es la esperanza de y y σ^2 su varianza. El rango de y asumido por la distribución normal varía desde $-\infty$ a ∞ . El hecho de que una variable como y se distribuya normalmente se simboliza así:

$$y \sim N(\mu, \sigma)$$

La curva de la Figura 3-17 muestra la distribución normal correspondiente a la población I, dada su esperanza (13.6425) y su varianza (66.598).

La variable y se expresa con frecuencia en una forma llamada estandarizada, que representa la desviación del valor y respecto a su esperanza, medida en unidades σ :

$$z_i = \frac{y_i - E[y]}{\sqrt{V(y)}} = \frac{y_i - \mu}{\sigma} = \frac{y_i - \bar{Y}}{\sigma} \quad (3-58)$$

Si y se distribuye normalmente, z también, con esperanza = 0 y varianza = 1.

Las ilustraciones a) y b) de la Figura 3-18 presentan la distribución normal de una variable y y de la correspondiente variable z . La ilustración c) representa la probabilidad (α) de que un valor cualquiera y se desvíe de su esperanza en una magnitud mayor que la representada por un cierto valor z .

Es decir:

$$P\left(-z_{(1-\alpha/2)} < \frac{y - E[y]}{\sigma_y} < z_{(1-\alpha/2)}\right) = 1 - \alpha \quad (3-59)$$

En la figura, el valor para α es 0.05 y el valor de z para $1-\alpha/2$ es 1.96. El Cuadro 3-10 presenta valores de desviaciones máximas para diferentes probabilidades límite.

Mediante una simple manipulación algebraica de (3-59) se tiene:

$$P\left(E[y] - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_y < y < E[y] + z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_y\right) = 1 - \alpha \quad (3-60)$$

o bien:

$$P\left(y - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_y < E[y] < y + z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_y\right) = 1 - \alpha \quad (3-61)$$

Cuadro 3-10. Valores z ($1-\alpha/2$) correspondientes a diferentes probabilidades límite α

$1-\alpha$	$1-1/2\alpha$	$Z(1-\alpha/2)$	α
0.5	0.75	0.675	0.50
0.68	0.84	1.00	0.32
0.8	0.90	1.282	0.20
0.9	0.95	1.645	0.10
0.95	0.975	1.96	0.05
0.98	0.990	2.326	0.022
0.99	0.995	2.576	0.01
0.998	0.999	3.09	0.002

Ejemplo:

Para la población I, con una media de 13.6425 y una varianza de 66.598 ($\sigma = 8.16$), si ésta se distribuyera normalmente, para un $\alpha = 0.1$ (10%) y $Z_{1-\alpha/2} = 1.645$ (Cuadro 3-10), se tendría:

medición de rodales

a) Según la expresión (3-60):

$$P(13.6425 - 13.42 < y < 13.6424 + 13.42) = 0.90 = P(0.22 < y < 27.07)$$

Es decir, si y se distribuye normalmente, el 90% de las parcelas tendrá volúmenes entre 0.22 y 27.07 m³ y sólo un 10% de ellas tendrá volúmenes fuera de este rango. En la práctica, sin embargo, como la población I no se distribuye normalmente, un 14% se encuentra fuera de este rango.

b) Según la expresión (3-61):

$$P(y - 13.42 < E[y] < y + 13.42) = 0.9$$

Esta relación se interpreta como que existe sólo un 10% de probabilidad de que, si se elige un individuo cualquiera de la población, éste se desvíe de su esperanza en más de 13.42 m³.

Límites confidenciales

Si se selecciona una muestra al azar en una población cualquiera, con media $E[y]$ y varianza σy^2 , y se determina la media muestral $\bar{y}$ y su varianza ($\sigma \bar{y}^2 = \sigma y^2 / n$), la siguiente variable z tenderá a distribuirse normalmente:

$$z = \frac{\bar{y} - E[\bar{y}]}{\sigma \bar{y}} \quad (3-62)$$

Sin embargo, ni $E[\bar{y}]$ ni $\sigma \bar{y}$ (valores poblacionales) son conocidos al efectuar una estimación muestral. Se puede, en cambio, definir una variable similar a z , para la cual sólo se desconoce $E[\bar{y}]$:

$$t = \frac{\bar{y} - E[\bar{y}]}{S\bar{y}} \quad (3-62a)$$

Donde $S\bar{y}$ es el error de estimación determinado en base a la muestra seleccionada, empleando la expresión (3-54). Puesto que el estimador $\bar{y}$ es insesgado, $S\bar{y}$ es también un estimador insesgado de $\sigma \bar{y}$.

La variable t (o de Student) tiene una distribución que es específica para cada valor de $n - 1$ (grados de libertad). Ya para un valor de 3 grados de libertad ($n = 4$), t se distribuye en forma simétrica y acampanada, como la normal. Sin embargo, la distribución

es aún muy aplanada, lo que origina una alta probabilidad de valores lejanos del valor central $E[y]$.

Para t se deduce de igual manera que para z :

$$P \left(-t_{1-\alpha/2}^{n-1} < \frac{\bar{y} - E[\bar{y}]}{S_{\bar{y}}} < t_{1-\alpha/2}^{n-1} \right) = 1 - \alpha$$

Transformando y simplificando la simbología, se obtiene la expresión de límites confidenciales para un nivel de confianza $1-\alpha$:

$$P \left(\bar{y} - t S_{\bar{y}} < E[\bar{y}] < \bar{y} + t S_{\bar{y}} \right) = 1 - \alpha \quad (3-63)$$

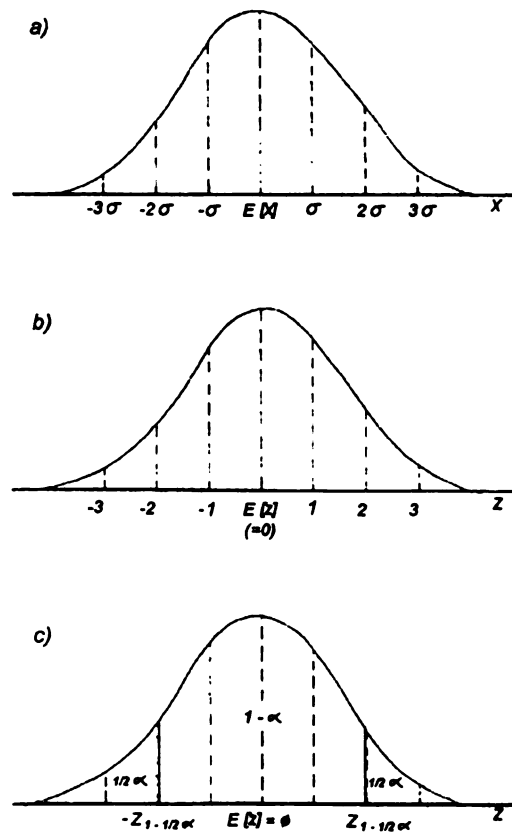


Figura 3-18. a) Distribución normal de y
b) Distribución normal de $z = (y - E(y)) / \sqrt{V(y)}$
c) Probabilidad α de un desvío z mayor que un z dado

Error muestral

A la cantidad $t(1 - \alpha / 2) \cdot S_{\bar{y}}$ se le llama error muestral (E) para un nivel de confianza $1 - \alpha$. Representa la diferencia máxima probable entre el valor real y el valor estimado:

$$E = t_{1-\alpha/2}^{n-1} \cdot S_{\bar{y}} \quad (3-64)$$

También se expresa en porcentaje:

$$E\% = 100 \cdot \frac{t S_{\bar{y}}}{\bar{y}} = \frac{100 \cdot E}{\bar{y}} \quad (3-65)$$

Ejemplo:

Los datos presentados en el Cuadro 3-11 corresponden a una muestra de $n = 30$ parcelas seleccionadas al azar en la población I (Figura 3-19).

	I					II					III					IV					
1	130	153	153	112	200	106	100	147	118	165	—	—	12	—	35	—	18	—	—	24	A
2	124	106	136	130	165	141	194	212	136	88	100	—	12	65	88	—	100	30	12	47	
3	177	165	136	124	177	106	82	177	147	165	118	82	47	6	88	12	30	—	—	24	
4	165	112	124	118	153	118	224	136	118	159	141	65	35	24	—	30	30	53	53	30	
5	100	82	118	153	147	130	130	112	88	118	147	153	88	53	71	—	—	94	47	30	
6	224	247	217	230	130	259	277	100	147	171	200	171	118	141	82	59	71	6	—	—	B
7	253	200	135	271	277	271	230	206	242	177	141	200	135	153	106	153	124	71	30	6	
8	212	277	265	212	206	171	289	259	183	247	194	277	183	165	88	106	118	136	53	71	
9	224	283	247	300	100	318	277	306	177	208	177	271	141	71	124	71	188	171	159	94	
10	100	141	265	277	306	165	253	265	271	159	236	188	300	165	147	241	118	159	82	124	
11	277	330	253	218	177	353	330	253	171	194	241	177	177	118	88	106	118	188	77	165	C
12	224	212	159	224	141	183	283	188	147	183	206	183	130	88	59	130	141	112	106	94	
13	271	318	200	271	218	253	260	200	147	259	253	77	165	242	153	194	106	224	59	141	
14	277	277	206	236	230	230	294	165	294	212	259	159	94	124	212	108	159	124	218	200	
15	130	218	65	171	165	194	171	206	312	94	153	118	171	71	136	147	88	100	153	124	
16	218	130	118	130	82	171	147	124	177	183	159	94	124	212	100	159	124	100	82	71	D
17	106	147	153	118	159	153	153	130	112	177	88	12	41	18	24	88	53	41	—	18	
18	130	200	194	100	141	165	153	147	177	194	106	35	—	18	—	—	35	30	41	35	
19	77	165	159	159	183	118	124	124	94	159	71	—	100	18	6	6	—	—	—	30	
20	188	183	177	130	94	153	47	188	112	118	18	18	—	—	—	12	—	30	59	12	
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	

Figura 3-19. Población I. 400 parcelas cuadradas de 0.1 ha, volumen en m³/ha. Muestra de 30 unidades seleccionadas al azar (LOETSCH y HALLER 1964)

Cuadro 3-11. Muestreo aleatorio simple (MAS) en la población I. Muestra de $n = 30$ parcelas, sin reposición. y = volumen por unidad muestral de 0.1 ha

	Coordenadas	yi	i	Coordenadas	yi	i	Coordenadas	yi
1	6,11 (k)	20.0	11	9,13 (m)	14.1	21	10,18 (r)	15.9
2	5,13 (m)	8.8	12	5,7 (g)	13.0	22	9,2 (b)	28.3
3	13,7 (g)	26.0	13	10,1 (a)	10.0	23	8,6 (f)	17.1
4	13,12 (l)	7.7	14	2,6 (f)	14.1	24	11,4 (d)	21.8
5	6,14 (n)	14.1	15	3,3 (c)	13.6	25	5,18 (r)	9.4
6	17,1 (a)	10.6	16	13,8 (h)	20.0	26	8,10 (j)	24.7
7	12,15 (o)	5.9	17	12,12 (l)	18.3	27	19,16 (p)	0.6
8	3,5 (e)	17.1	18	19,11 (k)	7.1	28	15,12 (l)	11.8
9	19,4 (d)	15.9	19	18,16 (p)	0.0	29	15,18 (r)	10.0
10	2,13 (m)	1.2	20	1,20 (t)	2.4	30	7,3 (c)	13.5

Cuadro 3-12. Estimaciones MAS para la población I, con una muestra aleatoria de $n = 30$ parcelas

Parámetro	Valor poblacional			Estimador		
	Símb.	Valor	Expresión	Símb.	Valor	Expresión
Promedio	$\bar{Y}$	13.6425	3-37	$\hat{\bar{Y}}$	13.100	3-50
Total	Y	5457	3-36	$\hat{Y}$	5420	3-50a
Desv. típica	S_y	8.17	3-41	s_y	7.29	3-31
Coef. variación	$S_y\%$	59.82	3-44	$s_y\%$	55.65	3-32
Variabilidad de	$\sigma_{\bar{y}}$	1.43	3-51	$S_{\bar{y}}$	1.28	3-54
medias muestrales	$\sigma_{\bar{y}}\%$	10.48	3-51a	$S_{\bar{y}}\%$	9.77	3-55a
Error muestral	E	2.92	(*)	E	2.61	3-64
	$E\%$	21.42		$E\%$	19.94	3-65

(*) $E = Z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{y}}$

Los límites confidenciales para un nivel de confianza $1-\alpha = 0.95$ son:

$$10.49 < \bar{Y} < 15.71$$

Mínima estimación confiable

En algunos inventarios forestales, conviene emplear como resultado de la estimación un valor (promedio o total) para el cual exista sólo una probabilidad α (por ejemplo, 5%) de que el verdadero valor poblacional sea aún menor que el estimado. A esta estimación se la llama mínima estimación confiable (MEC):

$$MEC = \bar{y} - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot S\bar{y} \quad (3-66)$$

El valor límite de (t) se establece de modo que exista sólo una probabilidad α de valores (t) aún menores:

$$P \left(-t_{1-\alpha}^{n-1} < \frac{\bar{y} - E[\bar{y}]}{S\bar{y}} \right) = 1 - \alpha$$

La probabilidad α se concentra en la cola izquierda de la distribución t para valores distribuidos en ambas colas. El valor de t para la MEC corresponde, entonces, al valor ordinariamente tabulado para una probabilidad de 2α .

Ejemplo:

Para la estimación con MAS, realizada sobre la población I (Cuadro 3-12), el promedio estimado es 13.100 y el error de estimación es 1.28. El valor de t , para 29 grados de libertad y un α de 5% concentrado en una cola, es 1.70. La mínima estimación confiable (MEC) para el promedio es:

$$MEC(\bar{Y}) = 13.100 - 1.70 \cdot 1.28 = 10.924 \text{ m}^3/\text{parcela}$$

Para el volumen total:

$$MEC(Y) = N \cdot MEC(\bar{Y}) = 400 \cdot 10.924 = 4369.6 \text{ m}^3$$

Tamaño de la muestra

El procedimiento para determinar el tamaño de la muestra depende del factor condicionante en el proceso de estimación. Este puede ser un marco presupuestario o un error máximo admisible.

Cuando el factor limitante son los costos, es necesario estimarlos:

- Costo fijo independiente del tamaño muestral: incluye costo de planificación y diseño, capacitación y control, procesamiento, etc. Se simboliza como C_o
- Costo de medir una unidad muestral C_i

El costo total del proceso:

$$P = C_o + n C_i$$

Para un marco presupuestario (P), el tamaño de la muestra sería:

$$n = \frac{P - C_o}{C_i} \quad (3-67)$$

Cuando el factor limitante es, en cambio, el error máximo admisible, resulta necesario estimar la variabilidad de la población, expresada en términos del coeficiente de variación (3-52):

$$C\% = \frac{S_y}{\bar{Y}} \cdot 100 = c\% = \frac{s_y}{\bar{y}} \cdot 100$$

Para estimar el tamaño muestral se despeja n en la expresión del error muestral (3-65 y 3-55):

$$E\% = t \cdot S_y / \bar{y} \cdot 100 = \frac{t \cdot 100 \cdot s_y}{\bar{y} \sqrt{n}} = \frac{t \cdot c\%}{\sqrt{n}}$$

$$n = \frac{t^2 c\%^2}{E\%^2} \quad (3-68)$$

La expresión (3-68) es una igualdad, siempre que el t empleado corresponda a los grados de libertad del n resultante. De lo contrario, es necesario reiterar el cálculo de n modificando t , las veces que sea necesario, hasta lograr la igualdad.

Cuando la muestra resulta ser grande (mayor que un 5% de la población), n debe ser ajustado:

$$n_a = n / (1 + n / N) \quad (3-69)$$

Al establecer un valor para $c\%$, debe tenerse en cuenta que su estimación en base a muestras pequeñas puede ser muy imprecisa.

GREGOIRE y BARRETT (1979) sugieren que el coeficiente de variación estimado en un premuestreo con una muestra de tamaño reducido, sea comparado con una segunda estimación, basada en la variabilidad estimada en función del rango de variación de los individuos de la población:

$$s_y \sim \frac{y_{\text{maximo}} - y_{\text{minimo}}}{4} \quad (3-70)$$

III.2.3 Estimadores MAS alternativos

Muchos tipos de unidades muestrales de las llamadas unidades muestrales probabilísticas empleadas en inventarios forestales, forman poblaciones que, en la teoría y práctica, deben considerarse de tamaño infinito o indeterminable, de manera que el modelo estimador del total poblacional correspondiente al diseño MAS no es aplicable.

Debe recordarse que las unidades muestrales llamadas probabilísticas (sección III.1.1) son capaces de generar estimaciones puntuales (Yha_i) cuya esperanza es el total poblacional por unidad de superficie:

$$E[Yha_i] = Y / A$$

En lugar de estimar ($\bar{Y}$) mediante y y expandir luego mediante N para estimar Y , el MAS alternativo estima Y / A mediante yha y luego expande mediante A para estimar Y .

Principio

Sobre una superficie de bosque de A hectáreas se distribuyen aleatoriamente n puntos de muestreo. Cualquier lugar de la población tiene la misma probabilidad de ser seleccionada como localización de un punto.

En cada punto se instala una unidad de muestreo de tipo probabilístico.

Estimadores

El total por unidad de superficie es estimado insesgadamente así:

$$Y / A \hat{=} \overline{yha} = \frac{1}{n} \sum^n Yha_i \quad (3-71)$$

Donde

Y = total poblacional correspondiente al agregado de todos los valores y de los árboles que integran una población (bosque)

Yha_i = valor determinado en un punto de muestreo i , mediante cualquier tipo de unidad muestral probabilística (capítulo III.1), empleando la expresión (3-9)

El total poblacional Y es estimado en forma igualmente insesgada, mediante el siguiente estimador:

$$Y \hat{=} \hat{Y} = A \cdot \bar{Yha} \quad (3-72)$$

Error de estimación

Asumiendo que los valores yha_i ($i = 1, \dots, n$) son variables aleatorias idénticamente distribuidas, con esperanza $E[yha_i] = Y / A$ y tienen idéntica varianza $V(yha_i) = \sigma^2$, entonces ocurrirá que:

$$E[\bar{yha}] = Y / A$$

$$V(\bar{yha}) = \sigma^2 / n$$

Un estimador insesgado de $V(\hat{Y})$ (error de estimación) es el siguiente:

$$V(\bar{yha}) \hat{=} S^2 \bar{yha} = \frac{\sum^n (yha_i - \bar{yha})^2}{n(n-1)} = \frac{s^2 yha}{n} \quad (3-73)$$

Donde

$$s^2 yha = \frac{\sum^n (yha_i - \bar{yha})^2}{(n-1)} \quad (3-74)$$

Estos estimadores son similares a los que se emplean para poblaciones infinitas.

medición de rodales

Cuando la intensidad muestral es alta y se ha establecido un distanciamiento mínimo entre puntos, el error de estimación puede resultar sobreestimado. Algunos autores recomiendan emplear un factor de corrección basado en la intensidad muestral:

$$S^2 \overline{yha} = \frac{\sum^n (yha_i - \overline{yha})^2}{n(n-1)} (1-f) \quad (3-75)$$

- El factor f para parcelas convencionales de tamaño constante es:

$$f \sim \frac{na}{A} \quad (3-76)$$

- Si se emplean unidades muestrales MPH:

$$f \sim \frac{n FAB^{-1} \overline{g}}{A} \quad (3-77)$$

Donde

$$\overline{g} = \frac{1}{n} \sum^n \sum_{mi} \frac{g_j}{m} \quad (3-78)$$

g_j = área basal del árbol j , m²
FAB = factor de área basal, como en la expresión (3-13)
 m = número de árboles en el punto de muestreo

El error de estimación se expresa también mediante el coeficiente de variación entre medias muestrales:

$$cv(\overline{yha})\% = \frac{S \overline{yha}}{\overline{yha}} \cdot 100$$

El error muestral, los límites confidenciales y la estimación del tamaño muestral se determinan en el MAS alternativo como para el MAS ordinario, con reposición.

- Límites confidenciales para un nivel de confianza $1-\alpha$ (3-63):

$$\overline{yha} - t_{1-\alpha/2}^{n-1} \cdot S \overline{yha} < Y / A < \overline{yha} + t_{1-\alpha/2}^{n-1} \cdot S \overline{yha}$$

- Error muestral (3-64):

$$E = t \cdot \overline{S_yha}$$

- Estimación del tamaño muestral (3-68):

$$n = \frac{t^2 \cdot c\%^2}{E\%^2}$$

III.2.4 Muestreo sistemático

Usos

El muestreo sistemático empleado en inventarios forestales consiste en distribuir una red de parcelas ordenadas conforme a una geometría regular, sobre el área que se quiere muestrear. Este ordenamiento puede ser en red rectangular, cuadrada o de otro tipo. La distribución se inicia localizando aleatoriamente una unidad cualquiera de la red.

El diseño preferido en inventarios forestales es la distribución sistemática de unidades muestrales. Los motivos son varios:

- En la mayoría de los casos se logra una representación más uniforme de la población.
- Es posible distribuir las unidades muestrales en terreno, aun careciendo de una representación cartográfica del bosque. La localización de las unidades es generalmente más eficiente.
- Con frecuencia resulta más eficiente que el muestreo aleatorio simple, ya que se obtiene un menor error de estimación para un mismo tamaño muestral.

Sin embargo, el uso de muestreo sistemático implica un riesgo de sesgamiento en las estimaciones, que deben evaluarse en cada ocasión. Es posible que la red sistemática coincida con algún ordenamiento también sistemático de componentes del ambiente (topografía, suelo, etc.), de manera que las diferentes condiciones ambientales (altitudes, exposición, etc.) tengan en la muestra una representación muy diferente a la real.

En la Figura 3-19a se observa una superficie muestreada con una red sistemática (cuadrada), donde la estimación seguramente resultará sesgada. Una muestra representativa debe distribuirse sobre todas las condiciones ambientales; sin embargo, en este ejemplo sólo está representada una condición ambiental: los lugares cercanos a la cresta de los cerros.

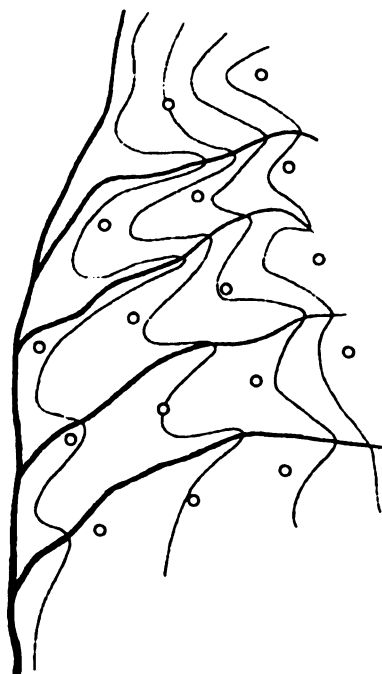


Figura 3-19a. Red sistemática de parcelas que se distribuyen sobre una situación ambiental única (cresta de los cerros)

Los riesgos de sesgamiento en las estimaciones por esta causa son mínimos en muestreos muy intensos o muy extensos, pues la coincidencia de la red con periodicidades naturales es altamente improbable. Por otra parte, el efecto de ordenamientos sistemáticos existentes en el ambiente puede neutralizarse eligiendo una conveniente orientación y distanciamiento entre las líneas de unidades que integran la red.

Principios

Sobre una población (bosque) se distribuye una muestra de n unidades o parcelas, ordenadas sistemáticamente, con una partida al azar.

La red completa de unidades puede considerarse como un conglomerado sistemático, con un grado extremo de espaciamiento entre sus elementos. De este hecho se deduce lo siguiente, puesto que los estimadores MAS son aplicables en este caso:

- a) Toda la red sistemática constituye una sola unidad muestral independiente.
- b) El promedio de las n unidades de la red, expandido a totales por unidad de superficie, tiene como esperanza el valor poblacional Y / A ; luego, la red sistemática proporciona estimaciones insesgadas de los parámetros poblacionales.

- c) Dado que se trata de una sola unidad muestral aleatoria independiente, no es posible determinar insesgadamente el error de estimación, el que sólo puede aproximarse bajo diferentes supuestos.

Estimadores

Caso 1: Población dividida en un número finito de N unidades distribuidas en M conglomerados (redes) sistemáticos, con n unidades cada uno ($N = Mn$).

El total poblacional es:

$$Y = \sum_{i=1}^M y_i = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^n y_{ij} = n \sum_{i=1}^M \bar{y}_i = n \cdot M \cdot \bar{Y} \quad (3-79)$$

Donde $\bar{y}_i$ e y_i son respectivamente el promedio y el total por conglomerado; e $\bar{Y}$, el promedio poblacional.

Un estimador insesgado del total poblacional es $\hat{Y}$, que se obtiene a partir de una sola red sistemática, seleccionada (o localizada) aleatoriamente:

$$\hat{Y} = My = Mn\bar{y} \quad (3-80)$$

Donde

$$y = \sum_{j=1}^n y_j = n\bar{y} \quad (3-81)$$

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^n y_j / n \quad (3-82)$$

- Un estimador insesgado del promedio poblacional es el siguiente:

$$\hat{\bar{Y}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \quad (3-83)$$

La Figura 3-20 muestra una red sistemática de muestreo de $n=16$ unidades, seleccionadas al azar entre las $M=25$ posibles redes de igual estructura, sobre la población I.

Caso 2: Sobre una población se localiza una red sistemática de n puntos de muestreo. Los puntos pueden dar lugar a parcelas de superficie fija, parcelas concéntricas por unidades MPH, MLH, etc. En este caso no existe un número finito de redes posibles, como en el caso 1.

El total poblacional por unidad de superficie estimado insesgadamente mediante una red sistemática localizada al azar es:

$$Y / A = \overline{yha} = \frac{1}{n} \sum yha_i \quad (3-84)$$

Donde yha_i es una estimación puntual en cada unidad y de la red, del total por unidad de superficie, efectuada mediante cualquier tipo de unidad muestral, como las unidades muestrales probabilísticas descritas en el capítulo III.1.

	I					II					III					IV					
1	130	153	153	112	200	106	100	147	118	165	—	—	12	—	35	—	18	—	—	24	A
2	124	106	136	130	165	141	194	212	136	98	100	—	12	65	98	—	100	30	12	47	
3	177	165	136	124	171	106	82	177	147	165	118	82	47	6	90	12	30	—	—	24	
4	165	112	124	118	153	118	224	136	118	159	141	65	35	24	—	30	30	53	53	30	
5	100	82	118	153	147	130	130	112	98	118	147	153	98	53	71	—	—	94	47	30	
6	224	247	217	230	130	259	277	100	147	171	200	171	118	141	82	59	71	6	—	—	B
7	253	200	135	271	277	271	230	206	242	177	141	200	135	153	106	153	124	71	30	6	
8	212	277	265	212	206	171	289	259	183	247	194	277	183	165	90	106	118	136	53	71	
9	224	283	247	300	100	318	277	306	177	200	177	271	141	71	124	71	100	171	159	94	
10	100	141	265	277	306	165	253	265	271	159	236	188	300	165	147	241	118	159	82	124	
11	277	330	253	218	177	353	330	253	171	194	241	177	177	118	98	106	118	188	77	165	C
12	224	212	159	224	141	183	283	100	147	183	206	183	130	98	59	130	141	112	106	94	
13	271	318	200	271	218	253	260	200	147	259	253	77	165	242	153	194	106	224	59	141	
14	277	277	206	236	230	230	294	165	294	212	259	159	94	124	212	100	159	124	218	200	
15	130	218	65	171	165	194	171	206	312	94	153	118	171	71	136	147	98	100	153	124	
16	218	130	118	130	82	171	147	124	177	183	159	94	124	212	100	159	124	100	82	71	D
17	106	147	153	118	159	153	153	130	112	177	98	12	41	18	24	98	53	41	—	18	
18	130	200	194	100	141	165	153	147	177	194	106	35	—	18	—	—	35	30	41	35	
19	77	165	159	159	183	118	124	124	94	159	71	—	100	18	6	6	—	—	—	30	
20	188	183	177	130	94	153	47	188	112	118	18	18	—	—	—	12	—	30	59	12	
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	

Figura 3-20. Muestreo con red sistemática de $n=16$ parcelas sobre la población I

El total poblacional es estimado mediante $\hat{Y}$:

$$\hat{Y} = A \cdot \overline{y_{ha}} \quad (3-85)$$

Varianza de los estimadores

La varianza del estimador $\hat{Y}$:

$$V(\hat{Y}) = M \sum_{i=1}^M \left(y_i - \frac{Y}{M} \right)^2 \quad (3-86)$$

Donde $y_i = \sum_{j=1}^n y_{ij}$

La varianza de las medias por red y también del promedio por unidad poblacional es:

$$V(\bar{y}) = V\left(\frac{\hat{Y}}{n}\right) = \frac{V(\hat{Y})}{M^2 n^2} = \frac{\sum_{i=1}^M (\bar{y}_i - \bar{Y})^2}{M} \quad (3-87)$$

Donde $\bar{y}_i$ es la media de las n unidades que integran una red sistemática i cualquiera, seleccionada al azar.

Empleando la estructura de red sistemática de la Figura 3-20 se tienen 25 redes posibles. La varianza de las medias por red, de acuerdo con la expresión (3-87), es 2.538.

Errores de estimación

No es posible obtener una estimación insesgada de la varianza de los estimadores de muestreo sistemático en base a una sola red sistemática. En cambio, es posible aproximarse al error de estimación en base a procedimientos como los siguientes.

Procedimiento 1: Supuesto de población en orden al azar. Cuando la población se distribuye al azar, lo que se manifiesta en una correlación nula entre unidades contiguas, los estimadores del MAS son aplicables al muestreo sistemático. De acuerdo con la expresión (3-55):

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n(n-1)} = \frac{\sum y_i^2 - \left(\sum y_i \right)^2 / n}{n(n-1)} = \frac{sy^2}{n} \quad (3-88)$$

Esta expresión por lo general sobreestima el error de estimación; sin embargo, en algunas ocasiones produce fuertes subestimaciones.

Procedimiento 2: Se basa en las sucesivas diferencias cuadráticas entre unidades contiguas. El procedimiento asume que la población se divide en n estratos, cada uno con M elementos. Todos los elementos dentro de cada estrato tienen una media común:

$$s\bar{y}_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (y_i - y_{i+1})^2}{2n(n-1)} \quad (3-89)$$

Según COCHRAN (1977), esta expresión generalmente sobreestima el error de estimación, pero al igual que el procedimiento 1, puede en ocasiones producir fuertes subestimaciones.

Procedimiento 3: Diferencias sucesivas por líneas. Un estimador del error mencionado por ZOEHRER (1980) y que proporcionaría buenas estimaciones del error, es el siguiente:

$$s\bar{y}^2 = \frac{\sum_j \sum_i (y_{ij} - y_{(i+1)j})^2}{2n \sum_j (n_j - 1)} \quad (3-90)$$

Donde

y_{ij} = valor observado en la unidad i de la línea j

L = número de líneas en la red

La expresión proporciona un resultado diferente según la dirección de las líneas. ZOEHRER indica que una estimación más segura se obtiene al promediar las estimaciones efectuadas en las dos direcciones de la red.

Cuando la fracción muestral es relevante, $\left(f = \frac{n}{N} > 0.05\right)$, la expresión del error de estimación debe ajustarse mediante el factor para muestreo sin reemplazo en poblaciones finitas, $(\sqrt{1-f})$.

COCHRAN (1977) y FAO (1981) describen otros procedimientos para aproximarse al error de estimación.

Ejemplo:

Estimaciones para la población I en base a la muestra sistemática de la Figura 3-20.

Los datos extraídos de la Figura 3-20 son los siguientes:

Línea	Valor (yj) por unidad en la línea			
	1	2	3	4
1	12.4	14.7	0.6	0.0
2	21.2	18.3	16.5	5.3
3	27.1	14.7	24.2	5.9
4	10.0	17.7	1.8	4.1

a) Promedio por unidad:

- Valor poblacional $\bar{Y}$ (3-37): 13.6425 m³/unidad
- Valor estimado $\hat{\bar{Y}} = \bar{y}$ (3-83): 12.49

b) Error del estimador de media por unidad:

- Valor poblacional $\sigma_{\bar{y}}$ (3-87): 1.593 m³/unidad
- Valor estimado $S_{\bar{y}}^*$

$$\text{Procedimiento 1 (3-88): } S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{72.9853}{16} \left(1 - \frac{16}{400}\right)} = 2.093$$

$$\text{Procedimiento 2 (3-89): } \sqrt{\frac{43.466}{16} \left(1 - \frac{16}{400}\right)} = 1.615$$

$$\text{Procedimiento 3 (3-90): } \sqrt{\frac{51.576}{16} \left(1 - \frac{16}{400}\right)} = 1.759$$

(*) En todas las estimaciones del error, se ha empleado el factor de ajuste para muestras grandes. En los procedimientos 2 y 3 se emplearon líneas horizontales de parcelas.

III.2.5 Muestreo con estimadores de razón

III.2.5.1 Estimador de razón de medias

Usos

El estimador de razón de medias se emplea en inventarios forestales cuando las unidades muestrales son de tamaño variable.

El tamaño de las unidades muestrales puede variar por diversos motivos:

- Un conglomerado sistemático de gran tamaño se localiza sobre más de un estrato. Cada segmento del conglomerado ubicado en un estrato diferente se considera como una unidad muestral independiente.
- Se diseñan conglomerados que son medidos durante una jornada completa, resultando que en determinadas circunstancias los conglomerados inconclusos al terminar la jornada permanecen incompletos.
- Se emplean parcelas circulares de radio constante en la pendiente, pero elípticas en la proyección horizontal, y de tamaño variable, según la pendiente del terreno.
- El diseño consiste en fajas continuas o líneas de parcelas que se extienden a lo ancho del bosque. Cada faja o línea de parcelas constituye, entonces, una unidad muestral de dimensión variable (ENCINAS 1991).
- Se emplean unidades muestrales de superficie fija, que al quedar parcialmente fuera del rodal que se inventaría, no son desplazadas. La superficie de la unidad muestral se reduce a la porción ubicada dentro del rodal.

En todos los casos mencionados, se asume que la localización de la parcela es aleatoria. Los estimadores del muestreo aleatorio simple (MAS) no son aplicables.

Principio

Puede encontrarse una descripción de los fundamentos estadísticos de los estimadores de razón en textos como COCHRAN (1977) y DE VRIES (1986).

El principio es el siguiente:

- a) En una muestra aleatoria de n individuos, se miden dos variables: y y z y y es la variable-objeto que describe a la población y z es una variable auxiliar.

b) La variable auxiliar z debe tener las siguientes propiedades:

- Fácil de obtener el valor total poblacional Z . Se considera deseable, aunque no indispensable, conocer también el número total de individuos N .
- Alta correlación entre y y z y con una relación entre ellas del tipo $y = kz$.

Siendo $R = Y/Z = \bar{Y}/\bar{Z}$, entonces $Y = RZ$. Un estimador de Y puede ser el siguiente:

$$\hat{Y} = \hat{R}Z \quad (3-91)$$

Como estimador de R puede emplearse:

$$\hat{R} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n z_i} \quad (3-92)$$

El Cuadro 3-13 describe la misma población II, en términos del volumen de cada faja y su área. La variable y corresponde al volumen y la variable z a la superficie.

Cuadro 3-13. Fajas que integran la población II: superficie en hectáreas y volumen en m³

Faja N i	Superf. ha(z _i)	Volumen m³(y _i)		Faja N i	Superf. ha(z _i)	Volumen m³(y _i)	
1	0.4	78.9	*	21	0.5	117.9	$\sum_{i=1}^N y_i = 5457$
2	0.5	114.8	*	22	0.7	163.2	$\sum_{i=1}^N z_i = 40$
3	0.6	124.7		23	1.0	168.4	$\sum_{i=1}^N z_i^2 = 47.88$
4	0.7	156.1		24	0.8	146.8	*
5	0.8	149.0		25	0.7	117.2	$\sum_{i=1}^N y_i^2 = 868790.92$
6	1.2	215.0		26	0.5	121.3	*
7	1.3	242.2		27	0.6	148.5	*
8	1.4	246.9		28	0.7	126.6	*
9	1.5	224.5		29	0.7	136.0	$\sum_{i=1}^N y_i z_i = 6074.89$
10	1.6	256.9		30	1.0	177.3	$\bar{Z} = 1.00$
11	1.8	168.6		31	1.0	155.4	$\bar{Y} = 136.425$
12	1.7	154.9	*	32	1.0	87.3	$\sigma_z = 0.4438$
13	1.5	124.8		33	1.3	155.0	$\sigma_y = 55.7494$
14	1.2	96.1		34	1.5	166.9	$S_z = 0.4495$
15	1.0	82.9	*	35	1.5	149.7	$S_y = 56.4596$
16	1.0	67.2		36	1.6	178.4	$r = 0.6243$
17	0.8	67.9		37	1.7	191.4	$S_{yz} = 15.843$
18	0.5	54.3	*	38	1.7	119.7	
19	0.3	29.4		39	1.0	80.7	
20	0.2	21.8		40	0.5	72.4	*
				Total	40.0	5457.0	

Las fajas marcadas con (*) han resultado seleccionadas en un proceso aleatorio, sin reposición.

	I					II					III					IV					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
A																					55
																					54
																					53
																					52
																					51
																					50
																					49
																					48
																					47
																					46
																					45
																					44
																					43
																					42
																					41
B																					40
																					39
																					38
																					37
																					36
																					35
																					34
																					33
																					32
																					31
																					30
																					29
																					28
																					27
																					26
																					25
																					24
																					23
																					22
																					21

Figura 3-21. Población II. Los mismos individuos que constituyen la población I distribuidos como bosque de forma irregular

La Figura 3-21 presenta la población II. Es la misma población de la Figura 3-1. Los individuos se distribuyen sobre un área de igual dimensión, pero de diferente forma, simulando la irregularidad de un bosque común. Desde una línea central (línea doble) se extienden hacia ambos lados líneas de parcelas, constituyendo en total 40 fajas de superficie variable, con un volumen total de 5457 m³.

El estimador de razón de medias es sesgado, pero el sesgo $\left(B\left(\hat{R} \right) \right)$ es acotado a valores reducidos si el coeficiente de variación de z es pequeño.

$$B\left(\hat{R} \right) / \sigma\left(\hat{R} \right) \leq cv(\bar{z}) \quad (3-93)$$

El sesgo del estimador es despreciable en muestras grandes ($n > 30$). Por lo demás, cuando la relación funcional entre y y z es una recta ascendente de tipo $y = kz$, el estimador de razón es insesgado.

Variabilidad del estimador $\hat{R}$

Puesto que $\hat{R}$ puede ser sesgado, una buena medida del error de estimación es el error cuadrático medio:

$$ECM\left(\hat{R} \right) = E\left[\hat{R} - R \right]^2 \quad (3-94)$$

Para muestras grandes, el estimador $\hat{R}$ tenderà a ser insesgado; luego, el error cuadrático medio de $\hat{R}$ se aproximará a su varianza.

No hay una expresión simple para el error cuadrático medio de $\hat{R}$. Una buena aproximación, que en muestras grandes vale también como aproximación a la varianza de $\hat{R}$, es la siguiente:

$$V\left(\hat{R} \right) = \frac{(1-f)R^2}{n} \left(\frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} + \frac{S_z^2}{\bar{Z}^2} - \frac{2S_{zy}}{\bar{Z}\bar{Y}} \right) \quad (3-95)$$

o también:

$$V\left(\hat{R} \right) = \frac{1-f}{n\bar{Z}^2} \cdot \left(S_y^2 + R^2 S_z^2 - 2\gamma R S_z S_y \right) \quad (3-96)$$

medición de rodales

Todas estas expresiones son equivalentes. En la última expresión, γ corresponde al coeficiente de correlación entre y y z . Resulta evidente que para un mismo tamaño muestral, mientras mayor es la correlación entre y y z , menor es la variabilidad del estimador y más eficiente el muestreo.

Errores de estimación

Un estimador de las expresiones (3-95) y (3-96) de la variabilidad del estimador que se acostumbra a llamar **error de estimación**, es el siguiente:

$$S_{\hat{R}}^2 = \frac{(1-f)}{n\bar{Z}^2} \left(s_y^2 + \hat{R}^2 s_z^2 - 2\hat{R}s_{yz} \right) \quad (3-97)$$

Una forma alternativa, donde la media poblacional $\bar{Z}$ es reemplazada por su estimación muestral, puede emplearse con muestras grandes:

$$S_{\hat{R}}^2 = \frac{(1-f)\hat{R}^2}{n(n-1)} \left(\frac{\sum y^2}{\bar{y}^2} + \frac{\sum z^2}{\bar{z}^2} - \frac{2\sum yz}{\bar{y}\bar{z}} \right) \quad (3-98)$$

Si N se desconoce, como es el caso para esta segunda expresión del error, la fracción muestral $f = n/N$ se desecha.

De esta expresión puede derivarse el error del estimador $\hat{Y}$ o de $\hat{\bar{Y}}$:

$$S_{\hat{Y}}^2 = S_{Z\hat{R}}^2 = Z^2 S_{\hat{R}}^2 \quad (3-99)$$

$$S_{\hat{\bar{Y}}}^2 = S_{\bar{Z}\hat{R}}^2 = \bar{Z}^2 S_{\hat{R}}^2 \quad (3-100)$$

Intervalos confidenciales

Para muestras grandes, donde la aproximación normal es aceptable, los límites confidenciales pueden ser determinados como en el MAS, para un nivel de confianza $1-\alpha$:

$$\hat{R} - t_{1-\alpha/2}^{n-1} S_{\hat{R}} < R < \hat{R} + t_{1-\alpha/2}^{n-1} S_{\hat{R}} \quad (3-101)$$

En forma análoga, se determinan los límites confidenciales para Y o $\bar{Y}$.

Ejemplo:

El Cuadro 3-13 presenta los principales parámetros para la población II. El Cuadro 3-14 presenta estimadores para la misma población. Los límites confidenciales para el volumen total y para un nivel de confianza $1-\alpha = 0.95$, empleando los estimadores de razón, son los siguientes:

$$\hat{Y} \pm t_{1-\alpha/2}^{n-1} \cdot S_{\hat{Y}} = (6144.5 \pm 2.26 \cdot 767.4) \\ = 6144.5 \pm 1734.3$$

El error muestral es de 1734.3 m³

Cuadro 3-14. Estimadores de razón de medias sobre la población II

i	Vol (y _i) m ³	Sup (a) z _i	Símb	Expresión	Valor
1	78.9	0.4	$\bar{y}$	3-50	1152.1/10 = 115.21 m ³
2	114.8	0.5	$\bar{z}$		7.5/10 = 0.75 ha
3	154.9	1.7	$\hat{R}$	3-92	115.21/0.75 = 153.61 m ³ /ha
4	82.9	1.0	$\hat{Y}$	3-91	153.61 · 40 = 6144.5 m ³
5	54.3	0.5			
6	146.8	0.8	$V(\hat{R})$	3-95	$\left(1 - \frac{10}{40}\right) \frac{136.425^2}{10} \cdot$ $\left(\frac{56.46^2}{136.425^2} + \frac{0.45}{1} - \frac{2 \cdot 1584}{136.425 \cdot 1}\right) = 197.6$
7	121.3	0.5			
8	148.5	0.6	$\sigma_{\hat{R}}$		14.06 m ³ /ha
9	177.3	1.0	$S_{\hat{R}}^2$	3-98	368.1
10	72.4	0.5			
$\Sigma()$	1152.1	7.5			
$\Sigma()^2$	148212.39	7.05	$S_{\hat{R}}$		$\sqrt{368.1} = 19.19 \text{ m}^3/\text{ha}$
$\Sigma y_i z_i$	943.03		$S_{\hat{Y}}$	3-99	40 · 19.19 = 767.4 m ³

Eficiencia del estimador $\hat{R}$

Una estimación basada en el estimador $\hat{R}$ es más eficiente que una estimación MAS, cuando para un mismo tamaño muestral la varianza del estimador sea menor. Esto ocurre cuando:

$$r_{zy} \geq \frac{1}{2} R \frac{S_z}{S_y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c(z)}{c(y)}$$

En otras palabras, como r_{zy} sólo puede ser menor o igual que 1, un estimador MAS será más eficiente que un estimador basado en $\hat{R}$, si $c(z) > 2c(y)$. Por otra parte, si $c(z)$ es similar a $c(y)$, entonces el estimador basado en $\hat{R}$ será más eficiente que un estimador MAS cuando $r > 1/2$.

Fácilmente se comprueba que cuando la variable auxiliar z es constante, un estimador de razón de medias es igual a un estimador MAS. Este hecho es aprovechado por algunos sistemas de procesamiento de inventarios que emplean indistintamente estimadores de razón, sea el tamaño de las unidades constante o variable.

III.2.5.2 Estimador de media de razones

El siguiente es un modelo estimador que frecuentemente se emplea cuando las unidades muestrales son de tamaño variable.

- Dada una muestra de n unidades muestrales de tamaño variable, la variable objeto (ej.: volumen) es y y la variable auxiliar (superficie de la unidad) es z .
- El cociente $r = y_i / z_i$ representa una estimación puntual del total por unidad de superficie.
- El promedio de r es multiplicado por la superficie total Z para obtener una estimación del total poblacional Y :

$$\hat{Y} = \bar{r}Z = \frac{Z}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{z_i} \quad (3-102)$$

El estimador $\bar{r}$ se denomina estimador de media de razones.

$\bar{r}$ es un estimador insesgado de $R_u = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{z_i}$. Sin embargo, dado que R_u es diferente de $R = Y / Z$, el estimador del total o del promedio poblacional basado en r es siempre sesgado.

III.2.6 Muestreo estratificado

Usos

El proceso de estratificación consiste en dividir una población en subpoblaciones o estratos que son muestreados en forma independiente, de modo que pueden efectuarse estimaciones por estrato y una estimación global de sus parámetros.

Los estratos pueden corresponder a diferentes tipos boscosos delimitados sobre fotos aéreas, imágenes satelitales o escenas aéreas de video. Los tipos boscosos pueden diferenciarse según la composición de especies, manejo o estado de intervención, estructura, estado de desarrollo, etc. La radiación espectral de los bosques captada en imágenes de percepción remota también es empleada como elemento de estratificación.

Los estratos pueden constituirse en base a cartografía ordinaria, al subdividir el área boscosa conforme a variables ambientales, como altitud, exposición, etc.

Los estratos no necesariamente deben ser continuos. Un estrato puede estar integrado por varias unidades homogéneas (rodales) de la misma clase, sin que tengan continuidad geográfica.

El tamaño mínimo de las superficies o rodales que integran un estrato puede variar entre fracciones de una hectárea y cientos de hectáreas, dependiendo, entre otros factores, del tipo de inventario y de los sensores remotos empleados.

En algunas ocasiones, las superficies extensas se subdividen de acuerdo con límites comunales, prediales, etc. Este proceso no puede llamarse propiamente estratificación, sino más bien especificación de unidades de inventariación independientes.

En otras ocasiones, un área extensa se subdivide en bloques de igual tamaño, asignando a cada uno una proporción de la muestra o una cantidad fija de unidades muestrales. Un diseño de este tipo se verá en la sección III.2.8.

Para todos los casos vistos, se supone que la superficie de los estratos se determina sin error.

Otra práctica común consiste en clasificar una densa red de puntos distribuidos sobre imágenes de percepción remota, en diferentes estratos, sin efectuar una delimitación física de ellos.

Luego se selecciona una muestra de puntos en cada estrato, que son medidos en terreno. En este caso, la superficie de cada estrato no se conoce exactamente, sino que se estima en base a los puntos clasificados sobre las imágenes. Los diseños muestrales de este tipo se denominan muestreos dobles o muestreos en fases (sección III.2.10).

medición de rodales

Según PRETO (1992) los siguientes criterios deben tenerse en cuenta al adoptar el procedimiento de estratificación:

- El delineamiento de estratos sólo es posible cuando los límites entre rodales son nítidos.
- Es preferible adoptar clases relativamente amplias de parámetros claramente diferenciables en las imágenes que se interpretan y también en terreno.
- Las clasificaciones muy detalladas pueden ser ineficaces, pues la dinámica de los bosques hace que entonces los límites sólo puedan detectarse en imágenes muy recientes. Por otra parte, el efecto de estratificar no se hace mucho más eficiente al establecer clases con rangos muy estrechos.
- Es posible demostrar que la mejor variable de estratificación es la misma variable de interés. Por ello, es conveniente establecer los estratos en base a parámetros que, al combinar sus valores, generen clases fuertemente relacionadas con los niveles que adopta la variable de interés en la población.

La estratificación mediante clasificación de fotoparcelas, sin delimitación, puede resultar en muchos casos la mejor opción, por varias razones:

- La fotointerpretación en pequeñas parcelas es más exacta que la delimitación de grandes áreas, especialmente cuando las características del bosque dependen mucho de las condiciones ambientales (bosques naturales) y éstas son muy variadas.
- La variabilidad de los parámetros interpretados en fotoparcelas es menor que la de los parámetros empleados en una fotointerpretación convencional para delimitar estratos.
- Una red permanente de fotoparcelas permite un mejor control de la evolución de la cubierta mediante fotointerpretaciones repetidas.

El efecto de la estratificación es una reducción del error de estimación para la población, como resultado de una menor variabilidad entre individuos dentro de los estratos, en comparación con la varianza entre individuos de la población sin estratificar. Mientras más pequeña es la variación dentro de los estratos, más eficiente es la estimación con estratificación. La forma en que se distribuyen las unidades en los diferentes estratos también influye en la reducción del error.

Los principios del muestreo estratificado se emplean también para agrupar unidades de inventariación independientes, generando estimaciones globales con sus correspondientes errores muestrales.

Principios

- La población se divide en L estratos o subpoblaciones, cuya dimensión y límites se conocen exactamente, antes de distribuir la muestra. Siendo Y_h el total del estrato h , el total poblacional es:

$$Y_T = \sum_{h=1}^L Y_h \quad (3-102a)$$

- En cada estrato h se distribuye al azar una muestra independiente de tamaño n_h , y en cada unidad muestral se valorizan uno o más atributos ($y_h, z_h, \dots$).

El tamaño total de la muestra n es:

$$n = \sum_{h=1}^L n_h \quad (3-102b)$$

- En base a la muestra, se estima en cada estrato el total poblacional ($\hat{Y}_h$) en forma tal que en la práctica pueda considerarse insesgada, al menos para los efectos prácticos y con varianza $S_{\hat{Y}_h}^2$ (o el error de estimación) conocida, también insesgada.

Se tienen entonces las variables $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_h, \dots, \hat{Y}_L$, todas ellas variables aleatorias independientes, con sus varianzas estimadas $S_{\hat{Y}_1}^2, S_{\hat{Y}_2}^2, \dots, S_{\hat{Y}_L}^2$

Es indiferente el diseño muestral que se emplea para determinar $\hat{Y}_h$ y $S_{\hat{Y}_h}^2$ siempre que se cumplan los supuestos mencionados.

Estimadores

El total poblacional se estima insesgadamente de la siguiente forma:

$$\hat{Y}_T = \sum_{h=1}^L \hat{Y}_h \quad (3-103)$$

Dependiendo del procedimiento de estimación muestral, es posible estimar otras características poblacionales, como los promedios por unidad muestral o el total global por unidad de superficie.

Varianza de los estimadores

Cada estimador $\hat{Y}_h$ posee una varianza $V(\hat{Y}_h)$, cuyo valor depende del diseño muestral empleado. Puesto que la varianza de una suma de variables aleatorias independientes es igual a la suma de sus varianzas, la varianza del total poblacional estimado es la siguiente:

$$V(\hat{Y}_T) = \sum_{h=1}^L V(\hat{Y}_h) \quad (3-104)$$

Errores de estimación

Siendo $S_{\hat{Y}_1}^2, \dots, S_{\hat{Y}_L}^2$ estimadores insesgados de las varianzas $V(\hat{Y}_1), \dots, V(\hat{Y}_L)$, un estimador insesgado del error de estimación del total poblacional es:

$$S_{\hat{Y}_T}^2 = \sum_{h=1}^L S_{\hat{Y}_h}^2 \quad (3-105)$$

Límites confidenciales

Si se presume que las estimaciones del total poblacional tienden a distribuirse normalmente, los límites confidenciales para un nivel de confianza $1-\alpha$ se estiman con la siguiente expresión:

$$\hat{Y}_T - t_{1-\alpha/2}^{s1} \cdot S_{\hat{Y}_T} < Y_T < \hat{Y}_T + t_{1-\alpha/2}^{s1} \cdot S_{\hat{Y}_T} \quad (3-106)$$

Se llama error muestral $E_{\hat{Y}_T}$ a la diferencia máxima probable entre el total poblacional y el total estimado, para un nivel de confianza $1-\alpha$.

$$E_{\hat{Y}} = t_{1-\alpha/2}^{s1} \cdot S_{\hat{Y}_T} \quad (3-106a)$$

$$E\% = E_{\hat{Y}} \cdot \frac{100}{\hat{Y}} = E_{\hat{Y}} \cdot \frac{100}{\hat{\bar{Y}}} \quad (3-106b)$$

El valor t depende del nivel de confianza y de los grados de libertad. Estos dependen a su vez de si las varianzas en los estratos pueden considerarse o no homogéneas. En general, se asumen $n - L$ grados de libertad.

Muestreo MAS en todos los estratos

Aplicando el principio descrito para el muestreo estratificado al hecho de que en todos los estratos se emplean estimadores MAS sin reposición, resultan los siguientes estimadores:

Total poblacional:

$$\hat{Y}_T = \sum \hat{Y}_h = \sum Nh\bar{y}_h \quad (3-107)$$

Valor promedio por unidad:

$$\hat{\bar{Y}}_T = \frac{\hat{Y}_T}{N} = \sum Wh \cdot \bar{y}_h \quad (3-108)$$

Donde Wh es el tamaño relativo de cada estrato:

$$Wh = \frac{Nh}{N} = \frac{Ah}{A} \quad (3-109)$$

$$N = \sum Nh \quad (3-109a)$$

La varianza del estimador $\hat{Y}_T$ es la siguiente:

$$V(\hat{Y}_T) = \sum V(\hat{Y}_h) = \sum Nh^2 \frac{Sh^2}{nh} \left(1 - \frac{nh}{Nh}\right) \quad (3-110)$$

El error de estimación del total poblacional (o estimación de la varianza del estimador $\hat{Y}_T$) es:

$$S_{\hat{Y}_T}^2 = \sum Nh^2 \cdot \frac{sh^2}{nh} \left(1 - \frac{nh}{Nh}\right) \quad (3-111)$$

y el error de estimación del promedio poblacional:

$$S_{\hat{\bar{Y}}_T}^2 = S^2(\hat{\bar{Y}}_T / N) = \frac{1}{N^2} S_{\hat{Y}_T}^2 = \sum Wh^2 S_{\bar{y}_h}^2 \quad (3-112)$$

Límites confidenciales

Se emplea la expresión común (3-63). Los grados de libertad dependen de cómo sean las varianzas dentro de los estratos. Si son homogéneas, los grados de libertad son $n - L$. Si, por el contrario, son heterogéneas, los grados de libertad pueden estimarse de la siguiente forma (COCHRAN 1977; DE VRIES 1986):

$$gL = S^4 \hat{Y}_T / \left(\sum \left(S^4 \hat{Y}_h / (nh - 1) \right) \right) \quad (3-113)$$

		I					II					III					IV						
E.3	1	130	153	153	112	200	106	100	147	118	145	—	—	12	—	35	—	18	—	—	25	A	E.1
	2	124	106	136	130	145	141	194	212	136	00	100	—	12	65	00	—	100	30	12	47		
	3	177	145	130	124	171	106	82	177	147	145	110	82	47	6	00	12	30	—	—	34		
	4	145	112	124	118	153	118	224	136	118	159	141	65	35	24	—	30	30	53	53	30		
	5	100	82	118	153	147	130	130	112	00	118	147	153	00	53	71	—	—	94	47	30		
	6	224	247	217	230	130	239	277	100	147	171	230	171	118	141	82	09	71	6	—	—	B	E.2
	7	253	200	130	271	277	271	230	306	242	177	141	300	125	153	106	153	124	71	30	6		
	8	212	277	265	212	206	171	209	239	100	247	194	277	103	145	00	106	118	136	53	71		
	9	224	212	247	300	100	218	277	206	177	200	177	271	141	71	124	71	100	171	159	94		
	10	100	141	245	277	206	145	253	265	271	159	236	100	300	145	147	241	118	159	82	124		
	11	277	330	253	210	177	353	330	253	171	194	241	177	177	118	00	106	118	100	77	145	C	E.2
	12	224	212	199	224	141	183	203	100	147	183	206	163	130	00	97	130	141	112	106	94		
	13	271	310	200	271	218	253	244	200	147	239	253	77	145	242	153	194	106	224	09	141		
	14	277	277	206	236	230	230	294	145	294	212	239	159	94	124	212	100	159	124	210	200		
	15	130	210	65	171	145	194	171	206	312	94	153	118	171	71	136	147	00	100	153	124		
	16	210	130	118	130	82	171	147	124	177	183	159	94	124	212	100	159	124	100	82	71	D	E.1
	17	106	147	153	118	159	153	130	112	177	30	12	41	18	24	20	53	41	—	18			
	18	130	200	194	100	141	145	153	147	177	194	106	35	—	18	—	—	25	30	41	35		
	19	77	145	159	159	183	118	124	124	94	199	71	—	100	18	6	6	—	—	—	30		
	20	100	183	177	130	94	153	47	100	112	118	18	18	—	—	—	12	—	20	59	12		
		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t		

Figura 3-22. Población I dividida en tres estratos clasificados por clases de volumen

Ejemplo:

En la Figura 3-22 se presenta la población I dividida en tres estratos, que corresponden aproximadamente a las clases de volumen 1-100 (I), 101-200 (II) y más de 200 (III).

Los individuos seleccionados (círculos) son los mismos de la Figura 3-19 que fueron seleccionados al azar sobre toda la población. El proceso de estratificación es, entonces, a posteriori. Sin embargo, el tamaño de la muestra es suficientemente grande como para que pueda calcularse el error de estimación bajo el supuesto de estratificación a priori.

El Cuadro 3-15 presenta una comparación entre la estimación MAS y el muestreo aleatorio estratificado.

La estimación puntual con el estimador MAS es algo más cercana al valor real que la estimación mediante estratificación. Sin embargo, el error muestral se ha reducido, al estratificar, de casi un 20% a un 13%.

Distribución de la muestra en los estratos

Existen muchas formas de distribuir n unidades muestrales en L estratos.

- a) Distribución proporcional al tamaño de los estratos:

$$nh = n \cdot Wh \quad (3-114)$$

Donde Wh es la proporción del estrato h en la población total (3-109).

- b) Distribución óptima:

Puede demostrarse que el procedimiento de distribución de máxima costo-eficiencia es el siguiente:

$$nh = \frac{Wh \cdot sh / \sqrt{ch}}{\sum_L (Wh \cdot sh / \sqrt{ch})} \cdot n \quad (3-115)$$

Al distribuir la muestra de esta forma, se logra un mínimo error de estimación para un determinado costo, o bien, el costo mínimo para un determinado error máximo aceptable. Si el costo de muestrear en cada estrato ch es constante en todos los estratos, la expresión se simplifica:

$$nh = \frac{Wh \cdot sh}{\sum_L (Wh \cdot sh)} \cdot n \quad (3-116)$$

Cuadro 3-15. Estimación sobre la población I mediante estimador MAS (Cuadro 3-12) y muestreo estratificado

Estimación MAS		Estimación con estratificación				
		I	II	III	Total	Expresión
N	400	100	198	102	400	3-109a
n	30	7	15	8	30	3-102b
Wh		0.250	0.495	0.255	1.00	3-109
$\hat{\bar{Y}}$	13.10	4.21	13.47	20.18	12.87	3-108
$\hat{Y}$	5240	421.	2667.	2058.	5146.	3-107
sy	7.29	4.07	3.84	6.33		
s%	55.60	96.60	28.47	31.38		
$s\hat{Y}$	512	148	188.1	219.3	324.8	3-111
$s\hat{Y}\%$	9.77	33.15	7.05	10.65	6.31	
$E\hat{Y}$	1044	362.6	402.5	517.6	665.8	3-106a
$E\%$	19.94	86.13	15.09	25.15	12.94	3-106b
$t_{1-\alpha/2}^{s1}$	(*)	2.45	2.14	2.36	2.05	

(*) t para un nivel de confianza $1-\alpha = 95\%$ y para los correspondientes grados de libertad.

c) Distribución proporcional a una variable cualquiera Z_h :

Puede ocurrir que ni la distribución proporcional ni la distribución óptima sean criterios adecuados de distribución. Puede existir, en cambio, una variable colectiva Z_h o individual z_{ih} que refleje mejor la intensidad de muestreo adecuada por estrato. Z_h puede ser, por ejemplo, función del valor estimado Ph , o del volumen estimado por unidad de superficie V_{hah} y de la superficie del estrato A_h variable. Z_h puede ser la siguiente:

$$Z_h = Ph \cdot \hat{V}_{hah} \cdot A_h$$

La muestra puede distribuirse, entonces, en forma proporcional a Z_h :

$$n_h = n \cdot Z_h / \sum^L Z_h \quad (3-117)$$

Estimación del tamaño muestral

El tamaño muestral resulta de la fijación de un marco presupuestario o del establecimiento de un error máximo admisible.

a) Muestreo con presupuesto fijo

El costo de muestreo está compuesto de un costo fijo, independiente del tamaño muestral C_o y de un costo variable. El costo variable es el resultado de sumar el producto del costo unitario en el estrato Ch por el tamaño muestral nh , para todos los estratos. El tamaño muestral se expresa en conformidad con el criterio de distribución.

Para la distribución proporcional, por ejemplo, se tiene:

$$C = C_o + C_{var} = C_o + \sum^L ch \cdot nh = C_o + \sum^L ch \cdot Wh \cdot n$$

Luego:

$$n = \frac{C - c_o}{\sum^L Whch} \quad (3-118)$$

Del mismo modo se procede para otras formas de distribución.

b) Error máximo admisible (E_{max})

De acuerdo con el diseño muestral empleado en cada estrato y según el método de distribución de la muestra, se obtiene una expresión del error muestral diferente, que puede ser usada como base para estimar el tamaño muestral.

Por ejemplo, para un muestreo MAS con una fracción muestral relevante en todos los estratos, y asumiendo una distribución de la muestra proporcional al tamaño de los estratos, se tiene:

$$E^2 = t^2 S_{\bar{y}}^2 = t^2 \left(\sum^L Wh^2 \frac{sh^2}{nh} - \sum^L Wh^2 \frac{sh^2}{Nh} \right)$$

Reemplazando nh por su valor en una distribución proporcional (3-114) y despejando para n , resulta:

medición de rodales

$$n_{prop} = \frac{t^2 \sum^L Whsh^2}{E^2 + \frac{t^2}{N} \sum^L Whsh^2} \quad (3-119)$$

Para una distribución óptima con costo de muestreo constante por estrato, se obtiene, en cambio, lo siguiente:

$$n_{opt} = \frac{t^2 \left(\sum^L Whsh \right)^2}{E^2 + \frac{t^2}{N} \sum^L Whsh^2} \quad (3-120)$$

Ejemplo:

Basado en las estimaciones presentadas en el Cuadro 3-15, se tiene:

Estrato	Whsh	Whsh ²
I	1.0175	4.1412
II	1.9008	7.2991
III	1.6142	10.2176
Total	4.5325	21.6579

El tamaño muestral para lograr el mismo error muestral que para una distribución proporcional de 30 unidades muestrales, pero distribuidas en forma óptima, es el siguiente:

$$n_{opt} = \frac{(2.05)^2 * 4.5325^2}{\frac{12.94}{100} \cdot 12.87 + \frac{2.05^2}{400} \cdot 21.6579} = 28.76 \sim 29$$

El tamaño muestral para una distribución óptima es, en este caso, más pequeño en sólo una unidad muestral.

Muestreo estratificado con estimadores de razón

Las fórmulas generales para la estimación de poblaciones estratificadas son aplicables cuando se emplean estimadores de razón en los estratos, con la condición de que la muestra sea

grande en todos ellos y que, en consecuencia, pueda asumirse que las estimaciones son insesgadas.

Con frecuencia ocurre, sin embargo, que una muestra global de tamaño grande es pequeña a nivel de estrato.

En estos casos, puede emplearse el estimador de razón combinado. Los fundamentos de este diseño se encuentran en COCHRAN (1977) o DE VRIES (1986).

Estimadores

Para la población total, dividida en L estratos, la razón entre los totales Y y Z es:

$$R_c = \frac{Y}{Z} = \frac{\sum^L Yh}{\sum^L Zh} = \frac{\sum^L Nh\bar{Y}h}{\sum^L Nh\bar{Z}h} \quad (3-121)$$

Siendo $\hat{Y}_T = \sum^L Nh\bar{y}h$ un estimador insesgado de Y , así como también lo es $\hat{Z}_T$ de Z , un buen estimador para R_c es el siguiente:

$$\hat{R}_c = \frac{\hat{Y}_T}{\hat{Z}_T} \quad (3-122)$$

Siendo Z_T conocido, se tiene el siguiente estimador para Y :

$$\hat{Y}_T = \hat{R}_c \cdot Z_T \quad (3-123)$$

Este último estimador es un estimador de razón combinado del total para una población estratificada.

Error de estimación

Una expresión para el error de estimación es (DE VRIES 1986):

$$S^2_{\hat{r}} = \sum^L Nh^2(1-fh) \frac{1}{nh} (s^2_{yh} + \hat{R}_c^2 s^2_{zh} - 2\hat{R}_c s_{zyh}) \quad (3-124)$$

Estratificación con delimitación a posteriori

El muestreo estratificado supone que antes de distribuir la muestra se han delimitado los estratos y que a cada uno se le ha asignado una muestra independiente de tamaño nh .

Muchas veces el muestreo se inicia antes de poder delimitar los estratos, por lo que no es posible efectuar una asignación a priori de las unidades a estratos. El procedimiento usual, en estos casos, consiste en distribuir una muestra aleatoria sobre toda la población. Una vez realizada la estratificación, las unidades de la muestra aleatoria se asignan a los diferentes estratos, de acuerdo con su localización.

Al estratificar a posteriori, el tamaño muestral por estrato nh es una variable aleatoria, pues al repetir la distribución, variará el tamaño de la muestra por estrato.

La siguiente expresión del error de estimación supone una delimitación exacta de estratos a posteriori, con muestreo aleatorio irrestricto previo (COCHRAN 1977).

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{1-f}{n} \sum W_h s_h^2 + \frac{1}{n^2} \sum (1 - W_h) s_h^2 \quad (3-125)$$

El primer término corresponde al error de estimación para estratificación a priori con distribución proporcional. El segundo término, que corresponde al aumento del error debido a la estratificación a posteriori, se torna irrelevante en muestras grandes.

Ejemplo:

Para el muestreo con estratificación a posteriori sobre la población I, con una muestra de 30 unidades, el valor del segundo término, de acuerdo con los datos del Cuadro 3-15, es 0.055; lo que incrementa el error de estimación aproximadamente en un 4%.

La mayor desventaja de la estratificación a posteriori es que la muestra no puede asignarse en proporción a alguna propiedad de los estratos que no sea su tamaño. Puede ocurrir incluso que algunos estratos de reducida extensión, aunque importantes, no sean muestreados.

III.2.7 Muestreo por conglomerados bietápico (MCB)

Usos

Los altos costos de acceso en inventarios de superficies extensas llevan con frecuencia a concentrar la muestra de terreno. El grado óptimo de concentración depende, en parte, de las

características estructurales del bosque y en parte, de la relación entre el costo de acceso a un punto del área y el costo de medición de cada unidad (parcela) en la vecindad de dicho punto.

El procedimiento más común de muestreo en conglomerados es el llamado bietápico: la superficie boscosa se divide en bloques que constituyen unidades de la primera etapa. En una muestra de bloques seleccionados al azar se localiza, también al azar, un cierto número de unidades (parcelas) que constituyen las unidades de la segunda etapa. Corrientemente los bloques o unidades de la primera etapa son de igual tamaño, al igual que el tamaño muestral de la segunda etapa, en los bloques seleccionados (Figura 3-23, ilustr. a y b).

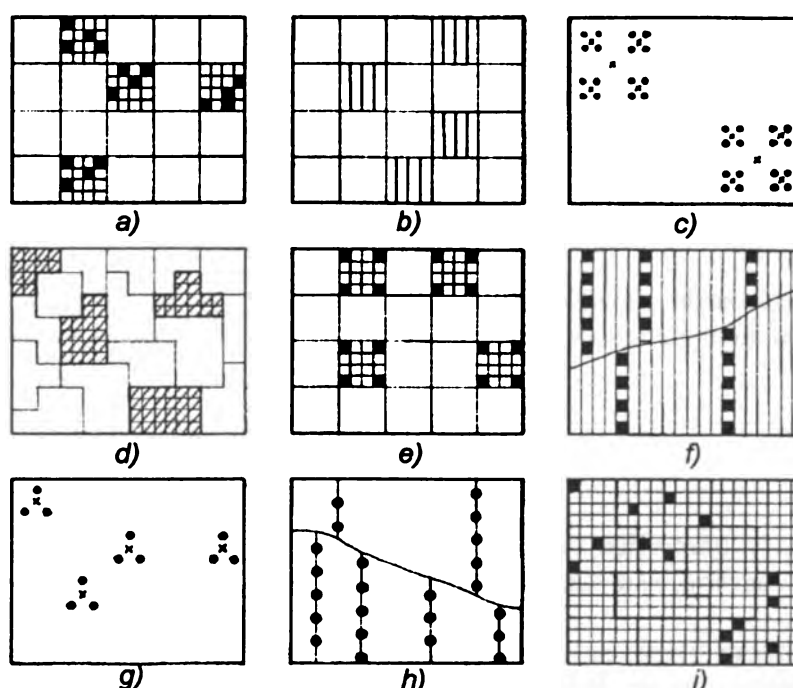


Figura 3-23. Diseños de muestreo en conglomerados

Otros procedimientos de muestreo por conglomerados son los siguientes:

- Muestreo en tres o más etapas. A veces, las condiciones extremas, de acceso difícil, fuerzan a grados extremos de concentración (caso c). El muestreo en tres o más etapas, descrito entre otros por LOETSCH y HALLER (1964) y COCHRAN (1977), constituye una solución en tales casos.
- Muestreo por conglomerados, monoetápico. Algunos autores, como RAJ (1968), llaman así a un diseño en el cual se miden todos los individuos de la segunda etapa en las

unidades (bloques) seleccionadas en la primera etapa (caso d). Con el mismo nombre, otros autores, como DE VRIES (1986), se refieren a un diseño donde las unidades de la segunda etapa se distribuyen con un arreglo geométrico regular (conglomerados sistemáticos) (casos c, f, g y h). Cada unidad que integra un conglomerado sistemático constituye una unidad de registro y no una unidad muestral independiente. En estos casos, se acostumbra emplear los estimadores MAS. Algunos autores recomiendan, sin embargo, adoptar los estimadores de muestreo bietápico para algunos tipos de conglomerados sistemáticos.

- Muestreo bietápico con unidades de la primera y segunda etapa, de tamaños desiguales y con número variable de unidades seleccionadas por bloque en la segunda etapa. Varios autores, como RAJ (1968) y DE VRIES (1986), describen los estimadores para este diseño.

Cuando se emplean conglomerados sistemáticos de tamaño variable, como los casos f y h, usualmente se emplean estimadores de razón, descritos en la sección III.2.5. Los mismos estimadores se emplean con diseños como el caso d.

A continuación se describen los estimadores para un diseño por conglomerados bietápico, con bloques de tamaño constante y muestras de la segunda etapa también constantes, dentro de los bloques.

Principio

Una población (superficie boscosa) se divide en N bloques, todos de igual tamaño. Cada bloque está integrado, a su vez, por M unidades (parcelas), también de tamaño constante.

En una primera etapa, se seleccionan al azar n bloques. Dentro de cada bloque seleccionado, se localizan m unidades muestrales (parcelas). En cada unidad j de cada bloque i se valoriza un atributo y_{ij} .

El total poblacional de y es el siguiente:

$$Y = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M y_{ij} = \sum_{i=1}^N M \bar{y}_i = MN \bar{Y} \quad (3-126)$$

Donde el promedio poblacional por unidad es:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M y_{ij}}{MN} \quad (3-127)$$

Estimadores

El siguiente es un estimador insesgado del promedio poblacional por unidad de la segunda etapa (parcelas):

$$\bar{Y} \hat{=} \hat{\bar{Y}} = \frac{\sum^n \sum^m y_{ij}}{nm} = \frac{1}{n} \sum^n \bar{y}_i = \bar{y} \quad (3-128)$$

Donde

$\bar{y}_i$ es la media en la unidad primaria (bloque) i :

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum^m y_{ij} \quad (3-129)$$

El total poblacional es estimado, también insesgadamente, así:

$$\hat{Y} = NM \frac{1}{n} \sum^n \bar{y}_i = \frac{NM}{nm} \sum^n \sum^m y_{ij} = NM \bar{y} \quad (3-130)$$

Varianza de los estimadores

La varianza total puede partirse en dos componentes aditivos:

$$\begin{aligned} NM\sigma^2 &= \sum^N \sum^M (y_{ij} - \bar{Y})^2 = \sum^N \sum^M \left((y_{ij} - \bar{Y}_i) + (\bar{Y}_i - \bar{Y}) \right)^2 \\ &= \sum^N \sum^M (y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 + M \sum^N (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2 \\ &\quad + 2 \sum^N \sum^M (y_{ij} - \bar{Y}_i) \cdot (\bar{Y}_i - \bar{Y}) \end{aligned}$$

Puesto que el último término es igual a cero, resulta:

$$\sigma^2 = \frac{\sum^N \sum^M (y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{NM} + \frac{\sum^N (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2}{N} = \sigma_w^2 + \sigma_b^2$$

medición de rodales

Donde σ_w^2 = varianza dentro de conglomerados

σ_b^2 = varianza entre medias de conglomerados

Las varianzas corregidas son las siguientes:

$$Sb^2 = \frac{\sum (\bar{Y}_i - \bar{Y})^2}{(N-1)} ; Sw^2 = \frac{\sum \sum (y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{N(M-1)} \quad (3-131) \quad (3-132)$$

La varianza del estimador de la media se obtiene empleando el principio de varianzas condicionadas (COCHRAN 1977). La expresión final es:

$$V(\bar{y}) = \frac{N-n}{N} \frac{Sb^2}{n} + \frac{M-m}{M} \frac{Sw^2}{mn} = (1-f_1) \frac{Sb^2}{n} + (1-f_2) \frac{Sw^2}{mn} \quad (3-133)$$

Cuando las fracciones muestrales son ambas irrelevantes, la varianza se aproxima al siguiente valor:

$$V(\bar{y}) \doteq \frac{Sb^2}{n} + \frac{Sw^2}{mn} \quad (3-134)$$

Error de estimación

A continuación se presenta un estimador insesgado de la varianza del estimador $\bar{y}$. Como es usual, éste es llamado error de estimación de $\bar{Y}$ o error del estimador $\hat{\bar{Y}}$.

$$S\hat{\bar{y}}^2 = (1-f_1) \frac{sb^2}{n} + f_1(1-f_2) \frac{sw^2}{nm} \quad (3-135)$$

Donde $f_1 = \frac{n}{N}$; $f_2 = \frac{m}{M}$

$$sb^2 = \frac{\sum (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{n-1} ; sw^2 = \frac{\sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{n(m-1)} \quad (3-136) \quad (3-137)$$

Otras expresiones más prácticas para el cálculo de las varianzas muestrales son las siguientes:

$$sb^2 = \frac{1}{m^2(n-1)} \left(\sum^n \left(\sum^m y_{ij} \right)^2 - \left(\sum^n \sum^m y_{ij} \right)^2 / n \right) \quad (3-138)$$

$$sw^2 = \frac{1}{n(m-1)} \left(\sum^n \sum^m y_{ij}^2 - \sum^n \left(\sum^m y_{ij} \right)^2 / m \right) \quad (3-139)$$

Es interesante observar que mientras sw^2 es un estimador insesgado de Sw^2 , Sb debe estimarse a través de:

$$\hat{Sb}^2 = sb^2 - \frac{sw^2(1-f_2)}{m}$$

Ejemplo:

En la Figura 3-24, se observa la población I dividida en $N=16$ bloques con $M=25$ unidades cada uno. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de $n=7$ unidades primarias, cada una con $m=4$ unidades secundarias o parcelas (Cuadro 3-16).

A medida que la fracción muestral n/N se va haciendo más pequeña, el segundo término de la expresión de error se aproxima a cero, de modo que el error de estimación sólo tiende a depender de la variabilidad entre bloques. De este modo, el estimador del error para el muestreo bietápico se aproxima al estimador para conglomerados sistemáticos que es un estimador MAS.

Cuadro 3-16. Muestreo por conglomerados bietápico sobre la población I, con $n=7$ bloques y $m=4$ unidades por bloque (Figura 3-24)

Bloque (i)	Valor y_{ij}				$\sum^m y_{ij}$	$\left(\sum^m y_{ij} \right)^2$	$\sum y_{ij}^2$
	j=1	2	3	4			
1 (A- II)	19.4	17.7	11.8	13.0	61.9	3831.61	997.89
2 (A-III)	0.0	6.5	3.5	0.0	10.0	100.00	54.50
3 (B- II)	17.1	17.1	28.9	27.1	90.2	8136.04	2154.44
4 (B- IV)	0.6	0.0	13.6	15.9	30.1	906.01	438.13
5 (C- I)	25.3	21.2	13.0	21.8	81.3	6609.69	1733.77
6 (C-III)	20.6	7.7	11.8	17.1	57.2	3271.84	915.30
7 (D-III)	0.0	0.6	1.8	0.0	2.4	5.76	3.60
	$\sum^n ()$				333.1	22860.95	6297.63

medición de rodales

	I					II					III					IV					
1	130	153	153	112	200	106	100	147	118	165	—	—	12	—	35	—	18	—	—	24	A
2	124	106	136	130	165	141	194	212	136	88	100	—	12	65	88	—	100	30	12	47	
3	177	165	136	124	171	106	82	177	147	165	118	82	47	6	88	12	30	—	—	24	
4	165	112	124	118	153	118	224	136	118	159	141	65	35	24	—	30	30	53	53	30	
5	100	82	118	153	147	130	130	112	88	118	147	153	88	53	71	—	—	94	47	30	
6	224	247	217	230	130	259	277	100	147	171	200	171	118	141	82	59	71	6	—	—	B
7	253	200	135	271	277	271	230	206	242	177	141	200	135	153	106	153	124	71	30	6	
8	212	277	265	212	206	171	289	259	183	247	194	277	183	165	88	106	118	136	53	71	
9	224	283	247	300	100	318	277	306	177	200	177	271	141	71	124	71	188	171	159	94	
10	100	141	265	277	306	165	253	265	271	159	236	188	300	165	147	241	118	159	82	124	
11	277	330	253	218	177	353	330	253	171	194	241	177	177	118	88	106	118	188	77	165	C
12	224	212	159	224	141	183	283	188	147	183	206	183	130	88	59	130	141	112	106	94	
13	271	318	200	271	218	253	260	200	147	259	253	77	165	242	153	194	106	224	59	141	
14	277	277	206	236	230	230	294	165	294	212	259	159	94	124	212	100	159	124	218	200	
15	130	218	65	171	165	194	171	206	312	94	153	118	171	71	136	147	88	100	153	124	
16	218	130	118	130	82	171	147	124	177	183	159	94	124	212	100	159	124	100	82	71	D
17	106	147	153	118	159	153	153	130	112	177	88	12	41	18	24	88	53	41	—	18	
18	130	200	194	100	141	165	153	147	177	194	106	35	—	18	—	—	35	30	41	35	
19	77	165	159	159	183	118	124	124	94	159	71	—	100	18	6	6	—	—	—	30	
20	188	183	177	130	94	153	47	188	112	118	18	18	—	—	—	12	—	30	59	12	
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	

Figura 3-24. Muestreo por conglomerados bietápico sobre la población I.
 $N=16$, $M=25$, $n=7$, $m=4$

$$\hat{\bar{Y}} = \bar{\bar{y}} = \frac{333.1}{7.4} = 11.90 (m^3 / parcela)$$

$$sb^2 = \frac{1}{4^2(7-1)} \left(22860.95 - \frac{(333.1)^2}{7} \right) = 73.02$$

$$sw^2 = \frac{1}{7(4-1)} \left(6297.63 - \frac{22860.95}{4} \right) = 27.73$$

$$S_{\bar{y}}^2 = \left(1 - \frac{7}{16}\right) \frac{73.02}{7} + \frac{7}{16} \left(1 - \frac{4}{25}\right) \frac{27.73}{7 \cdot 4}$$

$$= 5.87 + 0.36 = 6.23$$

$$S_{\bar{y}} = 2.5 \quad ; \quad S\% = \frac{2.5}{11.90} \cdot 100 = 21\%$$

Asumiendo que el estimador $\hat{\bar{Y}}$ tiende a distribuirse normalmente en muestras grandes y de acuerdo con el valor t en muestras pequeñas, los límites confidenciales para un nivel de confianza $1-\alpha = 0.95$ son:

$$\left(\hat{\bar{Y}} \pm t S_{\bar{y}}\right) \quad ; \quad 11.90 \pm 2.45 \cdot 2.5 \quad ; \quad (5.78 - 18.02)$$

El valor de t es el tabulado para $n-1$ grados de libertad.

Optimización del diseño por conglomerados

El diseño óptimo de muestreo en conglomerados bietápico es aquel donde m y n tienen un valor tal, que la varianza del estimador es mínima para un determinado costo de muestreo; o bien, que el costo de muestreo es mínimo para una varianza del estimador que es la máxima aceptable. Esto equivale a encontrar el valor mínimo para una función correspondiente al producto de la varianza del estimador y el costo de muestreo.

Como expresión del costo de muestreo se emplea usualmente la siguiente función:

$$c = c_1 n + c_2 n \cdot m$$

Donde c_1 es el costo de acceso a una unidad primaria (bloque) y c_2 el costo de medir una unidad secundaria dentro de una determinada unidad primaria.

Empleando la expresión (3-133) de la varianza, multiplicando por la función de costo, derivando la expresión resultante respecto a m e igualando a cero, de acuerdo con el procedimiento descrito por COCHRAN (1977), se obtiene la siguiente función para m :

$$m_{opt} = \frac{Sw}{\sqrt{(Sb^2 - Sw^2 / M)}} \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} \quad (3-140)$$

medición de rodales

Si M es grande, el segundo término dentro de la raíz se aproxima a cero y la expresión se simplifica:

$$m_{opt} = \sqrt{\left(\frac{Sw^2 c_1}{Sb^2 c_2} \right)} \quad (3-141)$$

El valor de n se determina resolviendo la expresión de costo o de la varianza, dependiendo de cuál es el factor limitante.

Una vez obtenido el valor óptimo de m , es preciso comprobar si la función de costo es válida dentro del rango donde se encuentra la solución. Si ello no ocurre, la solución no es válida y es preciso ajustar el valor de m de acuerdo con el comportamiento de la función de costo.

Ejemplo:

Para muestrear sobre la población I con bloques de $M = 25$ unidades, con varianzas estimadas como:

$$\hat{Sb}^2 = sb^2 - \frac{sw^2(1 - f_2)}{m} = 73.02 - \frac{27.73(1 - 4/25)}{4} = 67.20 \quad (3-142)$$

$$\hat{S}^2 w = sw^2 = 27.73$$

Con costos de acceso por bloques de US\$50 y un costo de medición de cada unidad en los bloques de US\$4, el tamaño óptimo de la muestra por bloque en la segunda etapa se estima así:

$$\frac{5.26}{\sqrt{\left(67.20 - \left(\frac{27.73}{25} \right) \right)}} \sqrt{\left(\frac{50}{4} \right)} = 2.3 \sim 2 \text{ unidades por bloque}$$

El error de estimación de m_{opt} puede ser muy grande, si la muestra en que se basa su estimación es pequeña. COCHRAN (1977) analiza este problema y presenta los límites confidenciales para el m óptimo estimado.

III.2.8 Muestreo en bloques

Usos

En inventarios de extensas superficies boscosas con bajas intensidades muestrales, una buena práctica es dividir la población en bloques de igual tamaño y distribuir en cada bloque un número fijo de unidades muestrales. Este diseño presenta dos ventajas:

- a) La muestra se distribuye en forma más homogénea sobre la población.
- b) La variación dentro de los bloques es generalmente menor que la variación en toda la población, por lo que puede estimarse con un menor error, para un mismo tamaño muestral, comparado con un MAS.

Principios

La población se divide en N bloques. En cada uno se distribuye aleatoriamente una muestra constante de m unidades muestrales. El tamaño total de la muestra es, entonces, de $N \cdot m$ unidades muestrales.

Para el muestreo en bloques valen los mismos principios que para el muestreo por conglomerados bietápico, en el caso extremo en que todas las unidades de la primera etapa (bloques) sean muestreadas ($n = N$).

Estimadores

El promedio poblacional se estima de acuerdo con la expresión (3-128), donde $n = N$:

$$\hat{\bar{Y}} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m y_{ij}}{Nm} = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{y}_i}{N} = \bar{y} \quad (3-143)$$

Donde

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^m y_{ij}}{m} \quad (3-143a)$$

$$\hat{Y} = M \sum_{i=1}^N \bar{y}_i = NM \bar{y} \quad (3-144)$$

El error de estimación de la media poblacional, de acuerdo con la expresión (3-135), para una fracción muestral en la primera etapa de $f_1 = 1$, es:

$$S_{\hat{Y}}^2 = \left(1 - \frac{m}{M}\right) \frac{sw^2}{Nm} \quad (3-145)$$

Donde sw^2 se determina con (3-137) o (3-139):

$$sw^2 = \frac{\sum^N \sum^m (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{N(m-1)} = \frac{1}{N(m-1)} \left(\sum^N \sum^m y_{ij}^2 - \frac{\sum^N \left(\sum^m y_{ij} \right)^2}{m} \right) \quad (3-146)$$

Los mismos estimadores y su correspondiente error se obtienen asumiendo un muestreo estratificado con $L = N$ estratos, todos de igual tamaño y con una muestra de tamaño constante $nh = m$ distribuida al azar en cada estrato.

III.2.9 Muestreo con probabilidad variable

En todos los diseños muestrales descritos hasta aquí, la probabilidad de seleccionar individuos de la población para integrar una muestra ha sido constante. Si el número de individuos en la población es N , la probabilidad de seleccionar cualquiera de ellos es:

$$p_i = \frac{1}{N}$$

En muchas ocasiones es posible diseñar sistemas de estimación muestral estableciendo probabilidades variables de selección para cada individuo de la población. De este modo, las estimaciones pueden ser más eficientes y pueden evitarse sesgos que afectan a otros diseños.

III.2.9.1 Muestreo de lista a priori (PPS)*

Usos

El muestreo de lista a priori se emplea cuando:

- a) Existe una variable (auxiliar) cuyo valor z_i se conoce o puede obtenerse a bajo costo, antes de seleccionar la muestra para toda la población.

* La sigla PPS corresponde a una abreviatura de la denominación inglesa: Probability Proportional to Size.

- b) Esta variable auxiliar tiene una alta correlación con la variable y que describe a la población.
- c) Es posible elaborar un proceso de selección muestral donde la probabilidad de selección de cada individuo es proporcional al valor de z .

Existen muchos campos en la actividad forestal donde se dan condiciones como las mencionadas:

- Evaluación de algún atributo de industrias forestales relacionado con su productividad y , en circunstancias en que existe información estadística de las empresas z como número de empleados, consumo de electricidad, etc.
- Estimación de atributos de rodal, como volúmenes y , cuando se dispone de una lista o un plano con la superficie de los rodales. Una situación similar se plantea cuando se debe estimar la superficie real y plantada durante el último año en una región, si se dispone de una lista de las superficies supuestamente plantadas z .
- Selección de una muestra de árboles en parcelas para medición directa de volumen y por secciones, donde previamente se le ha medido a cada árbol su diámetro d y es fácil estimar ocularmente su altura h . La variable z en función de la cual se seleccionan los árboles que integrarán la muestra, puede ser $z_i = d_i^2 h_i$.
- Un ejemplo relacionado con inventarios se ilustra con la Figura 3-25. Se trata de un bosque de forma irregular, que se extiende a lo largo de un angosto valle. El bosque se inventaría con unidades muestrales consistentes en fajas o líneas de parcelas que se extienden desde el fondo del valle en dirección norte-sur.

Una posibilidad consiste en seleccionar puntos de partida al azar desde el río y muestrear con líneas de parcelas hasta el límite del bosque. Puesto que las unidades muestrales serían de

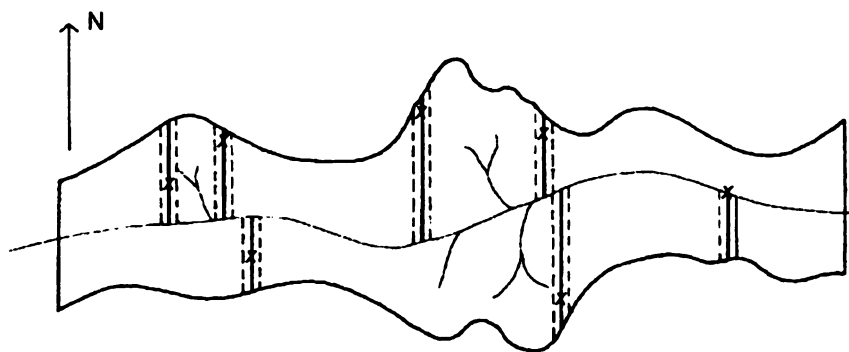


Figura 3-25. Muestreo en fajas localizadas con probabilidad proporcional a su tamaño

dimensión variable, el estimador que se estaría empleando sería de razón (sección III.2.5). Si el número de líneas es pequeño, las estimaciones podrán sesgarse.

Una opción PPS consiste en distribuir puntos en forma aleatoria sobre el bosque (Figura 3-25). Cada punto localiza el eje de una línea o faja. Puesto que la cantidad de puntos que pueden ubicarse sobre una línea o faja es proporcional a su longitud, la probabilidad de selección de una determinada línea es proporcional a su longitud o superficie. Dadas las propiedades del muestreo PPS, la estimación que se realice en base a las líneas seleccionadas será insesgada.

El Cuadro 3-17 presenta una población de 50 árboles de la especie eucalipto, medidos para la construcción de funciones de volumen. Cada árbol se describe con su diámetro, altura y volumen.

Cuadro 3-17. Población III. Cincuenta árboles de la especie eucalipto, seleccionados al azar desde un muestra, para construcción de funciones de volumen

Arb.	Dap cm	h m	dap ² (z) acumulado	Vol(y) m ³	Arb.	Dap cm	h m	Dap ² (z) acumu- lado	Vol(y) m ³
1	56	41.0	3136	3.48	26	10	17.2	39294	0.06
2	12	18.0	3280	0.08	27	29	36.9	40135	0.81
3	27	32.3	4009	0.64	28	26	30.1	40811	0.51
4	48	49.5	6313	3.12	29	21	28.0	41252	0.30
5	34	42.0	7469	1.44	30	13	19.7	41421	0.10
6	33	42.1	8558	1.35	31	9	14.9	41502	0.04
7	30	30.9	9458	0.72	32	27	24.9	42231	0.47
8	41	42.4	11139	1.53	33	76	45.5	48007	5.70
9	55	34.1	14164	2.37	34	21	20.5	48448	0.21
10	65	44.9	18389	4.27	35	60	41.5	52048	3.61
11	41	43.7	20070	1.44	36	37	28.9	53147	0.77
12	26	22.5	20746	0.55	37	56	44.1	56553	3.40
13	17	23.7	21035	0.24	38	16	24.5	56809	0.16
14	27	35.5	21764	0.77	39	75	46.9	62434	6.08
15	62	50.1	25608	4.44	40	20	30.2	62834	0.39
16	34	27.5	26764	0.88	41	104	54.0	73650	12.10
17	18	25.5	27088	0.19	42	46	45.5	75766	2.54
18	77	45.3	33017	6.52	43	13	23.5	75935	0.12
19	52	45.2	35721	2.81	44	107	53.0	87384	15.18
20	14	22.7	35917	0.13	45	26	28.3	88060	0.55
21	24	27.1	36493	0.38	46	27	29.1	88789	0.55
22	38	48.4	37937	1.80	47	41	28.8	90470	0.90
23	31	33.9	38898	0.92	48	70	56.8	95370	8.12
24	10	15.3	38998	0.04	49	43	39.2	97219	1.84
25	14	16.1	39194	0.09	50	45	45.5	99244	2.26
					Σ ()	1904	1717.2	99244	106.97
					Σ () ²	99244			

Parámetros poblacionales

$$N = 50 ; Y = 106.97 ; \bar{Y} = 2.1394 ; Z = 99244 ; \bar{Z} = 1984.88 ; Z_{max} = d^2_{max} = 11449$$

$$r_i = y_i / z_i ; Sr = 2.742 \cdot 10^{-4} ; Sr\% = 31.005 ,$$

$$R = \frac{Y}{Z} = 0.0010778 ; \bar{R} = \frac{\sum y_i / z_i}{N} = 0.0008844$$

$$Sy = 3.05556 ; Sy\% = 142.8$$

Principios

Se quiere determinar el valor total de un atributo y de toda una población. Cada individuo posee un atributo z_i y se conoce también su valor total $Z = \sum z_i$.

Se selecciona una muestra de n individuos con reemplazo en un proceso al que cada individuo concurre con una probabilidad p_i de ser seleccionado, donde:

$$p_i = z_i / Z \quad (3-147)$$

Procedimiento de selección proporcional a z

El Cuadro 3-17 permite realizar una selección z -proporcional de individuos, que se facilita si se cuenta con una lista acumulativa de los atributos z por individuo. Conviene que la variable z se exprese en valores enteros. En dicha población, la variable descriptiva y es el volumen y la variable auxiliar z puede ser el diámetro d . Una mejor variable auxiliar es d^2 , puesto que su correlación con el volumen es más alta.

Selección sobre lista acumulada

Un procedimiento de selección con probabilidad z -proporcional sobre una lista acumulada es el siguiente:

medición de rodales

- a) Se prepara una lista acumulativa de valores z , como en el Cuadro 3-17.
- b) Para seleccionar cada individuo que integra la muestra:
- Se genera un número aleatorio (Rd) uniformemente distribuido en el rango 1 a Z . En el ejemplo, 1 a 99244.

Un procedimiento simple para generar Rd es el siguiente:

- Se genera un número aleatorio uniformemente distribuido en el rango 0-1 (rd).
- Se transforma rd (en rango 0-1) en Rd de la siguiente forma:

$$Rd = A + INT(rd(B - A + 1))$$

Donde A y B son los extremos del rango. $INT ()$ representa la parte entera de la operación efectuada dentro del paréntesis.

Ejemplo:

para $rd = 0.839050$ y $(A - B) = (1 - 99244)$,

$$Rd = 1 + INT(0.839050 \cdot 99244) = 83271$$

- Queda seleccionado el individuo en cuyo dominio de la variable z acumulada se encuentra Rd . En el ejemplo, el individuo seleccionado es el 44.
- Se repite el proceso de generación de un Rd hasta completar la muestra deseada.

La probabilidad de selección para el individuo 44 es la siguiente:

$$P_{44} = \frac{87384 - 75935}{99244} = \frac{11449}{99244} = \frac{107^2}{99244} = \frac{z_i}{Z}$$

Lo mismo para cualquier individuo de la población.

El Cuadro 3-18 describe la selección de una muestra de $n=10$ árboles con probabilidad z -proporcional.

Cuadro 3-18. Selección de $n=10$ árboles sobre la población III, con probabilidad proporcional a $z=d^2$ con reemplazo selección PPS y selección MAS sin reemplazo

i	Selección Rd	Selección PPS(c/r)	Selección MAS (s/r)
1	35689	19	43
2	18667	11	12
3	98676	50	1
4	348	1	10
5	25056	15	8
6	2589	1	29
7	7301	5	34
8	24797	15	25
9	31389	18	47
10	25941	16	18

Selección sobre una lista no acumulada

Un procedimiento de selección z -proporcional sobre una lista no acumulada, probabilísticamente equivalente al descrito para lista acumulada, es el siguiente (RAJ 1968).

- a) Se determina el valor máximo de la variable $z: Z_{max}$. En el ejemplo, Cuadro 3-17, $Z_{max} = 107^2 = 11449$.
- b) Para seleccionar cada individuo que integrará la muestra:
 - Se generan dos números aleatorios enteros: Rd_1 y Rd_2 .
 - Rd_1 , en el rango 1- N (en el ejemplo 1-50): representa la preselección del individuo cuyo número de orden corresponde a Rd_1 .
 - Rd_2 , en el rango 1- Z_{max} .
 - Si $Rd_2 \leq Z_{Rd_1}$, es seleccionado el individuo con el número de orden Rd_1 .
 - Si $Rd_2 > Z_{Rd_1}$, el individuo Rd_1 preseleccionado es rechazado y se genera un nuevo par (Rd_1, Rd_2) , hasta que el proceso concluya en su selección.
 - El proceso continúa hasta seleccionar la muestra del tamaño n deseado.

medición de rodales

Ejemplo:

Sea el primer par seleccionado $(Rd_1, Rd_2) = (12, 5695)$. $Rd_2 = 5695 > Z_{12} = 26^2 = 676$; luego, el individuo 12 no queda seleccionado. El resto del proceso de selección para una muestra de $n = 4$ individuos se muestra en el Cuadro 3-19.

Los individuos seleccionados en el proceso son los que poseen los números de orden 41, 37, 35 y 18.

El proceso de selección con lista no acumulada puede ser muy ineficiente cuando el rango de variación de los valores z es muy grande. En el ejemplo, la probabilidad de que una selección concluya en rechazo es:

$$p = 1 - \bar{Z} / z_{max} = 1 - \frac{(99244 / 50)}{(107)^2} = 0.82$$

Es decir, aproximadamente 8 de cada 10 selecciones concluyen en rechazo.

Cuadro 3-19. Proceso de selección Z -proporcional de individuos en base a una lista no acumulada. Rd_1 en rango 1-50, y Rd_2 en rango 1-11449

Rd_1	Rd_2	Selección	Rd_1	Rd_2	Selección	Rd_1	Rd_2	Selección
42	8077	No	27	845	No	49	11325	No
37	4029	No	37*	3107	Sí	1	4840	No
34	4588	No	40	7485	No	11	3860	No
36	10594	No	6	9472	No	29	11022	No
30	2234	No	35*	995	Sí	16	2503	No
3	10779	No	46	2321	No	35	4293	No
14	8148	No	35	7309	No	47	10243	No
41*	1740	Sí	46	5386	No	18*	2261	Sí

Estimadores

Para una muestra de n individuos, seleccionados con reemplazo y probabilidad z -proporcional, se demuestra fácilmente que el siguiente es un estimador insesgado del total poblacional:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum \frac{y_i}{p_i} = \bar{q} = Z \frac{1}{n} \sum \frac{y_i}{z_i} = Z\bar{r} \quad (3-148)$$

Donde

$$pi = zi / Z$$

$$ri = yi / zi$$

$$qi = yi / pi$$

La varianza del estimador es la siguiente:

$$v(\hat{Y}) = \frac{1}{n} \sum^N pi \left(\frac{yi}{pi} - Y \right)^2 \quad (3-149)$$

Errores de estimación

El siguiente es un estimador insesgado de la varianza del estimador $\hat{Y}$, llamado comúnmente error del estimador $\hat{Y}$ o error de estimación de Y :

$$S_{\hat{Y}}^2 = \frac{\sum^n (qi - \bar{q})^2}{n(n-1)} = \frac{Z^2 \sum^n (ri - \bar{r})^2}{n(n-1)} = \frac{Z^2}{n(n-1)} \left[\sum^n r^2 - \left(\sum^n r \right)^2 / n \right] \quad (3-150)$$

Ejemplo:

El Cuadro 3-20 presenta $n=10$ selecciones PPS, las que concluyen con sólo 8 diferentes individuos seleccionados, pues los individuos 1 y 15 se repiten en dos selecciones. El mismo cuadro presenta los valores poblacionales y los estimadores PPS.

Eficiencia de muestreo PPS

El error de estimación del volumen es 4.56 m³ (4.3%), y el error esperado (varianza del estimador y) es de 7.37 (6.89%) (Cuadro 3-20).

Si en lugar de muestrear PPS se hubiera realizado un muestreo aleatorio simple, de acuerdo con los parámetros del Cuadro 3-20, el error de estimación esperado para una muestra del mismo tamaño sería:

$$\sigma_{y\%} = \frac{\frac{S_y}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(1 - \frac{n}{N}\right)}}{\bar{Y}} \cdot 100 = 40.4\%$$

Cuadro 3-20. Cálculo de estimación para una muestra PPS de la población III

i	Ind. selec.	Vol. Yi	d^2_{zi}	y_i/z_i r_i	r_i^2	Parámetros poblacionales		Expr.	Estimador muestral	Expr.
1	19	2.81	2704	1.039 E-3	1.0795 E-6	Z	99244			
2	11	1.44	1681	0.857 E-3	7.3445 E-7	N	50			
3	50	2.26	2025	1.116 E-3	1.2455 E-6	$\bar{Y}$	106.97	3-37	105.7	3-148
4	1	3.48	3136	1.110 E-3	1.2321 E-6	$\bar{Y}$	2.1394	3-36	2.114	
5	15	4.44	3844	1.155 E-3	1.3340 E-6	$\bar{Y}$	2.742 E-4	3-41	1.535 E-4	
6	1	3.48	3136	1.110 E-3	1.2321 E-6	Sr	31.005	3-43	14.4	
7	5	1.44	1156	1.246 E-3	1.5525 E-6	Sr%				
8	15	4.44	3844	1.155 E-3	1.3340 E-6	$\sigma \bar{y}$	7.368	3-149	4.565	3-150
9	18	6.52	5929	1.110 E-3	1.2100 E-6	$\sigma \hat{Y} \%$	6.89		4.32	
10	16	0.88	1156	0.761 E-3	5.7912 E-7					

El error de estimación MAS sería, en este caso, casi seis veces mayor que el correspondiente error PPS.

La eficiencia del muestreo PPS es mayor que la del MAS cuando existe una correlación positiva entre z e y^2/z . La eficiencia es mayor mientras más alta es la correlación.

III.2.9.2 Muestreo de lista a posteriori (PPP)

Usos

En ciertas poblaciones se dan las siguientes circunstancias:

- Resulta fácil valorizar en cada individuo de dimensión y_i , un atributo z_i tal que el cociente y/z presenta poca variabilidad, por existir una alta correlación positiva entre y y z .
- No se cuenta con una lista de los valores z como para realizar un muestreo PPS, pero es posible implementar un sistema de muestreo donde cada individuo de la población puede ser visitado para decidir si integra o no la muestra.

La variable z empleada debe ser tal que sea posible producir una buena estimación de su valor total y del valor máximo que puede adoptar, antes de iniciar el muestreo.

Algunos ejemplos de uso:

- Población de rollizos (trozas) en la cancha de un aserradero. Todas las trozas son fácilmente accesibles y su volumen puede ser estimado ocularmente (z_i). En lugar del volumen, puede estimarse, también, su diámetro d y longitud ℓ y emplear como variable z el producto $d^2 \ell$. Durante la visita, se van seleccionando trozas de muestra, con probabilidad proporcional a z a las cuales se les mide el volumen y_i .
- Población de árboles en parcelas. En cada árbol se mide al menos el diámetro d , y puede estimarse su altura. La variable z se define en función del diámetro medido (d^2)

o del diámetro y la altura estimada (ejemplo: $z = d^2 h$). El volumen y se mide en una muestra de árboles seleccionados con probabilidad proporcional a z . Mediante una función de rendimiento, es posible estimar el valor total de la variable z en la parcela, y en una apreciación ocular rápida se puede estimar su valor máximo.

Principio

El procedimiento de muestreo PPP es el siguiente:

- a) Se elige una variable z que presente las características antes mencionadas.
- b) Se estima el total de los valores z (Z_{est}) y el valor máximo que puede adoptar z (Z_{max}), y se establece el tamaño deseable para la muestra ($ndes$).
- c) Se establece un valor Z_o correspondiente al cociente entre el valor total estimado para la variable z y tamaño muestral deseado:

$$Z_o = Z_{est} / ndes \quad (3-151)$$

Z_o debe ser mayor o igual que Z_{max} ; de lo contrario, todos los individuos con un valor z_i mayor que Z_o se consideran pertenecientes a una subpoblación, que se censa.

- d) Frente a cada individuo i ($i = 1$ a N), se determina el valor z_i y se genera un número aleatorio (R_{di}) uniformemente distribuido, con valor menor o igual a Z_o .
- e) Si z_i es mayor o igual que R_{di} , el individuo es seleccionado para la muestra y se mide su atributo y_i . De lo contrario, si z_i es menor que R_{di} , el individuo no es seleccionado.

Al final del proceso de muestreo se conocerá el valor exacto del total de la variable z (Z), y se habrá seleccionado una muestra de n individuos, cuyo número será variable y aleatorio.

La probabilidad de seleccionar cualquier individuo para integrar la muestra es la siguiente:

$$p_i = z_i / Z_o \quad (3-152)$$

Resulta fácil demostrar que la esperanza del tamaño de la muestra es la siguiente (DE VRIES 1986):

$$E[n] = Z / Z_o \quad (3-153)$$

Entonces, puesto que $Z_o = Z / E[n]$, al emplear un $Z_o = Z_{est} / ndes$, el número de individuos que integra la muestra deberá resultar cercano a $ndes$, siempre que Z_{est} sea una estimación cercana al Z real y que $ndes$ sea grande.

La varianza de n es aproximadamente la siguiente:

$$Sn^2 \doteq n - \frac{n^2}{N} \quad (3-154)$$

Estimadores

El total poblacional de y es estimado insesgadamente con el siguiente estimador:

$$\hat{Y} = \sum \frac{y_i}{p_i} = Z_o \sum \frac{y_i}{z_i} \quad (3-155)$$

La varianza del estimador $\hat{Y}$ es la siguiente:

$$V(\hat{Y}) = \sum \left(\frac{1 - p_i}{p_i} \right) y_i^2 \quad (3-156)$$

Un estimador de esta varianza, llamada error de estimación de Y o error del estimador $\hat{Y}$, es el siguiente:

$$S^2_{\hat{Y}} = Z_o \sum (Z_o - z_i) \left(\frac{y_i}{z_i} \right)^2 \quad (3-157)$$

Se puede comprobar que el estimador $\hat{Y}$ no es eficiente, pues su varianza es muy grande.

Estimadores alternativos

Los estimadores PPS pueden emplearse en lugar de los estimadores PPP, con bajo riesgo de sesgo y mayor eficiencia, cuando Z_{est} resulta una buena estimación de Z y la muestra es grande.

De acuerdo con la expresión (3-153), se tiene:

$$Z_o = \frac{Z}{E[n]}$$

Asumiendo que Z es semejante a Z_{est} y que, por lo mismo y al ser la muestra grande, $E[n]$ es semejante a $ndes$ y también al n resultante, se tiene:

$$Z_o = \frac{Z_{est}}{ndes} \doteq \frac{Z}{n}$$

Luego, reemplazando Z_o por su valor aproximado Z / n en (3-152), resulta:

$$p_i = \frac{z_i}{Z_o} \doteq n \frac{z_i}{Z}$$

La expresión de la derecha es igual a la probabilidad de seleccionar un individuo cualquiera i en una muestra PPS de tamaño n ; luego pueden emplearse los estimadores PPS: Y es estimado mediante (3-148) y su error de estimación $S_{\hat{Y}}$, mediante (3-150).

Ejemplo:

El Cuadro 3-21 se ha derivado del Cuadro 3-17, que presenta a la población III. Se han conservado las columnas correspondientes a la variable d y a la variable $z = d^2$. El total de la variable z se ha estimado en 100.000, y el valor de z máximo, en 12.000.

Como se desea obtener una muestra de tamaño $ndes = 8$, el valor de Z_o que se empleará será el siguiente (3-151):

$$Z_o = \frac{Z_{est}}{ndes} = \frac{100000}{8} = 12500$$

La columna " Rdi " del Cuadro 3-21 muestra los números aleatorios Rdi en el rango 1-12500 generados frente a cada árbol de la población. En la columna " S " se señalan con un asterisco los árboles seleccionados, es decir, aquellos que poseen un valor z_i mayor o igual que el valor aleatorio Rdi .

Empleando los estimadores insesgados se tiene para el total poblacional, cuyo valor es 106.97 m², el siguiente valor estimado (3-155):

$$\hat{Y} = 12500 \cdot 0.007005 = 87.56 \text{ m}^3$$

El error de estimación (3-157) es:

$$S_{\hat{Y}}^2 = 12500 \cdot 0.0384457 = 480.571$$

medición de rodales

$$S_{\hat{Y}} = 21.92 \text{ m}^3 ; S\% = 25.0$$

Empleando, ahora, los estimadores PPS, se tiene para el total (3-148):

$$\hat{Y} = Z \cdot \frac{1}{n} \sum \frac{y_i}{z_i} = \frac{99244}{7} \cdot 0.007004 = 99.31 \text{ m}^3$$

El error de estimación (3-150) es el siguiente:

$$S_{\hat{Y}}^2 = \frac{(99244)^2}{7 \cdot 6} \left[0.00000743046 - (0.007004)^2 / 7 \right] = 99.069$$

$$S_{\hat{Y}} = 9.95 \text{ m}^3 ; S\% = 10.0$$

Estimación del tamaño de la muestra

El tamaño de la muestra puede estimarse en base al coeficiente de variación de la razón y/z . Para el muestreo descrito en el Cuadro 3-21, el coeficiente de variación de los cuocientes y/z es el siguiente:

$$sr\% = \sqrt{\frac{\sum (r_i - \bar{r})^2}{(n-1)}} \cdot \frac{100}{\bar{r}} = 0.00026535 \cdot \frac{100}{0.0010006} = 26.5\%$$

Donde

$$r_i = y_i / z_i$$

Para un error de estimación de 10% ($t=1$), el tamaño muestral se estima en:

$$\hat{n} = \frac{26.5^2}{10^2} = 7 \text{ árboles}$$

Puesto que n es aleatorio, con una variabilidad estimada según la expresión (3-154), conviene agregar al n estimado una medida del error. Así, resulta lo siguiente:

$$n = 7 + \left(7 - \frac{7^2}{50}\right)^{0.5} = 9.5 \sim 10 \text{ árboles}$$

Cuadro 3-21. Muestra PPP en población III, para un $Z_0 = 12500$

i	d _i	d ² =z _i	Rd _i	S	y _i	y _i /z _i	i	d _i	d ² =z _i	Rd _i	S	y _i	y _i /z _i
1	56	3136	6261				26	10	100	8254			
2	12	144	2735				27	29	841	11431			
3	27	729	6477				28	26	676	5915			
4	48	2304	9317				29	21	441	11845			
5	34	1156	3774				30	13	169	7849			
6	33	1089	10158				31	9	81	7911			
7	30	900	2961				32	27	729	6157			
8	41	1681	9753				33	76	5776	5489	*	5.70	0.0009868
9	55	3025	6671				34	21	441	12442			
10	65	4225	1865	*	4.27	0.001011	35	60	3600	1801	*	3.61	0.001003
11	41	1681	7971				36	37	1369	4207			
12	26	676	3410				37	56	3136	11890			
13	17	289	7556				38	16	256	4312			
14	27	729	2387				39	75	5625	8717			
15	62	3844	9981				40	20	400	7163			
16	34	1156	11747				41	104	10816	1276	*	12.10	0.00119
17	18	324	10745				42	46	2116	5989			
18	77	5929	2160	*	6.52	0.001100	43	13	169	11654			
19	52	2704	5177				44	107	11449	10606	*	15.18	0.001326
20	14	196	8819				45	26	676	3955			
21	24	576	5143				46	27	729	5634			
22	38	1444	8735				47	41	1681	6376			
23	31	961	8736				48	70	4900	9243			
24	10	100	8885				49	43	1849	7054			
25	14	196	120	*	0.09	0.0004592	50	45	2025	4722			
							Total		9924		7		0.00705
									4				

III.2.10 Muestreo en dos fases

Usos

Anteriormente se han presentado diseños muestrales que permiten estimar características poblacionales $(Y, \bar{Y})$ mediante estimadores de alta eficiencia como los siguientes:

- Estimadores de razón (sección III.2.5) o de regresión (DE VRIES 1986), que emplean una variable auxiliar z , la que posee una alta correlación con la variable de interés y :

medición de rodales

Estimador de razón:

$$\hat{\bar{Y}} = \frac{Z}{N} \frac{\sum y_i}{\sum z_i} = \bar{Z} \hat{R}$$

Estimador de regresión:

$$\hat{\bar{Y}} = \bar{y} + b(\bar{Z} - \bar{z})$$

- b) Estimadores donde la población es subdividida en L subpoblaciones o estratos homogéneos, cada uno de tamaño relativo Wh :

$$\hat{\bar{Y}} = \sum Wh \bar{y}_h \quad ; \quad Wh = \frac{Ah}{A} = \frac{Nh}{N}$$

Estos estimadores asumen como conocido el valor exacto de ciertos parámetros poblacionales como $Z, \bar{Z}, N, Wh$.

En los inventarios forestales se presentan a menudo situaciones donde no se pueden conocer exactamente dichos parámetros poblacionales, pero es posible estimarlos con bastante precisión y alta eficiencia, en base a muestras grandes (primera fase), mientras que el atributo de interés y , cuya determinación es más costosa, se valoriza en unidades que integran una muestra más pequeña (segunda fase).

Algunos ejemplos son los siguientes:

- a) En una gran muestra distribuida sobre fotografías aéreas o imágenes satelitales (primera fase) se valoriza una variable z , altamente correlacionada con la variables de interés y que es medida en una muestra más pequeña de unidades convencionales en terreno (segunda fase). Dado que el muestreo sobre imágenes de percepción remota es de bajo costo, comparado con la mensura de terreno, los parámetros poblacionales de la variable z se estiman con alta precisión y eficiencia.

Dependiendo del tipo de relación que exista entre y y z , se emplea un estimador de razón o de regresión, sustituyendo en ellos el valor poblacional de z por el valor estimado con precisión en la primera fase.

- b) En un gran número de unidades muestrales de terreno (primera fase) se determina una variable de fácil medición, como el área basal z . En una submuestra de las mismas unidades (segunda fase) se determina, además, el volumen y . Luego se emplea un

estimador de razón o de regresión dependiendo de la relación entre y y z , y se sustituye en ellos, como en el caso anterior, el valor poblacional de la variable z por la estimación precisa basada en la muestra de la primera fase.

- c) Una superficie por inventariar es heterogénea, por lo que se decide estratificarla. Sin embargo, no se considera adecuado delimitar los estratos, determinándose, en cambio, su extensión mediante la clasificación de un alto número de puntos distribuidos sobre imágenes de percepción remota (primera fase). Una submuestra de los puntos clasificados en cada estrato es seleccionada como unidad muestral de terreno (segunda fase), donde se determina la variable de interés y .
- d) Un gran número de unidades se distribuye sobre fotografías aéreas, las cuales se asignan a estratos o clases mediante fotointerpretación (primera fase). Se selecciona una proporción de las unidades fotointerpretadas para comprobar en terreno la veracidad de la interpretación (segunda fase) y ajustar en base a ella la extensión de los estratos.

En esta sección se describirán estimadores adecuados a situaciones a), b) y c).

DE VRIES (1986) describe métodos que se adaptan a las situaciones como d) y otras similares.

Principios

El llamado muestreo en dos fases o muestreo doble consiste, por lo general, en lo siguiente:

En base a una muestra grande de tamaño n' (primera fase) se estima para una variable auxiliar z :

$$\bar{Z}' = \frac{\sum z_i}{n'} ; s_z'^2 = \frac{\sum (z_i - \bar{Z}')^2}{n' - 1}$$

o bien, se clasifican las unidades en estratos, de manera que se pueda estimar el tamaño de cada uno:

$$Wh = \frac{n'h}{n'} ; n' = \sum n'h$$

medición de rodales

En una segunda muestra más pequeña (segunda fase), se mide la variable de interés y se valorizan una serie de estadígrafos, como los siguientes:

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}; \bar{z} = \frac{\sum z_i}{n}$$

$$s^2_y = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n-1}; s^2_z = \frac{\sum (z - \bar{z})^2}{n-1}; s_{zy} = \frac{\sum (z - \bar{z})(y - \bar{y})}{n-1}$$

Cuando la muestra que integra la segunda fase corresponde a una parte de las unidades que integran la fase 1, se dice que las dos fases son dependientes. De lo contrario, ambas son independientes.

III.2.10.1 Muestreo en dos fases con estimador de razón

Estimadores

En base a la muestra de la segunda fase, se determina un estimador para la razón $R = Y / Z$:

$$\hat{R} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{\sum y_i}{\sum z_i} \quad (3-158)$$

Luego, el promedio poblacional se obtiene en base a la razón estimada y al promedio poblacional de la variable auxiliar, estimado en la primera fase:

$$\hat{\bar{Y}} = \hat{R} \bar{Z}' \quad (3-159)$$

Un estimador del total poblacional puede ser el siguiente:

$$\hat{Y} = N \hat{\bar{Y}} \quad (3-160)$$

Para muestras grandes, el estimador $\hat{\bar{Y}}$ es casi insesgado.

Error de estimación

La varianza del estimador $\hat{Y}$ depende de si las fases son dependientes o independientes.

En el caso de fases dependientes con muestra grande en la segunda fase, una buena aproximación a la varianza del estimador $\hat{Y}$ o error de estimación de Y para muestreo en fases con estimador de razón, es según DE VRIES (1986):

$$S_{\hat{Y}}^2 = \frac{sy^2 + \hat{R}^2 s' z^2 - 2\hat{R}szy}{n} + \frac{2\hat{R}szy - \hat{R}^2 s' z^2}{n'} - \frac{sy^2}{N} \quad (3-161)$$

Si, en cambio, ambas fases son independientes, puede emplearse la siguiente expresión para el error del estimador:

$$S_{\hat{Y}}^2 = \frac{N-n}{N} \cdot \frac{sy^2 + \hat{R}^2 s' z^2 - 2\hat{R}szy}{n} + \hat{R}^2 \cdot \frac{N-n'}{N} \cdot \frac{s' z^2}{n'} \quad (3-162)$$

Una expresión equivalente:

$$S_{\hat{Y}}^2 = \bar{Z}'^2 S_R^2 + \hat{R}^2 S_{\bar{Z}'}^2 \quad (3-163)$$

Si se conoce el valor exacto de N , entonces el error del estimador del total poblacional es:

$$S_Y^2 = N^2 S_{\hat{Y}}^2 \quad (3-164)$$

III.2.10.2 Muestreo en dos fases con estimador de regresión

Estimadores

Cuando se emplea el estimador de regresión ordinario, se asume conocida la media poblacional de la variable auxiliar z . En el muestreo en fases, el valor de $\bar{Z}$ es reemplazado por $\bar{Z}'$, su estimador de la primera fase:

medición de rodales

$$\hat{\bar{Y}} = \bar{y} + b(\bar{Z}' - \bar{z}) \quad (3-165)$$

Donde

$$b = \frac{\sum (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{\sum (z_i - \bar{z})^2} \quad (3-166)$$

Error de estimación

Una expresión aproximada para la varianza de $\hat{\bar{Y}}$, cuando las fases son independientes, es la siguiente (DE VRIES 1986):

$$V\left(\hat{\bar{Y}}\right) \doteq \frac{\sigma_{reg}^2}{n} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right) + \beta^2 \frac{\sigma_z^2}{n'} \quad (3-167)$$

En cambio, cuando las fases son dependientes, una expresión igualmente aproximada es:

$$V\left(\hat{\bar{Y}}\right) \doteq \frac{\sigma_{reg}^2}{n} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right) + \beta^2 \frac{\sigma_z^2}{n'} \quad (3-168)$$

Donde β es el coeficiente en el siguiente modelo lineal de regresión:

$$y_i = a + \beta z_i + e_i$$

$$\beta = \frac{\sigma_{zy}}{\sigma_z^2} = \frac{S_{zy}}{S_z^2}$$

$$\sigma_{reg}^2 = V(e_i) = \sigma_y^2 - \beta^2 \sigma_z^2 = \sigma_y^2 (1 - r_{zy}^2)$$

$$r_{zy} = \frac{\sigma_{zy}}{\sigma_z \sigma_y} = \beta \frac{\sigma_z}{\sigma_y}$$

Una expresión bastante aproximada de la varianza de $\hat{\bar{Y}}$, llamada error del estimador $\hat{\bar{Y}}$, que vale tanto para fases dependientes como independientes cuando la muestra es grande en ambas fases, es:

$$S_{\hat{\bar{Y}}}^2 = \frac{sreg^2}{n} + b^2 \frac{sz^2}{n'} \quad (3-169)$$

Una expresión equivalente:

$$S_{\hat{\bar{Y}}}^2 = \frac{sy^2}{n} \cdot \left(1 - \frac{n'-n}{n'} r^2 \right) \quad (3-170)$$

Donde

$$r = \frac{szy}{szsy} = b \frac{sz}{sy}; b = \frac{szy}{sz^2}$$

Un estimador alternativo es (COCHRAN 1977):

$$S_{\bar{y}}^2 = sreg^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{Z}' - \bar{z})^2}{\sum (zi - \bar{z})^2} \right) + \frac{b^2 sz^2}{n'} - \frac{sy^2}{N} \quad (3-171)$$

Donde

$$sreg^2 = \frac{\sum (yi - \bar{y})^2 - b^2 \sum (zi - \bar{z})^2}{n - 2} \quad (3-172)$$

Ejemplo:

El Cuadro 3-22 contiene datos de 120 unidades muestrales (parcelas convencionales de 500 m²) distribuidas aleatoriamente sobre un rodal de 80 hectáreas de pino insigne de 14 años. En las parcelas se midió el área basal ($G = z$) y el volumen ($V = y$). Los campos marcados con asterisco corresponden a una submuestra elegida al azar. Se asume que sólo en ellas se ha medido el volumen. El resultado del muestreo se resume a continuación:

Cuadro 3-22. Resultado de muestrear un rodal de 80 hectáreas midiendo área basal en una muestra de $n' = 120$ parcelas de 500 m²; y volumen en una submuestra de $n = 25$ parcelas de la misma superficie

G m ²	V m ³	G m ²	V m ³	G m ²	V m ³
1.36	7.01	1.02	5.18	1.91	10.81
1.48	8.21	1.60	8.96	1.18	6.51
1.14	6.17	1.92	10.90	1.38	7.51
1.23	7.16*	1.25	6.88*	1.45	7.55*
1.13	6.42	1.72	10.11	2.06	12.19
0.89	4.43	1.73	9.53	1.64	9.61*
1.60	8.71	1.41	7.40	1.48	8.04
1.84	10.36	1.40	6.92	1.63	9.70
2.06	12.06	1.05	5.53	1.52	8.49
1.75	10.21	1.65	8.94	1.06	5.92
1.75	10.15*	1.61	9.14	1.40	7.68
1.78	9.88	1.28	6.79	1.33	7.47
0.71	4.01	1.60	9.30*	1.11	5.96
1.40	7.47	1.10	6.21	1.20	6.61*
1.73	9.79*	1.28	6.79	1.42	7.67
2.00	11.39*	1.53	8.90	1.27	6.79
1.29	7.67*	1.51	8.76*	1.41	7.97
1.55	8.26*	1.22	6.38	1.22	6.12
1.60	8.13	1.65	9.20*	1.34	7.12
1.69	9.93	1.68	9.61	1.25	6.72
1.66	9.21	1.24	6.76	1.11	5.66*
1.02	4.95*	0.98	4.99	1.43	7.68
1.06	4.66	1.35	7.29	1.31	7.13*
1.47	8.63	1.36	8.29	1.91	11.04
1.32	7.44*	1.32	7.18	1.00	5.63
1.28	6.27	1.05	5.77	1.45	7.92
1.62	9.35*	1.95	10.80	1.50	8.07
1.44	8.35	1.17	6.24	1.23	6.18*
0.96	4.97*	0.81	3.98	1.73	9.86
1.26	6.41	1.85	10.63	1.61	8.71
1.09	5.45	1.04	5.74	1.95	11.20
1.46	8.62*	1.32	7.29	1.2	6.67*
1.41	8.09	1.27	7.47	1.46	7.54
1.47	7.94	1.84	10.48	1.86	10.21
0.95	4.65	1.40	7.87	1.33	7.54
1.39	8.48	1.63	9.03	1.44	7.58
1.63	9.47*	1.28	7.33	1.4	8.37
1.26	7.12	1.04	5.47	1.14	6.41
1.67	9.12	1.59	8.81*	0.92	4.62
1.08	5.48*	1.68	9.30	1.54	8.06

- Población: $N = A / a = 1600$
- Primera fase: $n' = 120$

$$\sum_{i=1}^{n'} z_i = 169.80 ; \sum_{i=1}^{n'} z_i^2 = 249.9582; \bar{z}' = 1.415 ; s'^2 z^2 = 0.08144$$

Los siguientes estadígrafos son desconocidos en el muestreo en fases:

$$\sum_{i=1}^{n'} y_i = 936.75 ; \sum_{i=1}^{n'} y_i^2 = 7703.3057; \bar{y}' = 7.086$$

$$s'^2 y^2 = 3.284; s' zy = 0.5083$$

- Segunda fase (dependiente): $n = 25$

$$\sum_{i=1}^n z_i = 35.46 ; \sum_{i=1}^n z_i^2 = 51.9034; \sum_{i=1}^n y_i = 197.06; \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1624.3346$$

$$\sum_{i=1}^n z_i y_i = 290.0083 ; \bar{z} = 1.4184 ; \bar{y} = 7.8824 ; s_{zy} = 0.4374$$

$$s_z = 0.2588; s_y = 1.7203; b = 6.5332; r = 0.9827$$

$$S_{reg}^2 (3-172) = 0.1061$$

- a) Muestreo en dos fases con estimador de razón

- Estimación de la razón R :

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^n y_i / \sum_{i=1}^n z_i = 197.06 / 35.46 = 5.5572$$

- Estimación de la media poblacional por unidad $\bar{Y}$:

$$\hat{\bar{Y}} = \hat{R} \bar{z}' = 5.5572 \cdot 1.415 = 7.863 \text{ m}^3$$

- Estimación del total poblacional Y :

$$\hat{Y} = N \cdot \hat{\bar{Y}} = 1600 \cdot 7.863 = 12580.8 \text{ m}^3$$

medición de rodales

- Error de estimación de la media (3-161):

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{1.7203^2 + 5.5572^2 \cdot 0.08144 - 2 \cdot 5.5572 \cdot 0.4374}{25} \\ + \frac{2 \cdot 5.5572 \cdot 0.4374 - 5.5572^2 \cdot 0.08144}{120} - \frac{1.7203^2}{1600}$$

$$S_{\bar{y}}^2 = 0.02452 + 0.01955 - 0.001850 = 0.04222$$

$$S_{\bar{y}} = 0.2055 ; S\% = 2.61$$

- b) Muestreo en dos fases, con estimador de regresión

- Estimación de la media poblacional por unidad:

$$\hat{\bar{Y}} = \bar{y} + b(\bar{Z}' - \bar{z}) = 7.8824 + 6.5332(1.415 - 1.4184)$$

$$\hat{\bar{Y}} = 7.8602 \text{ m}^3$$

- Estimación del total poblacional:

$$\hat{Y} = N \hat{\bar{Y}} = 1600 \cdot 7.8602 = 12576.3 \text{ m}^3$$

- Error de estimación (3-170):

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{1.7203^2}{25} \left(1 - \frac{120 - 25}{120} \cdot 0.9827^2 \right) = 0.02788$$

$$S \hat{\bar{Y}} = 0.167 ; S \hat{y} \% = 0.167 \cdot \frac{100}{7.8602} = 2.12\%$$

- c) Muestreo MAS considerando sólo la segunda fase

- Estimación de la media y el total poblacional:

$$\hat{\bar{Y}} = \bar{y} = 7.8824 ; \hat{Y} = 1600 \cdot 7.8824 = 12611.8$$

- Error de estimación (3-54):

$$S_{\hat{Y}}^2 = \frac{sy^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N} \right) = \frac{1.7203^2}{25} \left(1 - \frac{25}{1600} \right) = 0.1165$$

$$S_{\hat{Y}} = 0.341; S\% = S_{\hat{Y}} \cdot \frac{100}{\hat{Y}} = 4.33\%$$

- d) Estimación considerando la variable de interés de la primera fase

- Estimación de la media y el total poblacional:

$$\hat{\bar{Y}} = \bar{y}' = 7.806 m^3; \hat{Y} = 12489.6 m^3$$

- Error de estimación (3-54):

$$S_{\hat{Y}}^2 = \frac{3.284}{120} \left(1 - \frac{120}{1600} \right) = 0.02531$$

$$S_{\hat{Y}} = 0.159; S\% = 2.04$$

Dada la alta correlación que existe en este ejemplo, entre el área basal z y el volumen y , al medir esta última variable en sólo un 20% de las 120 unidades, el error aumenta en sólo un 4%, mientras que si se estima sin ayuda de la variable auxiliar, solamente en base al volumen medido en 25 unidades muestrales, el error aumenta en un 112%, es decir, crece al doble y algo más.

III.2.10.3 Muestreo en fases para estratificación

Estimadores

En una población estratificada, el tamaño de cada estrato se estima en base a la clasificación de una gran cantidad de observaciones n' (primera fase):

$$wh = \frac{n'h}{n'}; \quad n' = \sum^L n'h \quad (3-173) \quad (3-174)$$

medición de rodales

En base a una muestra aleatoria de menor tamaño (segunda fase) se estima la dimensión de interés en cada estrato:

$$\bar{y}_h = \frac{\sum^{nh} y_{ih}}{nh}; (h = 1, \dots, L) \quad (3-175)$$

Un estimador insesgado del promedio poblacional es el siguiente:

$$\hat{\bar{Y}} = \sum^L w_h \bar{y}_h \quad (3-176)$$

Error de estimación

Un estimador aproximado de la varianza del estimador $\hat{\bar{Y}}$, llamado error de estimación para muestras grandes en ambas fases, es el siguiente (DE VRIES 1986):

$$V\left(\hat{\bar{Y}}\right) \doteq S_{\hat{\bar{Y}}}^2 = \sum^L \left(w_h^2 - \frac{w_h}{n'} \right) \frac{sh^2}{nh} + \frac{1}{n'} \left[\sum^L w_h \bar{y}_h^2 - \left(\sum^L w_h \bar{y}_h \right)^2 \right]$$

$$\text{Donde } sh^2 = \frac{\sum^{nh} (y_i - \bar{y}_h)^2}{nh - 1} \quad (3-177)$$

Esta expresión aproximada de la varianza de $\hat{\bar{Y}}$ vale tanto para fases dependientes como independientes: las fases son dependientes cuando en cada estrato se seleccionan nh unidades de entre las $n'h$ unidades clasificadas en la primera fase. Una situación particular de muestreo con fases independientes se da cuando la segunda fase (por ejemplo, operaciones de terreno en un inventario) ocurre antes de realizar la primera fase, en cuyo caso el tamaño de la muestra en cada estrato nh es aleatorio. Puede suceder, entonces, que el tamaño muestral nh sea muy inconveniente, dándose incluso la posibilidad de un $nh = 0$ en estratos pequeños. Basta con que nh sea menor que 2 para que el error del estimador no pueda determinarse.

Límites confidenciales

Para establecer los límites confidenciales en muestreo en fases, ordinariamente se asume que el estimador de $\bar{Y}$ se distribuye normalmente en torno a su esperanza y que el sesgo es despreciable. En lugar de emplear un valor de t según los grados de libertad, se asume un

valor $z \sim N(0,1)$ para el nivel de confianza $1 - \alpha$. Por ejemplo, el valor z para un nivel de confianza $1 - \alpha = 0.95$, $z(1 - \alpha / 2) \doteq 2$ y los límites confidenciales se asumen:

$$\hat{\bar{Y}} - 2S_{\hat{\bar{Y}}} < \bar{Y} < \hat{\bar{Y}} + 2S_{\hat{\bar{Y}}} \quad (3-178)$$

Optimización de muestreo en fases

La eficiencia de un muestreo en fases puede ser muy variable, dependiendo del diseño adoptado:

- Cuando se emplea una variable auxiliar en la primera fase, cuyo costo de medición no es despreciable, la eficiencia dependerá de la proporción o del tamaño de la muestra en la primera y segunda fase.
- En el caso de un muestreo en dos fases para estratificación, la eficiencia dependerá en gran medida de la forma en que la muestra de la segunda fase se distribuye entre los estratos.

DE VRIES (1986) y COCHRAN (1977) presentan procedimientos de optimización para diseños muestrales en dos fases.

III.2.11 Muestreo en ocasiones sucesivas

Las poblaciones forestales, constituidas por los bosques de regiones o países, así como los que integran el patrimonio de grandes empresas, son frecuentemente sometidas a inventarios que se repiten cada cierto tiempo.

La estimación del estado del bosque, principalmente en términos de existencias maderables y de los cambios ocurridos entre períodos, ha sido la principal finalidad de los inventarios repetidos.

En los últimos años se ha observado una clara tendencia hacia la evaluación integral y múltiple de los recursos de tierras y bosques, así como un creciente interés por incluir entre sus objetivos el monitoreo global del ambiente en que se encuentra inserto el bosque, lo que permitiría, entre otras cosas, relacionar la evolución del bosque con factores ambientales como lluvia ácida, contaminación aérea, sequías, plagas y enfermedades, etc.

Un objetivo adicional, cuya importancia ha crecido en los últimos años, es generar información para construir y retroalimentar modelos de crecimiento de bosques. Estos modelos son utilizados tanto para planificar el aprovechamiento y manejo de los recursos forestales, como para la actualización funcional permanente de los inventarios entre sucesivas mediciones (CARRON 1974; STAGE 1977; COX 1985; CUNIA 1990).

Simbología y variantes metodológicas

En los inventarios sucesivos de tipo regional o nacional, existe una clara tendencia hacia la adopción de diseños multifásicos en cada ocasión. Entre otros ejemplos pueden mencionarse (POSO 1990), SINGH y POSO (1989), KÖHL y SUTTER (1990), TOMPPÖ (1990), ZHIXI (1982). De acuerdo con los objetivos de los inventarios y a las condiciones propias de la región (socio-económicas, tecnológicas, naturales, etc.), es posible definir muchas variantes para inventarios de este tipo, cada cual con su tratamiento estadístico específico. La gran variedad de opciones metodológicas hace imposible tratar en profundidad el tema de los diseños multifásicos en inventarios sucesivos. Las metodologías que se presentan en esta sección se refieren sólo a diseños monofásicos en cada ocasión.

La mayor parte de los diseños de inventarios en ocasiones sucesivas incluye unidades muestrales que son remedidas. Los procedimientos para instalar unidades permanentes deben asegurar que ellas sean reubicadas en su exacta posición original y que el procedimiento de selección de árboles empleado en todas las oportunidades sea idéntico. Para ello, deben emplearse procedimientos muy rigurosos como los descritos por SCHMID y WERNER (1969) o DOMAN *et al.* (1981).

Simbología

En adelante, se considera que existe para el inventario sólo una variable de interés y . Las opciones se diferencian en función del carácter temporal o permanente de las unidades muestrales empleadas en cada ocasión.

- El número total de unidades muestrales de la primera ocasión es n_1 que se compone de m unidades permanentes y u_1 unidades temporales. El número de unidades en la segunda ocasión es n_2 que se compone del mismo número m de unidades permanentes y u_2 unidades temporales.
- El atributo de interés medido en una unidad temporal cualquiera de la primera ocasión es y_{1ti} y en una unidad permanente y_{1pi} . En la segunda ocasión la variable de interés será correspondientemente y_{2ti} ó y_{2pi} .

Variantes

- a) Inventarios independientes. En ambas ocasiones se instalan solamente parcelas temporales:

$$n_1 = u_1 \quad ; \quad n_2 = u_2 \quad (m = 0)$$

- b) Inventarios sucesivos. Todas las unidades son permanentes en ambas ocasiones.

$$n_1 = n_2 = m \quad (u_1 = u_2 = 0)$$

- c) En el segundo inventario se remide sólo una parte de las unidades del primer inventario:

$$n_1 = u_1 + m \quad ; \quad n_2 = m \quad (u_2 = 0)$$

- d) En el segundo inventario se remiden algunas unidades del primer inventario y se instalan nuevas unidades temporales independientes.

$$n_1 = u_1 + m \quad ; \quad n_2 = u_2 + m$$

Este último diseño es el llamado inventario con reposición parcial (SPR).

Los estadígrafos relevantes que se emplearán en diseños son los siguientes:

- a) Primera ocasión:

Unidades temporales:

$$\bar{y}_{1t} = \sum^{u_1} y_{1ti} / u_1 ; s^2_{1t} = \sum^{u_1} (y_{1ti} - \bar{y}_{1t})^2 / (u_1 - 1) \quad (3-178a) \quad (3-179)$$

Unidades permanentes:

$$\bar{y}_{1p} = \sum^m y_{1pi} / m ; s^2_{1p} = \sum^m (y_{1pi} - \bar{y}_{1p})^2 / (m - 1) \quad (3-180) \quad (3-181)$$

Todas las unidades de la primera ocasión en conjunto:

$$\bar{y}_1 = \left(\sum^{u_1} y_{1ti} + \sum^m y_{1pi} \right) / (u_1 + m) = \sum^{n_1} y_{1i} / n_1 \quad (3-182)$$

$$s_1^2 = \sum^{n_1} (y_{1i} - \bar{y}_1)^2 / (n_1 - 1) \quad (3-183)$$

medición de rodales

b) Segunda ocasión:

$$\bar{y}_{2t} = \sum y_{2ti} / u_2 ; s^2_{2t} = \sum (y_{2ti} - \bar{y}_{2t})^2 / (u_2 - 1) \quad (3-184) \quad (3-185)$$

$$\bar{y}_{2p} = \sum y_{2pi} / m ; s^2_{2p} = \sum (y_{2pi} - \bar{y}_{2p})^2 / (m - 1) \quad (3-186) \quad (3-187)$$

$$\bar{y}_2 = \sum y_{2i} / n_2 ; s^2_2 = \sum (y_{2i} - \bar{y}_2)^2 / (n_2 - 1) \quad (3-188) \quad (3-189)$$

c) Relación entre unidades permanentes de las dos ocasiones:

Covarianza:

$$s_{12} = \sum (y_{1pi} - \bar{y}_{1p}) \cdot (y_{2pi} - \bar{y}_{2p}) / (m - 1) \quad (3-190)$$

$$= \left(\sum (y_{1pi} \cdot y_{2pi}) - \sum y_{1pi} \cdot \sum y_{2pi} / m \right) / (m - 1)$$

Coeficiente de regresión para el modelo $y_{2p} = a + by_{1p}$:

$$b_{21} = s_{12} / s^2_{1p} \quad (3-191)$$

Coeficiente de regresión para el modelo $y_{1p} = a + by_{2p}$:

$$b_{12} = s_{12} / s^2_{2p} \quad (3-192)$$

Coeficiente de correlación:

$$r = s_{12} / (s_{1p} \cdot s_{2p}) = \sqrt{(b_{12} \cdot b_{21})} \quad (3-193)$$

Estimadores

Los estimadores considerados para un conjunto de dos inventarios sucesivos, son los estados en ambos inventarios ($\hat{\bar{Y}}_1$ e $\hat{\bar{Y}}_2$) y el cambio experimentado por la población inventariada

durante el período, d . La expresión de cada estimador, así como su error, dependerá de la variante adoptada.

En todos los casos se asume que la estimación del estado en la primera ocasión es independiente del segundo inventario, por lo que es irrelevante describir aquí sus estimadores.

Para el cálculo de los estimadores se asume una distribución aleatoria de las unidades muestrales, sean éstas temporales o permanentes.

La variable y en todos los casos se supone que representa el estado neto en la unidad muestral, esto es, incluye el total correspondiente a todos los árboles vivos presentes en la unidad; luego, se asume que los estados y los cambios evaluados corresponden a valores netos. Los modelos estimados de estados y cambios que consideren mortalidad o extracciones requieren expresiones algo diferentes a las descritas en esta sección.

En el Cuadro 3-23 se presenta el resultado de inventarios en dos ocasiones, empleando en ambas ocasiones, unidades permanentes y unidades temporales. Los estadígrafos que se obtienen son los siguientes.

a) Primera ocasión:

$$u_1 = 30 ; m = 20 ; n_1 = 50$$

$$\bar{y}_{1t} = 16.583 ; \bar{y}_{1p} = 15.42 ; \bar{y}_1 = 16.118$$

$$s_{1t}^2 = 54.221 ; s_{1p}^2 = 67.607 ; s_1^2 = 58.636$$

b) Segunda ocasión:

$$u_2 = 25 ; m = 20 ; n_2 = 45$$

$$\bar{y}_{2t} = 24.880 ; \bar{y}_{2p} = 23.725 ; \bar{y}_2 = 24.367$$

$$s_{2t}^2 = 55.943 ; s_{2p}^2 = 149.094 ; s_2^2 = 95.232$$

c) Relación entre unidades permanentes en ambas ocasiones:

$$s_{12} = 94.094 ; b_{21} = 1.392 ; b_{12} = 0.631 ; r = 0.937$$

**Cuadro 3-23. Muestreo sobre una población en dos ocasiones, empleando en ambas unidades temporales y permanentes.
Volúmenes y , medidos en unidades muestrales de 500 m²**

i	Primera ocasión		Segunda ocasión	
	u. temporal	u. permanente	u. permanente	u. temporal
	(y_{1i})	(y_{1pi})	(y_{2pi})	(y_{2i})
1	19.3	9.5	17.5	15.3
2	11.8	20.9	26.9	38.8
3	8.0	34.3	57.0	17.6
4	27.6	2.8	8.9	30.3
5	13.2	19.2	24.1	23.6
6	23.6	17.9	35.8	20.6
7	19.3	11.8	17.9	16.5
8	29.6	15.1	22.4	34.8
9	11.2	26.9	40.3	27.8
10	25.0	20.1	36.2	33.1
11	23.8	22.1	29.5	23.9
12	25.6	10.1	16.6	27.2
13	27.4	9.3	14.2	29.7
14	14.4	14.1	22.4	33.8
15	16.8	6.9	14.0	25.9
16	11.8	5.6	10.1	24.4
17	14.2	21.1	23.8	20.6
18	2.3	15.3	16.7	13.8
19	23.0	22.4	32.6	40.0
20	12.5	3.0	7.6	24.2
21	11.3			16.4
22	1.3			23.8
23	17.5			12.5
24	7.8			23.2
25	15.3			24.1
26	21.7			
27	14.1			
28	23.7			
29	11.3			
30	13.1			
n	30	20	20	25
Σy	497.5	308.4	474.5	622.0
Σy^2	9822.61	6040.06	14090.29	16817.98
$\Sigma y_1 y_2$		9104.57		

III.2.11.1 Muestreo en inventarios sucesivos independientes

Las unidades muestrales son independientes en ambas ocasiones. El estado en la segunda ocasión se estima exclusivamente en base a las unidades muestrales medidas en ella. El cambio experimentado por la población inventariada se obtiene simplemente por la diferencia entre los estados en ambas ocasiones.

El diseño basado en inventarios independientes puede ser eficiente para estimar estados sucesivos, pero resulta altamente ineficiente para estimar el cambio de la población entre inventarios.

- a) Estado en la segunda ocasión:

$$\hat{\bar{Y}}_2 = \bar{y}_2 \quad (3-194)$$

Al existir sólo unidades temporales, las expresiones $\bar{y}_2$ e $\bar{y}_{2t}$, son equivalentes, como también las expresiones s_{2t} y s_2 .

El error de estimación del estado es el siguiente:

$$S_{\bar{Y}}^2 = \frac{s_2^2}{n_2} \quad (3-195)$$

- b) Cambio de estado durante el período:

$$d = \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \quad (3-196)$$

- c) El error de estimación del cambio:

$$S^2 d = S_{\bar{Y}_1}^2 + S_{\bar{Y}_2}^2 = \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \quad (3-197)$$

Ejemplo:

Considerando sólo las unidades temporales para ambas ocasiones del ejemplo presentado en el Cuadro 3-23 se tiene:

Estado en ambas ocasiones:

$$\hat{\bar{Y}}_1 = \bar{y}_{1t} = 16.583 \text{ m}^3/\text{unidad}$$

$$\hat{\bar{Y}}_2 = \bar{y}_{2t} = 24.880$$

medición de rodales

Los correspondientes errores de estimación:

$$S_{\hat{\bar{Y}}_1}^2 = \frac{s_{1r}^2}{u_1} = 1.807 ; S_{\hat{\bar{Y}}_1} = 1.344$$

$$S_{\hat{\bar{Y}}_2}^2 = \frac{s_{2r}^2}{u_2} = 2.238 ; S_{\hat{\bar{Y}}_2} = 1.496$$

Cambio durante el período:

$$d = \bar{y}_{2r} - \bar{y}_{1r} = 24.880 - 16.583 = 8.297$$

Error de estimación del cambio:

$$S^2 d = 1.807 + 2.238 = 4.045 ; Sd = 2.011 \text{ m}^3$$

III.2.11.2 Inventarios sucesivos con todas las unidades permanentes en ambas ocasiones (inventario continuo o CFI)

Todas las unidades medidas en la primera ocasión son instaladas de manera que puedan ser reubicadas y remedidas en la siguiente.

Este diseño es óptimo cuando la finalidad de los repetidos inventarios se limita a estimar el cambio experimentado por la población durante el período. En cambio, su eficiencia es muy baja cuando la finalidad es estimar el estado en las sucesivas ocasiones.

a) Estado en la segunda ocasión:

$$\hat{\bar{Y}}_2 = \bar{y}_2 = \bar{y}_{2p} \quad (3-198)$$

En este diseño, los promedios $\bar{y}_2$ e $\bar{y}_{2p}$ son iguales, pues sólo existen unidades permanentes.

El error del estimador de $\hat{\bar{Y}}_2$ se basa, como en el caso de inventarios independientes, sólo en las unidades de la segunda ocasión:

$$S_{\bar{Y}_2}^2 = \frac{s_2^2}{n_2} = \frac{s_{2p}^2}{m} \quad (3-199)$$

b) Cambio de estado durante el período:

$$d = \bar{y}_2 - \bar{y}_1 = \bar{y}_{2p} - \bar{y}_{1p} \quad (3-200)$$

c) El error de estimación del cambio:

$$Sd^2 = \frac{s_{1p}^2 + s_{2p}^2 - 2r \cdot s_{1p} \cdot s_{2p}}{m} \quad (3-201)$$

Mientras más alta sea la correlación entre sucesivas mediciones de las parcelas permanentes, más bajo será el error de estimación del cambio.

Ejemplo:

Considerando ahora sólo las unidades permanentes del ejemplo presentado en el Cuadro 3-23, se tiene:

$$\hat{\bar{Y}}_1 = \bar{y}_{1p} = 15.42$$

$$\hat{\bar{Y}}_2 = \bar{y}_{2p} = 23.725$$

El error de estimación de los estados:

$$S_{\bar{Y}_1}^2 = \frac{s_{1p}^2}{m} = \frac{67.607}{20} = 3.380 \quad ; \quad S_{\bar{Y}_1} = 1.839$$

$$S_{\bar{Y}_2}^2 = \frac{s_{2p}^2}{m} = \frac{149.094}{20} = 7.4547 \quad ; \quad S_{\bar{Y}_2} = 2.730$$

medición de rodales

Estimación del cambio entre inventarios:

$$d = \bar{y}_{2p} - \bar{y}_{1p} = 23.725 - 15.42 = 8.305$$

Error de estimación del cambio:

$$Sd^2 = \frac{67.607 + 149.094 - 2 \cdot 0.937 \cdot 8.222 \cdot 12.210}{20}$$

$$Sd^2 = 1.428 ; Sd = 1.195$$

III.2.11.3 Muestreo con remediación parcial

En la primera oportunidad se instalan n_1 unidades, de las cuales una submuestra aleatoria de m unidades se considera como permanente y será remedida en la siguiente ocasión.

a) Estado en la segunda ocasión:

La muestra de la primera ocasión puede considerarse como la primera fase de un muestreo doble. La submuestra permanente que se remide en la segunda ocasión corresponde a una segunda fase, dependiente de la anterior.

El estado en la segunda oportunidad puede estimarse empleando muestreo en dos fases con estimador de regresión (3-170):

$$\hat{\bar{Y}}_2 = \bar{y}_{2p} + b_{21}(\bar{y}_1 - \bar{y}_{1p}) \quad (3-202)$$

El error de estimación:

$$S_{\hat{\bar{Y}}}^2 = \frac{s_{2p}^2}{m} \left(1 - \frac{n_1 - m}{n_1} r^2 \right) \quad (3-203)$$

b) Cambio entre ocasiones:

La mejor estimación del cambio entre inventarios sucesivos se obtiene mediante la siguiente expresión (LOETSCH y HALLER 1964):

$$d = \bar{y}_{2p} + k\bar{y}_{1p} - (1 + k)\bar{y}_{1r} \quad (3-204)$$

Donde

$$k = \frac{m}{n_1} b_{21} - b_{21} - \frac{m}{n_1}$$

c) El error de estimación del cambio:

$$Sd^2 = \frac{s_{2p}^2 + k^2 s_1^2 + 2kr s_1 s_{2p}}{m} + \frac{(1+k)^2 s_1^2}{(n_1 - m)} \quad (3-205)$$

Ejemplo:

Considerando, en el ejemplo del Cuadro 3-23, las n_1 unidades de la primera ocasión y sólo las m unidades permanentes de la primera y segunda ocasión, se tiene:

Estado en la segunda ocasión:

$$\hat{\bar{Y}}_2 = 23.725 + 1.392 (16.118 - 15.42) = 24.697$$

Error de estimación:

$$S_{\hat{\bar{Y}}}^2 = \frac{149.094}{20} \left(1 - \frac{50-20}{50} 0.937^2 \right) = 3.528$$

$$S_{\hat{\bar{Y}}} = 1.878$$

Cambio entre inventarios:

$$k = \frac{20}{50} \cdot 1.392 - 1.392 - \frac{20}{50} = -1.235$$

$$d = 23.725 - 1.235 \cdot 15.42 - (1 - 1.235) \cdot 16.583$$

$$d = 8.578$$

Error de estimación:

$$Sd^2 = \frac{149.094 + 1.235^2 \cdot 58.636 - 2 \cdot 1.235 \cdot 0.937 \cdot 7.657 \cdot 12.210}{20} + \frac{(1 - 1.235)^2 \cdot 58.636}{30}$$

$$Sd^2 = 1.108 + 0.122 = 1.23 \quad ; \quad Sd = 1.109$$

III.2.11.4 Muestreo con reposición parcial (SPR)

En este diseño se miden n_1 unidades en la primera ocasión, de las cuales m se marcan en forma permanente para su remediación. En la segunda ocasión se remiden las m unidades permanentes y se agregan u_2 nuevas unidades temporales distribuidas aleatoriamente.

a) Estado en la segunda ocasión:

En el muestreo con reposición parcial se emplea toda la información de ambas ocasiones para estimar el estado en la segunda oportunidad. El estimador de máxima eficiencia es (DE VRIES 1986):

$$\hat{\bar{Y}}_2 = c\hat{\bar{Y}}_{2R} + (1 - c)\bar{y}_{2t} \quad (3-206)$$

Donde $\hat{\bar{Y}}_{2R}$ es el estimador de $\bar{Y}_2$ en base a muestreo doble, considerando todas las unidades de la primera ocasión como la primera fase y la muestra permanente como una segunda fase dependiente (3-165):

$$\hat{\bar{Y}}_{2R} = \bar{y}_{2p} + b_{21}(\bar{y}_1 - \bar{y}_{1p}) \quad (3-206a)$$

$$c = mn_1 / (n_1n_2 - r^2 u_1u_2) \quad (3-206b)$$

Error de estimación de $\hat{\bar{Y}}_2$

$$S\hat{\bar{Y}}^2 = \frac{s_2^2(n_1 - r^2 u_1)}{n_1n_2 - r^2 u_1u_2} \quad (3-207)$$

b) Cambio entre inventarios:

El mejor estimador del cambio entre inventarios es el siguiente (DE VRIES 1986):

$$d = (1 - k)\bar{y}_{2t} - (1 - L)\bar{y}_{1t} + k\bar{y}_{2p} - L\bar{y}_{1p} \quad (3-208)$$

Donde

$$k = \frac{m(n_1 + u_2 b_{12})}{n_1 n_2 - r^2 u_1 u_2} ; \quad L = \frac{m(n_2 + u_1 b_{21})}{n_1 n_2 - r^2 u_1 u_2}$$

c) El error de estimación del cambio:

$$Sd^2 = (1 - k)^2 \frac{s_{2t}^2}{u_2} + (1 - L)^2 \frac{s_{1t}^2}{u_1} + \frac{k^2 s_{2p}^2 + L^2 s_{1p}^2 - 2kLs_{12}}{m} \quad (3-209)$$

Ejemplo:

Considerando todas las unidades temporales y permanentes del ejemplo presentado en el Cuadro 3-23, se tiene:

a) Estimación del estado en la segunda ocasión:

$$c = 20 \cdot 50 / (50 \cdot 45 - 0.937^2 \cdot 30 \cdot 25) = 0.6283$$

$$\hat{\bar{Y}}_{2R} = 23.725 + 1.392(16.118 - 15.42) = 24.697$$

$$\hat{\bar{Y}}_2 = 0.6283 \cdot 24.697 + (1 - 0.6283)24.880 = 24.765$$

Error de estimación:

$$S_{\hat{\bar{Y}}}^2 = \frac{95.232(50 - 0.937^2 \cdot 30)}{50 \cdot 45 - 0.937^2 \cdot 30 \cdot 25} = 1.416 ; \quad S_{\bar{Y}}^2 = 1.190$$

b) Estimación del cambio entre inventarios:

$$K = \frac{20(50 + 25 \cdot 0.631)}{50 \cdot 45 - 0.937^2 \cdot 30 \cdot 25} = 0.8266$$

medición de rodales

$$L = \frac{20(45 + 30 \cdot 1.392)}{50 \cdot 45 - 0.937^2 \cdot 30 \cdot 25} = 1.0903$$

$$d = (1 - 0.8266) \cdot 24.880 - (1 - 1.0903) \cdot 16.583 + 0.8266 \cdot 23.725 - 1.0903 \cdot 15.42$$

$$d = 8.610$$

El error de estimación del cambio:

$$S^2 d = (1 - 0.8266)^2 55.943 / 25 + (1 - 1.0903)^2 \cdot 54.221 / 30 + (0.8266^2 \cdot 149.094 +$$

$$1.0903^2 \cdot 67.607 - 2 \cdot 0.8266 \cdot 1.0903 \cdot 94.094) / 20 = 0.714$$

$$Sd = 0.845 \text{ m}^3$$

Optimización del muestreo con reposición parcial

Cuando el objetivo único de los inventarios repetidos es estimar el cambio experimentado por algún atributo como el volumen de la población, la mayor eficiencia se logra con el diseño de inventario continuo, basado sólo en unidades muestrales permanentes.

Si el objetivo es, en cambio, la determinación de sucesivos estados de la población, la solución óptima incluirá una proporción variable de unidades temporales y permanentes, que dependerá de la correlación entre las mediciones en unidades permanentes y de la relación de costo entre unidades temporales y permanentes:

$$f_{opt} = \frac{m_{opt}}{n_1} = \frac{\sqrt{(1-r^2)}}{r^2} \left(\sqrt{\left(\frac{ct}{cp}\right)} - \sqrt{(1-r^2)} \right)$$

Donde

f_{opt} = proporción óptima de unidades permanentes

ct = costo de medir una unidad temporal

cp = costo de remedir una unidad permanente

El Cuadro 3-24 muestra la proporción óptima de unidades permanentes para la estimación de estado, de relación al coeficiente de correlación entre unidades permanentes y el cociente de costos.

Si no se consideran los costos, o si el costo de reubicar y remedir las parcelas permanentes es similar al de las parcelas temporales, la proporción adecuada de parcelas permanentes, dadas las correlaciones que normalmente existen, es de aproximadamente un 30%. Si, por el contrario, los costos de remedir parcelas permanentes en la segunda ocasión son relativamente altos, el número óptimo de parcelas permanentes se reduce fuertemente.

Cuadro 3-24. Proporción óptima de unidades permanentes para la estimación de estados

ct/cp	Coeficiente de correlación					
	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
1	46	44	42	38	30	24
1/2	0	0	0	10	15	14
1/3	0	0	0	0	8	9
1/4	0	0	0	0	3	6

Entre los múltiples objetivos de todo inventario que se repite en sucesivas ocasiones, siempre se encuentran la estimación del estado y la estimación del cambio entre ocasiones. Para determinar la proporción óptima de unidades permanentes considerando ambos objetivos a la vez, WARE y CUNIA (1962) proponen un procedimiento basado en programación lineal que permite determinar la proporción de mínimo costo para errores de estimación de estado y de cambios dados.

III.3 OPTIMIZACION DE INVENTARIOS

Se entiende por un inventario óptimo, aquel que permite estimar alguna dimensión poblacional con mínimo error a un determinado costo.

La "condición de optimalidad" suele expresarse también como la de aquel inventario que permite estimar con un determinado error al costo mínimo. Resulta difícil, sin embargo, dimensionar el error total que afecta a un inventario y aún más difícil programar un inventario estableciendo una magnitud límite para este error, pues las fuentes de error son numerosas y difíciles de dimensionar.

III.3.1 Análisis de errores en inventarios

El Cuadro 3-25 presenta las principales fuentes de error en inventarios.

En todo inventario, existen dos tipos de errores: aleatorios y sesgos. Los errores aleatorios se originan en modelos estimadores que poseen un componente de error y en la imprecisión de las mediciones. Estos errores se reducen a medida que crece el tamaño de la muestra.

Cuadro 3-25. Fuentes de error en inventarios

Fuente	Descripción	Tipo de error
1. Diseño	1. Unidades distribuidas en red no representativa.	Sesgo
	2. Distribución no aleatoria o no independiente de las unidades muestrales.	Sesgo
	3. Diseño que genera un error mayor que el mínimo posible para un determinado costo.	Aleatorio
	4. Normas de operación mal formuladas.	Sesgo
2. Operación	1. Localización errónea de las u. muestrales.	Sesgo
	2. Delimitación defectuosa de las u. muestrales.	Sesgo
	3. Medición imprecisa de los árboles.	Aleatorio
	4. Mediciones sesgadas.	Sesgo
3. Superficie	1. Cartografía defectuosa.	Sesgo
	2. Medición imprecisa o sesgada.	Aleatorio o sesgo
	3. Límite inadecuado para el tamaño de superficies excluidas.	Sesgo
	4. Apreciación errada de la superficie intervenible.	Sesgo
4. Modelo dendrométrico	1. Estimación sesgada o muy imprecisa de la altura.	Sesgo
	2. Clasificación inadecuada de árboles o secciones.	Sesgo
	3. Modelos fustales o funciones de volumen sesgados.	Sesgo
	4. Modelos fustales o funciones de volumen imprecisos.	Aleatorio
	5. Simuladores de trozado o funciones estimadoras de productos incompatibles con el programa de trozado.	Sesgo
	6. Factor inadecuado de transformación de estimación en pie a estimaciones en cancha.	Sesgo

Los sesgos, llamados también errores no muestrales, se originan en un alto número de fuentes y afectan, en alguna medida, a todos los inventarios.

No es posible formular un modelo optimizador de inventarios que considere todas las fuentes de error. Es posible, sin embargo, definir criterios para invertir el presupuesto total de modo que el último peso gastado produzca la máxima reducción del error. Para ello es necesario individualizar y cuantificar las fuentes de error y desarrollar los procedimientos adecuados para minimizarlos.

Como medida del error de un inventario se emplea usualmente el llamado error muestral, que corresponde a la máxima diferencia probable, para un nivel de confianza dado, entre el valor estimado y el valor poblacional real. El error muestral considera como única fuente de error la variabilidad observada entre las unidades muestrales. Su determinación varía según el diseño muestral empleado (capítulo III.2).

La experiencia general sobre inventarios indica que la diferencia entre el volumen estimado y el volumen realmente cosechado es en algunos casos muy pequeña y en otros puede superar varias veces el error muestral.

El proceso de optimizar un inventario consiste, pues, en minimizar los errores no muestrales y en maximizar la eficiencia muestral.

III.3.1.1 Errores no muestrales

Las principales fuentes de error no muestrales en inventarios son las siguientes:

- Errores de diseño
- Errores operacionales
- Errores originados en el modelo dendrométrico
- Errores en la determinación de superficie
- Errores en el ajuste de existencias en pie
- Errores de procesamiento

a) Errores de diseño

Los errores de diseño son aquellos que producen sesgos en las estimaciones o en sus errores, debido a que no se respetan las normas de selección probabilística o de independencia entre unidades muestrales. Entre ellos, pueden mencionarse los siguientes:

- Distribución subjetiva de las unidades de muestra.
- Aglomeración o concentración de las unidades, resultando la muestra no representativa o de un número muy limitado de unidades independientes.
- Localización de las unidades en red sistemática no representativa.

Este último error es de particular importancia, pues es usual que las unidades se distribuyan sistemáticamente y se empleen los estimadores del muestreo aleatorio simple, asumiendo aleatoriedad en la distribución de la población.

Frecuentemente, una alta proporción de las unidades de la red se ubican en una determinada condición ambiental (altitud, exposición, posición topográfica, etc.), cuya proporción respecto del área boscosa total es muy diferente.

Los sistemas de información geográfica (SIG) (capítulo VII.4) permitirían detectar redes sistemáticas inconvenientes y diseñar redes más representativas.

b) Errores operacionales

Estos se originan en operaciones defectuosas. Las principales fuentes de error operacionales son la localización viciada de las unidades muestrales, su delimitación imperfecta y los errores de medición de árboles. Todos ellos se minimizan mediante la capacitación del personal operativo y mediante un adecuado control de las operaciones.

Capacitación: Es muy difícil que un equipo opere correctamente si no ha tenido una capacitación bien programada.

Las actividades de capacitación deben orientarse especialmente a los siguientes objetivos:

- Describir los objetivos y las opciones técnicas elegidas para el inventario.
- Describir las fuentes de error y el procedimiento operativo que permite evitarlos, de modo que el personal conozca las consecuencias de una operación bien o mal ejecutada.
- Desarrollar aptitudes para operar con diferentes diseños muestrales, lo que incluye diferentes formas de distribuir y localizar las parcelas, y diversas formas de operar en terreno.

Además de estos objetivos, que apuntan principalmente a evitar los sesgos, es decir, a aumentar la eficacia de los inventarios, es necesario introducir mediante la capacitación técnicas que permitan aumentar la eficiencia de inventarios, buscando que las actividades, además de realizarse en la forma correcta, se hagan al menor costo posible.

Control: El control de calidad es un elemento esencial para lograr estimaciones muestrales eficaces, y tiene como objetivos principales:

- Detectar los errores operacionales y efectuar las acciones necesarias para eliminarlos o minimizarlos.
- Determinar la magnitud de los errores aleatorios (precisión) y sistemáticos (sesgo) que afectan a un proceso de muestreo, de manera que se pueda cuantificar el error global probable, incluyendo error aleatorio, errores originados en el muestreo y los sesgos operacionales y de otro tipo.

c) Errores originados en el modelo dendrométrico

El modelo dendrométrico es el conjunto de coeficientes, funciones y procedimientos empleados para valorizar (estimar) variables-producto (volúmenes, valor, etc.) a partir de las variables-insumo del inventario (diámetro, altura, calidad, etc.).

Los modelos dendrométricos simples, como el requerido para estimar la densidad o altura media de rodales en inventarios de diagnóstico silvicultural, no generan errores de importancia. En cambio, los modelos desarrollados para estimar un surtido de productos rollizos de diferentes calidades, sanidades y dimensiones, basados en modelos fustales y simuladores de trozado, pueden producir estimaciones altamente sesgadas.

Las principales fuentes de error en un modelo dendrométrico complejo son las siguientes:

- Imprecisión y sesgo en las mediciones de diámetro y altura.
- Funciones estimadoras de altura que se comportan ilógicamente.
- Funciones de volumen o funciones de ahusamiento sesgadas.
- Sistema de clasificación de calidad inadecuado.
- Deficiencias lógicas y de operación en los simuladores de trozado.

Las diversas fuentes de error en el modelo dendrométrico se encuentran interrelacionadas, por lo cual es muy difícil evaluar el efecto neto de cada una. COX (1992) desarrolló una herramienta basada en parcelas de control, que alimentan matrices N-dimensionales de volúmenes reales y estimados. Estas matrices permiten aislar el efecto neto de cada elemento y combinar los efectos individuales a voluntad. De esta manera, es posible priorizar los estudios conducentes a mejorar el modelo dendrométrico y evaluar el impacto que tienen en el modelo los diferentes elementos (funciones o algoritmos) existentes y los nuevos que se desarrollen en el futuro.

d) Errores en la determinación de superficie

Aun cuando las fuentes de error en la determinación de superficie son numerosas, normalmente se asume que ésta se determina sin error. Las principales causas de error son las siguientes:

- *Proceso cartográfico defectuoso.* El proceso cartográfico puede concluir en superficies sesgadas, debido al efecto conjunto de los errores de delimitación de rodales, de transferencia, de base cartográfica y de escala de los planos impresos. Muchas de estas fuentes afectan incluso a las estimaciones de superficie generadas automáticamente mediante SIG.
- *Límite inadecuado de superficies excluidas.* Este error se origina cuando existe incompatibilidad entre el diseño muestral y el modelo cartográfico. Si el diseño muestral especifica que las unidades muestrales deben desplazarse o eliminarse cuando los claros en el rodal exceden una determinada magnitud, tales claros deben encontrarse descontados en la superficie neta del rodal.

medición de rodales

Para mayores antecedentes revisar sección III.5.5.

- *Apreciación sesgada de la superficie de bosque* susceptible de ser intervenido (cosecha, manejo silvicultural, etc.).

e) Errores de las existencias en pie

El volumen real cosechado puede mostrar diferencias importantes respecto al volumen estimado en pie mediante el modelo dendrométrico, pese a ser este último un elemento perfectamente calibrado. Esto puede ocurrir, entre otros casos, cuando existe una alta proporción de fustes fracturados durante la cosecha.

Se ha intentado corregir este efecto mediante la incorporación de modelos simuladores de fractura en los sistemas de inventario.

No se conocen suficientes estudios que describan la validez de estos modelos y su uso presenta problemas, pues el evento "fractura fustal" es de muy difícil predicción cuando se da solamente en función de las variables que usualmente se miden en los inventarios.

Un procedimiento más adecuado y simple consiste en construir funciones de ajuste de estimaciones en pie a estimaciones netas aprovechables, mediante el trozado real de árboles en superficies previamente inventariadas.

f) Errores generados en el manejo y procesamiento de los datos

Existen varias fuentes de error relacionadas con el manejo y procesamiento de datos en inventarios:

- Errores de codificación y registro de datos

Se originan al registrar los datos de terreno en formularios. Son difíciles de detectar y corregir, pues muchos valores erróneos registrados se encuentran dentro de los rangos lógicos y dimensionales, de manera que no son detectados en un proceso rutinario de validación. El sistema de registro y codificación debe diseñarse de modo que se minimice el riesgo de este tipo de defectos. Posiblemente el uso de capturadores electrónicos de datos sea adecuado, pero aún no se conocen estudios serios en este sentido.

- Errores de transferencia de datos

Existen diversas técnicas para disminuir el riesgo de este tipo de errores, como el empleo de doble digitalización o formulario de lectura directa. El empleo de capturadores electrónicos de datos es, en este sentido, el medio más eficiente y eficaz para la transferencia de datos.

- Errores de procesamiento

Los sistemas de procesamiento de datos de inventarios son por lo general complejos, pues deben ofrecer muchas opciones de proceso para una gran variedad de diseños posibles. Por ese motivo, frecuentemente los sistemas generan errores de procesamiento, especialmente al operar opciones de uso no frecuente.

Conviene adoptar sistemas generales, cuyo uso prolongado haya permitido validar todas las posibles opciones de proceso.

III.3.1.2 Errores muestrales (ver capítulo III.2)

III.3.2 Maximización de la eficiencia muestral

Existen varias aproximaciones al problema de incrementar la eficiencia del muestreo:

- Optimización de diseños muestrales multifásicos y multietápicos, o con unidades en conglomerados.
- Optimización de diseños monofásicos basados en unidades muestrales simples.
- Aumento de la eficiencia mediante modelos de simulación.
- Empleo de métodos de muestreo no probabilísticos de alta eficiencia.

a) Optimización de diseños muestrales multifásicos y multietápicos

La optimización de diseños muestrales de tipo multifásico y multietápico o con unidades muestrales en conglomerados sistemáticos, es de gran importancia para los inventarios regionales y nacionales. Algunos aspectos de este problema han sido considerados al describir diseños en las secciones III.2.7, III.2.10 y III.2.11.

b) Optimización de diseños monofásicos con unidades muestrales simples

Partiendo de un cierto tipo de unidad muestral, es posible determinar un diseño óptimo a partir de la siguiente formulación matemática de las opciones de diseño:

$$s = s(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (3-210)$$

$$c = c(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (3-211)$$

medición de rodales

Donde

s es una función estimadora de variabilidad muestral en términos del coeficiente de variación del área basal, del volumen total o de otra variable de interés.

c es una función de costo de muestreo.

$x_1, x_2, \dots, x_p$ son variables de diseño, como el tamaño de las unidades muestrales, la intensidad de muestreo, y otras variables que se relacionan con la variabilidad entre unidades y el costo de muestreo.

La función de variabilidad puede transformarse fácilmente en una función de error de estimación muestral S :

$$S = \frac{s(x_1, x_2, \dots, x_p)}{\sqrt{n}} \quad (3-212)$$

Supóngase que el costo fijado para el inventario es constante. El problema es entonces encontrar el valor mínimo para S , sujeto a la restricción de costo:

$$S(x_1, x_2, \dots, x_p) = \text{mínimo} \quad (3-213)$$

$$C(x_1, x_2, \dots, x_p) = \text{fijo} \quad (3-214)$$

Para resolver este problema, se emplea comúnmente el método de los multiplicadores de Lagrange. El método permite encontrar los valores $x_1, x_2, \dots, x_p$ asociados con el mínimo error, dada la restricción de costo. Para ello se deriva parcialmente respecto a cada variable $x_1, x_2, \dots, x_p$ y se iguala a 0 la siguiente función:

$$F = S(x_1, x_2, \dots, x_p) + \alpha (c(x_1, x_2, \dots, x_p) - ct)$$

Derivando parcialmente F respecto a $x_1, x_2, \dots, x_p$ e igualando a 0 se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial c}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\varphi S}{\varphi x_2} + \alpha \frac{\varphi c}{\varphi x_2} = 0$$

$$\frac{\varphi S}{\varphi x_p} + \alpha \frac{\varphi c}{\varphi x_p} = 0$$

$$C(x_1, x_2, \dots, x_p) - ct = 0 \quad (3-215)$$

Se genera así un sistema de $p + 1$ ecuaciones con otras tantas incógnitas, los valores de $x_1, x_2, \dots, x_p$ que satisfacen el sistema son las soluciones que definen el diseño óptimo.

Ejemplo:

Sea la siguiente función de variabilidad que caracteriza el rodal:

$$s\% = k y_1^{k_1} \cdot y_2^{k_2} \cdot \dots \cdot y_p^{k_p} \cdot a^c$$

Donde: $y_1, y_2, \dots, y_p$ son variables, como edad, superficie, grado de homogeneidad, clase de manejo, etc.

a = tamaño de la unidad muestral, m^2

$s\%$ = variabilidad (coeficiente de variación) del volumen

Supóngase que luego de reemplazar en la función de $s\%$ los valores $y_1, \dots, y_p$ correspondientes al rodal en cuestión, la función de variabilidad se reduce a la siguiente expresión:

$$s\% = 550 a^{-0.45}$$

Esta función implica, por ejemplo, que para un rodal cuyas características son $y_1, \dots, y_p$, al muestrear con parcelas de $200 m^2$, el coeficiente de variación entre unidades muestrales es 57.7%; con parcelas de $500 m^2$ es 33.6%, etc.

La función de variabilidad se puede transformar fácilmente en una función de error:

$$S\% = s\% / \sqrt{n} = 550 \cdot a^{-0.45} n^{-0.5} \quad (3-216)$$

medición de rodales

Sea, además, la siguiente función de costo:

$$c = q_0 + q_1 x_1 + \dots + q_i x_i \cdot n + \dots + q_p x_p \cdot n \cdot a \quad (3-217)$$

Donde

c = costo total de muestreo, en dólares

$x_1, x_2, \dots$ = variables que determinan los costos de muestreo, como días de capacitación requeridos, nivel de salarios, distancia del rodal a la base de operaciones, superficie del rodal, etc.

n = número de unidades muestrales

a = tamaño de las unidades

Supóngase, también, que luego de reemplazar en la función los valores de $x_1, x_2, \dots$ correspondientes a la unidad que se inventaría, la función de costo se reduce a la siguiente expresión:

$$c = 450 + 0.9 n + 0.02 na$$

Esta función implica, por ejemplo, que para muestrear en la unidad, con 100 parcelas de 500 m² cada una, el costo de muestreo es US\$1540.

El problema por resolver es determinar el diseño que permita estimar al menor costo, con un error de estimación ($S\%$) no mayor que 5%. Para ello se genera una función de costo sujeta a la restricción de error, empleando un multiplicador de LAGRANGE (α):

$$F = 450 + 0.9n + 0.02na + \alpha(550a^{-0.45}n^{-0.5} - 5)$$

Derivando parcialmente F respecto a n , a y α e igualando a 0:

$$\frac{\partial F}{\partial n} = 0.9 + 0.02a + \alpha \cdot (-0.5) \cdot 550a^{-0.45}n^{-1.5} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0.02n + \alpha \cdot (-0.45) \cdot 550 a^{-1.45} n^{-0.5} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 550 a^{-0.45} n^{-0.5} - 5 = 0$$

Resolviendo el sistema, se encuentran los valores n y a , asociados al diseño óptimo.
Esto es:

$$a = 409 \text{ m}^2 \sim 400 \text{ m}^2$$

El tamaño muestral necesario n se obtiene al resolver para n en la función de error:

$$n = \left(5 \cdot 550^{-1} \cdot 400^{.45} \right)^{-(1/0.5)} = 55.07 \sim 55 \text{ parcelas}$$

El costo del inventario se obtiene al resolver la función de costo para n y a :

$$c = 450 + .9 \cdot 55 + .02 \cdot 55 \cdot 400 = 935.5 \text{ US\$}$$

Si, por el contrario, el problema fuera encontrar el diseño que permita estimar con el mínimo error a un costo dado (1000 dólares), se debería generar una función de error sujeta a la restricción de costo:

$$F = 550 a^{-.45} \cdot n^{-.5} + \alpha (450 + .9n + .02na - 1000)$$

El mismo problema puede resolverse, también, de un modo más simple:

- La función de error puede transformarse en una función de n para un $S\%$ dado (por ejemplo $S\% = 5$)

$$5 = 550 a^{-0.45} n^{-0.5}$$

$$n = \left(\frac{5}{550} a^{0.45} \right)^{-2} = 12100 a^{-0.9}$$

medición de rodales

- Reemplazando n en la función de costo:

$$c = 450 + 0.9 \cdot 12100a^{-0.9} + 0.02a \cdot 12100 \cdot a^{-0.9}$$

$$c = 450 + 10890a^{-0.9} + 242a^{0.1}$$

- Derivando la función respecto a a e igualando a 0:

$$\frac{\partial c}{\partial a} = -9801a^{-1.9} + 24.2a^{-0.9} = 0$$

$$a = 405 \text{ m}^2$$

c) Aumento de la eficiencia mediante modelos de simulación de muestreo

Un modelo de simulación de muestreo es un conjunto de funciones de variabilidad, y de rendimientos operacionales y costos, que permiten estimar para una variada gama de diseños muestrales y de poblaciones-objeto, la eficiencia de estimación evaluada, por ejemplo, en términos del costo necesario para estimar con un determinado error muestral.

Un modelo estimador de variabilidad puede tener la siguiente forma, para bosques de un determinado tipo, como pueden ser las plantaciones de pino insignie.

$$s_i = s_i(x_1, x_2, x_3, \dots) \quad (3-218)$$

Donde

s_i = variabilidad (coeficientes de variación) del rodal para un determinado tipo i de unidad muestral (parcelas convencionales, unidades, MPH).

$x_1, x_2, \dots$ = predictores tales como tamaño de la unidad muestral, altura del rodal, manejo histórico del rodal, aspecto del rodal en fotos aéreas, etc.

$$r_i = r_i(y_1, y_2, y_3, \dots) \quad (3-219)$$

Donde

r_i = rendimiento en términos de número de unidades muestrales por jornada

y_1, y_2 = son predictores, tales como distancia del rodal a la base de operaciones, clase de acceso, época del año, tipo y tamaño de la unidad muestral, etc.

Pueden existir una o varias funciones para s y para r , según las opciones de diseño muestral consideradas. Muestras con parcelas de superficie fija, concéntricas, MPH, etc. tendrán diferentes funciones para s y para r .

Los rendimientos se transforman en costos por unidad muestral conforme a estándares actualizados.

Entre los predictores de las funciones de s y de r , deben encontrarse todas las variables necesarias para representar la opción muestral y las características de la unidad que se inventaría.

El Cuadro 3-26 presenta esquemáticamente cómo se emplea un modelo de simulación, donde la opción más eficiente es la de mínimo costo.

Los modelos simuladores tienen las siguientes ventajas:

- Formulación matemática más libre: no está limitada por las condiciones de un modelo optimizador.
 - Valoriza muchas opciones y deja la elección final al criterio profesional y experiencia del usuario.
- (1) Opciones de diseño, representadas por diferentes tipos y tamaños de unidades muestrales y diferentes estrategias logísticas.
 - (2) Variabilidad entre unidades muestrales del área basal o volumen total, estimada en base a funciones del modelo (coeficientes de variación en %).

Cuadro 3-26. Costo de muestreo para estimar con un determinado error máximo admisible mediante diferentes diseños muestrales

Opción (1)	$s\%$ (2)	c (3)	n (4)	C (5)
01	$s\% 1$	$c1$	$n1$	$C1$
02	$s\% 2$	$c2$	$n2$	$C2$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$0i$	$s\% i$	ci	ni	Ci
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

medición de rodales

- (3) Costo por unidad muestral, expresado en costo por día de muestreo dividido por el rendimiento diario.
- (4) Número de unidades muestrales necesarias para estimar con un determinado error máximo $Em\%$.

$$n = t^2 s\%^2 / Em\% \quad (3-220)$$

- (5) Costo total de la opción: $C = c \cdot n$ (3-221)

d) Empleo de métodos de muestreo no probabilísticos de mayor eficiencia

Los procedimientos de muestreo que usualmente se aplican en inventarios y que se conocen como diseños muestrales probabilísticos tienen la propiedad de estimar insesgadamente y con un error muestral determinable.

Estos métodos asumen que a cada individuo de la población se le asigna una cierta probabilidad de selección y que todos ellos concurren a la selección muestral con la probabilidad preasignada.

Existen procedimientos de muestreo no probabilísticos que permiten estimar características poblacionales a menor costo, pero sin que exista la condición de insesgamiento. Entre los métodos de muestreo no probabilístico existen algunos, como los procedimientos de muestreo punto-planta en cuadrantes, que se encuentran afectados por sesgos moderados y que pueden, por lo tanto, ser empleados para estimar parámetros poblacionales en condiciones en que resulta prescindible la condición de insesgamiento o la valorización exacta del error muestral. Esta situación suele presentarse en inventarios realizados para evaluar estados silviculturales.

Tampoco es posible conocer el error muestral que afecta a la estimación. Se puede, entonces, decir que la condición de insesgamiento y de valorización del error muestral tiene un costo y que es necesario decidir en cada caso si éste se justifica o si puede emplearse un procedimiento de muestreo no insesgado, pero de mayor eficiencia.

III.4 DETERMINACION DE PARAMETROS DE RODAL

El rodal es una unidad de varios individuos semejantes, que es considerada como una unidad o bien una colectividad estadística para su medición y evaluación.

Las diversas dimensiones de los árboles dentro de un rodal son el resultado de la influencia de innumerables factores interrelacionados. Estas relaciones no pueden ser descritas

causal o deductivamente, pero sí lo pueden ser estadísticamente; las mediciones de rodales son un área clásica para la aplicación de métodos matemático-estadísticos.

PAULSEN (1795) y COTTA (1804) ya se servían de métodos estadísticos empíricos, cuando ni se intuían los inicios de los actuales métodos estadísticos de investigación.

La aplicación de métodos estadísticos permite:

- Una mejor y más profunda captación de los parámetros del rodal.
- Una mejor deducción de diversas relaciones y leyes por medios más simples que los métodos deductivos formales de la matemática.
- Un cálculo más sencillo y confiable de la influencia de distintos errores.

Este capítulo tratará de la determinación de los parámetros del rodal y la descripción de las relaciones más importantes entre las diferentes variables. También se dará una visión de los procedimientos teóricos y prácticos de la determinación volumétrica de rodales para finalizar con medición de superficies.

La primera parte incluye:

- diámetro medio del rodal
- área basal del rodal
- altura del rodal
- factores de forma del rodal
- volumen del rodal

III.4.1 Diámetro medio del rodal

La representación de la estructura de un rodal lograda mediante la distribución diamétrica puede evaluarse de acuerdo con diversos puntos de vista. Sin embargo, para cálculos, conclusiones y comparaciones, no conviene operar con la distribución diamétrica, sino calcular valores medios por rodal. En el capítulo (V.3) se analizan separadamente las diversas formas de distribución diamétrica.

El promedio es un valor característico, que se ubica entre los valores extremos del atributo. Es, en cierta medida, el representante típico de todo el rodal (diámetro medio del rodal, altura media del rodal, volumen medio del rodal, etc.). En la práctica, estos valores se denominan también árboles medios. Los valores medios representativos pueden calcularse por diferentes procedimientos, dependiendo del propósito que se tenga.

A partir de la distribución diamétrica de un rodal puro de *picea*, se muestran las distintas formas de calcular el diámetro medio o representativo del rodal.

Cuadro 3-27. Cálculo del valor modal y la mediana

d	n _i	Σn _i	Cálculos:
2	2	2	M = 10 cm
4	30	32	Cálculo de C:
6	204	236	
8	313	549	
10	339	888	$\frac{1495}{2} = 747,5$ hasta 9 cm = 549 árboles
12	297	1185	hasta 11 cm = 888 árboles
14	171	1356	
16	83	1439	747,5 — 549 = 198,5
18	45	1484	
20	9	1493	2 cm 339 St.
22	1	1494	x 198,5 St.
24	1	1495	$x = 0,585 \cdot 2 = 1,17$ cm
	1495		C = 9,00 + 1,17 = 10,17 cm

a) El valor modal, M , corresponde a la clase diamétrica de mayor frecuencia en la tabla de rodal. En el ejemplo dado, $M = 10$ cm es el valor modal del rodal.

Sin embargo, la moda puede no ser muy significativa para algunas distribuciones, por ejemplo, en monte multietáneo. Además, este valor está muy influido por el azar y no es adecuado para las evaluaciones matemáticas.

b) La mediana, C , es el valor diamétrico que divide el número total de individuos en dos partes iguales. Todos los fustes de la mitad inferior tienen un diámetro bajo C y los de la mitad superior tienen un diámetro mayor que C . El valor de C se determina por interpolación simple. En el ejemplo, $C = 10.17$ cm. También este valor es inadecuado para evaluaciones matemáticas posteriores.

c) La media aritmética, $\bar{D}$, es la más utilizada en estadística y en evaluación biológica. Corresponde al diámetro medio aritmético.

Si se designa como $d_1, d_2, \dots, d_k$ a cada valor clase del rodal y como $n_1, n_2, \dots, n_k$ a la frecuencia o número de individuos por clase, entonces:

$$\bar{D} = \frac{n_1 \cdot d_1 + n_2 \cdot d_2 + \dots + n_k \cdot d_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = \frac{\sum n_i d_i}{N} \quad (3-222)$$

La media aritmética caracteriza la distribución diamétrica del rodal. Ella es importante para las distribuciones irregulares, puesto que representa el punto en la ordenada donde se encuentra el centro de gravedad de la distribución. El cálculo del diámetro medio tiene mayor importancia para rodales de distribución regular que para distribuciones irregulares y del tipo de monte multietáneo.

La media aritmética es un valor medio muy utilizado y sirve especialmente para calcular otros valores medios, como por ejemplo el área basal media, el volumen medio del rodal, etc. Las propiedades matemáticas de la media aritmética son muy ventajosas para evaluaciones y son válidas, sin excepción, para cualquier forma de distribución.

De la definición de la media aritmética, se puede deducir que la suma algebraica de los desvíos es igual a cero.

La distribución de frecuencias no varía por un cambio en las unidades de medición del diámetro, ni por un desplazamiento del origen del sistema coordenado (Figura 3-27). Esta propiedad permite calcular fácilmente la media aritmética.

Cuadro 3-28. Cálculo del diámetro medio aritmético

d	n _i	x _i	n _i x _i	Cálculos:
2	2	-4	-8	d ₀ = 10 cm; h = 2 cm
4	30	-3	-90	S ₋ = -819
6	204	-2	-408	S ₊ = 1126
8	313	-1	-313	S = +307 = Σ n _i x _i
10	339	0	0	
12	297	+1	297	c = 307 / 1495 = 0,205 · 2 = +0,410 cm
14	171	2	342	
16	83	3	249	d̄ = 10,00 + 0,410 = 10,41 cm
18	45	4	180	
20	9	5	45	
22	1	6	6	
24	1	7	7	
	1495		S ₋ = -819	
			S ₊ = 1126	

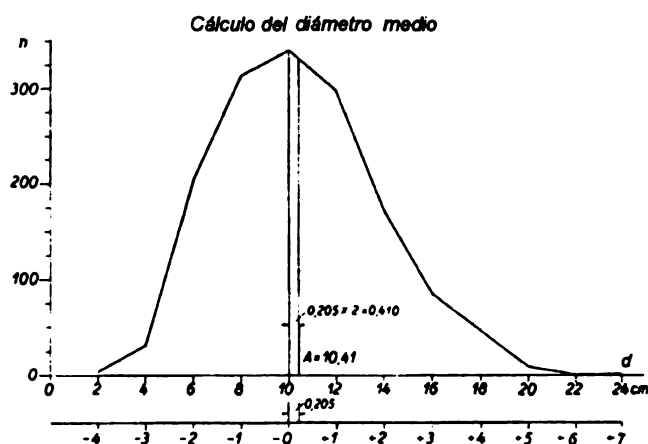


Figura 3-27. Cálculo del diámetro medio aritmético mediante desplazamiento del origen

medición de rodales

El origen es desplazado al centro de la distribución. En el ejemplo, $d_0 = 10$ cm. En términos prácticos, el valor $d_0 = 10$ es restado a todos los valores del atributo. Por esto, el valor medio disminuye en 10 con respecto al valor real. Además, se elige una nueva unidad, que es $2 \text{ cm} = 1$. Los valores del atributo expresado en la nueva unidad se denotarán con x . El cálculo del valor medio se simplifica en la nueva unidad, y se obtiene $c = +0.205$. Para volver a la unidad original, se multiplica por 2 cm y se suman los 10 cm restados anteriormente:

$$\bar{D} = 10 \text{ cm} + 2 \cdot 0.205 \text{ cm} = 10.41 \text{ cm}$$

Cuadro 3-29. Cálculo de la desviación estándar y varianza

d	n _i	x _i	n _i x _i	x _i ²	n _i x _i ²	Cálculos:
2	2	—4	— 8	16	32	$c = \frac{1126 - 819}{1495} = 0.205$
4	30	—3	— 90	9	270	
6	204	—2	— 408	4	816	$s^2 = \left(\frac{4189}{1495} - 0.205^2 \right) \cdot 2^2$
8	313	—1	— 313	1	313	
10	339	0	0	0	0	$= (2.80 - 0.04) 4 = 2.76 \cdot 4$
12	297	+1	+ 297	1	297	
14	171	2	342	4	684	$s = \sqrt{2.76} \cdot 2 \approx \pm 3.33 \text{ cm}$
16	83	3	249	9	747	
18	45	4	180	16	720	
20	9	5	45	25	225	
22	1	6	6	36	36	
24	1	7	7	49	49	
	1495		— 819 + 1126		4189	

III.4.1.1 Relación entre la distribución diamétrica, el rango diamétrico y la desviación estándar

Ante la presencia de diferentes tipos de distribuciones diamétricas se pueden deducir distintas relaciones medias entre los valores característicos. Estas relaciones permiten una captación rápida de la estructura del rodal, lo que es muy importante en la práctica forestal.

La posición del diámetro medio, dentro del rango diamétrico, es dependiente de la forma de la distribución. En distribuciones simétricas, el diámetro medio cae en el 50% acumulativo de las frecuencias, es decir, coincide con la mediana. En distribuciones asimétricas y bimodales, la posición del diámetro medio aritmético oscila (Cuadro 3-30). En rodales jóvenes, se ubica cerca del 60%; y en rodales mayores, entre 50 y 55% del número de individuos, desde el diámetro más pequeño. En montes multietáneos, el árbol de diámetro medio se ubica entre un 60 y 70% de los individuos contados desde los diámetros mayores.

Ejemplo: $\bar{D} = 10.41$

La frecuencia acumulada hasta la clase 8 incluye los 9 cm = 549. La frecuencia acumulada hasta 10.41 es:

$$549 + \frac{1.41}{2} \cdot 339 = 549 + 239 = 788 = 52.7\% = 53\%$$

Relación entre el rango diamétrico y la desviación estándar s .

Cuadro 3-30. Ubicación relativa del diámetro medio aritmético y de área basal media

(según Prodan, 1953)

d cm	Posición relativa respecto del n° de árboles	
	$\bar{d}$	d_g
20,0	51	54
14,0	51	54
10,0	52	55
8,0	52	56
6,0	53	57
4,0	55	59
3,6	55	60
3,4	56	60
3,2	56	61
3,0	57	62

En una distribución normal teórica o una distribución que se le acerque, se encuentran:

entre $(\bar{D} - s)$ y $(\bar{D} + s)$, 68%, aproximadamente 2/3 del número de individuos

entre $(\bar{D} - 2s)$ y $(\bar{D} + 2s)$, 95% de los individuos

entre $(\bar{D} - 3s)$ y $(\bar{D} + 3s)$, 99.7% de los individuos

Las indicaciones teóricas son suficientes y coinciden con las estimaciones prácticas. En el ejemplo:

$$\bar{D} - 3s = 0.5 \text{ cm}$$

$$\bar{D} + 3s = 20.5 \text{ cm}$$

Teóricamente la distribución se encuentra entre 0 y 20 cm; en la práctica, entre 2 y 25 cm, lo que significa que solamente las últimas dos clases no se captan.

También en distribuciones fuertemente asimétricas, el rango de variación se aproxima a $6s$. Sin embargo, los límites no se encuentran en $(\bar{D} - 3s)$ y $(\bar{D} + 3s)$, sino desplazados hacia arriba (una o dos clases diamétricas).

Un caso extremo es el monte multietáneo. Aquí el límite inferior del rango está en 0 cm, mientras que el superior se ubica a $4-5s$. El límite inferior es desplazado artificialmente hacia arriba, debido a que los diámetros se miden a partir de un cierto valor mínimo. Debido a esto, los límites del rango diamétrico para un bosque multietáneo se pueden indicar en promedio como $(\bar{D} - s)$ y $(\bar{D} + 4s)$ ó $(\bar{D} + 5s)$. Por ejemplo, para un rodal multietáneo, el rango de $6s$ es de 77 cm, y por lo tanto, en teoría los valores estarían entre 0 y 77.

Sin embargo, los valores reales son:

$$\bar{D} - s = 20.35 - 12.8 = 7.55 \text{ cm y}$$

$$\bar{D} + 4.3s = 20.35 + 55.05 = 75.4 \text{ cm}$$

Para distribuciones diamétricas coetáneas, s varía en promedio con la edad o el diámetro medio de rodal entre 3 y 8 cm.

El Cuadro 3-32 entrega algunos valores medios para rodales coetáneos de *picea*, que pueden ser válidos como punto de referencia para rodales similares de otras especies.

Cuadro 3-31. Cálculo de diámetro medio y varianza en un bosque multietáneo

d	n _i	x _i	n _i x _i	x _i ²	n _i x _i ²	Cálculos:
7,5—11,5	56	4	224	16	896	
11,5—15,5	37	3	111	9	333	d ₀ = 25.5 cm; h = 4 cm
15,5—19,5	28	2	56	4	112	$\bar{d} = 25,5 - \frac{264}{205} \cdot 4 = 20,35 \text{ cm}$
19,5—23,5	27	1	27	1	27	$s^2 = \left(\frac{2428}{205} - 1,288^2 \right) \cdot 4^2 = 10,20 \cdot 4^2$
23,5—27,5	14	0	0	0	0	$s = \sqrt{10,20 \cdot 4} = \pm 12,8 \text{ cm}$
27,5—31,5	21	1	21	1	21	7,5 cm = ($\bar{d} - s$) $\cong$ 7,55 cm
31,5—35,5	3	2	6	4	12	75,5 cm = ($\bar{d} + 4,3s$) $\cong$ 75,4
35,5—39,5	2	3	6	9	18	
39,5—43,5	4	4	16	16	64	
43,5—47,5	5	5	25	25	125	
47,5—51,5	—	6	—	36	—	
51,5—55,5	—	7	—	49	—	
55,5—59,5	2	8	16	64	128	
59,5—63,5	2	9	18	81	162	
63,5—67,5	—	10	—	100	—	
67,5—71,5	2	11	22	121	242	
71,5—75,5	2	12	24	144	288	
	205	—	418		2428	
			+ 154			
			- 264			

Cuadro 3-32. Valores medios y extremos de desviación estándar para diferentes diámetros medios en un rodal de *picea*, PRODAN (1946)

Diámetro medio en cm	Desviación estándar <i>s</i> en cm			Rango en cm		
	media	extremos		media	extremos	
10	3,2	4,0	2,5	4—24	2—26	4—22
20	4,7	6,2	3,7	10—38	6—44	10—34
30	5,5	7,7	4,2	16—50	12—58	18—44
40	6,1	8,7	4,7	24—60	18—70	26—54
50	6,4	9,3	4,8	32—70	26—82	36—64
60	6,5	9,7	4,8	40—80	34—92	44—72

III.4.1.2 Los árboles medios de HOHENADL

Muchas relaciones estadísticas entre los distintos elementos del rodal y el diámetro a la altura de pecho pueden representarse por una recta o por una parábola de segundo grado. Partiendo de este hecho, HOHENADL (1939) deduce los diámetros medios D^- y D^+ , y a partir de ellos determina las magnitudes restantes, que se calculan de la siguiente manera:

$$D^- = \bar{D} - s$$

$$D^+ = \bar{D} + s \quad (3-223)$$

Ejemplo:

$$D = 10.41 \text{ cm}$$

$$s = 3.33 \text{ cm}$$

$$D^- = 7.08 \text{ cm}$$

$$D^+ = 13.74 \text{ cm}$$

Estos valores diamétricos se definen como árboles medios. Cualquier valor promedio $\bar{y}$ de un atributo y , que se pueda representar por una ecuación lineal del tipo:

$$y = a_0 + a_1 d$$

o por una parábola de segundo grado, como:

$$y = b_0 + b_1 d + b_2 d^2$$

medición de rodales

puede calcularse simplificadamente también por la siguiente fórmula:

$$\bar{y} = \frac{y^- + y^+}{2} \quad (3-224)$$

De acuerdo con la demostración que hacen HOHENADL (1939) y PRODAN (1965):

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{y^- + y^+}{2} = b + b_0 \bar{D}_1 + b_2 (\bar{D}^2 + s^2)$$

Esta obtención aproximada de los árboles de HOHENADL puede atribuirse a la propiedad de la curva normal de contener un 68% de los individuos entre $\bar{D} - s$ y $\bar{D} + s$.

Los árboles medios de HOHENADL se pueden determinar aproximadamente contando 16% desde el límite inferior $D^- = \bar{D} - s$, y contando 16% desde el límite superior de la distribución diamétrica $D^+ = \bar{D} + s$.

KRENN (1942) propuso un procedimiento de aproximación a partir del área basal, el cual en general da muy buenos resultados. Sin embargo, es innecesario, debido a que el cálculo de la media aritmética y la varianza no requieren más tiempo que el cálculo del área basal del rodal.

III.4.1.3 El área basal y los correspondientes árboles medios

El área basal del rodal G es un elemento muy importante para la caracterización del rodal, para definir su grado de densidad y volumen. Entre el área basal y el volumen, y entre el crecimiento en área basal y el volumen, existe un marcado paralelismo.

Si se designa el área basal total del rodal como G , entonces:

$$\begin{aligned} G &= n_1 \frac{\pi}{4} d_1^2 + n_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 + \dots + n_k \frac{\pi}{4} d_k^2 \\ &= \frac{\pi}{4} \sum n_i d_i^2 = \sum n_i g_i \end{aligned} \quad (3-225)$$

Debido a que:

$$\sum n_i d_i^2 = N(d^2 + s^2) = \sum n_i (d - (d - n_i)^2) \quad (3-226)$$

El área basal también se puede calcular por medio de la fórmula sencilla:

$$G = \frac{\pi}{4} \sum n_i d_i^2 = N \frac{\pi}{4} (\bar{D}^2 + s^2) \quad (3-227)$$

En el caso del ejemplo:

$$D = 10.41 \text{ cm}$$

$$s = 3.33 \text{ cm}$$

$$G = 1495(0.1041^2 + 0.0333^2) \frac{\pi}{4} = 14.026 \text{ m}^2$$

El valor obtenido de la tabla de área basal da $G = 14.021 \text{ m}^2$.

Cuadro 3-33. Cálculo del área basal y de los correspondientes árboles medios

d	n _i	n _i g _i	Σn _i g _i	Cálculos:
2	2	0,001	0,001	G = 14,021 m ²
4	30	0,038	0,039	$\bar{g} = G : N = 0,0938$, $d_g \cong 10,92 \text{ cm}$
6	204	0,576	0,615	G : 2 = 7,0105
8	313	1,573	2,188	7,011
10	339	2,662	4,850	--- 4,850
12	297	3,359	8,209	2,161
14	171	2,632	10,841	$d_{g/2} = 11 + \frac{2,161}{3,359} \cdot 2 \cong 12,29 \text{ cm}$
16	83	1,669	12,510	$d_g =$ Diámetro del árbol de área basal media
18	45	1,145	13,655	$d_{g/2} =$ Diámetro del árbol de área basal central
20	9	0,283	13,938	
22	1	0,038	13,976	
24	1	0,045	14,021	
1495		14,021		

III.4.1.4 El diámetro del árbol de área basal media o diámetro medio cuadrático D_g

Si se divide el área basal del rodal por el número de individuos N , se obtiene el área basal media del árbol medio $\bar{g}$ (la media aritmética de las áreas basales de todos los árboles):

$$\bar{g} = \frac{G}{N} = \frac{\sum n_i g_i}{N} \quad (3-228)$$

medición de rodales

El diámetro correspondiente a esta área basal, que se puede obtener de la tabla de área basal, es el diámetro del árbol de área basal media, D_g

$$g = \frac{\pi}{4} D_g^2 ; D_g = \sqrt{\frac{4}{\pi} G / N}$$

De la fórmula (3-227) se puede deducir el área basal media y el diámetro del árbol de área basal media:

$$\bar{g} = \frac{G}{N} = \frac{\pi}{4} (\bar{D}^2 + s^2) = \frac{\pi}{4} D_g^2 \quad (3-229)$$

$$D_g^2 = \bar{D}^2 + s^2 ; D_g = \sqrt{\bar{D}^2 + s^2} \quad (3-230)$$

El árbol de área basal media es el más utilizado para la caracterización de un rodal.

La fórmula muestra que el diámetro del árbol de área basal media es siempre mayor al diámetro aritmético medio.

III.4.1.5 Diámetro del árbol de área basal central

El árbol de área basal media y el diámetro medio aritmético tienen la desventaja de ser influidos por el tipo de raleo. Un raleo por lo bajo intenso, por ejemplo, desplaza fuertemente el diámetro del árbol de área basal media hacia arriba. Pero para poder hacer seguimiento de un rodal es necesario tener un valor relativamente continuo. Por eso, en lo posible se eligen valores medios, que no sean influidos sustancialmente por las intervenciones del rodal. Uno de estos valores medios es el árbol de área basal central.

El árbol de área basal central divide el área basal total en dos partes iguales. La forma de cálculo está dada en los Cuadros 3-33 y 3-34. El diámetro del árbol de área basal central es siempre superior al del árbol de área basal media y su desplazamiento matemático es insignificante. En el rodal del ejemplo, se asume un raleo por lo bajo muy intenso, por medio del cual se extrajeron todos los individuos bajo 7 cm. Los diámetros de los árboles de área basal media y central se calculan en el Cuadro 3-34.

El desplazamiento matemático producto del raleo alcanza para el árbol de área basal media:

$$11.65 - 10.92 = 0.73 \text{ cm}$$

Y para el árbol de área basal central

$$12.47 - 12.29 = 0.18 \text{ cm}$$

Cuadro 3-34. Diámetro de área basal media y de área basal central

d	n _i	n _i g _i	Σn _i g _i	Cálculos:
8	313	1,573	1,573	$\bar{g} = \frac{13,406}{1259} = 0,01066$
10	339	2,662	4,235	$d_g = 11,65 \text{ cm}$
12	297	3,359	7,594	$\frac{G}{2} = 6,703 \text{ m}^2$
14	171	2,632	10,226	$\frac{6,703}{2} = 3,3515$
16	83	1,669	11,895	$\frac{2,468}{3,359} = 0,735$
18	45	1,145	13,040	$d_{g/2} = 11 + \frac{2,468}{3,359} \cdot 2 = 12,47 \text{ cm}$
20	9	0,283	13,323	
22	1	0,038	13,361	
24	1	0,045	13,406	
	1259	13,406		

III.4.1.6 Diámetro del árbol medio de WEISE

El árbol de WEISE (llamado así por la proposición de WEISE 1880) se ubica en el 60% del número de individuos contando desde el más delgado y a 40% contando desde el más grueso. Se utiliza para la determinación aproximada del árbol de volumen medio. En rodales coetáneos puros con una distribución diamétrica unimodal, el árbol de volumen medio efectivamente se ubica en aproximadamente un 60% del número de individuos. Sin embargo, esta posición es muy dependiente de la forma de la distribución diamétrica.

III.4.1.7 Errores en la determinación de diámetros y áreas basales

Los errores en la determinación del área basal del rodal se manifiestan en toda su magnitud sobre el volumen del rodal, debido a lo cual su cálculo no se puede obviar.

El error diamétrico y su área basal se calculan simultáneamente, debido a que existen relaciones precisas entre el diámetro y el área basal y entre sus respectivos errores.

Los errores se clasifican en :

- error de los valores medios ("error de muestreo")
- errores del diámetro y del área basal del rodal

Error de muestreo

El área basal puede obtenerse tras una medición de todos los individuos (censo), en cuyo caso no se presenta este tipo de error. Pero si se mide sólo una parte, entonces la muestra está afectada a un error de muestreo. Estos errores se analizan separadamente en el capítulo III.2, correspondiente a diseños de muestreo.

Errores diamétricos y de área basal

Suponiendo que el diámetro haya sido medido sólo una vez con la forcípula, se tienen los siguientes errores en la medición y cálculo de diámetro y área basal:

- error instrumental
- error de observación
- error de desvío del área circular
- error de clasificación por clase
- error de aproximación

La utilidad de los diversos procedimientos de determinación volumétrica para el manejo forestal y para el control de crecimiento depende de la magnitud de los errores señalados. Los estudios teóricos y prácticos han aclarado ampliamente esta incógnita (KRENN 1944; EMROVIC 1954; DITTMAR 1956; PESCHEL 1936; PRODAN 1951; STRAND 1952). Los estudios prácticos conocidos hasta ahora se basan exclusivamente en observaciones repetidas para distintos intervalos de clases diamétricas. Estas mediciones explican solamente los errores de observación. El resto de los errores se debe deducir teóricamente. Para su determinación empírica se deberían medir varios rodales, una vez con dos mediciones perpendiculares con precisión de 1 mm y otra vez aproximando al centímetro por clase diamétrica. Por comparación de los resultados se pueden establecer analíticamente los errores. El abundante material reunido por las instituciones de investigación forestal con la medición exacta de muchas parcelas de estudio sirve muy bien a estos propósitos. Las comprobaciones demuestran una coincidencia total de los resultados prácticos con el análisis teórico de los errores.

PRODAN (1965) desarrolla un exhaustivo análisis de todos los errores indicados concluyendo en los siguientes porcentajes aproximados.

- a. El error de muestreo, m_1 , es dependiente del número de individuos, del área basal registrada y del diámetro medio del rodal. Varía entre ± 1 y 10%.
- b. El error instrumental, m_2 , puede ser disminuido a tal grado utilizando instrumentos precisos, que es posible desestimarlos.
- c. El error de medición, m_3 , es independiente de la amplitud de la clase. Con un trabajo metódico se puede restringir a $\pm 0.3\%$.
- d. El desvío del área circular, m_4 , haciendo sólo una medición, puede alcanzar, en caso extremo, $\pm 0.5\%$.
- e. El error de clasificación, m_5 , depende de la amplitud de la clase y del área basal, o bien, del número de individuos del rodal registrado.

Varía para

Clases de 1 a 2 cm: ± 0.1 a 0.4%

Clases de 4 a 5 cm: ± 0.3 a 0.8%

- f. El error de aproximación, m_6 , depende del intervalo de la clase y del diámetro medio del rodal. Varía según el tipo de distribución, entre 1.5 y 10% .

Este error puede alcanzar en promedio para distribuciones unimodales, dependiendo de la amplitud de la clase, valores que van desde ± 0.1 a 0.5% .

En distribuciones decrecientes del tipo bosque multietáneo

para clases de 1 - 2 cm $+0.1$ a 0.5% y

para clases de 4 - 5 cm $+0.5$ a 1.0%

El error global del área basal del rodal, según la teoría de errores, es una composición de los siguientes errores (sin error de muestreo):

- a. Clases de 1-2 cm. Distribución diamétrica unimodal.

$$m_G \% \equiv \pm \sqrt{m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2} \equiv \pm \sqrt{0.3^2 + 0.5^2 + 0.2^2 + 0.2^2} \equiv \pm 0.65\%$$

Distribución diamétrica decreciente.

$$m_G \% \equiv \pm \sqrt{m_3^2 + m_4^2 + m_5^2} + m_6 \equiv \pm \sqrt{0.3^2 + 0.5^2 + 0.2^2} + 0.2 \equiv \pm$$

$$-0.6 + 0.2 = -0.4 \text{ hasta } +0.8\%$$

- b. Clases de 4-5 cm. Distribución diamétrica unimodal.

$$m_G \% \equiv \pm \sqrt{0.3^2 + 0.5^2 + 0.5^2 + 0.5^2} \equiv \pm 0.92\%$$

Distribución diamétrica decreciente.

$$m_G \% \equiv \pm \sqrt{0.3^2 + 0.5^2 + 0.5^2} + 0.5 = 0.8 + 0.5 = -0.3 \text{ hasta } 1.3\%$$

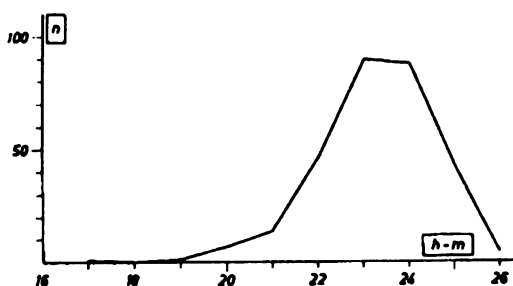
Es decir, el área basal del rodal puede determinarse con un error promedio de $\pm 0.5-1.0\%$. En condiciones desfavorables, el error se puede duplicar (hasta $\pm 2\%$).

III.4.2 La altura en el rodal

Las alturas absolutas son principalmente dependientes de la especie, la calidad de sitio, la edad y el manejo del rodal. Por el contrario, las alturas relativas dentro del rodal son dependientes del diámetro, de la posición sociológica del árbol dentro del rodal y de muchos otros factores que no pueden ser registrados directamente en forma cuantitativa.

En un rodal, para los mismos valores diamétricos, se presentan varias alturas distintas. Si se grafican las alturas sólo respecto del diámetro, ellas se dispersan en torno a la curva de referencia media. La razón de los desvíos se debe justamente a los restantes factores no considerados. En general, las alturas aumentan con el diámetro dentro de un rodal. Eso sí, excepcionalmente árboles o grupos de árboles con diámetros grandes presentan alturas más bajas que árboles con diámetros menores, debido a condiciones de desarrollo distintas. Ejemplos de esto son más frecuentes en el monte irregular y el monte medio.

La medición de las alturas de todos los árboles en un rodal es prácticamente imposible. Ejemplos para la medición de alturas para todos los árboles son muy escasos en la literatura. Vale la pena mencionar el rodal de PESCHEL (1936), el cual también fue utilizado por KRENN para sus estudios. En este rodal se midieron todos los 840 árboles después del volteo. También ASSMANN (1943) ha publicado resultados de mediciones exhaustivas de altura.



**Figura 3-28. Distribución de las alturas en un rodal.
Se observa la asimetría positiva**

La Figura 3-28 indica que la distribución de alturas, en contraposición a la distribución diamétrica, presenta una asimetría positiva. La causa de esto es que en la competencia por la luz de todos los árboles, aun los más débiles están empeñados por alcanzar el estrato superior.

En los Cuadros 3-35 y 3-36 se indican las distribuciones de alturas medias obtenidas por el sistema de SCHIFFEL, ANUTSCHIN (1960).

Cuadro 3-35. Distribución de las alturas de acuerdo con la frecuencia acumulada. Rodal coetáneo
a) según SCHIFFEL; b) según DAVIDOV; c) según SCHIFFEL para $h = 30$

Σh	a	b	c
0	0,680	0,725	20,4
10	0,788	0,819	23,6
20	0,866	0,870	26,0
30	0,911	0,910	27,3
40	0,947	0,945	28,4
50	0,978	0,970	29,3
60	1,004	1,000	30,1
70	1,030	1,020	30,9
80	1,056	1,050	31,7
90	1,092	1,100	32,8
100	1,140	1,140	34,2

Cuadro 3-36. Valores de altura máximo y mínimo en relación con la altura media. Rodal coetáneo

según	$h_{\min}$	$h_{\max}$
TJURIN	0,80	1,15
TRETJAKOV	0,68	1,15
LEVIN	0,69	1,16
SCHIFFEL	0,68	1,14
DAVIDOV	0,72	1,19
Media	0,69	1,16

El número de individuos del rodal está dividido en clases diamétricas y de alturas. La altura crece con el diámetro, pero para cada clase diamétrica aparecen varias alturas diferentes. La tendencia al aumento de los valores de altura con diámetros crecientes apunta hacia la relación estocástica de la altura h respecto al diámetro d . La relación h/d puede construirse con pocas mediciones y la experiencia ha demostrado que es suficiente para la estimación de alturas con fines prácticos e incluso científicos. Obviamente debe considerarse la incertidumbre producto de la dispersión de los valores en torno a la curva de referencia. La comprobación de la forma general de la relación y la determinación de su exactitud son una condición previa para eso. Junto a la relación h/d , las relaciones factor de forma/ d , volumen/ d y valor/ d son de importancia capital para la mensura de rodales.

III.4.2.1 La relación entre el diámetro d y la altura h en un rodal

La curva de altura del rodal es la representación gráfica de la relación h/d de un rodal; HOHENADL (1936), KRENN (1944), MICHAÏLOFF (1943, 1951), NÄSLUND (1936/37), entre otros, han mostrado que casi siempre se puede ajustar la dispersión de las alturas h respecto de los diámetros de un rodal coetáneo, a través de una parábola de segundo grado.

$$h = b_0 + b_1 d + b_2 d^2 \quad (3-231)$$

Los coeficientes b_0 , b_1 y b_2 de la parábola pueden obtenerse por mínimos cuadrados o por un procedimiento de aproximación.

Según las circunstancias, en vez de una parábola de segundo orden, pueden utilizarse funciones más simples. Por ejemplo, la fórmula de NÄSLUND:

$$h - 1.3 = \frac{d^2}{(b_0 + b_1 d)^2} \quad (3-232)$$

Esta puede, por medio de una transformación simple,

$$\frac{d^2}{h - 1.3} = Z^2 (b_0 + b_1 d)^2 ; Z = \frac{d}{\sqrt{h - 1.3}} = b_0 + b_1 d \quad (3-233)$$

ser ajustada como recta, de modo más cómodo que la parábola de segundo orden.

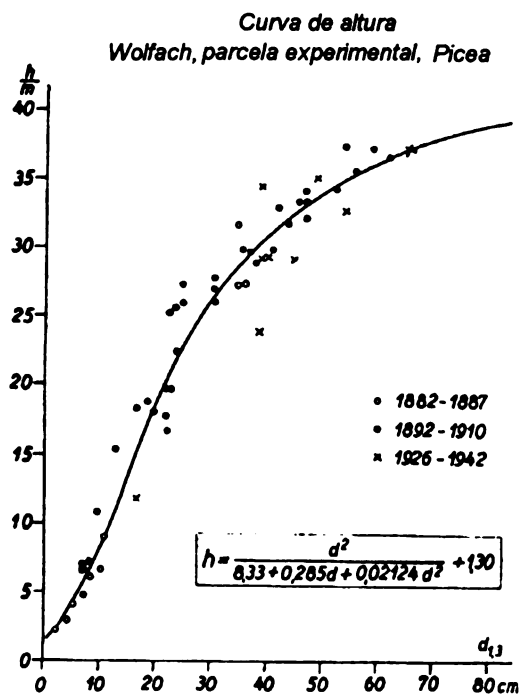


Figura 3-29. Relación altura-diámetro en un bosque multietáneo

Según KOPEZKI (1902) y GERHARDT (1901), también se puede emplear la relación estadística:

$$gh = b_0 + b_1 g \quad (3-234)$$

En este caso, la expresión altura-diámetro se expresa por la forma:

$$h = \frac{b_0}{g} + k = \frac{b_1}{d^2} + k \quad (3-235)$$

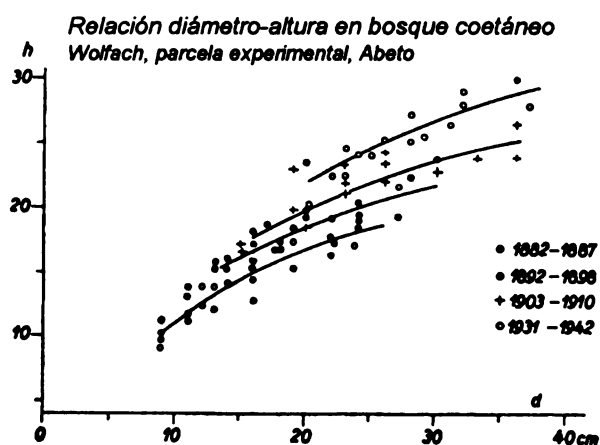


Figura 3-30. Desplazamiento de la relación altura-diámetro con la edad.
Rodal coetáneo de abeto

Junto a éstas, se han propuesto las siguientes ecuaciones:

$$h = b_0 d^{b_1} \quad ; \quad \log h = \log b_0 + b_1 \cdot \log d \quad (3-236)$$

$$h = b_0 (1 - e^{-b_1 d}) \quad (3-237)$$

$$h = b_1 \log d + b_0 \quad (3-238)$$

$$h - 1.3 = b_0 \left(\frac{d}{1 + d} \right)^{b_1} \quad (3-239)$$

$$h - 1.3 = b_0 e^{-b_1/d} \quad (3-240)$$

$$\log(h - 1.3) = \log b_0 - b_1 \frac{1}{d} \log e \quad (3-241)$$

$$h = b_0^{(b_1 \ln d - b_2 \ln^2 d)} \quad (3-242)$$

Donde h = altura total del árbol, m
 d = diámetro a la altura de pecho, cm
 b_0, b_1, b_2 = coeficientes

Las ecuaciones (3-232) a (3-236) son demasiado rígidas, por lo que no siempre representan fielmente el desarrollo de la curva de alturas del rodal en rodales de monte alto.

Para rodales coetáneos homogéneos con una dispersión baja, son adecuadas las ecuaciones (3-237) y (3-238). La ecuación (3-239) corresponde a la representación gráfica de los valores de las alturas sobre un eje diametral logarítmico. La representación gráfica entrega una banda de dispersión que se puede ajustar aproximadamente por una recta.

En la ecuación (3-241) los logaritmos de la altura disminuida en 1.3 m se ajustan a una recta sobre el eje $1/d$.

Con un número suficientemente grande de mediciones, el ajuste gráfico al marco de dispersión entrega una buena representación de la curva de alturas de rodal. Para esto, se debe calcular la altura media para cada clase diamétrica y luego ajustar una curva continua a estos promedios. La incertidumbre producida por la subjetividad del ajuste cae en el marco general de los errores.

En rodales de monte irregular y de monte medio, a menudo la parábola de segundo orden suele representar satisfactoriamente las alturas para todas las clases diamétricas. En este caso, es importante considerar si se puede descomponer el rodal en un dosel superior y otro inferior. Luego se puede determinar una curva para cada estrato. Una subdivisión de este tipo sería la indicada, por ejemplo, para un bosque de encinas biestratificado o un monte multietáneo de *picea* y *abies*, cuyas clases diamétricas intermedias muestran un desarrollo distinto a las clases diamétricas superiores. En un rodal multietáneo con estructura estable se puede ajustar una curva de alturas para todas las clases diamétricas. Esta curva, que puede ser definida gráfica o analíticamente, se desvía de la parábola de segundo orden. Muestra claramente un punto de inflexión, y es parecida a una típica curva de crecimiento (NÄSLUND 1936/37; PRODAN 1944). La curva de alturas del rodal multietáneo puede ajustarse satisfactoriamente con una función hiperbólica de la forma (Figura 3-29):

$$h - 1.3 = \frac{d^2}{b_0 + b_1 d + b_2 d^2} \quad (3-243)$$

El cálculo de esta ecuación puede simplificarse transformándola en una parábola de segundo orden:

$$\frac{d^2}{h-1.3} = Z = b_0 + b_1 d + b_2 d^2 \quad (3-244)$$

III.4.2.2 La precisión de la curva de alturas de rodal

Los errores que se producen al medir la altura pueden reducirse por mediciones cuidadosas e instrumentos más precisos. Sin embargo, ello no afecta la dispersión de los valores en torno a la curva media. La dispersión de los valores de altura ocasiona cierta imprecisión de la curva de alturas. Numerosos estudios han determinado con bastante precisión la dispersión media respecto de la curva de alturas del rodal (ASSMANN 1943; KRENN 1944; NÄSLUND 1936/37; PRODAN 1944).

Si se definen como h_i las alturas reales y como h_a las alturas estimadas analítica o gráficamente, entonces cada valor real tendrá una desviación respecto del valor de la curva:

$$E_h = h_i - h_a$$

En un rodal determinado, la magnitud media de los desvíos es caracterizada por la desviación estándar dada por la conocida fórmula:

$$S_h = \sqrt{\frac{\sum (h_i - h_a)^2}{N - 3}} \quad (3-245)$$

La cifra 3 representa los grados de libertad de una parábola de segundo orden. Esto significa que con sólo tres puntos no se puede definir la precisión de la parábola. En esta desviación media están habitualmente incluidos los errores instrumentales y de medición, los cuales se producen haciendo sólo una medición de alturas.

En un rodal determinado, la dispersión se mantiene constante o, en algunos casos, aumenta con el diámetro. Ella oscila tanto en su magnitud absoluta como en el porcentaje de la altura entre límites definibles, de forma bastante estrecha. El material de NÄSLUND muestra, para rodales de *pinus* y *picea* de 50-130 años de edad, una desviación estándar de $\pm 1.3-1.9$ m o un porcentaje de la altura media del rodal de $\pm 7-12\%$. El material elaborado por KRENN de rodales de *picea*, *pinus*, *abies* y pino Oregón muestra una desviación estándar de $0.9-1.9$ m, o bien, $\pm 4.5-11.5\%$. Las investigaciones de otros autores muestran resultados similares.

medición de rodales

Esta dispersión depende en general, entre otros factores, de la homogeneidad del rodal, la especie y el tratamiento silvicultural.

La precisión de la curva de alturas o de su regresión depende de la magnitud de la desviación media de cada valor de alturas. De la fórmula aproximada para la precisión de la curva de alturas (JOHNSON 1954)

$$s_a = \pm \frac{s_h}{\sqrt{N}} \quad (3-246)$$

derivó NÄSLUND, junto con la teoría general de errores, la fórmula de aproximación correcta para el error de la parábola:

$$s_a \cong \frac{1.3 s_h}{\sqrt{N}} \quad (3-247)$$

Para el cálculo exacto es válida la fórmula:

$$s_a^2 = s_h^2 \frac{1}{N} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad (3-248)$$

Donde

s_a^2 = el cuadrado del error de la curva

s_h^2 = la dispersión media respecto a la curva de referencia, según la fórmula (3-245)

$\bar{x}$ = la media aritmética de los valores de altura x_i

En la estimación de los valores de altura de un rodal por medio de la curva de regresión se debe esperar un error, que está dado por la fórmula anterior. Aquí, N indica el número de alturas medidas.

De acuerdo con la fórmula (3-247) se puede determinar el número de observaciones necesarias para un límite deseado del error s_a de la curva. El Cuadro 3-37 entrega el número de muestras de alturas necesarias para alcanzar una precisión de 1 y 2%.

Cuadro 3-37. Número de muestras necesarias según la variabilidad de las alturas y error prescrito

Precisión en %	Dispersión media				
	5	8	10	15 %	
1	42	108	169	380	mediciones
2	11	27	42	95	"

El error porcentual de la curva de alturas se traspasa en toda su magnitud al volumen del rodal. Por lo tanto, este error limita la precisión de la determinación del volumen del rodal y la del cálculo del crecimiento volumétrico.

Las dificultades propias de la medición práctica de alturas han llevado desde hace mucho tiempo a desarrollar procedimientos que permitan el cálculo del volumen del rodal con un número reducido de mediciones de altura. Estos procedimientos suponen el conocimiento de las propiedades de las curvas de altura de rodal.

III.4.2.3 Propiedades de las curvas de alturas de rodal

La forma general de la curva de alturas del rodal se manifiesta de modo más claro por medio de la función de regresión analítica h/d . Las curvas de alturas muestran las siguientes propiedades:

- La curva de alturas de rodales jóvenes en sitios buenos en general tiene pendiente fuerte. Con edades mayores y en sitios malos, la pendiente se aplan.
- La curva de alturas del rodal se desplaza hacia arriba con la edad (Figura 3-30), (SPEIDEL 1983; ASSMANN 1943). El desplazamiento se explica porque árboles que en distinto tiempo tienen un mismo diámetro pertenecen a clases sociales diferentes y la relación h/d para las distintas clases sociológicas es distinta.
- Por esto, la curva de alturas de rodal debe ser vista como una curva de estado, que es diferente a la curva de crecimiento en altura del rodal (curva de crecimiento).

En rodales estables, como por ejemplo el bosque multietáneo en equilibrio, en promedio la posición sociológica de las distintas clases diamétricas permanecerá constante. La curva de alturas, entonces, no se desplazará. Como ejemplo sirve un rodal (Figura 3-29) que desde hace 60 años no muestra un desplazamiento de la curva de alturas de rodal. En rodales como éste, la curva de estado (curva de alturas de rodal) en un punto determinado del tiempo coincide plenamente con la curva de desarrollo (curva de crecimiento en alturas).

III.4.2.4 Modelos parametrizados de altura

La relación altura-diámetro en rodales coetáneos varía con la calidad del sitio y con la densidad. Rodales extensos pueden presentar grandes variaciones locales en la calidad del sitio y en la densidad, aun cuando hayan constituido una unidad respecto al manejo durante toda su historia. En tales circunstancias, una relación única h/d ajustada para todo el rodal sería la resultante de muchas relaciones diferentes h/d , con una consiguiente variabilidad muy grande en torno a la línea de regresión.

medición de rodales

Para reducir el error en la estimación de altura pueden emplearse en tales casos los llamados modelos parametrizados de altura.

COX (1994) comparó modelos tradicionales con varios modelos parametrizados en base a 368 inventarios practicados en rodales de pino insigne por varias empresas.

Entre los modelos parametrizados probados, los siguientes mostraron mayor eficacia:

$$h = b_0 + b_1 H + b_2 D_g^{0.95} + b_3 \exp(-.08d) + b_4 H^3 \exp(-.08d) + b_5 D_g^3 \cdot \exp(-.08d) \quad (3-249)$$

$$h / H = b_0 + b_1 H + b_2 H / D_g + b_3 / d^{-1} + b_4 H / D_g + b_5 N / D_g (H \cdot D_g) / d \quad (3-249a)$$

$$\ln(h) = b_0 + b_1 \ln(D_g) + b_2 \ln(N) + b_4 \sqrt{d} \quad (3-249b)$$

Donde

h	=	altura total del árbol, m
d	=	diámetro del árbol, cm
H	=	semisuma de la altura del árbol más delgado y del más grueso en la parcela, m
D_g	=	diámetro cuadrático medio, cm
N	=	número de árboles por hectárea
b_0, b_1	=	coeficientes ajustados para un rodal (o para un conjunto de rodales con moderadas variaciones en su edad y estado de manejo) en base a una muestra de árboles medidos durante el inventario

Los parámetros N y D_g representan las variaciones en densidad, mientras que H representa las variaciones en la calidad del sitio.

Los parámetros fueron elegidos de manera que no representen costos adicionales en la recolección de datos.

El modelo 3-249 puede considerarse como un modelo del siguiente tipo:

$$h = b_0 + b_1 e^{-.08d}$$

Donde b_0 y b_1 son coeficientes cuyo valor depende de la calidad de sitio y de la densidad.

La mayor efectividad de los modelos parametrizados respecto a los tradicionales depende de los siguientes factores:

- Dispersión de la muestra de altura: mientras más pequeños y numerosos son los conglomerados de árboles muestra para un mismo tamaño total de muestras de altura, mayor es su eficacia. Unidades muestrales pequeñas muestran una mayor correlación entre los parámetros dasométricos y las alturas.
- Heterogeneidad del rodal: mientras más heterogéneo el rodal, mayor es la efectividad de los modelos parametrizados respecto a los tradicionales. Se ha podido comprobar, incluso, que un mismo modelo parametrizado puede aplicarse a varios rodales con diferentes edades y manejo, sin una pérdida muy grande de precisión.

COX (1994) comprobó que en el 88% de los inventarios de rodal empleados en el estudio, los modelos parametrizados resultaron más eficaces que los tradicionales. Entre ellos el modelo 3-249b resultó el mejor en un 44% de los casos, el modelo 3-249 en un 37% y el modelo 3-249a en un 17%.

CURTIS (1970) empleó modelos parametrizados con la edad para estimar alturas en parcelas permanentes en diferentes ocasiones:

$$\log h = b_0 + b_1 / d + b_2 / t + b_3 / (d \cdot t)$$

CLUTTER y ALLISON (1974) emplearon un modelo similar para estimar alturas de árboles individuales en un modelo de crecimiento:

$$\log(h - 4.5') = b_0 + b_1 / d + b_2 / \sqrt{t} + b_3 / (d \sqrt{t}) + b_4 \log N / \sqrt{t}$$

Donde

t = edad del rodal, años

III.4.2.5 Los valores medios de altura

Para la caracterización de un rodal y cálculo del volumen es útil la determinación de alturas medias de rodal. De acuerdo con la forma de calcularla se puede determinar también el orden de magnitud del valor medio.

La deducción de la altura media del rodal se basa en la siguiente condición: la altura media del rodal, H , multiplicada por el área basal del rodal, G , y por el factor de forma de rodal, F , entrega el volumen del rodal:

medición de rodales

$$GFH = n_1 g_1 f_1 + n_2 g_2 f_2 + \dots + n_i g_i f_i$$

y por lo tanto:

$$H = \frac{GFH}{GF} \quad (3-250)$$

El área basal del rodal se conoce por medición directa, pero el factor de forma, no.

a) La altura media según LOREY se calcula por la fórmula:

$$H_L = \frac{n_1 g_1 h_1 + n_2 g_2 h_2 + \dots}{g_1 + g_2 + \dots} = \frac{\sum n_i g_i h_i}{G} \quad (3-251)$$

Por lo tanto, esta altura es una media ponderada por el área basal de la respectiva clase diamétrica. De la fórmula anterior, si los factores de forma son iguales, se desprende: ➡

$$H_L = \frac{n_1 g_1 h_1 \cdot F + n_2 \cdot g_2 \cdot h_2 F + \dots}{GF} = \frac{\sum n_i g_i h_i}{G} \quad (3-252)$$

La altura media de LOREY, H_L , se utilizó mucho tiempo como altura de entrada para la mayoría de las tablas de rendimiento. Su cálculo se facilita dividiendo el rodal en cinco clases de igual número de individuos o igual área basal.

La fórmula se simplifica a:

$$H_L = \frac{0.2Gh_1 + 0.2Gh_2 + \dots + 0.2Gh_5}{G} = \frac{h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5}{5} \quad (3-253)$$

La aplicación de la fórmula de LOREY para el cálculo de la altura media según clases de igual número de árboles entrega los mismos resultados. La demostración es simple, partiendo del supuesto de que el factor de forma F es constante:

b) La media aritmética de la altura, $\bar{H}$, se calcula teóricamente según la fórmula:

$$\bar{H} = \frac{n_1 h_1 + n_2 h_2 + \dots}{N} = \frac{\sum n_i h_i}{N} \quad (3-254)$$

En la práctica no se puede determinar, ya que se requeriría medir las alturas de todos los árboles del rodal. Si se construye la curva de alturas del rodal se puede, con relativa precisión, definir la altura media aritmética del rodal a partir de los diámetros medios de HOHENADL. Si se designa a la altura media aritmética como $\bar{H}$ y las alturas provenientes de la curva de alturas (o mediciones directas) sobre D_- y D_+ correspondientemente como H_- y H_+ , entonces:

$$\bar{H} = \frac{H_- + H_+}{2} \quad (3-255)$$

La altura aritmética media es habitualmente la altura media más pequeña.

c) La altura del árbol de área basal media, H_g , puede obtenerse directamente de la curva de altura o por medición directa en el rodal. Esta altura es algo mayor a la media aritmética de todas las alturas de rodal.

La altura media de una clase de igual número de árboles o área basal se calcula como la altura del árbol de área basal media de la clase. Se asume en forma aproximada que las alturas y los factores de una clase permanecen constantes. El volumen medio de la clase comprende también el área basal media de ésta. A partir del diámetro de árbol de área basal media también se determina la altura de la clase.

La altura del árbol de área basal media del rodal también puede ser usada como reemplazo de la altura de LOREY. Pero esta altura siempre es mayor; la diferencia entre ambas va de 0.3 a 1.5 m.

d) La altura del árbol medio de WEISE, H_w . Se obtiene por determinación directa del árbol de WEISE (el que se ubica en el 40% del número de árbol desde el extremo más grueso), o de la curva de altura. En general, la altura del árbol medio de WEISE es superior a la del árbol de área basal media, porque el diámetro correspondiente también es mayor.

e) La altura del árbol de área basal central, $H_{G/2}$. Las alturas medias del rodal $\bar{H}$, H_g y H_w son muy sensibles a los raleos. PHILIPP (1931) y WIEDEMANN (1961), entre otros, recomiendan por ello el uso de la altura del árbol de área basal central. Es lo que más se acerca a la altura de LOREY, por lo cual puede valer como reemplazo de ésta, ya que su determinación es más sencilla.

f) La altura dominante, H_{dom} . En los procedimientos de determinación de volumen de rodal, habitualmente se dividía el rodal en cinco clases de igual área basal y número de árboles. Se denomina altura dominante a la altura media de la clase de mayor diámetro de igual número de individuos (cinco clases).

La altura dominante es un mejor indicador de la calidad de sitio que las otras alturas, debido a su amplia independencia del manejo del rodal. Entre la altura dominante y la altura

media existe una relación estadística, la cual permite, en estudios de rendimiento, obtener la altura media en función de la altura dominante.

g) **La altura predominante, H_{100} .** La altura dominante, como altura media del quinto superior del número de individuos, también presenta un cierto desplazamiento con la disminución del número de árboles con la edad y, por esto, MITSCHERLICH (1957) propuso la llamada altura predominante.

La altura predominante es la altura de los cien árboles más gruesos por hectárea. En vez de H_{100} también se puede definir H_{200} o H_{50} , o una altura predominante discrecional. Sobre la base de una curva de alturas de rodal se puede obtener desde H_{100} por interpolación.

Como ejemplo para el cálculo de diferentes alturas medias servirá el rodal evaluado por PESCHEL (1936) (Figura 3-31 y Cuadro 3-38).

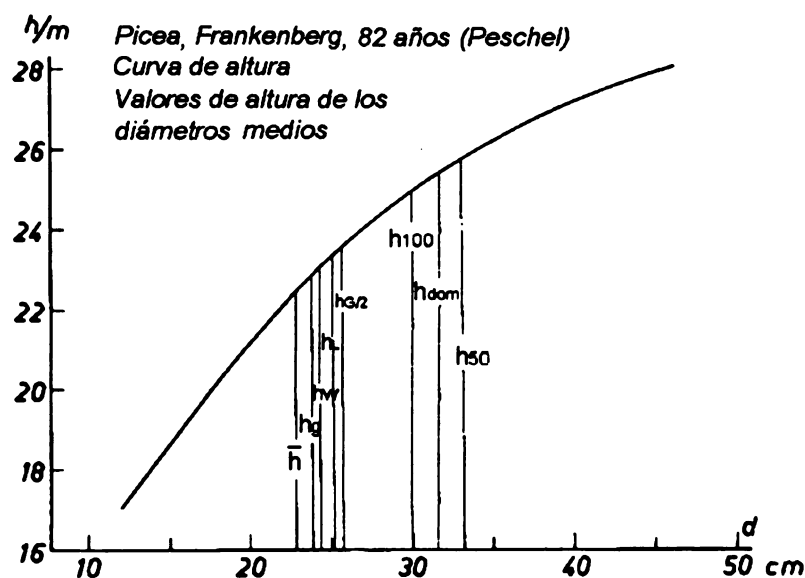


Figura 3-31. Cálculo y posición relativa de diferentes alturas medias

Cálculo de la altura aritmética media:

$$D = 22.93 \text{ cm} \quad s = 6.02 \text{ m}$$

$$D^- = 16.91 \text{ cm} \quad D^+ = 28.95 \text{ cm}$$

$$H^- = 19.7 \text{ m} \quad H^+ = 24.8 \text{ m}$$

Cuadro 3-38. Rodal evaluado para cálculo de diferentes alturas medias

Diámetro	Número de árboles	Número de clase de árboles	Área circular	Clases de áreas basales	del árbol medio de la clase		
					Área basal	Diámetro	Contenido
d	n	(n)	g	(g)	$g_m = \frac{(g)}{(n)}$	d_m	v_m
cm			m²	m²	m²	m²	m³
1	2	3	4	5	6	7	8
12	4		0,045				
13	19		252				
14	25		385				
15	39		689				
16	40		804				
17	41	168	931	3,106	0,018 488	15,34	0,18 470
18	52		1,323				
19	49		1,389				
20	56		1,759				
21	11	168	0,381	4,852	0,028 881	19,18	0,31 789
21	37		1,282				
22	50		1,901				
23	55		2,285				
24	26	168	1,176	6,644	0,039 548	22,44	0,45 458
24	19		0,860				
25	55		2,700				
26	45		2,389				
27	38		2,176				
28	11	168	0,677	8,802	0,052 393	25,83	0,61 919
28	13		0,801				
29	37		2,444				
30	30		2,121				
31	11		0,830				
32	15		1,206				
33	16		1,368				
34	8		0,726				
35	12		1,155				
36	11		1,120				
37	4		0,430				
38	4		454				
39	1		119				
40	1		126				
41	1		132				
43	1		145				
44	1		152				
45	1		159				
48	1	168	181	13,669	0,081 363	32,19	0,99 045
	840	840	37,073	37,073			2,56 681 · 168 = 431,22

medición de rodales

La altura del árbol de área basal media es:

$$D_g = 23.71 \text{ cm} \quad H_g = 22.9 \text{ m (leída desde la curva de alturas)}$$

La altura del árbol de WEISE:

$$D_w = 24.08 \quad H_w = 23.0 \text{ m (leída desde la curva de alturas)}$$

AGUIRRE (1991), sobre la base de 218 parcelas, estableció para *Pinus pseudostrobus* Lindl en el norte de México la siguiente relación entre las alturas medias del rodal H_g y H_w :

$$H_g = -0.40657 + 0.94664 H_w$$

La altura del árbol de área basal central:

$$D_{G/2} = 25.66 \text{ cm} \quad H_{G/2} = 23.6 \text{ (leída desde la curva de alturas)}$$

La altura media de LOREY determinada por cinco clases de igual área basal:

n_i	0.2_g	g_m	d_m	h_i	
320	7.420	0.0232	17.18	19.9	$H_L = 23.5$
189	7.409	0.0392	22.34	22.5	
144	7.440	0.0517	26.65	23.9	
111	7.411	0.0668	29.14	24.8	
76	7.393	0.0973	35.19	26.4	
840	37.073				

La altura media de LOREY determinada por cinco clases de igual número de árboles:

n_i	g_i	g_m	d_m	h_i	
168	3.106	0.01849	15.34	19.0	$H_L = 23.5$
168	4.852	0.02888	19.18	20.8	
168	6.644	0.03955	22.44	22.5	
168	8.802	0.05239	25.83	23.6	
168	13.669	0.08136	32.19	24.7	
840	37.073				

La altura dominante (altura media del quinto superior de igual número de individuos):

$$d_5 = 32.19 \text{ cm } H_{dom} = 25.8 \text{ m (leída desde la curva de alturas)}$$

Estos valores fueron obtenidos de la curva de alturas del rodal, que fue construida gráficamente para los valores de altura entregados por PESCHEL.

Los 100 árboles más gruesos del rodal (Cuadro 3-38) abarcan desde $d = 30$ cm hasta $d = 48$ cm. Al árbol número 50 desde el extremo superior le corresponde un d de 33, con una altura correspondiente de $h = 26$ m. Bajo el supuesto, que se cumple normalmente, que los árboles más gruesos de un rodal mantienen su posición dominante por un largo tiempo, la altura predominante está libre de desplazamientos matemáticos y, con esto, es una medida acertada para la capacidad de producción de un sitio. También se pueden calcular alturas predominantes para los 200 árboles más gruesos.

En el capítulo III.1 se describe la media cuadrática de las alturas, la llamada altura de HIRATA.

III.4.3 Factores de forma

Los conceptos de los factores de forma fueron discutidos en la sección II.1.7.2. En esta sección se presentarán más de cerca las relaciones dentro del rodal.

Si

V = volumen del rodal, m^3

G = el área basal del rodal, m^2

H = una altura media del rodal, m

el factor de forma del rodal F es:

$$F = \frac{V}{GH} \quad (3-256)$$

El factor de forma del rodal es dependiente de la altura media del rodal. Es así como, por ejemplo, la altura media de LOREY, la altura del árbol de área basal media o el árbol de área basal central, ejercen una influencia muy distinta sobre el factor de forma del rodal.

medición de rodales

Ejemplo:

En el rodal de PESCHEL (Cuadro 3-38) se calculan los siguientes datos y resultados:

$$V = 431.30 \text{ m}^3 \text{ sólidos}$$

$$G = 37.073 \text{ m}^3$$

$$F = \frac{431.30}{37.073 \cdot 22.9} = 0.508$$

$$\bar{H} = 22.9 \text{ m}$$

$$H_{g/2} = 23.6$$

$$F = 431.3 : 37.073 : 23.6 = 0.493$$

$$H_L = 23.5$$

$$F = 431.3 : 37.073 : 23.5 = 0.495$$

En la Figura 3-32 se representa la curva de factor de forma del rodal para madera gruesa y madera total a edades crecientes.

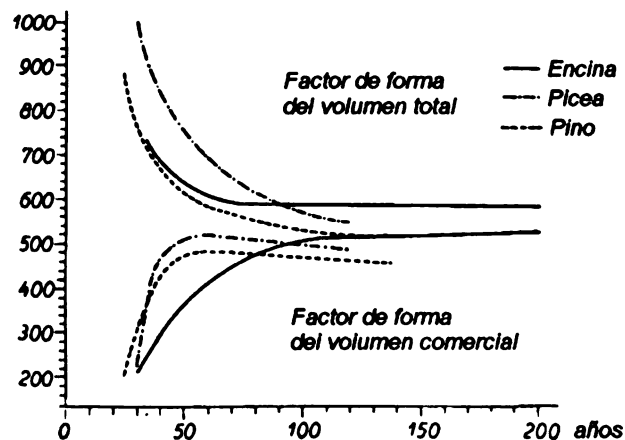


Figura 3-32. Evolución del factor de forma total y comercial con la edad

Habitualmente, la altura se mide desde el suelo hasta el ápice extremo. Sin embargo, el volumen se calcula desde el tocón, de modo que no se considera su volumen.

Si la altura no se mide hasta el ápice, sino hasta el límite de la madera utilizable, entonces el factor de forma se refiere a esta altura.

El volumen se puede referir a la madera fustal, a la madera gruesa o al volumen total. Correspondientemente se calculan:

- factores de forma para madera fustal
- factores de forma para madera gruesa o comercial
- factores de forma para madera total

En la práctica, para la medición de árboles en pie y rodales, se utiliza el factor de forma falso o artificial (Figuras 3-32 a 3-35).

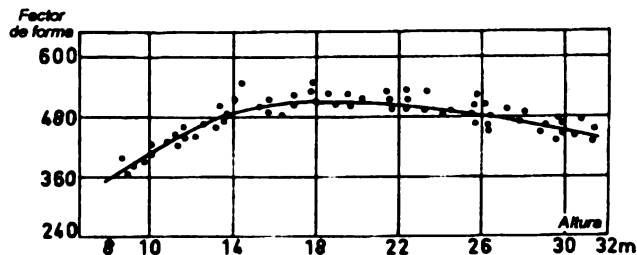


Figura 3-33. Relación del factor de forma falso con la altura

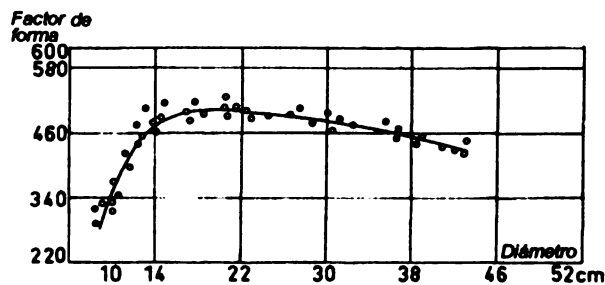


Figura 3-34. Relación del factor de forma falso con el diámetro

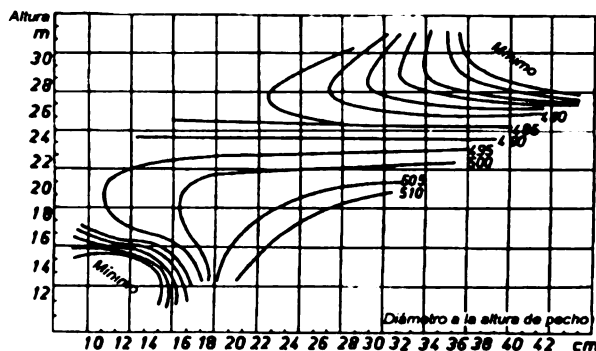


Figura 3-35. Factor de forma falso en función de diámetro y altura

III.4.3.1 La curva del factor de forma comercial

El desarrollo de la curva del factor de forma comercial o de madera gruesa a lo largo del diámetro se ve fuertemente influido por el límite comercial de al menos 6 cm de diámetro fustal, o de ramas.

El factor de forma de madera gruesa del árbol será igual a cero hasta diámetros de 6-7 cm, para luego crecer aceleradamente. Evidenciará un máximo entre los 14 y 20 cm. Por influencia de la fuerte conicidad basal y/o los contrafuertes de los diámetros mayores, el factor puede volver a decrecer. Para coníferas y latifoliadas que crecen bajo condiciones de alta densidad, con pocas ramas gruesas, el factor de forma decrecerá lenta pero constantemente con el aumento del diámetro. Por el contrario, para latifoliadas con muchas ramas gruesas (encina) su tendencia será creciente.

Rodales más viejos con clases diamétricas sobre 14 cm muestran generalmente un desarrollo decreciente del factor de forma de la madera gruesa en función del diámetro.

El factor de forma de la madera gruesa varía entre los valores 0 y 0.55.

El desarrollo de la curva es similar si se utiliza la edad en vez del diámetro en la abscisa (Figura 3-32).

III.4.3.2 La curva del factor de forma de madera total

Si un árbol no ha alcanzado la altura del pecho, entonces:

$$d = 0, g = 0 ; g \cdot h = 0$$

y

$$f_{1.3} = \frac{V}{0} = \infty$$

En diámetros menores, el volumen del árbol con ramas es aún grande en relación con el cilindro de referencia y es posible que el factor de forma de madera total tenga un valor superior a 1.0. La curva del factor de forma decrece rápidamente con el aumento del diámetro y se acerca a la curva del factor de forma de madera gruesa.

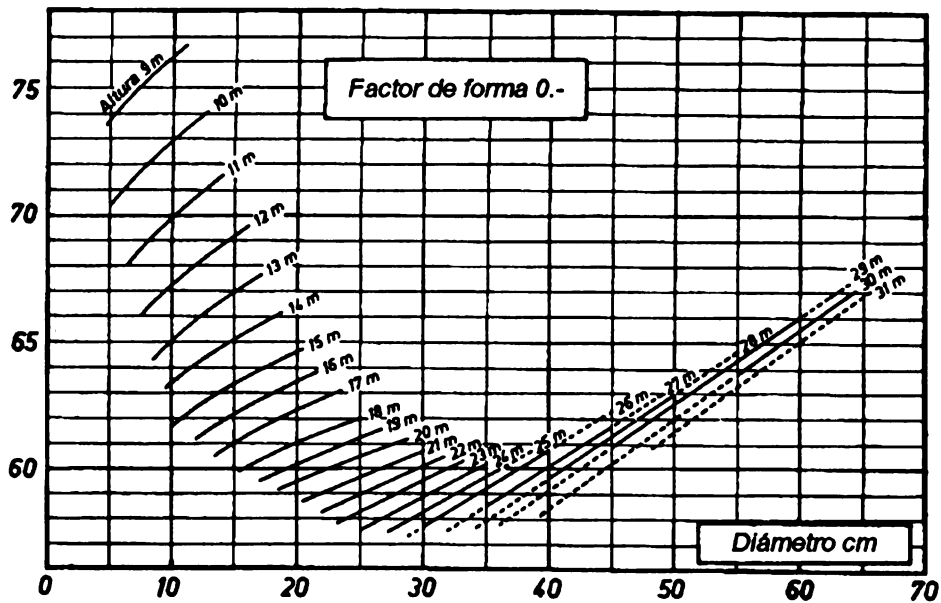


Figura 3-36. Factor de forma falso de rodal de haya en función de diámetro y altura (volumen total)

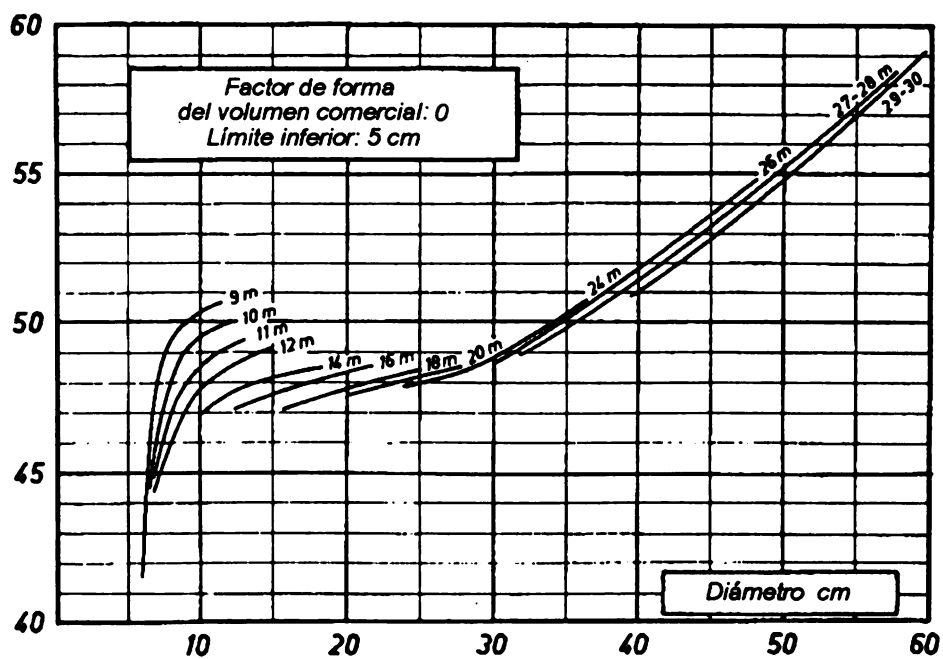


Figura 3-37. Factor de forma falso de rodal de haya en función de diámetro y altura (volumen comercial)

III.4.3.3 La curva del factor de forma de madera fustal

La curva del factor de forma de madera fustal tiene para diámetros bajos un desarrollo similar a la curva del factor de forma de madera total (Figuras 3-38 a 3-41).

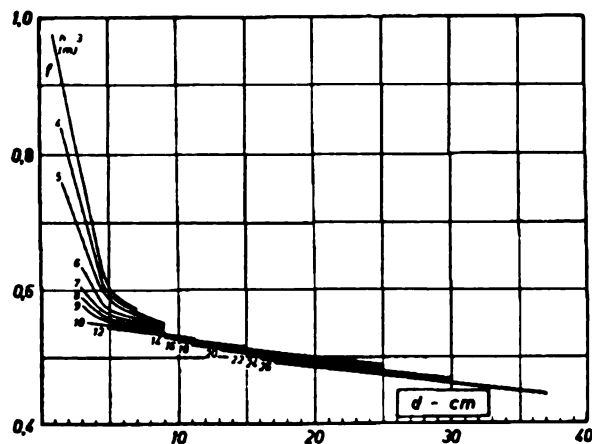


Figura 3-38. Factor de forma de madera fustal en función de la altura y diámetro para *Cryptomeria japonica*

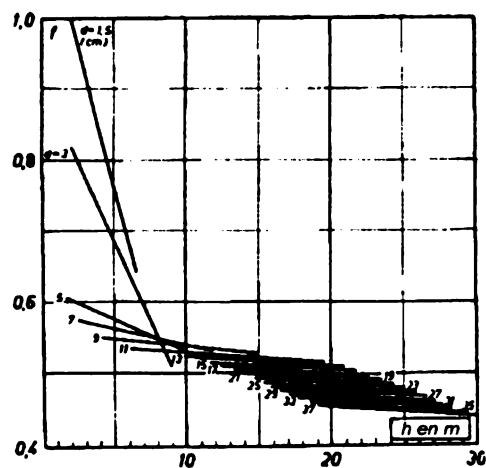


Figura 3-39. Factor de forma en función de la altura para *Cryptomeria japonica*

En la práctica se utilizan principalmente los factores de forma falsos. Su determinación a partir del factor de forma verdadero es ventajosa, ya que con eso se logra simultáneamente determinar la forma fustal y sus relaciones funcionales.

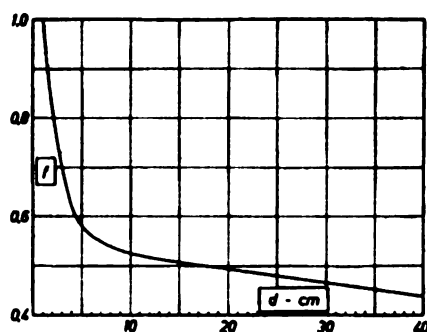


Figura 3-40. Factor de forma en función del diámetro para *Cryptomeria japonica*

III.4.3.4 El factor de forma falso

El factor de forma falso en un rodal depende de atributos generales como:

- especie
- edad del rodal
- calidad del sitio
- zona de crecimiento
- densidad del rodal

y de atributos medibles dentro del rodal:

- DAP
- altura
- punto de inicio de copa
- cociente de forma o series de ahusamiento

Luego de la introducción de los factores de forma por PAULSEN en el año 1800, HOSSFELD (1812) y KÖNIG (1813), investigan mucho, principalmente en los numerosos levantamientos para la construcción de tablas de volumen.

Las especies tienen, por su forma específica, también factores de forma característicos.

Las relaciones entre la magnitud del factor de forma y la edad, la zona de crecimiento, la calidad del sitio, la densidad del rodal, etc., se traslapan de tal manera, que se pueden deducir reglas generales. Pero el procedimiento en un caso concreto de estimar un factor de forma en función de sólo estos elementos no es suficientemente confiable.

Por ejemplo, la influencia de la edad se expresa en un desplazamiento de la curva del factor de forma, similar a la curva de alturas de rodal. Sin embargo, cuando hay cambios en el

medición de rodales

tratamiento y en la densidad del rodal, resulta difícil comprobar esta tendencia, de modo que no se puede evidenciar una influencia significativa de la edad en árboles de igual dimensión. El aumento de la intensidad del raleo, y con ello la disminución de la densidad, origina en general una disminución en el factor de forma.

La calidad del sitio se expresa en general negativamente en el factor de forma falso, también muy difícil de comprobar.

Por el contrario, la relación del factor de forma y los atributos medibles dentro del rodal (d , altura, punto de inicio de copa, cuociente de forma) son estadísticamente comprobables, y la precisión de la relación en todos los casos se puede estimar. Por eso, para fines prácticos y científicos, el factor de forma se expresa en función de estos elementos. Mientras más elementos se miden, más exacta será la estimación del factor de forma.

El factor de forma fustal verdadero cambia sólo muy lentamente con el aumento de la edad del rodal.

Cuadro 3-39. Cuocientes de forma reales o naturales para álamo

$f_{0,1}$	$k_{0,1}$	$k_{0,3}$	$k_{0,5}$	$k_{0,7}$	$k_{0,9}$
0,370	1,000	0,765	0,420	0,281	0,100
373	1,000	768	430	284	100
376	1,000	771	440	288	100
379	1,000	773	450	292	100
382	1,000	775	460	295	100
385	1,000	777	470	299	100
388	1,000	780	480	302	100
392	1,000	783	490	306	100
395	1,000	786	500	310	100
399	1,000	789	510	314	103
402	1,000	792	520	318	107
405	1,000	794	530	322	111
408	1,000	796	540	326	115
412	1,000	798	550	331	119
416	1,000	800	560	336	123
420	1,000	802	570	340	127
424	1,000	804	580	345	131
428	1,000	806	590	350	136
432	1,000	808	600	355	141
436	1,000	811	610	360	141
440	1,000	814	620	365	141
444	1,000	816	630	370	141
448	1,000	818	640	374	141
452	1,000	820	650	379	141
456	1,000	822	660	384	141
460	1,000	824	670	388	141
464	1,000	826	680	392	141
468	1,000	829	690	396	141
472	1,000	833	700	399	141
477	1,000	837	710	403	141
482	1,000	841	720	407	141

Trabajos científicos exactos han mostrado que entre el diámetro en un rodal y el factor de forma fustal verdadero, $f_{0,1}$, sólo existe una correlación muy baja (Figura 3-41). Esta puede ser considerada constante para todas las clases diamétricas de un rodal al determinar prácticamente el volumen fustal. Esto justifica asumir una forma fustal media para el rodal. Al establecer un valor de $f_{0,1}$ constante, el error producido queda dentro de un rango de 1-5%.

Cuadro 3-40. Factores de forma de rodal en función de la altura media

h_m en m	Volumen total f	Volumen comercial f	Proporción de ramas en %, del	
			Volumen total	Volumen comercial
10	0,595	0,330	45	80
11	577	345	41	67
12	561	359	36	56
13	547	370	32	48
14	535	380	29	41
15	526	386	26	36
16	516	391	24	32
17	505	392	22	29
18	495	393	21	26
19	484	393	19	23
20	474	394	17	20
21	465	394	15	18
22	458	395	14	16
23	454	395	13	15
24	453	396	13	14
25	452	397	12	14
26	452	398	12	14
27	452	399	12	13
28	452	401	11	13
29	452	404	11	12
30	452	407	10	11
31	453	410	10	11
32	454	413	9	10
33	455	417	8	9
34	457	421	8	9
35	459	425	7	8
36	461	430	7	7
37	464	435	6	7
38	468	441	6	6
39	472	447	5	6
40	476	453	5	5
41	480	460	4	5
42	485	467	4	4
43	490	473	3	4
44	496	479	3	4
45	503	485	3	3

Relación entre el factor de forma verdadero $f_{0,1}$
y el diámetro. $f_{0,1} = f(d)$

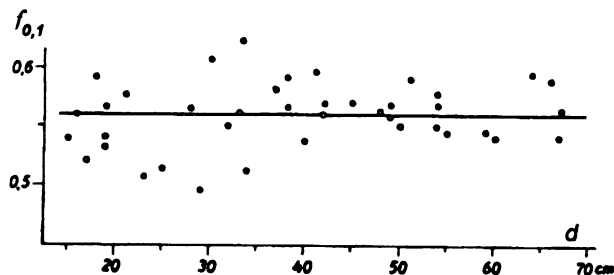


Figura 3-41. Relación entre el factor de forma verdadero o real y el diámetro normal

El factor de forma verdadero puede ser definido para todo el rodal y también para el remanente en pie, a partir del material raleado.

III.4.3.5 Coeficiente de forma basal de HOHENADL

El coeficiente de forma basal

$$k_H = \frac{d}{d_{0,1}}$$

puede ser determinado rápida y fácilmente para árboles en pie, porque la medición de $d_{0,1}$ se puede realizar con la ayuda de una escalera metálica ligera.

Con el coeficiente basal de HOHENADL k_H se puede calcular el factor de forma falso, como también determinar las correcciones por la conicidad basal.

El coeficiente basal en un rodal aumenta con el diámetro. Entre k_H^2 y el diámetro existe generalmente una relación lineal (Figura 3-42).

$$k_H^2 = b_0 + b_1 d \quad (3-257)$$

o una relación levemente curva:

$$k_H^2 = b_0 + b_1 d + b_2 d^2 \quad (3-258)$$

Para todas las clases diamétricas con $h = 13$, $k_H = 1$.

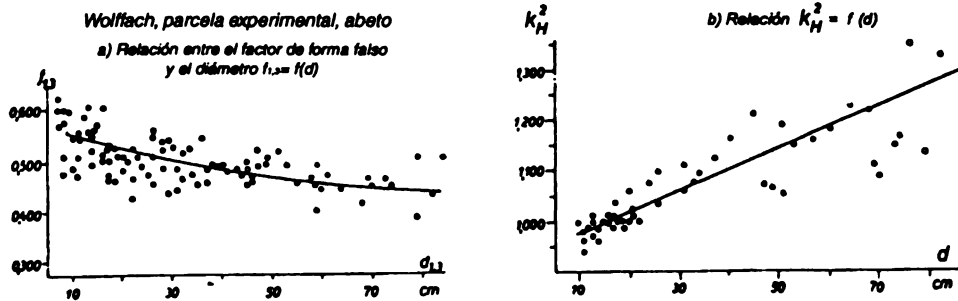


Figura 3-42. Relaciones entre el factor de forma falso, el coeficiente de forma basal de HOHENADL y el diámetro

Al aumentar la altura, también crece k_H ; debido a que el diámetro va quedando relativamente cada vez más abajo respecto al punto de medición de $d_{0.1}$, se produce una relación muy estrecha entre k_H y la altura del árbol. Las interrelaciones entre los factores de forma y coeficiente basal con el diámetro se muestran en las Figuras 3-41 y 3-42. Se puede apreciar que el registro separado del cociente de forma verdadero, $k_{0.5}$, y del coeficiente de forma basal, k_H , entrega mejores resultados acerca de las relaciones que el cociente de forma de SCHIFFEL, k_s ,

$$k_s = \frac{d_{0.5}}{d}$$

El cálculo y ajuste estadístico de los factores de forma a partir de los valores $d_{0.1}$, $d_{0.1}$ y d , entrega relaciones con una dispersión media de 1-2%. También pueden establecer relaciones entre el factor de forma falso, el cociente k y el factor de forma fustal $f_{0.1}$, obtenido este último a través del cociente $k_{0.5}$. Ya que generalmente las latifoliadas dentro de un rodal cerrado poseen un fuste continuo por sobre el d , todas estas conclusiones también son válidas para ellas.

La relación con $f_{1.3}$ puede representarse por una hipérbola decreciente:

$$f_{1.3} = \frac{f_{0.1}}{b + b_1 d} \quad (3-259)$$

$$f_{1.3} = \frac{f_{0.1}}{b_0 + b_1 d + b_2 d^2} \quad (3-260)$$

En las fórmulas (3-259) y (3-260), el numerador representa una constante igual al factor de forma fustal medio del rodal, mientras que el denominador corresponde a la parte variable.

medición de rodales

El factor de forma de madera gruesa o cualquier otro factor de reducción que se refiera a una parte determinada del volumen fustal, puede ser deducido de la estructura volumétrica del fuste.

El Cuadro 3-41 muestra que la diferencia entre la madera fustal y la madera gruesa decrece rápidamente con el aumento del diámetro. Todas las especies que no forman ramas gruesas tienen factores de reducción de magnitud similar.

Cuadro 3-41. Madera gruesa como porcentaje de la madera fustal total en *picea*, PRODAN (1946)

d	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
%	59	80	93	96	97	98	99	99	99	99	99,5	99,5

Mientras el factor de forma fustal falso en un rodal decrece con el diámetro, el factor de forma de madera gruesa es creciente hasta alcanzar un máximo de 14-18 cm, para luego decrecer. El desarrollo siguiente depende del volumen total de las ramas gruesas.

III.4.3.6 Estimación del factor de forma falso a partir de otros cuocientes de forma

Las anteriores presentaciones muestran que la inclusión adicional de los diámetros d_0 , y $d_{0.1}$, además del diámetro y la altura, permite determinar de modo más confiable el factor de forma.

Además, disminuye la dispersión en torno a las correspondientes curvas de factores de forma.

Las siguientes funciones pueden ser útiles para estimar el factor de forma falso (ANUTSCHIN 1960; KUNZE 1873; POLLANSCHÜTZ 1961; SIMONY 1901; SCHIFFEL 1907).

A partir del cuociente de forma de SCHIFFEL:

$$f_{1.3} = bk_s + b_0 \quad (3-261)$$

$$f_{1.3} = b_0 + b_1 k_s + \frac{b_2}{k_s \cdot h} \quad (3-262)$$

$$f_{1.3} = b_0 + b_1 k_s + \frac{b_2}{k_s \cdot h} \quad (3-263)$$

$$f_{1.3} = b_0 + b_1 k_s + b_2 k_s \quad (3-264)$$

Partiendo del cuociente de forma de ZIMMERLE:

$$f_{1.3} = b_0 + b_1 k_z + b_2 / k_z \quad (3-265)$$

Y a partir del cuociente de forma de POLLANSCHÜTZ, k_p :

$$f_{1.3} = b_0 + b_1 \frac{h}{d^2} + b_2 k_p^2 \quad (3-266)$$

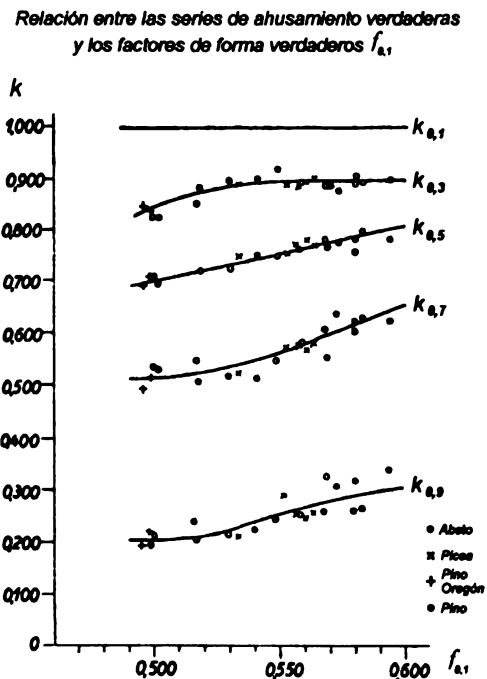


Figura 3-43. Relación entre las series de ahusamiento verdaderas y el factor de forma real $f_{0.1}$

III.4.3.7 Relación entre el factor de forma, el diámetro a la altura del pecho y altura del árbol

El factor de forma falso del fuste normalmente disminuye con el aumento de la altura. El factor de forma de madera gruesa, en cambio, aumenta hasta una cierta altura para luego decrecer (Figuras 3-33 a 3-40).

medición de rodales

En un rodal, la relación entre la altura de los árboles y el factor de forma es más estrecha que con el diámetro.

En el Cuadro 3-40, en un rodal de *picea* de 60 años de ASSMANN (1961), se aprecia que la dispersión en torno a una relación $f_{1.3}$ y la altura media es bastante grande.

En las Figuras 3-33 y 3-34 se presenta la relación entre $f_{1.3}$, h y d para la especie *Pinus strobus* (HENGST 1959).

La utilización de los cuocientes de forma falsos o verdaderos o de las clases de forma permite determinar curvas individuales de factores de forma para árboles y rodales. En cambio, al utilizar el diámetro y la altura, o sólo uno de estos elementos, únicamente se puede determinar la forma fustal media.

Para el cálculo del factor de forma se han propuesto y utilizado las siguientes ecuaciones (MÜLLER 1958; NÄSLUND 1957; v. SOEST 1956; PRODAN 1944; ZIEGER 1939).

a. En función de la altura total h y el diámetro d :

$$f_{1.3} = b_0 + b_1 h + \frac{b_2 h}{d} \quad (3-267)$$

$$f_{1.3} = b_0 + b_1 \frac{1}{h} + \frac{b_2 h}{d} + \frac{b_3 h}{d^2} \quad (3-268)$$

$$f_{1.3} = b_0 + b_1 \frac{1}{h} + b_2 \frac{1}{d} + b_3 \frac{1}{dh} + b_4 \frac{1}{d^2} + b_5 \frac{1}{d^2 h} \quad (3-269)$$

$$f_{1.3} = b_0 + b_1 \frac{1}{h} + b_2 \frac{1}{d^2} + b_3 \frac{1}{d^2 h} \quad (3-270)$$

$$\log f_{1.3} = b_0 + b_1 \log d + b_2 \log h \quad (3-271)$$

b. En función del diámetro d :

$$f_{1.3} = \frac{b_0}{b_1 + b_2 d} \quad (3-272)$$

$$f_{1.3} = b_0 - b_1 \sqrt{d} \quad (3-273)$$

$$f_{1.3} = b_0 + b_1 d + b_2 d^2 \quad (3-274)$$

$$gf_{1.3} = b_0 + b_1 g \quad ; \quad f_{1.3} = b_0 + \frac{b_1}{g} = b_1 + \frac{b_2}{d^2} \quad (3-275)$$

III.4.3.8 Producto forma-altura (altura mórfica)

Corresponde al producto del factor de forma falso y la altura. El desarrollo de este producto de madera gruesa en un rodal se asemeja a una curva hiperbólica. En los diámetros más pequeños crece rápidamente, para estabilizarse en dimensiones mayores. En rodales viejos de *picea* y *abies*, debido al desarrollo casi horizontal de la curva de altura del rodal, este producto puede incluso decrecer con el diámetro.

Series de alturas mórficas

Los valores de curvas unitarias de altura, multiplicados por los correspondientes factores de forma medios, generan las series de alturas mórficas, que se utilizan para estimaciones prácticas de volumen (LAER 1938; LAER y SPIECKER 1951; HALAY 1955; POPESCU-ZELETIN y TOMA 1956).

Altura mórfica del rodal

La altura mórfica del rodal está dada por la fórmula:

$$FH = \frac{V}{G} \quad (3-276)$$

Puede decrecer con edades de rodal avanzadas, que se caracterizan por un pequeño incremento en altura y la disminución del factor de forma.

III.4.4 Estimación del espesor de corteza

Los estudios de desarrollo y crecimiento de árboles y las estimaciones de existencia exigen normalmente estimaciones del espesor de la corteza. La medición de la corteza en árboles y secciones es larga y difícil (en algunas especies casi imposible) buscándose la relación de este espesor con algún otro parámetro del árbol más fácil de determinar.

El espesor de la corteza varía notablemente entre especies y muestra una relación cambiante con la edad y con la altura en el fuste (Figura 3-43a, ilustr. b y c).

El modelo propuesto para la estimación del espesor de corteza es lineal del tipo

$$b = b_0 + b_1 d$$

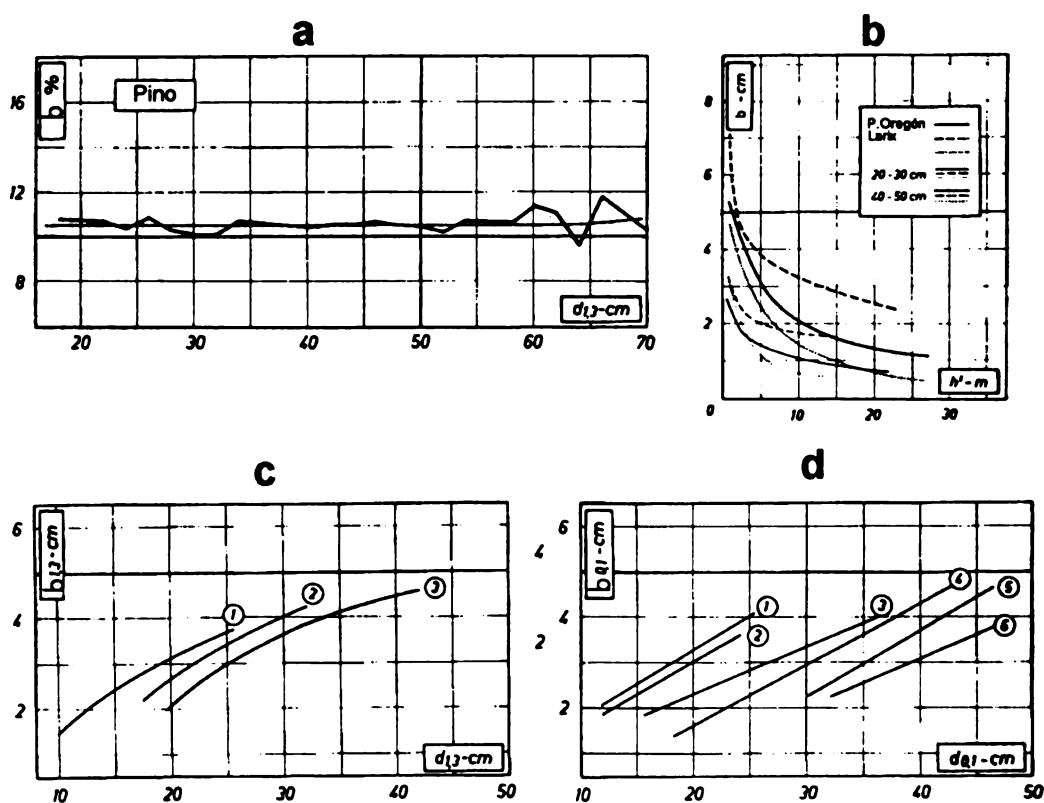


Figura 3-43a. Distintas relaciones de la corteza

- | | | | |
|-----|---------------------|------|--|
| a = | espesor de corteza, | % - | diámetro |
| b = | espesor de corteza, | cm - | altura sobre el fuste |
| c = | espesor de corteza, | cm - | diámetro para clases de altura |
| d = | espesor de corteza, | cm - | diámetro a un décimo para clases de edad |

La experiencia ha demostrado, sin embargo, que esta relación no es eficiente en muchas especies. LAAR (1964) propuso un modelo para *Pinus pinaster* en función del diámetro y la edad:

$$b = b_0 + b_1d + b_3t + b_3td$$

Si la estimación del espesor de corteza tiene por finalidad la determinación del diámetro sin corteza, puede ser preferible el empleo de un modelo de estimación directa de dicho diámetro

$$d_u = b_0 + b_1d$$

donde:

b	=	espesor de corteza, mm
d	=	diámetro a la altura de pecho, cm
d_u	=	diámetro sin corteza, cm
t	=	edad, años

Esta expresión es más simple, pero no puede desconocerse el hecho de que la verdadera relación funcional entre b y d oculta la correlación existente d_u y así tras una tendencia lineal razonable se ocultan pequeños sesgos.

Como índice del espesor de corteza se usa frecuentemente la proporción corteza en relación con el diámetro (Figura 3-43a, ilustr. a).

El espesor de corteza varía con la altura sobre el fuste (Figura 3-43a, ilustr. b). Expresada la corteza en términos porcentuales, la parte inferior presenta un alto porcentaje de corteza; a medida que se sube en el fuste este porcentaje disminuye, para nuevamente aumentar cuando la altura de medición se aproxima a un 70% de la altura total. En otras especies esta proporción se mantiene desde la base hasta una cierta altura para luego aumentar.

La mayor aplicación de estas relaciones se encuentra sin duda en la conversión de volumen con corteza a volumen sin corteza. El volumen de la corteza representa en promedio entre un 10 y un 20% del volumen del árbol.

III.4.5 Determinación de volumen

Las determinaciones de volumen, como variable descriptiva de rodales, plantean problemas que no siempre pueden ser resueltos satisfactoriamente mediante los procedimientos probabilísticos con submuestreo descritos en la sección III.1.6.

medición de rodales

SCHMID-HAAS y WINZELER (1981) (S & W) clasifican los procedimientos de determinación puntual en siete clases (Cuadro 3-42), que se diferencian en función de los siguientes elementos:

- Volumen medido directamente en pie o estimado.
- Medición o estimación de la variable de interés en todos los árboles de la parcela o en una submuestra.
- Número de predictores empleados para estimar volumen: un solo predictor o 2 o más predictores ($h, d\ell, \dots$).

Los procedimientos de la clase 1 (S & W) consisten en medir directamente (o estimar) el volumen de todos los árboles. El volumen total se determina empleando las expresiones correspondientes a las unidades muestrales probabilísticas (sección III.1.1). Estos procedimientos son muy precisos, pero también de alto costo.

Cuadro 3-42. Clasificación de los métodos para determinar el volumen por unidad muestral, según S & W

Clase	Medición directa (por dendrometría)	Variables adicionales al DAP medidas en
1	Todos	Ningún árbol
2	Muestra	Todos
3	Muestra	Ninguno
4	Submuestra	Muestra
5	Ninguno	Ninguno
6	Ninguno	Muestra
7	Ninguno	

PRODAN (1965) clasifica y describe los procedimientos para determinar el volumen como sigue:

III.4.5.1 Métodos del árbol muestra

Estos métodos pertenecen todos a la clase 3 (S & W). Un árbol muestra es aquel que puede servir como representante medio para un determinado número de árboles. Los árboles de área basal media son considerados frecuentemente como árboles de volumen

medio. Este concepto puede ser aplicado a todos los árboles de la unidad, o segregarse por clases diamétricas.

PRODAN clasifica los métodos del árbol muestra en procedimientos empíricos, combinados y con derivación teórica.

a) Procedimientos empíricos

Entre los procedimientos empíricos, PRODAN menciona los de Draudt, de Urich y de Hartig.

Procedimiento de DRAUDT

Los árboles muestra se asignan a cada clase en forma proporcional al número de individuos que la integran. El volumen de la clase se obtiene al multiplicar el volumen medio de ésta por el número de árboles que contiene (Cuadro 3-43).

Cuadro 3-43. Cálculo del volumen del rodal según DRAUDT

N = 420			Distribución de los árboles de muestra N° de árboles de muestra = 12 = 0,0286 del N° total de árboles				
d	n	ng	N° de árboles de muestra	d	g	v. Volumen total	Cálculo del Volumen total del rodal
18	22	0,560	1	19,8	0,0308	0,384	
20	23	0,723		22,0	0,0380	0,447	20,599 = 33,32
22	60	2,281	2	23,2	0,0423	0,523	0,6181
24	92	4,162	3	24,0	0,0452	0,602	
26	150	7,964	4	25,1	0,0495	0,690	8,287 · 33,32
28	35	2,155	1	24,9	0,0487	0,645	276,12 m ³
30	31	2,191	1	26,0	0,0531	0,730	frente a:
32	7	0,563	—	27,1	0,0577	0,754	
				27,0	0,0573	0,760	$\frac{420}{12} \cdot 8,287 =$
				26,2	0,0539	0,732	
				28,6	0,0642	0,872	290,05 m ³
				31,4	0,0774	1,148	
	420	20,599	12		0,6181	8,287	

Procedimiento de URICH

La unidad se divide en cinco clases con igual número de árboles. Para cada clase se calcula el diámetro del árbol de área basal media, los que se buscan y voltean o miden en pie. La expansión a volúmenes totales se efectúa mediante el área basal de la clase (Cuadro 3-44).

Cuadro 3-44. Cálculo del volumen del rodal según URICH (rodal de *picea*, Cuadro 3-38)

Diámetro	N° de árboles	N° de árboles (clases)	Área basal	Área basal (clases)	Árbol medio		
					Área basal	Diámetro	Volumen
d	n	(n)	g	(g)	$g_m = \frac{(g)}{(n)}$	d_m	v_m
cm			m ²	m ²	m ²	cm	m ³
1	2	3	4	5	6	7	8
12	4		0,045				
13	19		252				
14	25		385				
15	39		689				
16	40		804				
17	41	168	931	3,106	0,018 488	15,34	0,18 470
18	52		1,323				
19	49		1,389				
20	56		1,759				
21	11	168	0,381	4,852	0,028 881	19,18	0,31 789
21	37		1,282				
22	50		1,901				
23	55		2,285				
24	26	168	1,176	6,644	0,039 548	22,44	0,45 458
24	19		0,860				
25	55		2,700				
26	45		2,389				
27	38		2,176				
28	11	168	0,677	8,802	0,052 393	25,83	0,61 919
28	13		0,801				
29	37		2,444				
30	30		2,121				
31	11		0,830				
32	15		1,206				
33	16		1,368				
34	8		0,726				
35	12		1,155				
36	11		1,120				
37	4		0,430				
38	4		454				
39	1		119				
40	1		126				
41	1		132				
43	1		145				
44	1		152				
45	1		159				
48	1	168	181	13,669	0,081 363	32,19	0,99 045
	840	.840	37,073	37,073			2,56 681 · 168 = 431,22

Cuadro 3-44a. Cálculo del volumen del rodal según URICH

Nº	Clases				Árboles de muestra				Observaciones
	Diámetro a 1,3 m	Nº de árboles	Área basal	Área basal media	Diámetro medio	Número	Área basal múltiple	Volumen	
	cm		m ²	m ²	cm		m ²	m ³	
I	18	22	0,560						
	20	23	0,723	2,233					
	22	25	0,950	70					
		70	2,233	0,0319	20,2	2	0,0638	0,78	
II	22	35	1,330	2,913					
	24	35	1,583	70					
		70	2,913	0,0416	23,0	2	0,0832	1,01	
III	24	57	2,579	3,269					
	26	13	0,690	70					
		70	3,269	0,0467	24,4	2	0,0934	1,20	Admite elaboración en conjunto
IV	26	70	3,717	3,717					
				70					
		70	3,717	0,0531	26,0	2	0,1062	1,46	
V	26	67	3,557	3,742					
	28	3	0,185	70					
		70	3,742	0,0535	26,1	2	0,1070	1,47	
VI	28	32	1,970	4,724					
	30	31	2,191	70					
	32	7	0,563						
		70	4,724	0,0675	29,3	2	0,1350	2,01	
del rodal		420	20,598			12	0,5886	7,93	

Por lo tanto el volumen total del rodal es:

$$V = \frac{20,598}{0,5886} \cdot 7,93 = 34,98 \cdot 7,93 = 277,39 \text{ m}^3$$

Procedimiento de HARTIG

La unidad se divide en cinco clases de igual área basal. Para cada clase, se calcula el diámetro del árbol de área basal media. La medición de los árboles muestra y el cálculo del volumen se verifica para cada clase y no para todo el rodal, como en los procedimientos de DRAUDT y de URICH (Cuadro 3-45).

Cuadro 3-45. Cálculo del volumen del rodal según HARTIG (rodal de *picea*, Cuadro 3-38)

Diámetro	Número de árboles	Nº de árboles (clases)	Diámetro basal	Diámetro basal (clases)	Diámetro basal	Árbol medio Diámetro	Volumen	Volumen (clases)
d	n	N_i	g	G_i	$g_i = \frac{G_i}{N_i}$	d_i	v_i	$v_i \cdot N_i$
cm			m ²	m ²	m ²	cm	m ³	m ³
1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	4		0,045					
13	19		252					
14	25		385					
15	39		689					
16	40		804					
17	41		931					
18	52		1,323					
19	49		1,389					
20	51	320	1,602	7,420	0,023 187	17,18	0,24493	78,378
20	5		0,157					
21	48		1,663					
22	50		1,901					
23	55		2,285					
24	31	189	1,403	7,409	0,039 201	22,34	0,45014	85,076
24	14		0,633					
25	55		2,700					
26	45		2,389					
27	30	144	1,718	7,440	0,051 667	25,65	0,60989	87,824
27	8		0,458					
28	24		1,478					
29	37		2,444					
30	30		2,121					
31	11		0,830					
32	1	111	0,080	7,411	0,066 766	29,14	0,80338	89,175
32	14		1,126					
33	16		1,368					
34	8		0,726					
35	12		1,155					
36	11		1,120					
37	4		0,430					
38	4		454					
39	1		119					
40	1		126					
41	1		132					
43	1		145					
44	1		152					
45	1		159					
48	1	76	181	7,393	0,097 276	35,19	1,19438	90,773
	840	840	37,073	37,073				431,23

Cuadro 3-45a. Cálculo del volumen del rodal según HARTIG

Clases				Árboles de muestra						Observaciones
Nº	Diámetro	Nº de árboles	Área basal	Área basal media	Diámetro	Número	Área basal media	Volumen de un árbol	Volumen (clases)	
	cm		m ²	m ²	cm		m ²	m ³	m ³	
I	18	22	0,560							
	20	23	0,723	5,146						
	22	60	2,280	140						
	24	35	1,583							
		140	5,146	0,0368	21,6	3	0,1104	0,440	61,60	
II	24	57	2,579	5,181						Los datos de los árboles de muestra deben ser calculados por separado para cada clase.
	26	49	2,602	106						
		106	5,181	0,0489	24,9	3	0,1467	0,670	71,02	
III	26	97	5,150	5,150						
				97						
				0,0531	26,0	3	0,1593	0,730	70,81	
IV	26	4	0,212							
	28	35	2,155	5,121						
	30	31	2,191	77						
	32	7	0,563							
		77	5,121	0,0665	29,1	3	0,1995	0,920	70,84	
del rodal		420	20,598			12			274,27	

b) Procedimientos combinados

Procedimientos de TISCHENDORF y DE NEUBAUER

Partiendo del hecho que el árbol de área basal media no es idéntico al árbol de volumen medio, TISCHENDORF (1949) desarrolló un procedimiento basado en la determinación del diámetro del árbol de volumen medio mediante tablas o funciones de volumen. El procedimiento de Neubauer es similar: se forman clases de igual volumen, y para cada clase se calcula el diámetro del árbol de volumen medio.

Procedimiento de SPEIDEL

El procedimiento de SPEIDEL se basa en la relación funcional existente entre el diámetro y el volumen. Los árboles muestra se distribuyen en todo el rango diamétrico. Los volúmenes

medición de rodales

obtenidos por cubicación directa se relacionan gráficamente con el d en una función de tipo $v = f(d)$. Los volúmenes leídos de la curva para cada clase diamétrica se multiplican por la frecuencia de la clase y se agrupan para obtener el volumen total.

c) Procedimientos de deducción teórica

Procedimiento de la línea de volumen de KOPEZKI-GERHARDT. El procedimiento se basa en la estrecha relación lineal existente entre el volumen y el área basal de un árbol:

$$v = b_0 + b_1 g$$

En base a árboles muestra, se construye una relación entre el volumen y el área basal, como la siguiente:

$$v = 12.815 \quad g - 0.05222$$

Sea el área basal del rodal $G = 37.073 \text{ m}^2$ y el número de árboles $N = 840$. Su volumen es el siguiente:

$$v = 12.815 \quad G - 0.05222 \cdot N = 431.23$$

La llamada línea de volumen puede resultar muy rígida en algunos casos, por lo cual se recomienda aplicar una función de volumen más flexible, como:

$$v = b_0 + b_1 d + b_2 d^2$$

HOHENADL (1936) emplea también funciones polinomiales de segundo grado como la anterior, para estimar variables de rodal, como volumen, valor, crecimiento, etc., basadas en los llamados árboles medios de HOHENADL:

$$D- = \bar{D} - s$$

$$D+ = \bar{D} + s$$

Donde s es la desviación estándar de los diámetros y $\bar{D}$, el diámetro medio aritmético.

A partir de estos diámetros puede calcularse el área base media $(\bar{G} = (g++ + g-)/2)$. Con la ayuda de la función de volumen puede obtenerse también el volumen medio

$(\bar{V} = (v + +v -) / 2)$. Igualmente, con una función de altura $(\bar{H} = b_0 + b_1d + b_2d^2)$, puede calcularse la altura media $(\bar{H} = (h + +h -) / 2)$. El volumen del rodal se estima, entonces en base al número de árboles en la unidad (N):

$$V = N \cdot \bar{V}$$

III.4.5.2 Métodos basados en tarifas o funciones generales de volumen

PRODAN (1965) describe varios procedimientos basados en las llamadas "tarifas" o en funciones generales de volumen. El volumen de todos o de algunos árboles de la unidad muestral es estimado en base al diámetro de los árboles y algunas variables adicionales de árbol o rodal, dependiendo de la tabla o función empleada. Estos procedimientos pertenecen todos a los de las clases 5, 6 ó 7 (S & W), según si las variables adicionales al diámetro se miden en todos los árboles, en ninguno o en una muestra.

Los procedimientos de la clase 5, donde el volumen de todos los árboles se estima en base a dos o más variables de árbol, se emplean cuando existe una muy baja o nula correlación entre el diámetro de los árboles y otras variables empleadas como predictoras en modelos estimadores de volumen. Es el caso de inventarios de bosques de latifoliadas, cuando el volumen de interés que se concentra en el fuste limpio se estima usando como predictores el diámetro fustal y la altura de comienzo de la copa, la cual es en alto grado independiente del diámetro.

Los procedimientos de la clase 7 se emplean, en cambio, cuando existe una alta correlación entre los predictores adicionales al diámetro y este último, de manera que para un rodal en particular es posible derivar una función de volumen que emplea sólo el diámetro como predictor.

Los procedimientos vistos en la sección III.1.6 pertenecen a la clase 7 (S & W) o a las clases 2, 3 ó 4, según si el volumen de los árboles muestra es estimado o medido directamente.

Por último, los procedimientos que emplean algunos tipos de tarifas, que estiman volumen sin variables de árboles adicionales al diámetro, pertenecen a la clase 6.

III.5 MEDICION DE SUPERFICIES

Las superficies de formas simples y regulares pueden determinarse asimilándolas con figuras geométricas cuya fórmula para determinar su superficie es conocida. Otros métodos de determinación de superficie son por coordenadas, con planímetro polar, redes de puntos y por transectos.

III.5.1 Por coordenadas

El método tiene su base en la geometría analítica y su aplicación está limitada a áreas regulares en las que se conocen las coordenadas de los vértices. La medición de superficies por coordenadas procede de acuerdo con las siguientes fórmulas:

Coordenadas rectangulares

$$a = \frac{1}{2} \sum x_i (Y_{i-1} - Y_{i+1}) \quad (3-277)$$

Coordenadas polares

$$a = \frac{1}{2} \sum s_i s_{i+1} \sen \alpha_{i,i+1} \quad (3-278)$$

Donde a = superficie

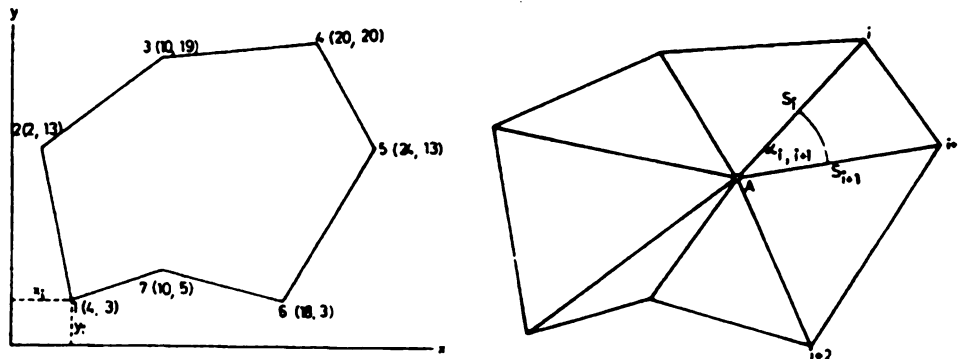


Figura 3-44. Medición de superficies por coordenadas rectangulares y polares (de ZOEHRER 1980)

III.5.2 Planímetro polar

Inventado por AMSLER en 1854. Las mediciones con planímetro son exactas bajo buenas condiciones de trabajo y calibración del instrumento, y sirven para áreas pequeñas y grandes. Su uso debe ser cuidadoso ya que el método es muy sensible a problemas de operación, pudiendo por esta vía cometerse grandes errores en la determinación de superficies. Hay muchas áreas en las que la medición con este instrumento resulta larga y tediosa y exige gran esfuerzo por parte del operador. Se recomienda un control cruzado entre dos o más operadores para la revisión de las mediciones realizadas.

III.5.3 Red de puntos o mallas

Red de cuadrados o rectángulos de igual tamaño trazados en papel transparente. Según el tamaño de los cuadrados y la escala del mapa o de la fotografía, cada cuadrado representa cierta superficie. De esta manera, contando el número de cuadrados dentro del área determinada se obtiene la superficie buscada.

Una malla de puntos es una red de puntos ubicados en el centro de los cuadrados cada uno de los cuales representa la superficie del cuadrado. Por conteo del número de puntos se sabe el área buscada.

La densidad de la red dependerá del área a medir y de la escala usada. Las mallas de punto son rápidas de utilizar y pueden confeccionarse de manera sencilla. El uso de una red o malla de puntos en la estimación de superficies pequeñas, puede estar afectada a errores considerables, sin embargo, las estimaciones producidas por el conteo de puntos en áreas grandes con redes de densidad adecuada entregan resultados de sorprendente exactitud.

III.5.4 Transectos

Este método se basa en el principio que las mediciones lineales varían de la misma manera que la superficie, siempre que el muestreo se realice al azar y sea suficientemente grande.

Consiste en una serie de líneas paralelas de distancias conocidas trazadas sobre un material plástico transparente que luego se coloca sobre el área que se quiere medir. Con una regla se mide la longitud de cada línea que pasa a través del área. La superficie se calcula con la fórmula

$$a / A = t / T \quad (3-279)$$

Donde

a = superficie

A = superficie del plástico que contiene transectos

t = suma de los transectos que pasan a través del área medida

T = suma de todos los transectos contenidos en el plástico

Es un método rápido y especial para áreas grandes, la precisión depende del tamaño del área y de la distancia entre líneas paralelas.

La red de puntos y el planímetro polar son los métodos más frecuentemente usados en la determinación de superficies forestales. Diversos autores han enfrentado el problema de

medición de rodales

comparar las mediciones de ambos instrumentos, determinándose la inexistencia de diferencias significativas entre ellos. De un estudio realizado por P.E.T. ALLEN en 1975, en que se compararon las mediciones de alrededor de 50 planímetros convencionales y dos electrónicos con la medición de superficies logradas con una red de puntos de densidad 10 puntos por cm² se concluye lo siguiente:

- La red de puntos con una medición y promediando los resultados tendrá un error de $\pm 10\%$ para un nivel de probabilidad de 0.68 ($t = 1$). Tres mediciones reducen este error a $\pm 0.4\%$ y cinco mediciones a $\pm 0.1\%$.
- Los planímetros manuales con sólo una medición, al igual que el caso anterior, dieron errores en el rango de $\pm 3\%$; con tres mediciones dieron $\pm 1.5\%$ y cinco mediciones redujeron el error a 0.5%.
- Los planímetros electrónicos, por otra parte son de operación tan rápida que 10 mediciones completas pueden realizarse en el tiempo de una manual, obteniéndose un error de $\pm 0.2\%$.

El autor citado concluye con estos resultados que la determinación de área con el sistema de red de puntos es el método más barato y rápido para la determinación de superficie siempre que la red se construya con exactitud y en un material de base altamente estable.

Con el objeto de eliminar el conteo innecesario de puntos, la red puede complementarse con un reticulado que permita la asignación completa de un determinado número de puntos a una clase de área dada.

III.5.5 Determinación de errores

Una ventaja adicional del método de la red de puntos en la determinación de superficie la constituye la posibilidad de calcular el error con que esta variable fue determinada. La primera aproximación utilizada para el cálculo del error de muestreo se basa en el uso de la distribución binomial.

$$E = \frac{(1-p)t^2}{pN} \quad (3-280)$$

Donde

N = número total de puntos contados en la superficie a medir

p = proporción del tipo de clase de uso que se desea asegurar dentro del área total

E = error de muestreo del tipo o clase de uso, expresado en porcentaje

De la expresión anterior puede derivarse una fórmula para determinar el número necesario de puntos a contar dentro de un área determinada para obtener un error prefijado.

$$N = \frac{(1-p)t^2}{p(E)^2} \quad (3-281)$$

Donde

N = número de puntos a contar en la superficie a determinar

Las fórmulas para E y N , en sentido estricto, son sólo aplicables si los puntos se distribuyeron aleatoriamente sobre la superficie a medir. Por razones prácticas se prefieren redes con un arreglo sistemático de los puntos. Se ha comprobado que en este caso la aproximación binomial sobreestima el error de muestreo. Numerosos experimentos conducentes a aproximar el error de muestreo en el caso de una distribución sistemática de puntos han determinado como factores influyentes en esta variable el número de puntos en el área a determinar y la forma de ella. Mediante el análisis de regresión con estas variables se ha llegado a las siguientes fórmulas:

Fórmula de ZOEHRER (1980)

$$\log E\% = 1.739 - 0.755 \log N + 0.457 \log ap \quad (3-282)$$

Donde

E y N se definen igual que en el caso anterior

ap = radioperímetro (cuociente entre el perímetro del área a medir y el perímetro de un círculo de igual superficie)

El autor entrega una tabla de errores de muestreo para distintos valores de ap y número de puntos contados (Cuadro 3-47 y Figura 3-45, ilustr. a).

Por un camino similar al señalado, BONNOR (1975) propone las tres siguientes expresiones para el cálculo de la densidad necesaria en la red de puntos para obtener un error dado en sólo una medición.

$$D = \frac{1}{A} \frac{(71.78)^{1.5705}}{E\%} \text{ para superficies tipo I}^* \quad (3-283)$$

medición de rodales

$$D = \frac{1}{A} \frac{(134.4)^{1.5561}}{E\%} \text{ para superficies tipo II*} \quad (3-284)$$

$$D = \frac{1}{A} \frac{(153.1)^{1.7198}}{E\%} \text{ para superficies tipo III y IV*} \quad (3-285)$$

Donde

A = tamaño de la superficie, cm^2

D = densidad de la red, puntos/ cm^2

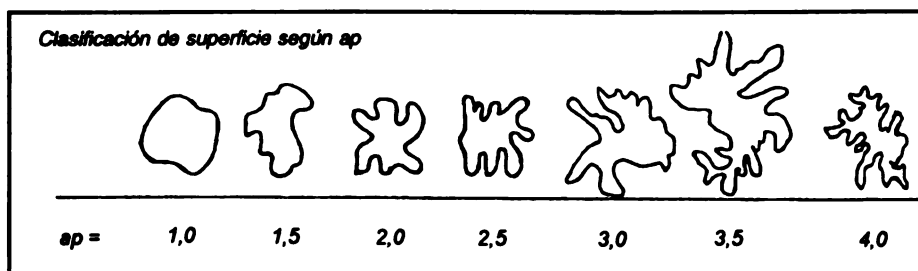
E = error prefijado en porcentaje

Cuadro 3-47. Errores de muestreo según valores de radioperímetro y número de puntos contados

Número puntos	Radioperímetro <i>ap</i>						
Nº	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
5	16.2	19.5	22.3	24.7	26.8	28.8	30.65
10	9.64	11.6	13.2	14.6	15.9	17.0	18.16
20	5.71	6.87	7.84	8.68	9.44	10.1	10.76
30	4.21	5.06	5.77	6.39	6.95	7.45	7.92
40	3.38	4.07	4.65	5.14	5.59	6.00	6.38
50	2.86	3.44	3.93	4.35	4.72	5.07	5.39
60	2.49	3.00	3.42	3.79	4.12	4.42	4.70
70	2.22	2.67	3.04	3.37	3.66	3.93	4.18
80	2.01	2.41	2.75	3.05	3.31	3.55	3.78
90	1.83	2.21	2.52	2.79	3.0	3.25	3.46
100	1.69	2.04	2.33	2.58	2.80	3.00	3.19
150	1.25	1.50	1.71	1.90	2.06	2.21	2.35
200	1.00	1.21	1.38	1.53	1.66	1.78	1.89
300	0.74	0.89	1.01	1.12	1.22	1.31	1.392
400	0.59	0.72	0.82	0.90	0.98	1.05	1.12
500	0.50	0.60	0.69	0.76	0.83	0.89	0.95
750	0.37	0.45	0.51	0.56	0.61	0.66	0.70
1000	0.30	0.36	0.41	0.45	0.49	0.53	0.56

La forma de las superficies según tipo se muestra en la Figura 3-45.

a) Zoehrer (1980)



b) Bonnor (1975)

Clasificación de superficie por tipo			
Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV

Figura 3-45. Clases de superficies usadas por ZOEHRER (1980) y BONNOR (1975)

IV. SITIO Y PRODUCTIVIDAD

Dos elementos básicos determinan el rendimiento y crecimiento de los rodales:

- La capacidad productiva del sitio (productividad).
- El aprovechamiento que hace el rodal de la potencialidad del sitio.

La calidad de sitio se define como la capacidad de un área determinada para el crecimiento de árboles. Es la respuesta, en el desarrollo de una determinada especie, a la totalidad de las condiciones ambientales (edáficas, climáticas y bióticas) existentes en un determinado lugar. Su conocimiento resulta fundamental en la ingeniería forestal para elegir los mejores sitios, para plantar la especie apropiada en el lugar adecuado y para cambiar sus características. Antes se estaba sólo supeditado a cambios en el manejo, especialmente en la densidad del rodal; sin embargo, actualmente pueden modificarse también sus características físicas, a través de la fertilización, irrigación, preparación del suelo, etc.

La productividad es un concepto biológico y no puede expresarse matemáticamente. Por ello, se ha optado por representar la calidad de sitio a través de un valor o índice denominado índice de sitio e índice de productividad, ambos muy populares porque son una expresión cuantitativa de la calidad de sitio.

La evaluación de la calidad de sitio puede realizarse de dos formas: por métodos directos e indirectos.

Métodos directos

- a) Determinación de volumen o altura del rodal. Es difícil de interpretar, salvo que el rodal se encuentre cercano a una edad clave o de rotación usada como comparación.
- b) Registro histórico de desarrollo y rendimiento. Cada vez es más frecuente que las empresas conserven toda la información de inventarios sucesivos y también de las cosechas de los rodales. Estos datos están desprovistos de todo supuesto y su error es reducido.
- c) Intercepción, basada en la medición de longitudes internodales de un cierto número de años de crecimiento después de que el árbol haya alcanzado 1.3 m. Algunos autores recomiendan alturas mayores que 2 y 3 metros.
- d) Análisis fitosociológico y/o fisionómico de la vegetación presente en el área.

Métodos indirectos

Estos métodos conducen a la obtención de índices de sitio o productividad a través de análisis de regresión en tres formas diferentes.

- a) Medición de uno o más factores del medio que se consideran como íntimamente relacionados con el crecimiento de los árboles.
- b) Determinación de características propias de los árboles o del rodal consideradas sensibles a la calidad de sitio.
- c) Una combinación de las anteriores.

IV.1 EXPRESIONES DEL SITIO EN BASE AL COMPLEJO SUELO-CLIMA

La calidad de sitio es la suma total de los factores ambientales que afectan el crecimiento de las plantas. A pesar de que los suelos tienen fundamental importancia en la determinación del sitio, el clima y el bosque mismo con su complejo de flora y fauna también deben considerarse.

El clima obviamente está relacionado con el crecimiento de los árboles, pero su variación dentro de una región forestal determinada suele ser la misma. No así el microclima, que puede tener una incidencia muy fuerte en el sitio. La cantidad de precipitación y su distribución a través del período de crecimiento, junto a las características físicas del suelo, condicionan la disponibilidad de agua para la vegetación. Otros factores del clima son la temperatura, la radiación y el viento. Estas variables son sustituidas en muchas expresiones de sitio por variables geográficas y topográficas, latitud, altitud, exposición, pendiente, posición en la pendiente, distancia al mar; todas fácilmente determinables por cartografía y fotointerpretación.

Las variables del suelo expresan principalmente su estado nutricional y su capacidad de retención de agua. Algunas de ellas (series de suelo, geomorfología) pueden obtenerse de la cartografía y fotointerpretación; otras, como profundidad, textura, estructura, pedregosidad, drenaje, erosión, pH, contenido de nutrientes, requieren trabajo de campo y hasta de laboratorio en algunos casos.

Por último, son indicadores de la calidad de un sitio las variables vegetacionales. Sea la vegetación arbustiva o herbácea, ella permite calificar la calidad o productividad potencial de un determinado sitio.

En el norte de Europa, bajo la influencia de CAJANDER y SUKACEW, se clasifican los rodales de acuerdo con la asociación vegetal predominante, y de acuerdo con esto se establecen los rangos de productividad. Se recurre a una completa sistematización y ordenamiento de las plantas. Ejemplo de este tipo de tablas de rendimiento según productividad son las finlandesas. Otro método fitosociológico es la ocurrencia de plantas indicadoras, MAC LEAN y BOLSINGER (1973).

IV.2 EXPRESIONES DE LA CALIDAD DE SITIO EN BASE A PARAMETROS DEL RODAL

En este sentido, se han empleado el volumen y la altura del rodal. El volumen refleja toda la capacidad productiva del sitio, pero se ve afectado por factores ajenos como la densidad, el manejo histórico del rodal y también por el procedimiento de estimación.

Otros índices de calidad de sitio o de productividad son el crecimiento medio máximo, evaluado a una determinada edad, o el volumen al final de una rotación.

En la medición de la calidad de sitio la variable del rodal más comúnmente usada es la altura dominante, a través del índice de sitio definido como la altura dominante o predominante promedio de un rodal a una edad determinada clave. La altura predominante es en alto grado independiente de la densidad y del manejo, esto último siempre que los raleos y/o podas no sean muy intensos. Otra ventaja es su alta correlación con el volumen. Sin embargo, existe una desventaja, y es la existencia de desarrollos en área basal muy diferentes para iguales índices de sitio. Frente a esto, conviene zonificar primeramente por algún índice de productividad de área basal y, dentro de cada zona, utilizar el índice de sitio como indicador fino de productividad.

La obtención de la altura dominante debe objetivarse al máximo. Durante muchos años, se definió el sitio como la media de árboles dominantes y codominantes; hoy se recomienda reemplazar ese concepto por una altura representativa objetivamente obtenida; por ejemplo, el promedio de los 100 ó 200 árboles más gruesos o más altos del rodal.

La dificultad para la medición de la edad llevó a HUSCH (1956) y otros autores a proponer su reemplazo por la edad a la altura de pecho, eliminándose de esta forma los años arbitrarios que se le agregan a la edad del tocón, evitando los primeros años de crecimiento en que pueden haber influido factores ajenos al sitio en el crecimiento en altura, y con la gran ventaja de que la altura de pecho es una medida convencional.

En rodales multietáneos, el concepto tradicional de índice de sitio no es aplicable, ya que la relación altura-edad no es estrecha.

IV.3 CURVAS DE INDICE DE SITIO

Se han propuesto diferentes métodos para desarrollar funciones de sitio, que varían según el principio aplicado, el tipo de datos, el método de construcción y el modelo empleado.

IV.3.1 Principios: anamorfismo y polimorfismo

Durante muchos años, las curvas de índice de sitio se construyeron suponiendo que el desarrollo de la relación altura-edad para los diferentes sitios se daba con una tendencia

constante, lo que se expresaba también en una proporcionalidad constante. Vale decir, la altura de un rodal en una cierta clase de sitio sería una proporción constante de la altura correspondiente a otra clase de sitio o independientemente de la edad; esto se denominó curvas anamórficas, de formas iguales o análogas, también isomórficas o proporcionales.

Por el contrario, desde la década del 70, se ha comprobado que esa proporcionalidad no es tal y que la altura y la edad son independientes: la forma de las curvas depende de las particulares relaciones altura-edad observadas en las diferentes clases de sitio; vale decir, las curvas de índice de sitio tienen varias formas: son curvas polimórficas.

IV.3.2 Tipos de datos: parcelas permanentes, parcelas temporales y análisis fustal

Las parcelas permanentes remedidas periódicamente producen series de desarrollo altura-edad que permiten construir curvas anamórficas y polimórficas. Cuando las series se limitan a pares de observaciones de desarrollo (uno o más), el procedimiento más empleado es el de ecuaciones de diferencia que genera curvas anamórficas (ALDER 1980). Recientemente, GARCIA (1983) propuso un sistema que permite construir curvas polimórficas en base a series de sólo dos pares de observaciones.

Conviene destacar que los pares de observaciones son estadísticamente más adecuados que las series completas de crecimiento, dada su independencia.

Cuando se emplean parcelas temporales sólo puede adoptarse el principio del anamorfismo. Se debe tomar un número suficiente de mediciones para cubrir la gama de edades y sitios encontrados en condiciones naturales. Para relaciones eficaces son necesarias como mínimo 100 parcelas, aplicando el método convencional de la curva guía. Como no se conocen las relaciones altura-edad locales, éstas se estiman en base a la tendencia que muestran los puntos de muestreo. De la curva guía que representa a un sitio promedio se deriva proporcionalmente el resto de las curvas específicas para las diferentes clases de sitio. Cuando se emplean parcelas temporales, se asume que las diferentes clases de sitio están representadas en proporciones constantes para las diferentes clases de edad. De lo contrario, se produce un sesgamiento de la función de sitio resultante, excepto en el método de diferencias (ALDER 1980).

Mediante análisis fustal se generan, además, series de crecimiento desde la plantación hasta el momento del análisis. Los rodales muestreados deben corresponder a rodales adultos, iguales o mayores a la edad clave. Los árboles de la muestra se seleccionan de modo que representen la altura predominante que se utiliza. Por ejemplo, si la altura representativa es el promedio de los 50 árboles más gruesos por hectárea en parcelas de 200 m², se debe seleccionar sólo el árbol más grueso.

Los datos de análisis fustal se emplean generalmente para construir funciones polimórficas, y es posible agruparlos con datos de parcelas permanentes. Mayores antecedentes sobre análisis fustal o análisis de tallo se entregan en la sección VI.4.1.

IV.3.3 Construcción de curvas de índice de sitio

Uno de los primeros pasos al construir funciones de índice de sitio consiste en dividir el área en zonas para las cuales se construyen funciones independientes. A veces, la necesidad de zonificar se detecta recién al validar el modelo.

REAL (1990) empleó el cociente área basal/altura dominante (metros cuadrados de área basal por metro lineal de altura), que representa un índice de agrupamiento de zonas homogéneas de productividad en área basal, dentro de cada una de las cuales se ajustaron funciones de índice de sitio. Esta zonificación se realizó en Chile para las plantaciones de *Pinus radiata* de todo el país, dentro del proyecto cooperativo Modelo Nacional de Simulación. Una opción alternativa para zonificar es el método de MONSERUD (1984) que integra, en un modelo general, funciones para diferentes zonas empleando variables mudas.

$$H_{dom} = b_1 S^{(b_2 Z_1 + b_3 Z_2 + b_4 Z_3)} / 1 + e^{-(b_5 + b_6 \cdot \ln t) + (b_7 Z_1 + b_8 Z_2 + b_9 Z_3) \ln S} \quad (4-1)$$

Donde

$$Z_i \text{ es } 1 \text{ si la zona es } i \text{ y } 0 \text{ si lo contrario} \quad (4-2)$$

H_{dom} = altura dominante, m

t = edad, años

S = índice de sitio, m

IV.3.3.1 Método de la curva guía

Este ha sido el método más tradicional de construcción de funciones de índice de sitio anamórficas. A partir de una relación única para todos los datos de altura sobre edad, se deriva, por el principio de proporcionalidad constante, el resto de las funciones.

Si la función promedio ajustada es:

$$\ln \cdot H_{dom} = b_0 + b_1 / t \quad (4-3)$$

El índice de sitio promedio correspondiente a esa función es para la edad clave t_c :

$$\ln S = b_0 + b_1 / t_c \quad (4-4)$$

Despejando b_0 y reemplazándola en la función, queda:

$$\ln H_{dom} = \ln S - b_1 / t_c + b_1 / t = \ln S + b_1 (1/t - 1/t_c) \quad (4-5)$$

sitio y productividad

O expresado de otra manera:

$$\frac{H_{dim}}{S} = \exp[b_1(1/t - 1/t_c)] \quad (4-6)$$

Donde

t_c = edad clave, años

GARCIA (1970) desarrolló a nivel nacional funciones anamórficas para diez zonas de crecimiento del tipo 4-3 cuyos coeficientes se incluyen en el Cuadro 4-1 y en las Figuras 4-1 y 4-2.

Cuadro 4.1. Coeficientes de las funciones de índice de sitio anamórficas de *Pinus radiata* en Chile por zona de crecimiento

Zona	b_0	b_1
1	3.875	-16.23
2	3.866	-14.82
3	3.822	-13.24
4	3.940	-15.14
5	4.176	-16.90
6	3.825	-16.68
7	3.269	-12.41
8	3.960	-15.93
9	4.086	-14.85
10	3.949	-15.12
General	3.869	-14.98

Para una función de pino insigne, *Pinus radiata* D. Don., con una edad clave de 20 años

$$\ln H_{dim} = 3.75 - 13.9 / t \quad (4-7)$$

$$H_{dim} = 42.52 \cdot \exp(-13.9 / t) \quad (4-8)$$

la función general resultante es:

$$H_{dim} = S \cdot \exp[-13.9(1/t - 1/20)] = 2.0037 \cdot S \cdot \exp(-13.9 / t) \quad (4-9)$$

Este método puede aplicarse igualmente a otros modelos como Chapman-Richards.

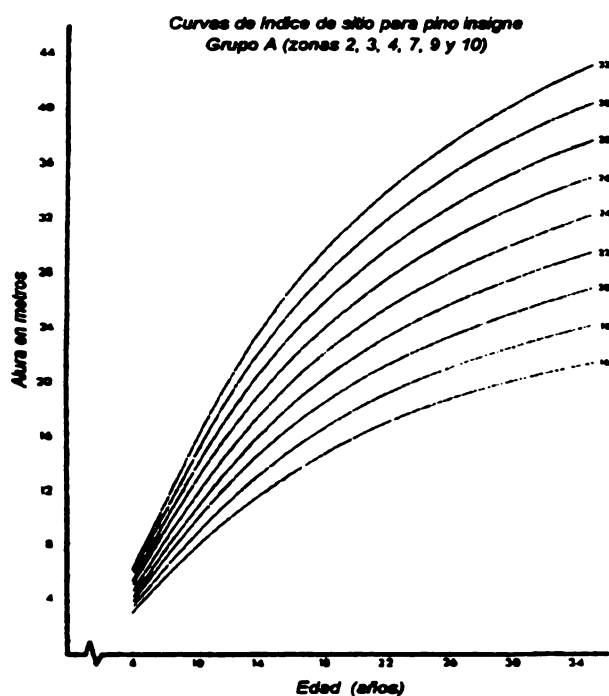


Figura 4-1. Curvas de índice de sitio para *Pinus radiata*, zonas 2, 3, 4, 7, 9 y 10

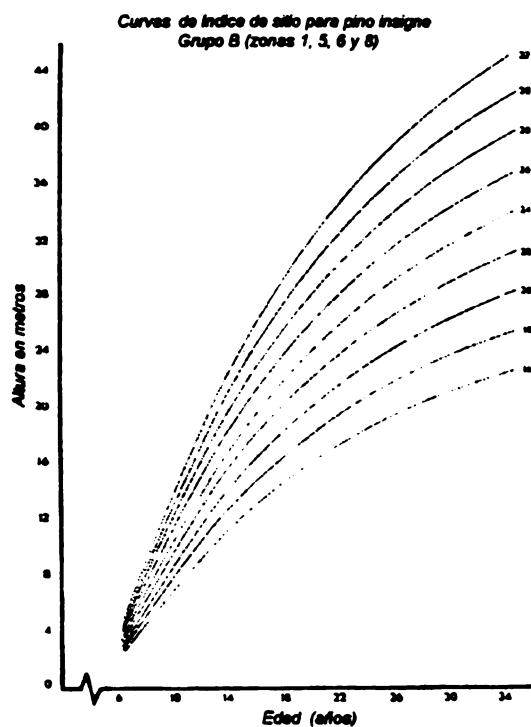


Figura 4-2. Curvas de índice de sitio para *Pinus radiata*, zonas 1, 5, 6 y 8

IV.3.3.2 Método de la ecuación de diferencia

Una ventaja de este método es que emplea series truncas de desarrollo como las proporcionadas por las parcelas permanentes. El supuesto base de este método es que todo par de observaciones se aplica sobre la misma relación altura-edad. Para un par de observaciones (t_1, H_1) y (t_2, H_2) :

$$\ln H_1 = a_i + b / t_1 \quad (4-10)$$

$$\ln H_2 = a_i + b / t_2 \quad (4-11)$$

donde a_i depende de la calidad de sitio y b , según el principio anamórfico, es común para todos los rodales. Sumando ambas expresiones y cambiando el signo:

$$\ln H_2 = \ln H_1 = b(1/t_2 - 1/t_1) \quad (4-12)$$

Donde, además, sabemos que:

$$y = \ln H_2 - \ln H_1 \quad (4-13)$$

$$x = 1/t_2 - 1/t_1$$

Cada par genera una observación y, x para los que se asume un b común que se estima por mínimos cuadrados. Se concluye, como es usual con el principio anamórfico, lo siguiente:

$$\ln H_{dom} = \ln S + b(1/t - 1/t_c) \quad \text{ó} \quad (4-14)$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \exp[b(1/t_1 - 1/t_2)] \quad (4-15)$$

IV.3.3.3 Método de la regresión anidada

Descrito por ALDER (1980) como método de regresión jerárquica ("nested regression"), comprende dos tipos. Uno usa variables condicionales en regresión múltiple y el segundo, desarrollado originalmente por BAILEY y CLUTTER (1974), implica el uso de estimadores de pendiente común y de término independiente (ordenada en el origen) también común.

Calculadas las ecuaciones con pendiente común o término independiente común, la construcción de curvas de índice de sitio se hace de la siguiente forma:

a) Pendiente común

$$\ln H_{dom} = a_i - 6.638 / t^{0.25} \quad (4-16)$$

$$\ln S = a_i - 6.638 / t_c^{0.25} \quad (4-17)$$

$$a_i = \ln S + 6.638 / t_c^{0.25} \quad (4-18)$$

Se calcula el valor de la ordenada para diferentes índices de sitio.

b) Término independiente común

$$\ln H_{dom} = 6.311 + b_i / t^{0.25} \quad (4-19)$$

$$\ln S = 6.311 + b_i / t_c^{0.25} \quad (4-20)$$

$$b_i = (\ln S - 6.311) t_c^{0.25} \quad (4-21)$$

Se calcula b_i para los distintos índices de sitio.

El método de regresión anidada con variables condicionales permite ajustar funciones con pendiente común, ordenada en el origen común o ambas.

Por ejemplo, para una pendiente común y tres series de datos, el modelo de regresión es:

$$\ln H_{dom} = a_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + b / t \quad (4-22)$$

Donde

$P_2 = 1$ para parcela 2 ; $P_3 = 1$ para parcela 3

$P_2 = 0$ para otros datos ; $P_3 = 0$ para otros datos

Los valores del término constante para cada serie de datos serían:

<u>Serie</u>	<u>Coefficiente a</u>
1	a_1
2	$a_1 + a_2$
3	$a_1 + a_3$

En el supuesto de que hubiese una pendiente variable y un término constante común, se procede al ajuste:

$$\ln H_{dom} = a_1 + b_1 / t + b_2 P_2 / t + b_3 P_3 / t \quad (4-23)$$

Las pendientes serían para cada serie:

<u>Serie</u>	<u>Coefficiente b</u>
1	b_1
2	$b_1 + b_2$
3	$b_1 + b_3$

Se pueden asumir tanto términos independiente como pendientes variables.

$$\ln H_{dom} = a_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + b_1 t + b_2 P_2 t + b_3 P_3 t \quad (4-24)$$

Este modelo da exactamente el mismo resultado que si se ajustan las tres funciones independientemente.

El método de regresiones anidadas está ampliamente descrito y desarrollado en ALDER (1980).

GROOTHAUSEN y FERREIRA (1989) calcularon curvas de índice de sitio para *Pinus caribaea* Morelet en Honduras por el método de regresión anidada o jerárquica. Probaron un modelo con intercepto común y con pendiente común siendo seleccionado el primero de ellos.

$$\ln H_{dom} = 6.1054 - 5.1211 / t^{0.1488} \quad (4-25)$$

La ecuación se representa en la Figura 4-3.

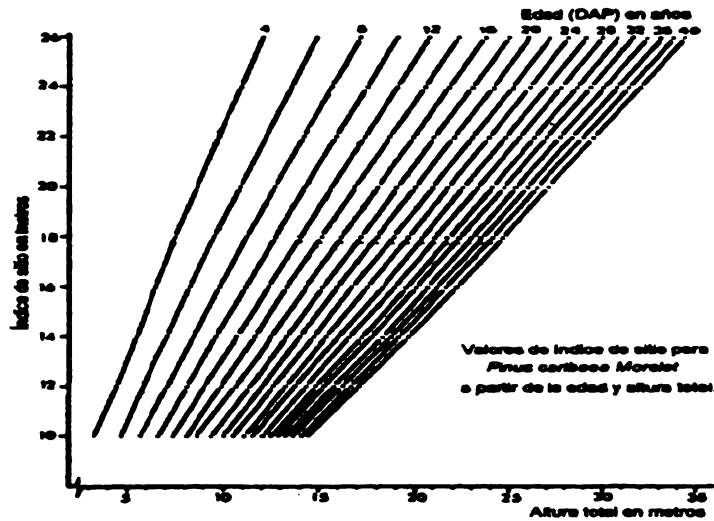


Figura 4-3. Curvas de índice de sitio para *Pinus caribaea* en Honduras.
Edad clave 20 años

Los mismos autores, y para la misma especie en la zona Olancho, también en Honduras, obtuvieron una función anamórfica del tipo:

$$\ln H_{dom} = 6.1054 - 5.1211 / t^{0.1488} \quad (4-25a)$$

IV.3.3.4 Construcción de curvas polimórficas

Los pasos que se deben seguir en el método tradicional para ajustar funciones polimórficas, son los siguientes:

- i) Cada unidad independiente (parcelas permanentes o análisis fustal) aporta una curva de desarrollo que se ajusta a una función, como por ejemplo, la de Chapman-Richards.

$$H_{dom} = a_1 (1 - \exp(-b_1 t))^{c_1} \quad (4-26)$$

- ii) Si no se conoce el índice de sitio para cada unidad, éste se estima a partir de la función anterior, reemplazando la edad por la clave, y se ajusta una función independiente del tipo:

$$S = a_2 (1 - \exp(-b_2 t))^{c_2} \quad (4-27)$$

- iii) Se relacionan los parámetros de las curvas ajustadas con la altura e índice de sitio, mediante regresiones como:

$$a_1 = P_1 S^{P_2} \qquad a_2 = q_1 H^{q_2}$$

$$b_1 = P_3 \qquad b_2 = q_3$$

$$c_1 = P_4 S^{P_5} \qquad c_2 = q_4 H^{q_5}$$

- iv) Se construyen modelos generalizados del tipo:

$$H = p_1 S^{P_2} (1 - \exp(p_3 t))^{P_4 S^{P_5}} \qquad (4-28)$$

$$S = q_1 H^{q_2} (1 - \exp(q_3 t))^{q_4 H^{q_5}} \qquad (4-29)$$

Este modelo, desarrollado por CARMEAN y HAHN (1981), ha sido aplicado en Chile por INFORA (1990) para ajustar funciones independientes de sitio y altura para pino insigne.

Las funciones resultantes se compararon con ecuaciones de sitio para el mismo conjunto de datos, pero obtenidas por el método de GARCIA (1983), comprobándose que son muy similares. Pero la gran ventaja de estas últimas es la rapidez del método y la compatibilidad de ambas funciones.

El método de GARCIA (1983) consiste en el ajuste simultáneo de máxima verosimilitud de dos o tres de los parámetros de función de Chapman-Richards (denominados globales porque son los mismos para toda la muestra) y un parámetro local que es estimado para cada serie de datos altura-edad y que por lo tanto representa las variaciones de sitio. Este procedimiento fue aplicado en varias oportunidades por INFORA (1992, 1993) y el Modelo Nacional de Simulación (1994) con buenos resultados.

El modelo de altura ajustado corresponde a:

$$H = b_0 [1 - \exp b_1 (t - t_0)]^{1/b_2} \qquad (4-30)$$

Donde

H = altura media predominante de los 100 árboles más gruesos por hectárea, m

t = edad, años

b_0, b_1, b_2 y t_0 = parámetros

Existen varias opciones de ajuste, dependiendo de los parámetros que se dejan como globales y locales, y según la curva pasa por el origen ($t_0 = 0$) o tiene un valor constante ($t_0 \neq 0$). Los modelos con el parámetro b_0 local son anamórficos, mientras que los que tienen b_1 local son polimórficos.

Otro tipo de funciones independientes para sitio y altura no compatibles fue utilizado por PEREZ *et al.* (1990) para *Pinus oocarpa* en Honduras, sobre la base de 402 análisis fustales. Los modelos son:

Función de sitio:

$$S = 1.3 + H_{dom} - 0.76119 \left[\ln(t)^2 - \ln(t_c) \right]^2 + 0.01473 \left[t \cdot \ln(t) - t_c \cdot \ln(t_c) \right] + 6.96787 \left[H_{dom} / t - H_{dom} / t_c \right] \quad (4-31)$$

Función de altura:

$$H_{dom} = 1.3 + S \left\{ 1 + \exp \left[6.75433 - 1.23093 \ln t_c - 1.18605 \ln(S) \right] \right\} / \left\{ 1 + \exp \left[6.75433 - 1.23093 \ln t - 1.18605 \ln(S) \right] \right\} \quad (4-32)$$

Donde

- S = índice de sitio, metros
 H_{dom} = altura total dominante menos 1.3 m
 t = edad a la altura de pecho, años
 t_c = edad clave, años

Se detectaron importantes diferencias en la aplicación de ambas funciones, que no fueron compatibles.

MACHADO (1978) ajustó para plantaciones jóvenes de *Pinus taeda* entre 6 y 17 años de Paraná en Brasil el modelo de PRODAN (1944):

$$H_{dom} = \frac{t^2}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2} \quad (4-33)$$

obteniendo los siguientes coeficientes por clase de sitio (Cuadro 4-2).

Cuadro 4-2. Coeficientes para las funciones de sitio de *Pinus taeda*

Clase de sitio	Indice de sitio	Coeficientes		
		b_0	b_1	b_2
V	10	1.2803	0.1664	0.0696
IV	12	0.9380	0.2316	0.0503
III	14	0.6819	0.2780	0.0366
II	16	0.4957	0.3137	0.0263
I	18	0.3493	0.3400	0.0182
	20	0.2344	0.3614	0.0119

ZEPEDA *et al.* (1990) ajustó el siguiente modelo base para distintos pinos mexicanos:

$$H_{dom} = \exp(b_0 + b_1 \ln t + b_2 \ln^2 t) \quad (4-34)$$

Especie	b_0	b_1	b_2
<i>Pinus arizonica</i>	-4.4346	2.5740	-0.1994
<i>Pinus durangensis</i>	-4.6922	2.7748	-0.2340
<i>Pinus engelmannii</i>	-4.1155	2.3266	-0.1709

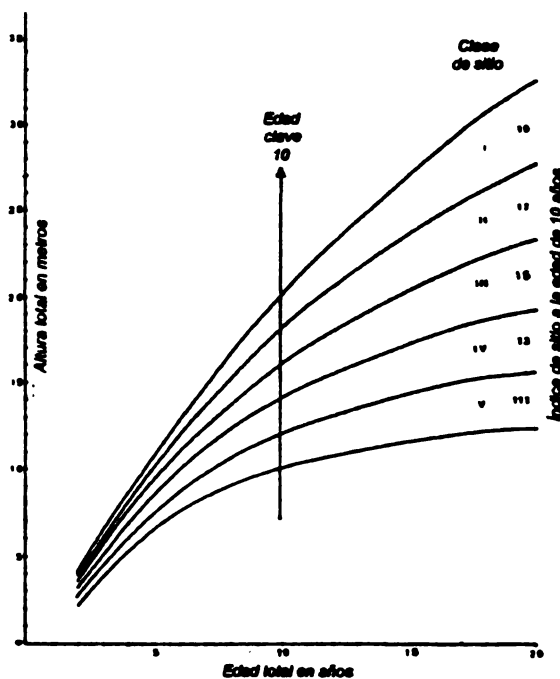


Figura 4-4. Funciones polimórficas de índice de sitio para plantaciones jóvenes de *Pinus taeda* en Paraná, Brasil

Por transformación algebraica se pueden obtener las funciones de índice de sitio y de altura correspondientes.

$$\textit{Pinus arizonica} \quad H_{dom} = 133.7178 [S / 133.7178]^{(t_c/t)^{0.3287}} \quad (4-35)$$

$$S = 133.7178 [H_{dom} / 133.7178]^{(t_c/t)^{0.3287}} \quad (4-36)$$

$$\textit{Pinus durangensis} \quad H_{dom} = 120.0955 [S / 120.0955]^{(t_c/t)^{0.3257}} \quad (4-37)$$

$$S = 120.0955 [H_{dom} / 120.0955]^{(t_c/t)^{0.3257}} \quad (4-38)$$

$$\textit{Pinus engelmannii} \quad H_{dom} = 197.3065 [S / 197.3065]^{(t_c/t)^{0.2598}} \quad (4-39)$$

$$S = 197.3065 [H_{dom} / 197.3065]^{(t_c/t)^{0.2598}} \quad (4-40)$$

Por último, AGUIRRE y ZEPEDA (1985) aplicaron para *Pinus patula* la modificación del modelo de Richards, también basados en un análisis fustal de 72 árboles.

Ajustaron siete modelos, de los cuales el de Richards, modificado, proporcionó los mejores resultados. La función es polimórfica y con una edad clave de 50 años.

Función resultante:

$$H_{dom} = 1.5846 S^{0.9349} (1 - \exp(-0.0357 t))^{0.78554} S^{-0.2217} \quad (4-41)$$

El investigador mexicano AGUIRRE (1984) obtuvo, también para *Pinus patula*, la siguiente expresión:

$$S = H_{dom} [(1 - \exp(-0.076942 t_c)) / (1 - \exp(-0.076942 t))]^{1.95618} \quad (4-42)$$

IV.3.4 Modelos de estimación del índice de sitio en base a factores ambientales

Las curvas de índice de sitio basadas en la altura predominante del rodal son útiles cuando se aplican a bosques existentes. Sin embargo, una gran cantidad de decisiones de manejo forestal requieren alguna estimación del potencial de producción para una determinada especie antes de que ella haya sido establecida.

Para resolver esta situación, se ajustan funciones de índice de sitio o de productividad en función de variables fisiográficas y/o ambientales.

CONTRERAS y PETERS (1982) ajustaron, para pino Oregón, *Pseudotsuga menziesii*, una función donde las variables predictoras por orden de importancia fueron la capacidad de agua aprovechable, la profundidad del horizonte A del suelo y el drenaje.

$$S = 21.055 - 502.306 / CAA + 0.0387 \cdot HA \cdot D - 0.000137 (HA \cdot D)^2 \quad (4-43)$$

Donde

- S = índice de sitio a los 20 años, m
 CAA = capacidad de agua aprovechable, mm
 HA = profundidad del horizonte A, cm
 D = drenaje (codificado)
 r = 0.86

El número de variables ambientales que se pueden probar puede ser amplísimo, pero es necesario priorizar las más fácilmente medibles.

IV.3.5 Índices de productividad

La evidencia de que el volumen total producido por rodales de densidad completa es un indicador de la productividad de sitio, ha llevado a algunos autores a desarrollar un índice de productividad según lo descrito por PHILIPP (1931).

HAGGLUND (1981) señala que la productividad del sitio puede expresarse en términos del incremento medio anual ya sea a una edad índice o a la edad de culminación de éste.

COX (1982) plantea, a partir de parcelas temporales, el ajuste de índices de productividad en base a factores ambientales y también evalúa su relación con el índice de sitio. Se definió para *Pinus radiata* un índice de productividad como el crecimiento medio en volumen a la edad de 20 años, pero sólo con rodales de densidad completa.

Las funciones resultantes fueron:

$$IPR = 26.368 + 0.0243 PE^2 - 20.150 / EX^2 - 6.653 / HA \quad (4-44)$$

$r^2 = 0.66$
 $Sx\% = 11.8$

$$S = 25.835 - 7.596 / EX - 4.487 / SS - 0.146 \cdot AL \cdot PE \quad (4-45)$$

$$r^2 = 0.66$$

$$Sx\% = Sx\% = 7.3$$

$$IPR = -7.49 + 1.275 S \quad (4-46)$$

$$r^2 = 0.56$$

$$Sx\% = 12.3$$

Donde

IPR = índice de productividad en m^3/ha a los 20 años

S = índice de sitio, m

PE = pendiente, %

EX = exposición (codificada)

HA = profundidad del horizonte A, cm

SS = serie de suelo (codificada)

AL = altitud, msnm

PETERS y CUBILLOS (1985), también para *Pinus radiata*, basados en una metodología similar, desarrollaron un índice de productividad real, de acuerdo con la densidad real del rodal y un índice de productividad potencial definido como la productividad máxima que alcanzaría un determinado rodal si tuviera densidad completa o normal.

La función de productividad incorpora el factor densidad a través del índice de REINEKE:

$$IPR = 0.02296 S^{1.3816} (IDR / 100)^{0.8455} \quad (4-47)$$

$$IPP = 0.02296 S^{1.3816} \quad (4-48)$$

Donde

IPR = índice de productividad real, m^3/ha

IPP = índice de productividad potencial, m^3/ha

IDR = índice de densidad de REINEKE

S = índice de sitio, m

Ambas ecuaciones fueron desarrolladas para la VI Región de Chile.

IV.3.6 Estimación del índice de sitio de rodales

La estimación del índice de sitio en rodales depende del error aleatorio de la función, del sesgo que puede originarse de su aplicación y del error con que se estimen los predictores edad y altura. También existen diferencias puntuales en la estimación del índice de sitio, dependiendo del conjunto de árboles que se emplean para determinar la altura. Lo lógico y correcto sería obtener la altura en forma similar a como se construyó el modelo. No es indiferente el tamaño de la unidad para la determinación de la altura predominante; luego, tampoco lo es para el índice de sitio.

Existen tres formas básicas de estimar el índice de sitio de un rodal en el marco de un inventario, suponiendo que la edad es constante para todo el rodal.

La primera opción consiste en calcular la altura predominante media y, por lo tanto, el índice de sitio promedio, evaluado en todas las unidades muestrales.

La segunda forma es calcular la altura representativa media como promedio de todas las alturas representativas, evaluadas en cada una de las parcelas.

Por último, la tercera opción consiste en derivar la altura representativa de la tabla de rodal promedio y estimar el índice de sitio en base a ella.

El procedimiento más correcto es el primero; las primeras dos opciones son equivalentes para modelos de índice de sitio contruidos por procedimientos anamórficos, pero no son necesariamente iguales para modelos polimórficos, aunque en este caso las diferencias son despreciables.

IV.3.7 Proyección del crecimiento en altura

La proyección de las alturas se hace normalmente a través de las funciones de índice de sitio, que permiten predecir la altura predominante de rodales dentro de un amplio rango de densidades. Incluso para rodales raleados por lo bajo en intensidades no extremas es factible utilizar las funciones de sitio. No así para raleos por lo alto o podas intensas, que afectan el índice de sitio y/o el desarrollo en altura. Para controlar el efecto de las intervenciones silviculturales intensas, se emplean las llamadas funciones modificadoras.

$$H = f(S, t) \cdot M_1 \cdot M_2 \quad (4-49)$$

Donde

$M_1 = f(\text{intensidad de raleo...})$

$M_2 = f(\text{intensidad de poda...})$

Un ejemplo de una función modificadora de raleos es la siguiente:

$$M = 1 - 0.4 e^{-0.8} \quad (4-50)$$

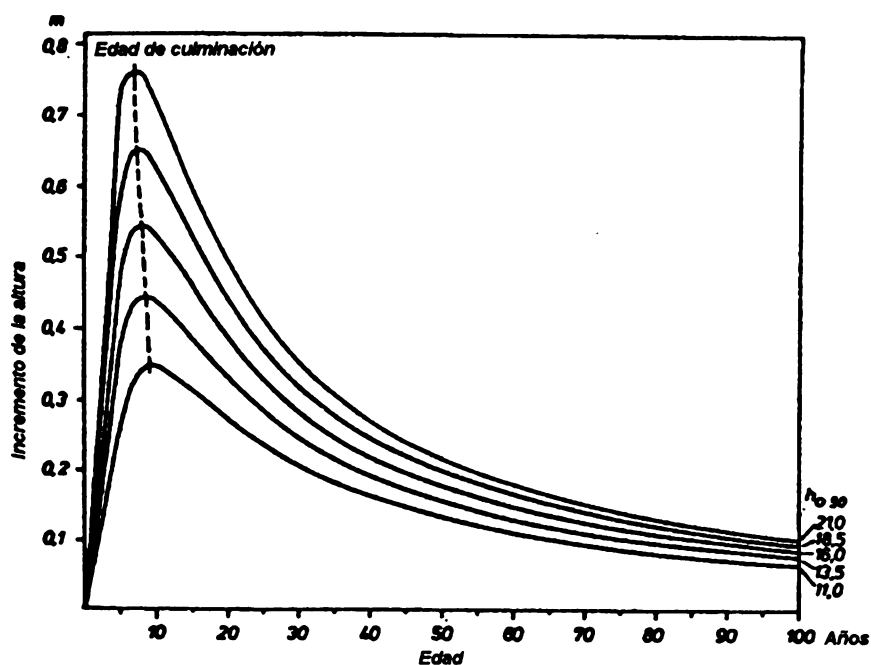


Figura 4-5. Crecimiento en altura para diferentes clases de índice de sitio.
Pinus pseudostrobus en México

SLOBODA (1971) desarrolló para el crecimiento una ecuación diferencial de primer grado, la cual fue aplicada por AGUIRRE (1989) para *Pinus pseudostrobus* en México. La función resultante desarrollada para una altura dominante equivalente a la altura de Weise es la siguiente:

$$IH = \frac{0.67348 H_{dom}}{t^{1.39787}} \cdot \ln \frac{794.84248}{H_{dom}} \quad (4-51)$$

Donde

IH = crecimiento anual en altura, m

V. DENSIDAD Y ESTRUCTURA

El crecimiento y el rendimiento dependen tanto de la productividad potencial, dada por la calidad del sitio, como del grado en que se aproveche dicha potencialidad a través de la cantidad y distribución del stock. La distribución espacial es importante en formaciones naturales, especialmente para los procesos regenerativos del bosque, pero no lo es en bosques sometidos a manejo intensivo.

Bajo el término densidad se incluyen tres conceptos:

- Cantidad de vegetación en crecimiento.
- Grado de ocupación del sitio ("stocking"). Densidad presente en relación con una condición de referencia normal.
- Grado de competencia entre los árboles por los elementos del medio. Restricción impuesta por los vecinos al libre desarrollo.

CURTIS (1970) señala que "este concepto está estrechamente ligado a las nociones de competencia, ocupación de superficie y cierre de cobertura, las cuales son fundamentales en la silvicultura".

La densidad se utiliza como variable de decisión o control en intervenciones silviculturales o, en modelos simuladores de desarrollo y crecimiento, también como variable predictora. Una medida de densidad debe ser básicamente clara, consistente, objetiva y fácil de aplicar; en lo posible, conviene que tenga relación con el volumen, y no debe estar relacionada con la edad ni con el sitio.

La densidad puede expresarse en términos absolutos o relativos. Otra clasificación es si está referida al rodal o a un árbol en particular.

Entre los índices de densidad absolutos está el número de árboles y el área basal por hectárea; un índice relativo podría ser el cociente del área basal actual y el área basal de un rodal equivalente de densidad normal. Existen cuatro tipos de índices de densidad:

- Índices de densidad del rodal
- Índices de densidad puntual
- Índices de competencia para rodales
- Índices de competencia para árboles individuales

V.1 INDICES DE DENSIDAD DE RODAL

V.1.1 Número de árboles

Entre las mediciones directas de densidad está el número de árboles, cuyo valor puede obtenerse fácil y objetivamente, pero se relaciona con edad y sitio tanto como con el grado de utilización del terreno. En otros términos, el número de árboles puede variar sin afectar la densidad. Por ello se utiliza un índice compuesto con una variable adicional.

El área media ocupada por cada árbol -cuociente unidad de superficie/número de árboles- señala directamente el espacio medio que cada individuo solicita para su crecimiento y desarrollo.

V.1.2 Area basal

El área basal es la medida más simple y más usada como índice de densidad de rodal. Normalmente se expresa en términos relativos, como un cuociente o razón entre el área basal de un rodal observado G_0 y un rodal normal G_n .

$$IDR = G_0 / G_n$$

CURTIS (1970) obtiene la constante de proporcionalidad k del G_n , con el propósito de estimar el grado de ocupación del área basal de un rodal observado G_0 de la siguiente forma:

$$\sum (\text{área basal de los individuos}) = 100\% = k G_n$$

Si la constante de proporcionalidad k pondera el área basal de un rodal observado G_0 , se obtiene el porcentaje de área basal ocupado por este mismo rodal respecto de un rodal normal de igual diámetro medio y similar distribución de frecuencias.

V.1.3 Indice de densidad de REINEKE

El área basal es un indicador de la densidad que no aclara si el resultado es la suma de un gran número de árboles de pequeño diámetro o un pequeño número de árboles de gran diámetro. Esta información se puede obtener rompiendo el área basal en dos componentes: el número de árboles y el diámetro del árbol de área basal media.

REINEKE (1933) construyó un índice de densidad de rodal en base al número de árboles y el diámetro medio de un rodal normal.

Este índice se define como la razón entre el número de árboles de un rodal observado y un rodal de densidad normal, ambos con igual diámetro medio.

$$IDR = N_o / N_n \quad (5-1)$$

Dicho de otra forma, es el número de árboles por unidad de superficie que un rodal puede llegar a tener al alcanzar un diámetro medio fijado convencionalmente como clave. REINEKE comprobó que para una especie que crece en condición de máxima competencia, el número de árboles se relaciona negativamente con el diámetro medio (Figura 5-1).

A partir de la expresión:

$$N = b_0 \cdot D_g^{b_1} \quad \text{ó} \quad (5-2)$$

$$\log N = \log b_0 + b_1 \cdot \log D_g \quad (5-3)$$

el IDR para un diámetro clave D_c es:

$$\log IDR = \log b_0 + b_1 \cdot \log D_c \quad (5-4)$$

Despejando $\log b_1$ y reemplazando en (5-3):

$$\log IDR = \log N - b_1 \cdot \log(D_g - D_c) \quad (5-5)$$

Donde

IDR = índice de densidad de rodal

N = número de árboles por hectárea

D_g = diámetro cuadrático medio, cm

D_c = diámetro clave, cm

Para 14 especies probadas, REINEKE determinó que el parámetro b_1 de la expresión se aproximaba a -1.6.

Para un rodal que se encuentra muy por debajo de esta condición límite de competencia, la relación entre los logaritmos del número de árboles y del diámetro será casi horizontal, hasta que se aproxime a la línea límite (Figura 5-2).

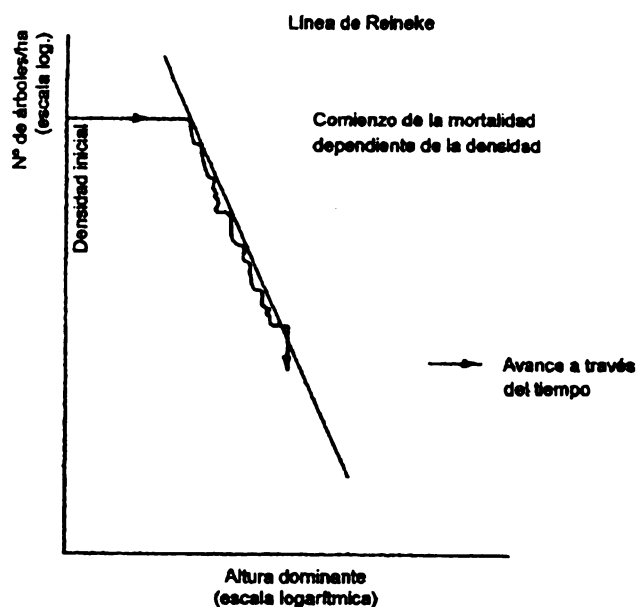


Figura 5-1. Línea de REINEKE que determina el desarrollo de la mortalidad según la densidad

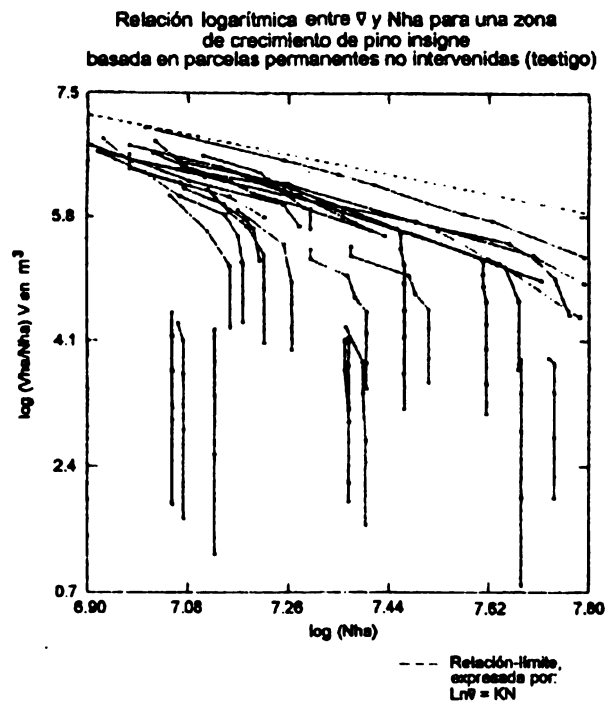


Figura 5-2. Relación entre volumen medio por árbol y número de árboles por hectárea para pino insigne basada en parcelas permanentes no intervenidas

Rodales de la misma especie en otros hábitats tendrán líneas límites diferentes, pero su tendencia será siempre similar. De este modo se generan, para diferentes rodales, límites paralelos.

El principio de REINEKE se ha empleado para definir indicadores de densidad en dos formas diferentes:

a) Índices de densidad relativa (RD)

Suponiendo conocidas la densidad límite para un rodal Nm

$$Nm = \ln D_g^{-1.6}$$

y su densidad actual Nr ; su densidad relativa se define como:

$$RD = Nr / Nm = Nr / (\alpha D_g^{-1.6}) \quad (5-6)$$

Donde

Nm = número máximo de árboles por hectárea

Nr = número real de árboles por hectárea

Por ejemplo, si la condición límite es:

$$Nm = e^{12.37} \cdot D_g^{-1.6}$$

Entonces, un rodal de diámetro medio de 18 cm tiene un

Nm de 2311 árboles.

Si el rodal real tiene 700 árboles por hectárea, la densidad relativa resultante será:

$$700/2311 = 30.3\%$$

b) Índices de densidad de rodal (IDR)

El índice de densidad de rodal se emplea también para expresar la densidad límite de un rodal en una forma más comprensible, que además permite disponer de una herramienta para proyectar la densidad bajo ciertas circunstancias.

densidad y estructura

Conocidos $N = 900$ y $D_g = 32.5$ cm para un rodal cualquiera, se supone que está creciendo en la condición límite, donde:

$$900 = \alpha \cdot 32.5^{-1.6} \quad (5-7)$$

$$\alpha = 236187 = e^{12.37} \quad (5-8)$$

El índice de densidad se define como el número de árboles que tendría ese rodal si el diámetro medio fuera igual al diámetro clave D_c , en pino insigne = 20 cm.

Para el mismo ejemplo anterior:

$$IDR = \alpha \cdot D_g^{-1.6} = e^{12.37} \cdot 20^{-1.6} = 1952.4 \quad (5-9)$$

Esta expresión puede indicar el número de árboles futuro en rodales naturales no intervenidos o creciendo en condición límite.

Para un caso donde $N = 1000$, $D_g = 30$ cm y $D_c = 20$ cm, el IDR es igual a:

$$IDR = 1000 \cdot \frac{30^{1.6}}{20} = 1913.1$$

El número futuro probable, usando $D_g = 40$ cm, es:

$$N = 1913 \cdot \frac{40^{-1.6}}{20} = 631 \text{ árboles}$$

La aplicación de este índice es riesgosa por lo difícil que resulta saber si un rodal está creciendo en condición de máxima densidad o no.

En resumen, existe una proporcionalidad directa entre el índice de densidad relativa (RD) y el índice de densidad de rodal (IDR). La diferencia es que mientras K_1 varía según la productividad de sitio, K_2 se presume constante.

$$RD = N \cdot \alpha^{-1} \cdot D_g^{1.6} = K_1 N D_g^{1.6} \quad (5-10)$$

$$IDR = N \cdot \alpha^{-1.6} \cdot D_g^{1.6} = K_2 N D_g^{1.6} \quad (5-11)$$

AGUIRRE y JIMENEZ (1992) aplicaron este índice para elaborar guías de manejo para *Pinus pseudostrobus* en el estado de Nuevo León en México. También ZEPEDA (1984) lo determina y compara con otros índices de densidad de rodal.

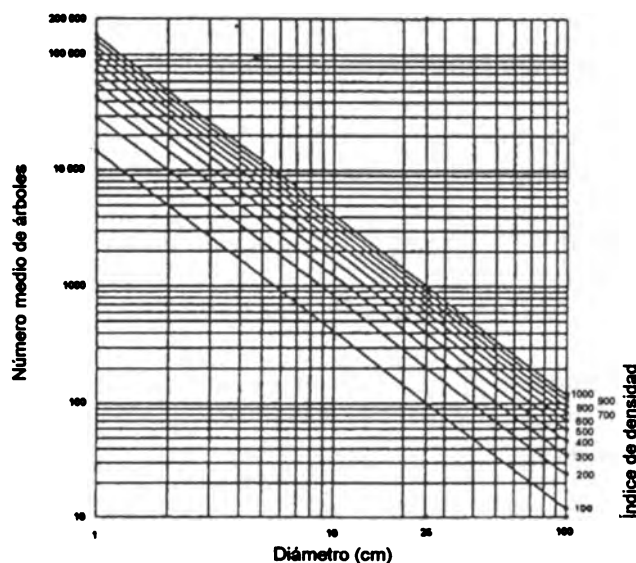


Figura 5-3. Diagrama de índice de densidad del rodal de REINEKE para *Pinus pseudostrobus* en Nuevo León

V.1.4 Índices de espaciamiento

Los índices de espaciamiento, RS , son expresiones que representan el espaciamiento medio del rodal, como proporción del desarrollo alcanzado por los árboles.

Suponiendo un espaciamiento cuadrado, el RS para un rodal respecto de la altura es:

$$RS_H = \frac{10000 / N}{H} \quad (5-12)$$

Donde

N = número de árboles por hectárea

H = altura representativa, m (por ejemplo, H_{100})

HART-BECKING llama a este índice, expresado en términos porcentuales, factor de espaciamiento relativo.

Respecto al diámetro, el espaciamiento relativo es:

$$RS_D = \frac{10000 / N}{D} \quad (5-13)$$

Donde D es el diámetro de los árboles predominantes.

Mientras más alto sea el número de árboles para un estado de desarrollo, menor es el valor del índice de espaciamiento.

ROCUANT (1972) utiliza este índice de espaciamiento para determinar la necesidad e intensidad de raleo de un rodal de pino insigne. Bajo 15, el raleo es insuficiente; sobre 20, es demasiado intenso y afecta la recuperación del área basal.

La Corporación Hondureña de Desarrollo Forestal, COHDEFOR (1991), desarrolló con el apoyo de la GTZ un Manual de Raleos para coníferas naturales sobre la base del índice de espaciamiento de Hart-Becking.

Al comenzar el desarrollo de un rodal, el número de árboles permanece constante mientras los árboles crecen; luego, el índice disminuye. Con el cierre de copas comienza la mortalidad, que se acentúa a medida que el rodal alcanza una densidad máxima, es decir, un RS mínimo que tiende a permanecer en ese valor.

Algunas experiencias muestran que los rodales tienden hacia un espaciamiento relativo común llamado RS mínimo, el que se asocia con la máxima densidad posible, independiente de la edad.

BEEKHUIS (1966) menciona que para *Pinus merkusii* en Indonesia $RS_H = 19$, y la mortalidad comienza cuando $RS_H = 30$. Para *Pinus ponderosa* $RS_{Hmin} = 12$, y para *Pinus strobus* $RS_{Hmin} = 11$, con un comienzo de mortalidad también alrededor de 30.

Que los rodales se aproximen a un RS de equilibrio es una característica que permite utilizar los índices de espaciamiento en modelos de mortalidad.

Conociendo el RS_H , es posible asociar un valor esperado de supervivencia para cualquier valor de altura predicho mediante una función de desarrollo en altura.

Suponiendo la siguiente función de altura:

$$H = 2 \cdot S \cdot \exp(1/4) \quad (5-14)$$

Un rodal de 16 años de edad que crece en sitio 23 m tiene un índice de espaciamiento $RS_H = 11$.

A partir de esta función, se puede determinar el número de árboles actual y futuro y, por lo tanto, la mortalidad.

t, años	H, m	N/ha	Mortalidad
16	19.2	2242	110 árb./ ha/año
22	26.3	1194	

BEEKHUIS emplea este principio para estimar la mortalidad de rodales de pino insigné.

El índice de espaciamiento se ha empleado en manejo para prescribir raleos; por ejemplo, una empresa forestal tenía como norma ralear los rodales cuyo índice en altura, RS_H , variaba entre 12 y 26.

V.1.5 Densidad de copas o porcentaje de cobertura

Corresponde a la proporción del suelo cubierto por las copas de los árboles; es una medida de la ocupación del área y puede emplearse como medida de aprovechamiento del sitio.

Puede determinarse muy fácilmente en fotografías aéreas, pero también en terreno a través de varias formas.

Una práctica común consiste en estimar ocularmente la densidad de copas. Se ha comprobado, sin embargo, que existe una tendencia natural a subestimar la densidad, por efecto de una sobrevaloración de los claros.

Otro procedimiento es proyectar puntos sobre el dosel y considerar el porcentaje de puntos que caen dentro de las copas. Un instrumento adecuado para esto es el Mooshorn. Además se ha desarrollado un instrumento especial llamado densiómetro, que posee un espejo cóncavo sobre el cual se refleja el dosel. Una red de puntos grabada en el espejo permite determinar la proporción de cubrimiento de copas.

Existen otros procedimientos dasométricos basados en muestreo puntual horizontal, que son especialmente adecuados para rodales de reducida altura y baja densidad de copas. Se emplea en ellos un instrumento relascópico consistente en un brazo de dimensión b que contiene una mira de dimensión $2/3 b$ en su extremo. Cada árbol aporta un 10% del cubrimiento.

V.1.6 Ley del autorraleo o de la potencia $-3/2$

Investigadores japoneses determinaron que el peso medio de las plantas graficado sobre el número de plantas sobrevivientes -ambas variables en términos logarítmicos- tiene una relación rectilínea, con una pendiente común de $3/2$.

$$w = k \cdot Nm^{-3/2} \quad \text{ó} \quad (5-15)$$

$$Nm = k^{2/3} \cdot w^{-2/3}$$

Donde

Nm = densidad máxima de plantas por unidad de superficie

w = peso medio de las plantas

Algunos autores llaman a esta relación máximo tamaño/densidad.

El fundamento de esta ley es el siguiente:

- a) Cada individuo de una población tiene una biomasa, B , que es proporcional a una cierta dimensión ℓ al cubo.

$$B \propto \ell^3 \quad (5-16)$$

Incluso se puede imaginar una población vegetal en competencia como una serie de cubos, todos en contacto.

- b) El área media ocupada por cada individuo, S , siempre bajo el mismo supuesto, es proporcional a ℓ al cuadrado.

$$S \propto \ell^2 \quad (5-17)$$

e inversamente proporcional a ℓ número de individuos, N .

$$S \propto N^{-1} \quad (5-18)$$

- c) Combinando las relaciones anteriores, tenemos:

$$S \propto \ell^2 \propto (\ell^3)^{2/3} \propto B^{-2/3} \propto N^{-1} \quad (5-19)$$

- d) Transformando esta relación de proporcionalidad en una ecuación (mediante una constante k de proporcionalidad):

$$B^{-2/3} = KN^{-1} \quad \text{ó} \quad B = KN^{-3/2} \quad (5-20)$$

A medida que el tamaño medio de los árboles se aproxima al tamaño máximo para la especie, la relación deja de valer. La ley de autorraleo sólo puede ser usada para predecir densidades máximas para un tamaño dado.

Esta llamada "ley" ha sido puesta en duda por muchos investigadores que han llegado a resultados diferentes de los mencionados. La polémica subsiste hasta hoy. Es significativo, sin embargo, el hecho que reiterados estudios lleguen al mismo resultado. La relación de máxima densidad puede determinarse experimentalmente para una especie en un cierto hábitat.

Conociendo la relación de máxima densidad para una especie en un hábitat dado, es posible definir en base a ella un índice de densidad relativa (sección V.1.3).

$$DR = (Nr / Nm) \cdot 100$$

Donde

Nr = número real de árboles (hectárea)

Nm = número máximo/hectárea

DR = índice de densidad relativa en porcentaje

Si la relación de máxima densidad para una especie en un cierto hábitat con un volumen medio $\bar{v}$ es

$$Nm = 800 \cdot \bar{v}^{-2/3}$$

y el rodal actual tiene un estado donde

$$\bar{v} = 0.8$$

$$Nr = 600$$

El índice de densidad será

$$DR = (600 / 800 \cdot 0.8^{-2/3}) \cdot 100 = 65\%$$

DREW y FLEWELLING (1979) indican que el punto de cierre de copa se encuentra en la vecindad de un $DR = 15$ y que bajo ese punto el crecimiento por hectárea es proporcional a la densidad.

SMITH y HANN (1986) comprueban la validez de la ley para biomasa pero la rechazan para volumen.

V.1.7 Factor de competencia de copas (CCF)

KRAJICEK *et al.* (1961) definen el factor de competencia de copas como la suma de las áreas de copa máximas que alcanzan todos los individuos en el rodal, dividida por el área en que se encuentran.

La proyección horizontal de un árbol que crece libremente, sin competencia, puede representarse por un modelo como el siguiente:

$$d_{copa} = b_0 + b_1 d \quad (5-21)$$

$$S_{copa} = \frac{\pi}{4} (b_0 + b_1 d)^2 \quad (5-22)$$

Donde

d_{copa} = diámetro de copa, m

S_{copa} = superficie de copa, m²

d = diámetro a la altura de pecho, cm

Para todos los árboles de un rodal, el máximo de la superficie de copa como porcentaje de una hectárea es:

$$S_{copa} \text{ max} = \frac{S_{copa}}{10000} \cdot 100 = 0.007854 (b_0 + b_1 d)^2 \quad (5-23)$$

Se llama *CCF* de un rodal a la expresión siguiente:

$$CCF = \sum^N S_{copa} \text{ max} \% = 0.007854 \sum^N (b_0 + b_1 d)^2 \quad (5-24)$$

$$CCF = K \left(N b_0^2 + b_1^2 \sum^N d^2 + 2 b_0 b_1 \sum^N d \right) \quad (5-25)$$

Si todos los árboles crecen libres, $CCF < 100$; en el límite del crecimiento libre $CCF = 100$; y si hay competencia, $CCF > 100$.

Si se llama $c_1 = K a^2$, $c_2 = K b^2$ y $c_3 = K 2ab$

$$CCF = c_1 N + c_2 \sum^N d^2 + c_3 \sum^N d \quad (5-26)$$

Esta expresión es similar a otro indicador de densidad llamado razón de área de árboles *TAR*, pero con parámetros e interpretación diferentes. Por lo general, $CCF > TAR$.

El *CCF* puede emplearse tanto para rodales coetáneos como multietáneos (STRUB *et al.* 1975).

Según sus autores, el *CCF* no es esencialmente una medida del cierre de copas; corresponde a una interpretación de un índice de densidad de rodal en términos porcentuales.

V.1.8 Razón de área de árboles (TAR)

CHISMAN y SCHUMACHER (1940) propusieron una medida relativa de densidad, supuestamente independiente de la edad y de la calidad de sitio. Se basa en que el espacio empleado por un árbol se puede representar por un modelo parabólico.

$$\text{Area del árbol} = b_1 + b_2 d + b_3 d^2 \quad (5-27)$$

El área del árbol se expresa en hectáreas. Para una hectárea, la razón de área de los árboles es:

$$TAR = b_1 N + b_2 \sum^N d + b_3 \sum^N d^2 \quad (5-28)$$

Los parámetros b_1 , b_2 y b_3 se obtienen sobre la base de muestras de rodales de densidad completa. Se asume que para estos rodales de densidad completa el área ocupada será de una hectárea, y que vale la siguiente relación:

$$\sum \text{Areas} = 1 = b_1 N + b_2 \sum^N d + b_3 \sum^N d^2 \quad (5-29)$$

Si el rodal se acerca a la densidad completa, el *TAR* se aproximará a 1.

V.1.9 Guía de densidad

La forma más común en que un silvicultor conduce la evolución de un rodal, principalmente de origen natural, es vía manipulación de su estructura y composición.

Una herramienta práctica de apoyo silvícola y muy popular son las guías de densidad constituidas por un diagrama que relaciona el número de árboles, el área basal y el diámetro cuadrático medio.

La primera guía de densidad fue preparada por GINGRICH (1967) para rodales de latifoliadas de las tierras altas de los estados centrales de los Estados Unidos. LEAK (1981) opina que las guías de densidad "representan un gran paso en la colocación de la silvicultura sobre bases científicas" y el Servicio Forestal estadounidense lo confirma al adoptarlas como instrumento de uso generalizado por su sencillez y fácil uso (ERNST y KNAPP 1985).

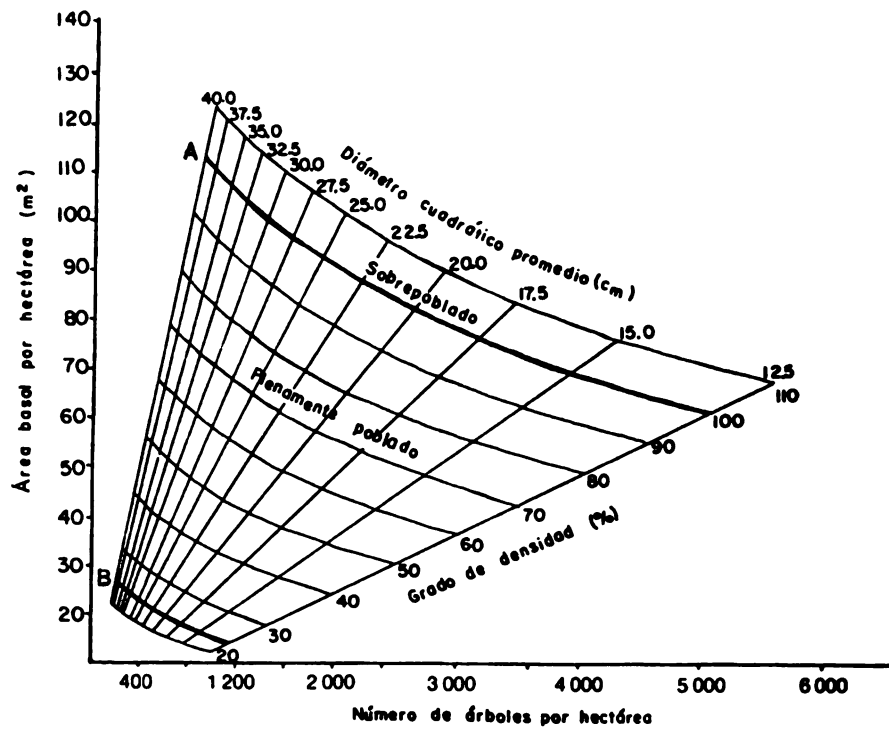


Figura 5-4. Guía de densidad para *Pinus patula* de la región Chignahuapan-Zacatlán, Puebla, México

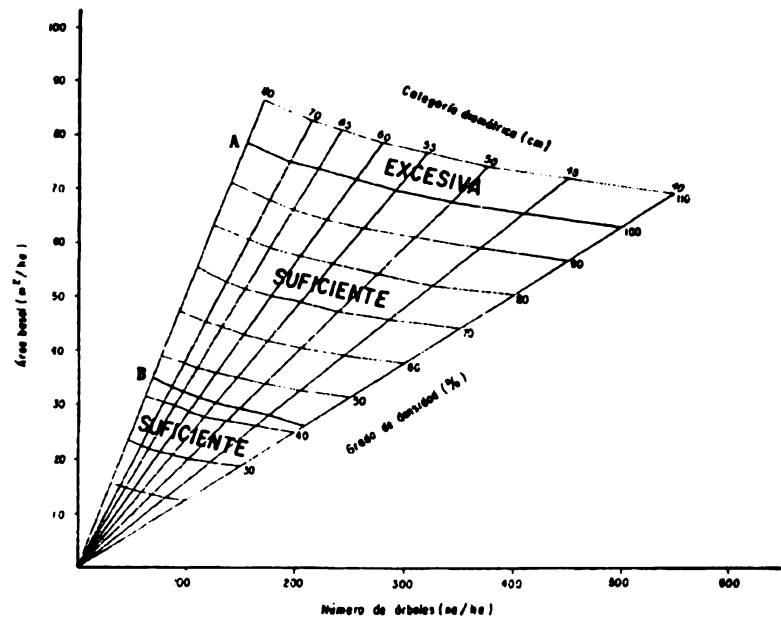


Figura 5-5. Guía de densidad para *Pinus hartwegii*

En México se ha generalizado mucho el uso de esta herramienta para el manejo de sus pinares naturales. Entre otros destacan los trabajos de ZEPEDA y VILLARREAL (1987) para *Pinus hartwegii*, LUNA *et al.* (1988) y F. GARCIA (1992) para *Pinus patula* (Figuras 5-4 y 5-5).

V.2 INDICES DE DENSIDAD Y DE COMPETENCIA PUNTUAL

Los índices de densidad puntual son cuantificaciones del grado de densidad que afecta a un árbol. Expresan la situación en términos de parámetros que resultan usuales para quien los emplea, como N o G .

Los índices de competencia puntual son una medida del grado en que la disponibilidad de recursos del ambiente pueda estar limitada para un individuo por los árboles vecinos. Guardan una estrecha relación con los índices de competencia, y ambos son usados en modelos predictores y de crecimiento.

Los índices de densidad se clasifican en independientes y dependientes de la distancia.

V.2.1 Índices independientes de distancia

Índice de GLOVER y HOOL (1979)

$$I_{GH} = \frac{d_i^2}{\bar{D}^2} \quad (5-30)$$

Donde

d_i = diámetro del árbol sujeto, cm

$\bar{D}$ = diámetro promedio del rodal, cm

Un índice similar es el que emplea el diámetro medio cuadrático, D_g , en reemplazo del diámetro promedio.

Sobre la base de la altura media $\bar{H}$ se han propuesto índices similares.

$$I_1 = \frac{h_i}{\bar{H}} \quad (5-31)$$

$$I_2 = \frac{d_i^2 h_i}{\bar{D}^2 \bar{H}} \quad (5-32)$$

Otros índices de competencia independientes de la distancia son el llamado *BAL*, área basal por hectárea o porcentaje de árboles sobre el árbol sujeto; la razón de copa y la longitud de copa, que si bien no son propiamente un índice, representan el efecto de la competencia sobre el vigor del árbol.

V.2.2 Índices dependientes de distancia

Índice de ARNEY (1973)

$$I_A = 100 \cdot \left(\sum^n a_{ij} + CA_i \right) / CA_i \quad (5-33)$$

Donde

CA_i = área de copa del árbol i , suponiendo que crece en libertad, donde $CA = f(d)$

a_{ij} = área de traslapeo entre el árbol i y competidor j . Este índice tiene un valor mínimo de 100 cuando el árbol crece en libertad

BELLA (1969) propuso el siguiente índice:

$$I_B = \sum \frac{a_{ij}}{A_i} \frac{d_j}{d_i} \quad (5-34)$$

Donde

A_i = zona de influencia del árbol i

EK y MONSERUD (1974) desarrollaron otro índice:

$$I_{EM} = \sum^n \left(a_{ij} \frac{R_j H_j}{R_i H_i} \right) / CA_i \quad (5-35)$$

Donde

H_i = altura total del árbol sujeto, m

H_j = altura total de los competidores, m

R_i = radio de la copa del árbol sujeto creciendo en libertad $R = f(d)$, m

R_j = radio de la copa de los árboles competidores creciendo en libertad, m

Índice de HEGYI (1974)

$$I_H = \sum^n \left(\frac{d_i}{d_j} \right) / L_{ij} \quad (5-36)$$

Donde

L_{ij} = distancia hasta el competidor j

El número de competidores es el que se encuentra a una determinada distancia del árbol.

DANIELS (1974) modificó este índice considerando como competidores aquellos que se cuentan con un $FAB = 2.3$.

La competencia con el árbol j es mayor mientras mayor sea d_j y menor la distancia al árbol i .

Índice de SPURR (1952)

$$I_s = 0.25 \cdot \frac{d^2}{L^2} \text{ para } d \text{ en cm} \quad (5-37)$$

$$I_s = 2500 \cdot \frac{d^2}{L^2} \text{ para } d \text{ en m} \quad (5-38)$$

Donde

d = diámetro a la altura de pecho del árbol sujeto

L = distancia del árbol al centro de la parcela en metros

Este índice representa una estimación promedio de G para n competidores en una parcela relascópica, empleando como centro el árbol sujeto.

El índice de SPURR, según DANIELS *et al.* (1986), incluyendo el árbol sujeto y para los m árboles contados con un prisma $FAB = 2.3 \text{ m}^2/\text{ha}$, se obtiene al promediar las estimaciones:

$$I_s = 0.25 / m \cdot \sum_m \frac{d_j^2}{L_j^2} (j + 1/2) \quad (5-39)$$

Estos autores comprobaron que el índice de SPURR tenía mejor correlación con el crecimiento del árbol i cuando la función excluía el árbol central.

$$I_s = 0.25 / m \cdot \sum \frac{d_j^2}{L_j^2} (j - 1/2) \quad (5-40)$$

Índice de área potencialmente disponible (APA)

BROWN (1965) introdujo el índice llamado APA, que corresponde a la idea de un área potencialmente disponible como medida de densidad puntual, ya que el concepto inicialmente no fue empleado como una medición de competencia arbórea. El APA representa un polígono irregular construido alrededor del árbol sujeto, formado por lados perpendiculares a la línea que lo une con los árboles vecinos equidistantes de éstos y el árbol sujeto. Todos los polígonos limitan entre ellos, de manera que la suma de sus áreas es igual al total de la superficie.

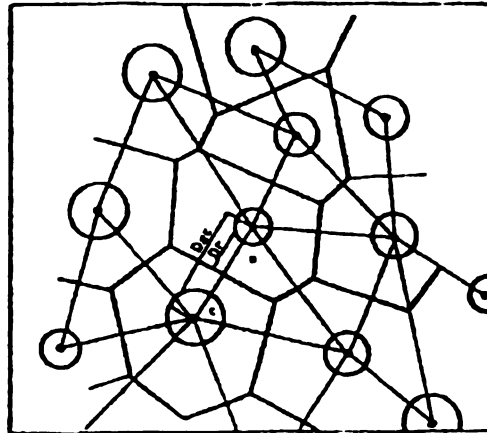


Figura 5-6. Representación del índice de competencia de forma poligonal de BROWN

STÖHR (1963), basado en los principios del modelo citado por SCHULTZ (1968), propone que la distancia de las perpendiculares que constituyen los lados del polígono no sean equidistantes entre el árbol sujeto y el competidor, sino proporcionales al diámetro.

$$\frac{lr}{L_{ij}} = \frac{d_i}{d_i + d_j} \quad (5-41)$$

Donde

lr = distancia entre el árbol sujeto y la perpendicular

L_{ij} = distancia entre el árbol sujeto i y el competidor j

d_i = diámetro del árbol sujeto

d_j = diámetro del árbol competidor

MOORE *et al.* (1973) modifican la relación de distancia elevando al cuadrado el diámetro de los individuos:

$$lr = \frac{d_i}{d_i^2 + d_j^2} \cdot L_{ij} \quad (5-42)$$

Dado que los polígonos individuales no se traslapan, los autores determinaron que alrededor de un 7% de la superficie total no está asignada a ningún árbol.

JOHNSON y DIETER (1979) comparan las tres formas de cálculo y concluyen que el método original de BROWN es el que presenta una mayor varianza.

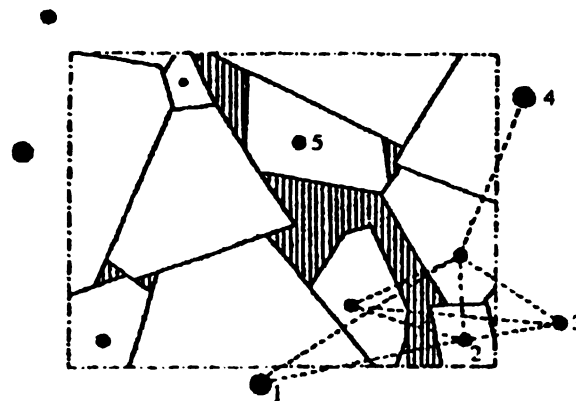


Figura 5-7. Índice de MOORE

V.3 ESTRUCTURA DE RODALES

La distribución diamétrica indica la frecuencia con que aparece representada una cierta clase de diámetro en el rodal. Permite tener una visión exacta de la estructura del rodal.

El conocimiento de la estructura de un rodal es fundamental para prescribir las intervenciones de manejo y más importante aún para determinar el rendimiento de los bosques por tipo de producto. Está superada la época en que bastaba con la determinación de un volumen cúbico total para evaluar un bosque. Hoy, la diversidad de productos factibles de obtener obliga

al técnico a evaluar las alternativas de manejo con información detallada en cuanto a productos y combinaciones de productos.

El conocimiento del rango y distribución diamétrica permite una evaluación física y económica mucho mejor que utilizando valores promedios como el diámetro medio. El conocimiento y representación de la estructura de un bosque adquiere mayor relevancia frente a la gran diversidad de productos que se están generando del bosque.

La tabla de rodal, tanto de los bosques coetáneos como multietáneos, muestra que la distribución diamétrica dentro del rango diametral no es aleatoria, sino que obedece a ciertas formas características de esos rodales. Es así como un rodal joven coetáneo tiene una distribución diamétrica unimodal mientras que un bosque multietáneo muestra una decreciente. Básicamente los bosques cubren todas las formas de distribución diamétrica entre ambas estructuras (Figura 5-8).

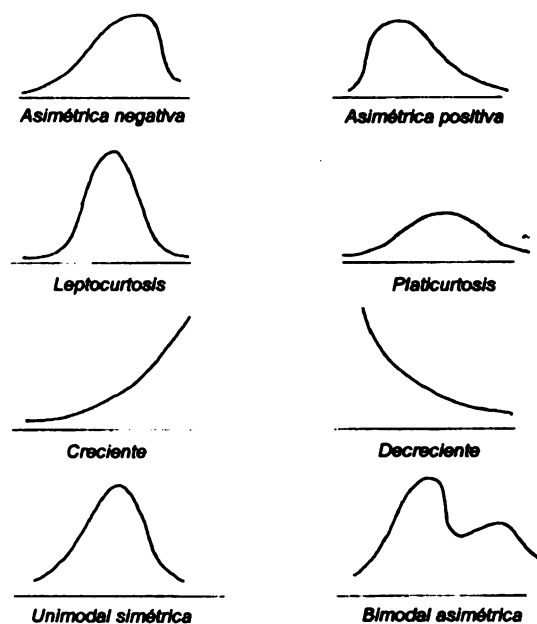


Figura 5-8. Formas de distribución características

A continuación se describen brevemente algunas formas de distribución más importantes en el campo forestal.

V.3.1 Distribución uniforme

Si el número total de un rodal es N , la frecuencia en una clase diamétrica es n , los árboles estando distribuidos homogéneamente, se tendría:

$$n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_i \text{ y } N = \sum n_i = i \cdot n \quad (5-43)$$

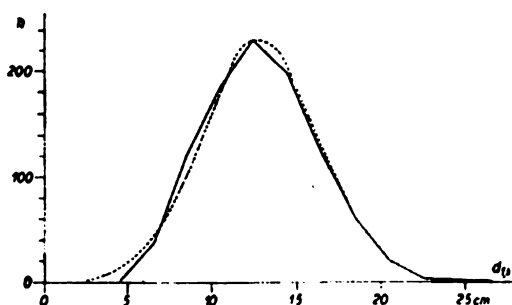
La distribución uniforme casi no se presenta en rodales reales. Solamente en algunas parcelas de rodales viejos muy intensamente manejados o con muy pocos árboles, puede ocurrir que la distribución diamétrica se ajuste a este tipo. Sin embargo, esta distribución es importante para cálculos teóricos. Así, por ejemplo, al juntar varios valores de diámetro dentro de una clase, se asume una distribución homogénea dentro de ella.

Este supuesto coincide bastante con la realidad. Generalmente, los posibles errores se pueden estimar con gran precisión, y son despreciables. Por ello, se justifica la agrupación por clases diamétricas. Esto facilita considerablemente la evaluación de la medición diamétrica de rodales.

V.3.2 Distribución unimodal

Este tipo de distribución es típica de una plantación coetánea con plantas sujetas al mismo tratamiento y que aún no hayan cerrado su dosel. Se aproxima a una distribución de frecuencia normal.

La representación gráfica de esta distribución tiene la forma de una campana (Figura 5-9). Es decir, las frecuencias son más abundantes en la parte central y disminuyen hacia ambos lados. Los valores del atributo (diámetro) se agrupan por el principio de aleatoriedad en torno a una magnitud media. La conclusión que se obtiene de la forma de la curva aplicada al ejemplo indicado es que la influencia de los factores, en parte estimulantes y en parte regresivos (condiciones de crecimiento), se compensa en la totalidad de los fustes. En los valores extremos, se puede asumir que los factores de crecimiento estimulantes o los regresivos son responsables de la desviación.



**Figura 5-9. Distribución unimodal ajustada a una normal.
Rodal de *picea* según KRENN (1942)**

Los rodales coetáneos, incluso después de cerrar el dosel muestran, hasta edades avanzadas o hasta el fin de su vida, una distribución unimodal.

En rodales coetáneos puros, la distribución diamétrica muestra una asimetría más o menos marcada (Figuras 5-10 y 5-11). Esta asimetría es habitualmente mayor cuando se ha cerrado el dosel, debido a que comienza la competencia intraespecífica. Árboles que hasta el momento tenían una ventaja "casual", la tendrán ahora sistemáticamente y, en consecuencia, presentarán un desarrollo mayor que los restantes individuos. Por lo tanto, la rama derecha de la curva se alarga. La rama izquierda se acorta por la muerte natural de los individuos más débiles o por la realización de raleos por lo bajo. La asimetría que se produce a la izquierda generalmente disminuye con la edad, o permanece constante. La distribución unimodal con asimetría izquierda es típica de bosques jóvenes y raleados por lo bajo (OSBORNE y SCHUMACHER 1935).

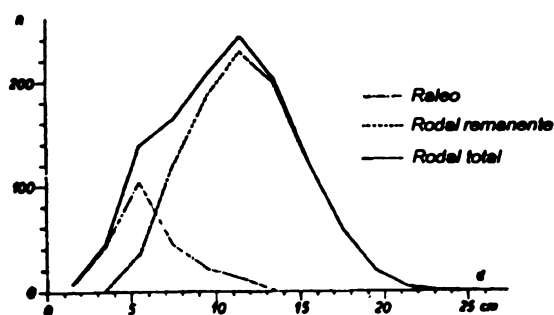


Figura 5-10. Distribución diamétrica después de un raleo por lo bajo

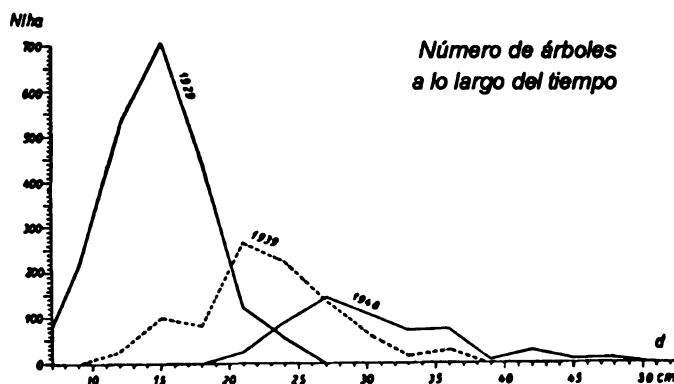


Figura 5-11. Distribución diamétrica en diferentes etapas de desarrollo de un rodal

Las distribuciones diamétricas generalmente muestran un rango diametral mayor cuando aumenta la edad. Debido a la disminución del número de individuos, la curva se va haciendo cada vez más plana. La representación gráfica en la Figura 5-12 entrega una imagen plástica del desarrollo del rodal. A veces, la distribución puede llegar a ser bimodal (de dos cúspides).

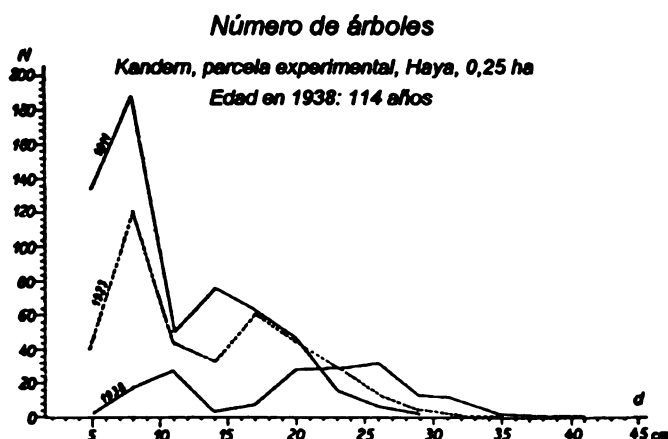


Figura 5-12. Distribución diamétrica en un rodal de haya de 114 años en el año 1938

V.3.3 Distribución bimodal

La curva de distribución cambia de forma con la edad dependiendo de la especie y el raleo. La competencia de los individuos lleva al rodal a segmentarse en "clases sociales" (predominantes, dominantes, codominantes, intermedios y suprimidos), de lo cual normalmente resulta un dosel dominante y otro dominado. En este caso, la distribución puede ser bimodal. Igualmente, un rodal raleado por lo alto, luego de retirar los árboles de clases sociales medias, puede presentar una distribución bimodal. La representación gráfica de un rodal mixto, que está compuesto por una especie tolerante y otra intolerante, puede presentar una distribución bimodal nítida. Se trata en este caso de dos distribuciones unimodales de diferente rango de variación (Figura 5-13).

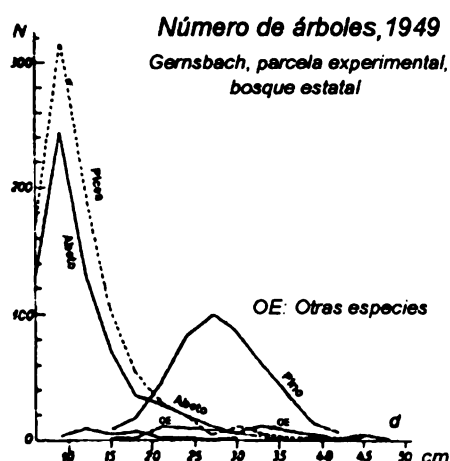


Figura 5-13. Distribución bimodal en un rodal mixto

La distribución bimodal también puede ser representada analíticamente por una serie de curvas normales (NÄSLUND 1936, 1937; PRODAN 1962).

V.3.4 Distribución decreciente y formas de transición

La forma de distribución más extrema es la distribución diamétrica decreciente en un bosque multietáneo. En un monte multietáneo, se pueden ver estrechamente mezclados árboles de todas las edades. El rango de variación o rango diamétrico es muy grande: puede estar entre 0 y 70 cm o más. La cantidad de individuos disminuye con el DAP creciente (MEYER 1933; PRODAN 1944). Esta distribución puede ser representada analíticamente por una función exponencial:

$$y = k e^{-ax} \quad (5-44)$$

Donde

y = frecuencia por clase diamétrica

x = clase diamétrica

k y a = parámetros

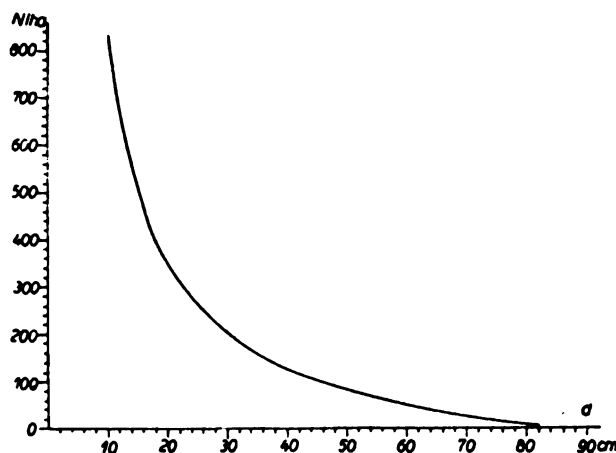


Figura 5-14. Distribución decreciente teórica en un rodal multietáneo

La forma de la distribución depende mucho del tratamiento del rodal. Entre esta forma de distribución y la forma típica del monte alto regular, pueden aparecer las más diversas formas de transición. En un rodal en etapa de regeneración, los fustes más delgados y los más gruesos son muy numerosos, mientras que los diámetros intermedios escasean. La distribución diamétrica va a evidenciar una rama descendente y luego, para los diámetros mayores, alcanzará

un pequeño máximo (cúspide). Un monte multietáneo mixto presentará la misma forma (Figuras 5-15 y 5-16). Los bosques vírgenes y los montes medios o montes bajos mostrarán una imagen similar (MAUVE 1931; PRODAN 1944).

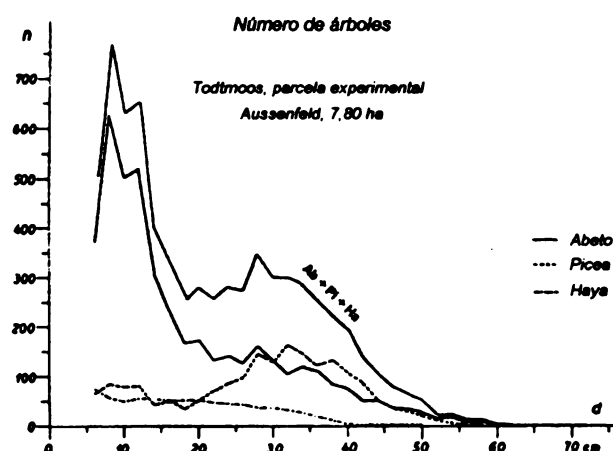


Figura 5-15. Distribución decreciente real de un rodal mixto multietáneo

Las formas de distribución son tan características que con algo de práctica se puede interpretar plenamente la estructura silvícola del bosque sólo a partir de la tabla de rodal. El conocimiento de las leyes que rigen las formas de las distribuciones diamétricas permite la preparación de tablas de distribución diamétrica que son de gran utilidad práctica (HALAY 1957; MITSCHERLICH 1939; OSUMI 1961; PRODAN 1953).

También para elegir métodos de medición de rodales, resulta útil el conocimiento y la consideración de la distribución diamétrica.



Figura 5-16. Distribución decreciente

Cuadro 5-1. Tablas de distribución diamétrica relativas para distintos diámetros medios del rodal según la fórmula de SCHIFFEL

d cm	d _m																	
	10		15		20		25		30		35		40		45		50	
	Σh	h	Σh	h	Σh	h	Σh	h	Σh	h	Σh	h	Σh	h	Σh	h	Σh	h
6	2,3	2,3																
8	27,0	24,7																
10	64,0	37,0	7,0	7,0														
12	84,0	20,0	24,5	17,5	2,8	2,8												
14	93,0	9,0	50,0	25,5	10,5	7,7	0,4	0,4										
16	96,5	3,5	68,5	18,5	24,5	14,0	5,5	5,1										
18	98,8	2,3	82,6	14,1	42,5	18,0	13,0	7,5	2,7	2,7								
20			91,2	8,6	59,5	17,0	24,5	11,5	8,0	5,3	1,0	1,0						
22			95,0	3,8	73,0	13,5	38,0	13,5	15,0	7,0	4,5	3,5						
24			97,6	2,6	84,0	11,0	52,0	14,0	24,0	9,0	9,5	5,0	2,5	2,5				
26			99,5	1,9	91,2	7,2	64,2	12,2	35,0	11,0	16,1	6,6	6,5	4,0	1,1	1,1		
28					95,0	3,8	74,6	10,4	47,0	12,0	24,5	8,4	11,4	4,9	4,0	2,9	0,4	0,4
30					97,5	2,5	84,0	9,4	58,1	11,1	33,5	9,0	17,0	5,6	8,0	4,0	2,5	2,1
32					99,3	1,8	90,0	6,0	68,0	9,9	43,0	9,5	24,0	7,0	12,5	4,5	5,5	3,0
34							93,8	3,8	76,5	8,5	53,0	10,0	31,5	7,5	18,0	5,5	9,1	3,6
36							96,5	2,7	83,5	7,0	62,0	9,0	40,0	8,5	24,0	6,0	13,5	4,4
38							98,5	2,0	89,0	5,5	70,0	8,0	49,0	9,0	30,5	6,5	18,5	5,0
40							99,9	1,4	92,5	3,5	77,5	7,5	57,2	8,2	38,0	7,5	24,0	5,5
42									95,4	2,9	83,6	6,1	65,0	7,8	46,0	8,0	30,0	6,0
44									97,5	2,1	88,5	4,9	72,0	7,0	54,5	8,5	36,5	6,5
46									99,0	1,5	92,0	3,5	78,0	6,0	61,5	7,0	43,5	7,0
48											94,5	2,5	83,5	5,5	68,1	6,6	50,0	6,5
50											96,8	2,3	88,0	4,5	74,0	5,9	56,5	6,5
52											98,5	1,7	91,0	3,0	79,0	5,0	63,0	6,5
54											99,9	1,4	94,0	3,0	83,5	4,5	68,7	5,7
56													96,0	2,0	87,5	4,0	74,0	5,3
58													97,8	1,8	90,5	3,0	79,0	5,0
60													99,5	1,7	93,0	2,5	83,5	4,5
62															95,0	2,0	87,0	3,5
64															97,0	2,0	90,0	3,0
66															98,5	1,5	92,5	2,5
68															100,0	1,5	94,5	2,0
70																	96,5	2,0
72																	98,0	1,5
74																	99,5	1,5

Uno de los intentos más originales de representar la distribución diamétrica sobre clases diamétricas es el procedimiento de FEKETE y SCHIFFEL (1903). Promediando, se originaron los datos del Cuadro 5-2.

Cuadro 5-2. Distribución porcentual del diámetro medio según FEKETE y SCHIFFEL

Diámetro medio	Σh% =										
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
10	54,0	71,0	77,0	81,0	85,0	91,0	97,0	105	115	128	195
15	54,7	70,0	76,6	82,7	87,1	93,3	99,3	107	117	128	177
20	55,0	69,5	77,0	83,0	88,5	94,0	100,5	107	117	128	167
25	55,2	69,2	77,2	83,2	89,2	94,8	101,0	108	117	128	161
30	55,3	69,0	77,1	83,8	89,3	95,3	101,0	108	117	128	157
35	55,5	68,9	77,1	83,8	89,7	95,8	101,0	108	117	128	155
40	55,5	68,7	77,2	84,0	90,0	96,0	102,0	108	117	128	152
45	55,7	68,7	77,1	84,2	90,2	96,2	102,0	108	117	128	151
50	55,6	68,6	77,4	84,2	90,0	96,4	102,0	109	117	128	149
Valores medios	55,5	68,9	77,1	83,7	89,5	95,5	101,0	108	117	128	156

De este cuadro se desprende que a los rodales con igual diámetro medio y un cierto número de árboles les corresponden ciertos valores diamétricos. Esta relación estadística fue llevada, para *picea*, a la forma general (Figura 5-17):

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \quad (5-45)$$

Donde

b_0, b_1, b_2, b_3 = constantes numéricas

x = frecuencia acumulada porcentual = $\sum h\%$

y = el correspondiente diámetro en porcentaje referido al diámetro medio, es decir:

$$y\% = b_0 + b_1 \sum h\% + b_2 (\sum h\%)^2 + b_3 (\sum h\%)^3 \quad (5-46)$$

A partir de la ecuación numérica

$$y\% \approx 55.2 + 0.0144(\sum h\%) - 0.000200(\sum h\%)^2 + 0.00000157(\sum h\%)^3 \quad (5-47)$$

se desprenden los valores de la última línea del Cuadro 5-2.

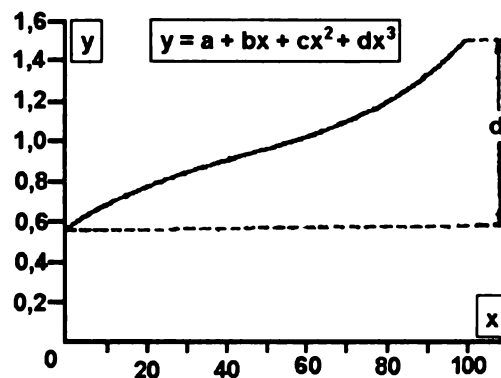


Figura 5-17. Representación de la función (5-47)

En casos concretos, se puede calcular la distribución diamétrica media en función del diámetro medio. Las frecuencias acumuladas pueden ser aplicadas y, por diferencia, se obtienen las frecuencias relativas para diferentes clases diamétricas.

En el Cuadro 5-1, se muestran las distribuciones diamétricas en clases de 2 cm, para diámetros medios de 10-50 cm.

Al intento de SCHIFFEL le siguieron mucho más tarde trabajos similares (BAUMANN 1957).

Las primeras tablas de distribución diamétrica fueron construidas por BAKER (1923) sobre la base de la curva normal de distribuciones. W.H. MEYER (1930), HALAY (1957) y PRODAN (1953) utilizan las funciones A y B de CHARLIER; LUTHER-SCHNUR (1937) y OSUMI (1961), las curvas de distribución del tipo III de PEARSON; y OSBORNE y SCHUMACHER (1935), la curva de crecimiento de PEARL.

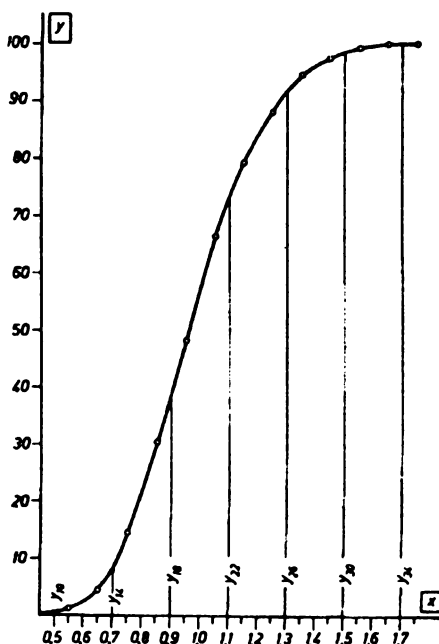


Figura 5-18. Presentación de la distribución acumulada de SCHIFFEL

La construcción de curvas medias de distribución diamétrica es más sencilla, si se parte de las frecuencias porcentuales acumuladas. También las curvas de distribución básicas (distribución normal, funciones de A y B de CHARLIER, curva de PEARSON del tipo III, curva de crecimiento de PEARL) se pueden ajustar mejor a las curvas acumulativas. BRUCE y SCHUMACHER (1935) y también REINEKE (1939) utilizan tablas de cálculo gráficas.

Del ajuste gráfico se sirvieron MITSCHERLICH (1939), ZIMMERLE (1947), SCHOBER (1953) y otros.

Ejemplos de tablas de distribución diamétrica relativa promedios se entregan en el Cuadro 5-1. También para monte multietáneo se construyeron series medias de distribución diamétrica (Cuadro 5-3) (SCHAEFER *et al.* 1930; PRODAN 1949).

Cuadro 5-3. Distribuciones diamétricas para distintos tipos de bosque multietáneos en el sur de Alemania

d	I	II	III	IV	V
cm	N/10 ha				
10	831	1112	1299	1500	1768
14	556	672	824	980	1160
18	398	500	596	701	832
22	304	386	450	522	623
26	243	305	352	411	478
30	199	248	280	327	370
34	165	203	229	263	296
38	137	166	187	211	236
42	114	138	152	170	185
46	96	113	122	135	142
50	80	92	97	104	105
54	67	75	76	77	73
58	58	59	58	55	46
62	48	44	42	35	22
66	39	32	27	17	
70	30	21	13		
74	22	10			
78	14				
82	7				

V.3.5 Funciones de probabilidad de densidad (*f.d.p.*)

La gran mayoría de las investigaciones en este campo se ha concentrado en explicar la estructura conocida de un rodal por funciones matemáticas denominadas funciones de probabilidad de densidad, *f.d.p.* ("probability density functions"), que describen la distribución de frecuencia relativa y/o absoluta de los distintos tamaños de los árboles.

Para la diversidad de formas de distribución que se presentan en los bosques se ha probado una serie de funciones entre las cuales se cuentan la normal, exponencial, binominal, POISSON, CHARLIER, series de FOURNIER, normal logarítmica, SB de JOHNSON, PEARL, REED, SCHIFFEL, GAMMA, BETA y WEIBULL, sin pretender ser ésta una lista exhaustiva.

De acuerdo con la complejidad de la *f.d.p.*, a sus posibilidades de linearización, a la existencia de algoritmos y a la disponibilidad de recursos computacionales, existen distintos métodos para el cálculo de los parámetros.

Entre los métodos más usados, están indudablemente el método de máxima verosimilitud, el método de mínimos cuadrados, el método de los momentos y el método de los percentiles, todos los cuales son ampliamente descritos en la literatura especializada (BONNOR 1967; SCHREUDER *et al.* 1978; HYINK 1979; CLUTTER Y BENNETT 1965; ZOEHRER 1969; BURKHART y STRUB 1974; MCGEE y DELLA-BIANCA 1974; HAFLEY y SCHREUDER 1977; CANO 1984; BIJIT 1988; etc.).

V.3.5.1 Conceptos básicos

En el rango R , una variable aleatoria continua x presenta una determinada distribución $f(x)$. La función $f(x)$ se denomina función de distribución de probabilidad de densidad $f.d.p.$ de x y satisface las siguientes condiciones:

- a) $f(x) \geq 0$ para todos los valores de x dentro del rango R
- b) $\int_R f(x) dx = 1$
- c) $f(x) = 0$, si x no está en el rango R

La probabilidad de que x caiga en el intervalo entre a y b está dada por la expresión:

$$P(a \leq x < b) = \int_a^b f(x) dx \quad (5-48)$$

La función de distribución acumulada, $f.d.a.$, designada como $F(x)$, corresponde a la integral de $f(x)$ y estima la probabilidad de que la variable x asuma un valor menor o igual a x .

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (5-49)$$

Las propiedades de esta función acumulada son:

- a) No es decreciente
- b) Cuando x tiende a ∞ $F(x) = 1$
- c) Cuando x tiende a $-\infty$ $F(x) = 0$

$$P(a \leq x < b) = F(b) - F(a) \text{ para } a < b$$

Si se considera una distribución diamétrica representada por una función de probabilidad de densidad $f_x(x; P)$ donde x es la clase diamétrica y P es el vector de frecuencia por clase diamétrica expresado en tanto por uno, por definición para el total de las clases diamétricas:

$$\int f_x(x; P) \cdot x = 1$$

Para una clase diamétrica d_i en particular, cuyos rangos son d_{min} y d_{max} .

$$\int_{d_{min}}^{d_{max}} f_x(x; P) d_x = \text{proporción de árboles en } d_i$$

V.3.5.2 Elementos estadísticos de las $f.d.p.$

Además de los estadísticos tradicionales de cualquier serie de datos tales como media, varianza, moda y mediana, las funciones de distribución de probabilidad tienen propiedades cuyos conceptos se revisarán a continuación.

Asimetría o sesgo (en inglés "Skewness")

En distribuciones simétricas, los valores de la media, moda y mediana coinciden. En distribuciones asimétricas, estos tres parámetros toman diferentes valores.

El sesgo (o la asimetría) es definido como el desvío respecto de la simetría. Se dice que una función tiene sesgo negativo o asimetría hacia la derecha cuando $\text{moda} < \text{mediana} < \text{media}$ y sesgo positivo o asimetría hacia la izquierda cuando $\text{moda} > \text{mediana} > \text{media}$.

Para evaluar el grado de sesgo o asimetría de una función de distribución, se han desarrollado diferentes coeficientes de sesgo o asimetría, también llamados primer factor de forma.

Se cuentan entre los más populares:

Coeficiente de Skewness	$\beta = m_3 / m_2^{3/2} = m_3 / S^3$	(5-50)
-------------------------	---------------------------------------	--------

Coeficiente de Pearson	$\beta_p = (x - \text{moda}) / S$	(5-51)
------------------------	-----------------------------------	--------

Coeficiente de Yule	$\beta_y = (x - \text{mediana}) / S$	(5-52)
---------------------	--------------------------------------	--------

Coeficiente de Lindeberg	$\beta_L = F(x) - 0.5$	(5-53)
--------------------------	------------------------	--------

Donde

- $\bar{x}$ = media
 S = desviación estándar
 $F(x)$ = frecuencia relativa acumulada hasta la media
 m_k = momento central de potencia k

Para la curva normal, el coeficiente de sesgo es igual a 0.

V.3.5.3 Curtosis (en inglés "kurtosis o excess")

La curtosis es el mayor o menor grado de achatamiento de la curva de distribución: mientras mayor sea el coeficiente de curtosis, menor es el achatamiento.

DARLINGTON (1970) y HILDEBRANDT (1971) señalan que, en numerosos casos, el coeficiente de curtosis puede ser considerado una medida de bimodalidad.

Al igual que en el caso del sesgo, se han definido varios tipos de coeficientes de curtosis.

$$\text{Coeficiente de curtosis} \quad \delta = m_4 / m_2^2 = m_4 / S^4 - 3 \quad (5-54)$$

$$\text{Coeficiente de Lindeberg} \quad \delta L = \sum f(x) \frac{x^{+0.5S} - x^{-0.5S}}{0.5S} - 0.38292 \quad (5-55)$$

$$\text{Coeficiente de Prodan} \quad \delta P = \sum f(x) \frac{x^{+0.75S} - x^{-0.75S}}{0.75S} - 0.38292 \quad (5-56)$$

Donde

- $f(x)$ = frecuencia relativa
 S = desviación estándar
 m_k = momento central de potencia k

En la curva normal, el coeficiente de curtosis es igual a 0. A este coeficiente también se le denomina segundo factor de forma.

V.3.5.4 Momento (en inglés "moment")

En forma análoga al cálculo de una varianza de una $f.d.p.$, es posible calcular momentos de más alto orden. Ellos representan también una forma de expresión de asimetría y curtosis y

pueden ser también utilizados en la estimación de parámetros de una *f.d.p.* Se les denomina también segundo factor de forma.

En una distribución cualquiera de frecuencias n_i , la expresión:

$$m_r = 1 / N \sum n_i (x_i - x)^r \quad (5-57)$$

representa el momento de r -grado de la distribución, esto es, la r -ava potencia de los desvíos de las observaciones respecto de la media.

Para las potencias 0, 1 y 2, los momentos corresponden a 1,0 y a la varianza respectivamente.

En una *f.d.p.* se denominan momentos centrales los momentos alrededor de la media. Sirven para definir los coeficientes de sesgo y curtosis, como se indica en puntos anteriores.

$$\beta = m_3 \cdot S^3 \quad \text{coeficiente de sesgo (entre -1 y +1)}$$

$$\delta = m_4 \cdot S^4 - 3 \quad \text{coeficiente de curtosis (entre -1 y +1)}$$

Donde

m_k = momento de k grado

S = desviación estándar

Para la curva normal, el coeficiente de curtosis es igual a 0.

También es factible calcular momentos alrededor de un punto arbitrario A , siendo la expresión:

$$m_r = 1 / N \sum n_i (x_i - A)^r \quad (5-58)$$

Cuando A se traslada al origen, los momentos se llaman momentos alrededor del origen, y su expresión es:

$$m_r = 1 / N \sum n_i (x_i)^r \quad (5-59)$$

Para $r = 1$, el momento de origen es igual a la media.

Otra aplicación de los momentos es para el ajuste de las *f.d.p.* y cálculo de sus parámetros. De acuerdo con un teorema matemático, dos distribuciones con k momentos idénticos tienen k puntos comunes. Calculando los momentos de la función asumida e igualando con los de una distribución teórica, es posible calcular los parámetros de la distribución. Normalmente son suficientes para esta estimación los momentos m_3 y m_4 .

V.3.5.5 Cuartiles, deciles y percentiles

Los cuartiles de una distribución son valores que dividen la distribución en cuatro partes de igual frecuencia cada una. Así, el primer cuartil concentra el 25% de los datos; el 50% de los datos cae bajo el segundo cuartil; el 75% bajo el tercero; etc.

En forma homóloga, los deciles y percentiles de una distribución dividen la distribución en 10 y 100 partes de igual frecuencia respectivamente. Por ejemplo, el 25-avo percentil corresponde a la variable hasta la cual la frecuencia acumulada de observaciones alcanza el 25% de ellas.

Al igual que en el caso de los momentos, las *f.d.p.* muestran percentiles característicos, que sirven para el ajuste de parámetros de la función por métodos directos simples.

V.3.5.6 Flexibilidad de una función de distribución de probabilidad

HAFLEY y SCHREUDER (1977) discuten la flexibilidad de una *f.d.p.* en términos de la relación sesgo-curtosis. Según estos autores, en la elección de una determinada *f.d.p.* para una base de datos, es fundamental la flexibilidad del modelo. Una forma de visualizar esta flexibilidad es conocer el rango de asimetría y curtosis y la combinación de ambos que es capaz de cubrir una *f.d.p.* Mientras mayor sea el rango, más flexible es la función.

Para ello se utiliza en la literatura estadística un gráfico que relaciona ambos coeficientes de sesgo y curtosis, en el cual se aprecian los rangos de ambos coeficientes que pueden aceptar las diferentes *f.d.p.* (Figura 5-19).

Para la configuración del gráfico (Figura 5-19), se utilizaron los coeficientes de asimetría y curtosis ya definidos previamente, con leves modificaciones:

$$\sqrt{B_1} = m_3 / S^3 \text{ coeficiente de sesgo}$$

$$\sqrt{B_2} = m_4 / S^4 \text{ coeficiente de curtosis}$$

En la parte superior de la figura se aprecia una "región imposible" en la cual cualquier combinatoria de B_1 y B_2 es imposible.

Las funciones normal, exponencial y uniforme están representadas por puntos en el espacio, lo que indica que sólo pueden asumir una forma.

Las distribuciones gamma, normal logarítmica y Weibull están representadas por líneas que indican que pueden aceptar variadas combinaciones y por lo tanto variadas formas. La cercanía de las líneas explica el porqué estas tres *f.d.p.* se ajustan similarmente bien o mal a las mismas bases de datos.

Finalmente, las funciones beta y SB-Johnson cubren amplios espacios que demuestran su flexibilidad, superior aun en la última.

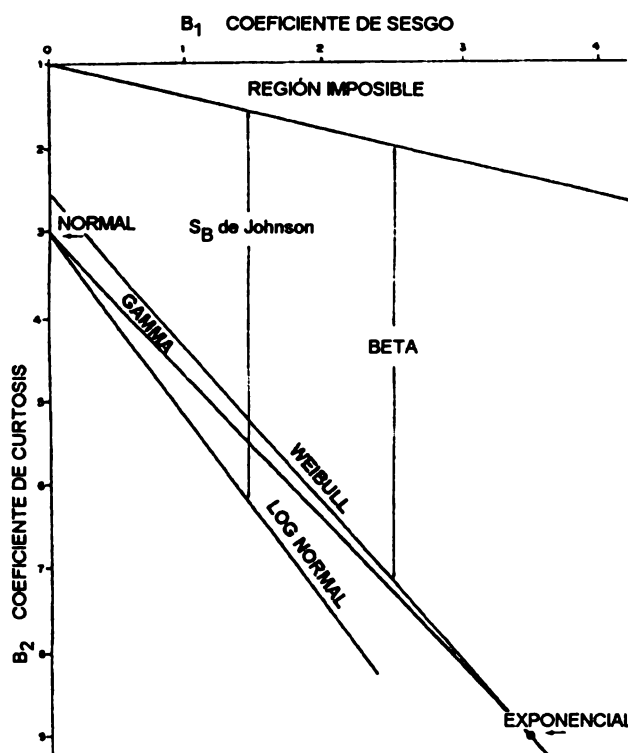


Figura 5-19. Relación entre los coeficientes de sesgo y curtosis para los diferentes modelos de *f.d.p.*

V.3.5.7 Funciones de distribución de probabilidad más importantes en el campo forestal

a) Función normal

En rodales coetáneos, la proximidad a una distribución normal estándar plantea la alternativa de ajuste más ampliamente utilizada y conocida.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-1/2(\mu)^2 / \sigma^2\right] \text{ para } -\infty < x < \infty \quad (5-60)$$

Donde

μ = parámetro de localización corresponde a la media

σ = parámetro de escala corresponde a la desviación estándar

La función de distribución acumulativa $F(x)$ no existe en forma explícita. Sin embargo, esta última se encuentra totalmente tabulada para la función normal estándar con media = 0 y varianza = 1.

Para $Z = (x - \mu) / \sigma$ se transforma en la función normal estándar o normalizada:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-1/2Z^2\right] \quad (5-61)$$

Por integración:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-1/2Z^2\right] dZ \quad (5-62)$$

b) Función exponencial

La distribución exponencial se ha utilizado con muy buenos resultados en la representación de distribuciones de frecuencias decrecientes de diámetro, vale decir, para rodales multietáneos. Fue el primer intento por modelar la estructura de un rodal.

Se dice que una variable aleatoria x tiene una distribución exponencial si se puede definir su función de densidad de probabilidad como:

$$f(x) = ke^{-bx}$$

La función de distribución acumulada de x :

$$F(x) = \int_{\text{lím. inferior}}^{\text{lím. superior}} ke^{-bx} d_x \quad (5-63)$$

Donde

b y k = parámetros de la distribución

$$F(x) = ke^{-bx} d_x = k / b(1 - e^{-bx}) \quad (5-64)$$

Las primeras investigaciones de distribuciones decrecientes de diámetro fueron llevadas a cabo en 1898 por DE LIOCOURT.

LEAK (1985) desarrolló un modelo exponencial truncado, aplicable a situaciones en las que los árboles bajo un cierto diámetro no son registrados. En este caso, la expresión queda:

$$f(x) = ke^{-b(x-a)} \quad (5-65)$$

Donde

a = diámetro mínimo de la distribución

Otro modelo exponencial utilizado y mencionado por PRODAN (1968), pero de difícil integración, es:

$$f(x) = ke^{bx^2}$$

c) Función beta

La distribución de probabilidad beta constituye un modelo altamente flexible para la representación de distribuciones de frecuencia (Figura 5-20).

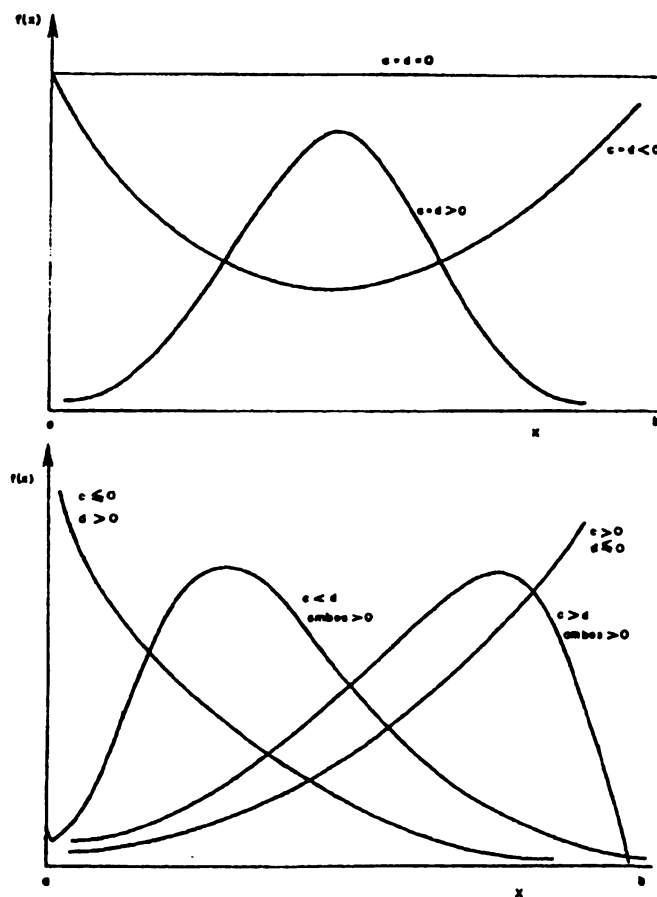


Figura 5-20. Diferentes formas que asume la $f.d.p.$ beta

densidad y estructura

$$f(x) = 0 \text{ para } x \leq 0$$

$$f(x) = \int_a^b (-a)^c (b-x)^d d_x \text{ para } 0 < x < 1 \quad (5-66)$$

$$f(x) = 1 \text{ para } x \geq 1$$

El resultado de la integral genera la función de densidad de probabilidad.

$$f(x) = k(x-a)^c (b-x)^d \quad (5-67)$$

Donde

c y d = parámetros de la distribución

a = diámetro mínimo

b = diámetro máximo

k = factor de reducción que tiene como objetivo que la suma de frecuencias ajustadas sea igual a las frecuencias observadas

d) Función Weibull

Desarrollada por FISCHER y TIPPET (1928) y aplicada en 1939 por WEIBULL, la función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = (c/b) (x/b)^{c-1} \exp(-(x/b)^c) \quad (5-68)$$

Si se desea especificar un diámetro mínimo:

$$f(x) = (c/b)((x-a)/b)^{c-1} \exp(-((x-a)/b)^c) \quad (5-69)$$

Donde

a, b, c = parámetros de la distribución, de posición, de escala y de forma, respectivamente

A la primera se la conoce como la $f.d.p.$ de WEIBULL de dos parámetros; a la segunda, de tres parámetros.

El modelo es muy flexible y puede asumir una amplia variedad de formas, dependiendo de los valores de c .

La función de densidad acumulativa de x tiene la forma siguiente:

$$F(x) = 1 - \exp(-(x/b)^c) \text{ de 2 parámetros} \quad (5-70)$$

$$F(x) = 1 - \exp(-((x-a)/b)^c) \text{ de 3 parámetros} \quad (5-71)$$

$$F(x) = 0 \text{ para } x < a$$

El modelo goza de mucha popularidad en el campo forestal y ha sido utilizado en numerosos trabajos que tratan el tema de modelos de simulación del desarrollo de rodales (CANO 1984; BIJIT 1988; FUNDACION CHILE 1990).

La *f.d.p.* de Weibull es muy sensible al parámetro c (Figura 5-21).

- Si
- $c < 1$ la curva es una j invertida
 - $c = 1$ la curva equivale a una exponencial
 - $c > 1$ y < 3.6 la curva es asimétrica positiva
 - $c > 3.6$ la curva es asimétrica negativa

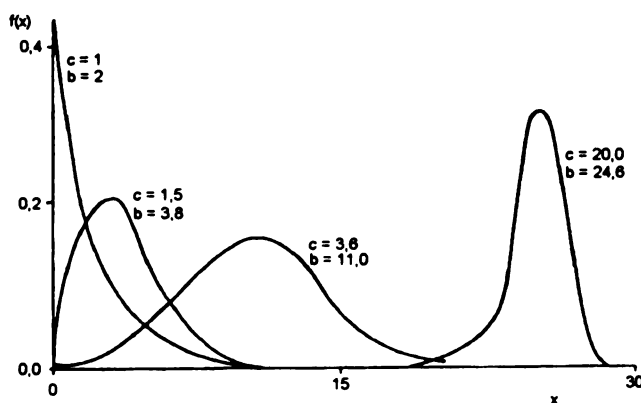


Figura 5-21. Diferentes formas que asume la *f.d.p.* de Weibull de dos parámetros

e) Función de SB-Johnson

Incorporada recientemente por HAFLEY y SCHREUDER (1977) al campo forestal, este modelo desarrollado por JOHNSON (1949) ha demostrado ser muy flexible (Figura 5-22).

$$f(x) = \frac{b\delta}{\sqrt{2\pi(x-a)(a+b-x)}} \cdot \exp\left[-1/2(\gamma + \delta \ln(x-a)/(a+b-x))^2\right] \quad (5-72)$$

Donde

δ y γ = parámetros de la función

a = diámetro mínimo

b = diámetro máximo

$a-b$ = rango diametral

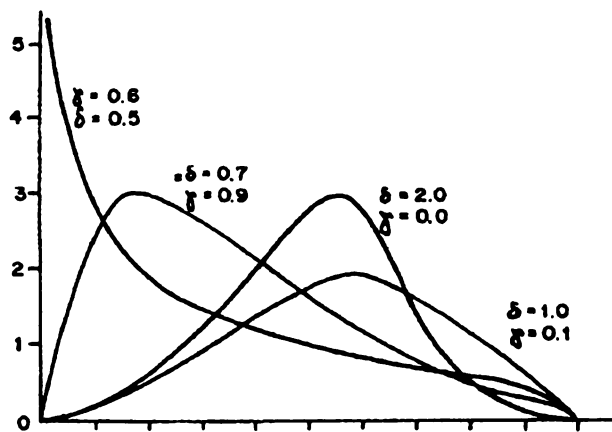


Figura 5-22. Diferentes formas que asume la *f.d.p.* de SB-Johnson

f) Otras funciones

Función logarítmica normal

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)\sqrt{2\pi}} \cdot \exp \frac{1}{2\sigma^2 (\ln(x-a) - \mu)^2} \quad (5-73)$$

para $x > 0$

Función gamma

La distribución de probabilidad gamma está descrita mediante la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{x^{(b-1)} e^{(-x/a)}}{a^b (b-1)!} \quad (5-74)$$

$$f(x) = \frac{x^{(b-1)} e^{-x/a}}{a^b (b-1)!} \text{ para } x > 0 \quad (5-75)$$

$$f(x) = 0 \text{ para } x < 0$$

Pese a que no existe una forma explícita para describir la función de la distribución gamma, se ha logrado presentar en forma tabular los valores de la llamada función gamma incompleta.

Si $b = 1$, la distribución gamma resulta ser idéntica a la distribución exponencial: mientras b se incrementa, la distribución gamma tiende hacia una distribución normal (Figura 5-23).

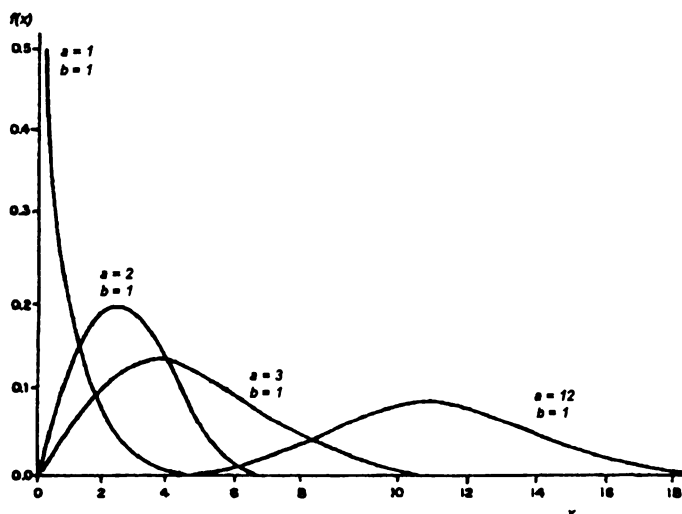


Figura 5-23. Diferentes formas que asume la función gamma

V.3.6 Predicción de la tabla de rodal

Existen numerosas referencias en la literatura más reciente respecto del ajuste de las *f.d.p.* a las distribuciones diamétricas de los bosques. La flexibilidad de la función Weibull la ha hecho especialmente popular (RENNOLLS *et al.* 1985; VERGARA 1982; KHATOURI 1986; SHIFLEY y LENTZ 1985) tanto en plantaciones como en bosques naturales.

Sin embargo, el objetivo final de disponer de una *f.d.p.* no es solamente contar con una buena representación de la estructura del bosque en un momento dado, sino la posibilidad de proyectarla a través del tiempo.

Básicamente existen dos técnicas alternativas para estimar los parámetros de las *f.d.p.* y proyectarlos de acuerdo con los cambios de estructura que sufra el rodal, el método de predicción de parámetros y el método de recuperación de parámetros.

V.3.6.1 Método de predicción de parámetros

Este método consiste en derivar relaciones funcionales entre los coeficientes de la función de probabilidad y las variables agregadas de rodal. A este método se le denomina en la literatura como PPM ("Parameter Prediction Model"). Una vez definidos los parámetros para la nueva situación del rodal se calcula la nueva tabla de rodal.

BURKHART y STRUB (1974) ajustan la función beta y predicen los valores de los coeficientes en función de la altura dominante, edad y número de árboles. También BAILEY (1972, 1973) parametriza la función Weibull de tres parámetros utilizando las mismas variables agregadas. RUSTAGI (1978) para pino Oregón utiliza como variables predictoras también una Weibull pero de dos parámetros, el diámetro cuadrático medio y el diámetro máximo de la distribución. MCGEE y DELLA-BIANCA (1967) incorporan también el índice de sitio en el caso de una beta.

V.3.6.2 Método de recuperación de parámetros

Contrariamente al anterior, este método define primeramente los valores futuros de las variables de estado del rodal para luego calcular los parámetros de la *f.d.p.* subyacente. Se le designa como PRM ("Parameter Recovery Method").

HYINK (1979), BALDWIN y FEDUCCIA (1987), BURK y NEWBERRY (1984) proponen diferentes metodologías para recuperar los parámetros de la función Weibull.

En Chile se ha generalizado mucho el método aproximado de GARCIA (1983) para la recuperación de los coeficientes de la *f.d.p.* Weibull y la proyección de estructura de las plantaciones de *Pinus radiata* en los simuladores de crecimiento y rendimiento.

VI. RENDIMIENTO Y CRECIMIENTO

VI.1 CONCEPTOS

El crecimiento es el incremento gradual de un organismo, población u objeto en un determinado período de tiempo. El crecimiento acumulado hasta una edad determinada representa el rendimiento a esa edad.

La estimación de crecimiento es una etapa esencial en el manejo forestal. El concepto básico de recurso renovable se deriva de la propiedad de crecimiento y cualquier planificación encierra el concepto de predicción de crecimiento.

Ha sido papel preponderante de los investigadores el desarrollo de métodos de predicción de crecimiento. Se puede medir el crecimiento pasado con exactitud, pero su predicción es siempre algo incierta, más aún cuando las limitantes de tiempo y costo en el manejo forestal requieren de métodos de proyección rápidos y sencillos basados en el mínimo de mediciones y variables.

El crecimiento de los árboles individuales está influido por sus características genéticas y su interrelación con el medio ambiente, factores climáticos y de suelo y características topográficas, cuya suma representa el concepto ya estudiado de calidad de sitio. Además de estos factores, la competencia es un factor muy importante y el más controlable a través del manejo silvicultural.

VI.2 TIPOS DE CRECIMIENTO

Para tener un significado específico del término crecimiento se le debe clasificar de acuerdo con:

- i) Parámetro o variable considerado
- ii) Período de tiempo considerado
- iii) Porción o parte del rodal considerado

En árboles maduros, el crecimiento se expresa normalmente en términos de volumen. El volumen cúbico del fuste es un parámetro válido para expresar el crecimiento del árbol. El volumen aserrable, al contrario, está afectado por supuestos arbitrarios de utilización que invalidan las tendencias de crecimiento.

Hay ventajas definitivas en el uso del crecimiento en área basal ya que se obtiene sólo por medición directa del diámetro. En cambio, el volumen incorpora además los errores de

obtención de altura y a veces forma. Por último, también es necesario en muchas oportunidades, especialmente en árboles individuales, estimar los crecimientos de diámetro y altura.

Considerando el período de tiempo, se pueden distinguir el crecimiento anual corriente, el crecimiento periódico y el crecimiento medio anual.

VI.2.1 El crecimiento anual corriente, i

Es el incremento de un elemento dentro de un año.

VI.2.2 El crecimiento periódico, ip

Es el incremento o crecimiento acumulado durante un período de varios años. El crecimiento anual corriente equivale al crecimiento periódico para un período de 1 año, iap . En la determinación práctica del crecimiento no se mide el crecimiento en forma anual, sino que debido a los grandes errores relativos, éste se obtiene del crecimiento periódico dividiéndolo por los años del período. Por esta forma de determinación también se elimina parcialmente el efecto de fluctuaciones temporales.

Ejemplo:

Picea, edad en 1930 = 40 años, altura hasta 1930 = 15 m.

Crecimiento en altura	1931 = 34 cm
	1932 = 20 cm
	1933 = 38 cm
	1934 = 32 cm
	1935 = 36 cm

El crecimiento periódico en altura:

$$1931-1935 = 160 \text{ cm}$$

Crecimiento anual corriente en altura:

$$160/5 = 32 \text{ cm}$$

La representación gráfica del crecimiento corriente i en función de la edad t se presenta en la Figura 6-1.

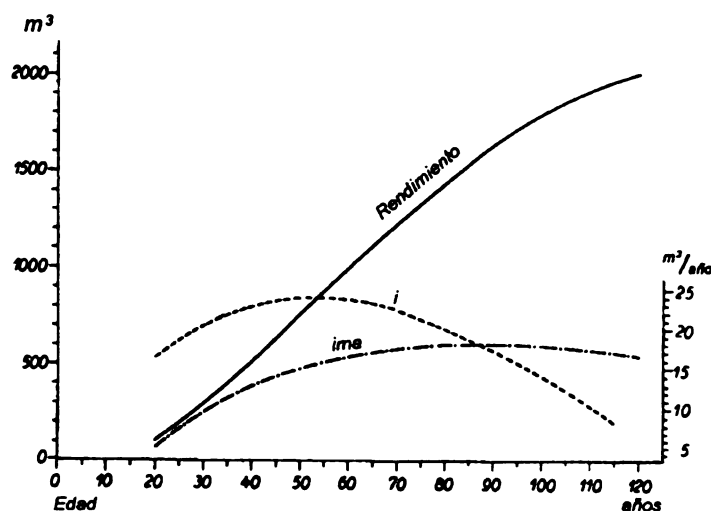


Figura 6-1. Relación entre crecimiento acumulado o rendimiento, crecimiento anual corriente y crecimiento medio anual

El crecimiento anual corriente al principio aumenta con la edad en forma relativamente rápida; habitualmente antes de la mitad del largo de la vida alcanza un máximo y decrece luego de este punto de culminación en forma lenta. Esta tendencia básica típica puede verse enmascarada por influencias distorsionantes (por ej. fluctuaciones estacionales, etc.). Sin embargo, para todo el lapso de vida la forma de la curva es inconfundible.

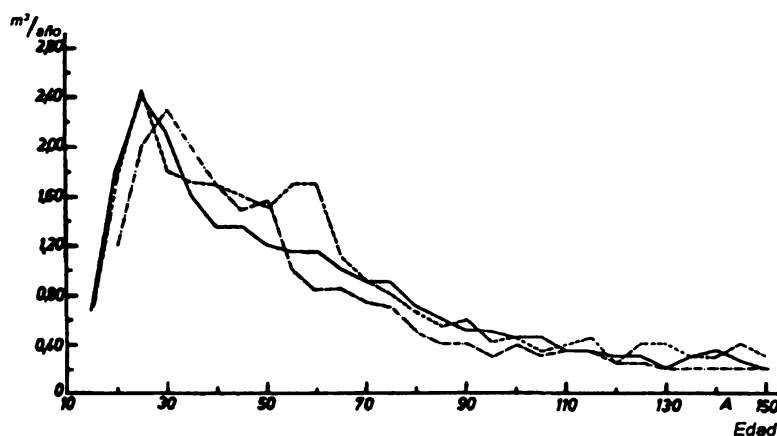


Figura 6-2. Crecimiento anual periódico cada 5 años en 3 árboles dominantes de encina de 150 años

En la biología, la técnica y en las ciencias económicas se han planteado numerosas fórmulas para las curvas de crecimiento y rendimiento (PRODAN 1962).

VI.2.3 Relación entre las curvas de rendimiento y crecimiento

La altura alcanzada en un punto determinado del tiempo en función de la edad

$$h = F(t)$$

representada en forma gráfica, produce la curva de desarrollo en altura o la curva de rendimiento. Esta curva de rendimiento tiene una forma típica para todos los elementos de árbol y de rodal. Se asemeja a una *S* extendida o el símbolo de la integral.

Entre la curva de rendimiento y la de crecimiento existe una relación sencilla. La dimensión total (crecimiento acumulado o rendimiento) alcanzada en un momento del tiempo determinado es igual a la sumatoria de todos los crecimientos anuales. Por lo tanto, la curva de rendimiento es la curva acumulativa de la curva de crecimiento. En el caso del ejemplo de la altura (Figura 6-3).

$$h = \sum ih \quad (6-1)$$

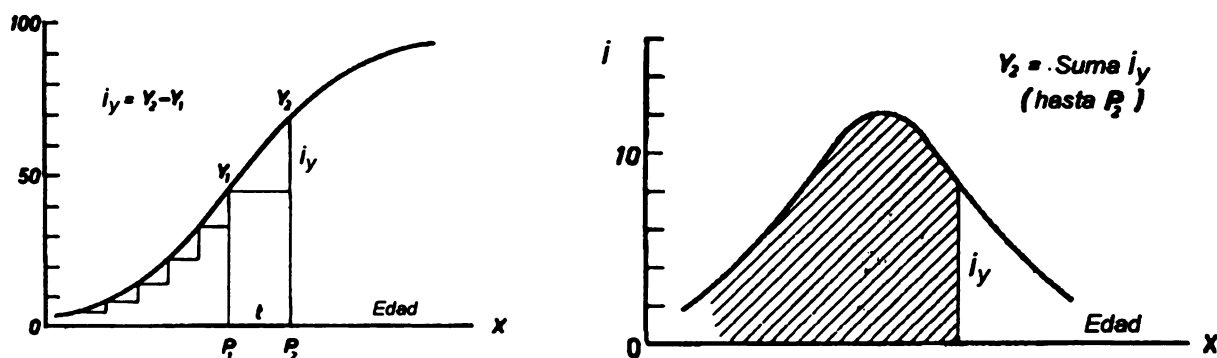


Figura 6-3. Relación del crecimiento anual corriente con la curva de crecimiento

Luego la curva de crecimiento es la curva de diferencias de la curva de rendimiento. Teóricamente, con intervalos de tiempo infinitesimales, la función de rendimiento sería la integral de la función de crecimiento y, por el contrario, la función de crecimiento es la primera derivada de la función de rendimiento.

$$h = F(t) = \int_0^t ih \cdot d_t \quad \int_0^t f(t) d_t \quad (6-2)$$

e

$$ih = f(t) = F'(t) \quad (6-3)$$

El punto de inflexión de la curva de rendimiento coincide con el punto de culminación de la curva de crecimiento.

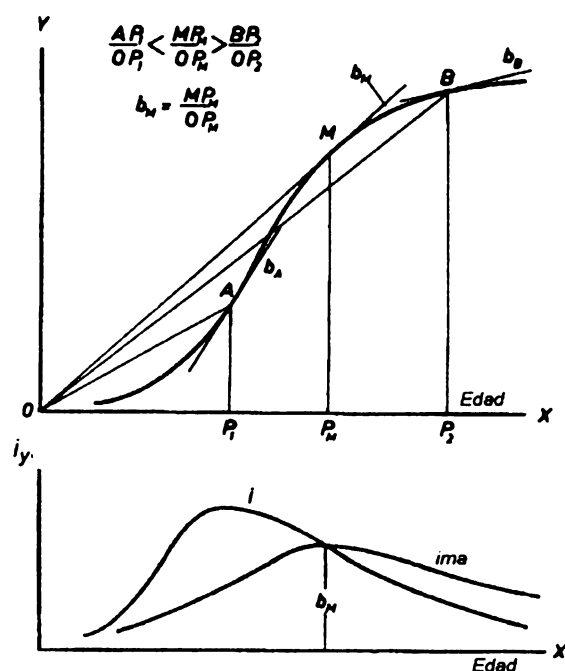


Figura 6-4. Relación entre el crecimiento anual corriente y el crecimiento medio anual

Cuadro 6-1. Datos de crecimiento en altura, anual corriente y medio anual para una encina de 150 años

Edad	h	lzh	dzh
10	0,2	0,02	0,020
15	0,9	0,14	0,060
20	2,7	0,36	0,135
25	5,1	0,48	0,204
30	7,2	0,42	0,240
35	8,8	0,32	0,252
40	10,2	0,28	0,255
50	12,7	0,25	0,254
60	15,0	0,23	0,250
70	16,9	0,19	0,241
80	18,5	0,16	0,231
90	19,6	0,11	0,218
100	20,6	0,10	0,206
110	21,4	0,08	0,194
120	22,0	0,06	0,183
130	22,5	0,05	0,173
140	23,1	0,06	0,165
150	23,6	0,05	0,157

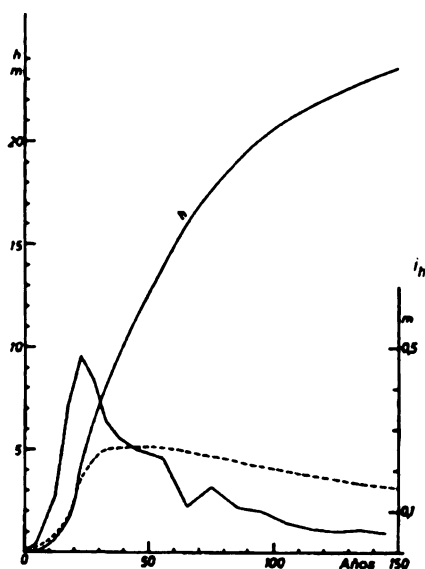


Figura 6-5. Presentación de las curvas de altura tomadas del ejemplo del Cuadro 6-1

VI.2.4 El crecimiento medio anual, ima

El crecimiento medio anual, ima , se calcula dividiendo el tamaño alcanzado hasta un determinado momento en el tiempo por la edad correspondiente. En el caso de la altura de árbol:

$$ima = \frac{h_t}{t} \quad (6-4)$$

Ejemplo:

<i>Picea</i>	Edad 85 años	Altura 26.0 m
	Edad 90 años	Altura 27.0 m
	El crecimiento periódico (5 años) en altura	1.0 m
	El crecimiento anual corriente (edad 85-90 años)	0.2 m
	El crecimiento medio en altura hasta la edad 85 años	0.31 m
	El crecimiento medio en altura hasta la edad 90 años	0.30 m

También la curva del crecimiento medio muestra un desarrollo típico. La culminación del crecimiento medio se logra más tarde que la de crecimiento corriente. La curva de crecimiento

medio tiene su culminación en la intersección con la curva de crecimiento corriente. Desde este punto la curva de crecimiento medio decae en forma más suave que la curva de crecimiento corriente. La relación entre ambas curvas puede ser derivada matemáticamente a partir de las definiciones de las curvas de crecimiento corriente y medio.

Si se expresa el rendimiento en función de la edad como $F(t)$, entonces:

$$ima = \frac{F(t)}{t} \quad (6-5)$$

e

$$i = f(t) = F'(t) \quad (6-6)$$

El punto del tiempo en que se llega al máximo para el crecimiento medio se define igualando la primera derivada ima (en relación a t) a cero.

$$ima = \text{máximo para } \frac{ima'}{d_t} = \frac{t \cdot F'(t) - F(t)}{t^2} = 0 \quad (6-7)$$

De ahí resulta:

$$t \cdot F'(t) - F(t) = 0, \quad F'(t) = \frac{F(t)}{t} = F(t) = y \quad (6-8)$$

Por lo tanto la condición se cumple cuando el crecimiento corriente es igual al crecimiento medio (MÜLLER 1920).

Esta relación también se demostró por otro método (HEYER 1883). La demostración se presenta aquí porque en ella se puede apreciar la relación mutua de ambas curvas indicada anteriormente.

Si se expresan como i_1 e ima_1 el crecimiento corriente y medio en la edad $t_1 = t_0 + 1$ y como i_0 e ima_0 los crecimientos en la edad t_0 , entonces es posible calcular el crecimiento corriente i_1 como la diferencia entre el crecimiento acumulado en la edad $t_0 + 1$ y t_0 .

$$i_1 = ima_1(t_0 + 1) - t_0 \cdot ima_0$$

$$i_1 = ima_1 t_0 + ima_0 - t_0 \cdot ima_1 = ima_1 + t_0(ima_1 - ima_0)$$

$$i_1 = ima_1 = t_0(ima_1 - ima_0) \quad (6-9)$$

rendimiento y crecimiento

De aquí se desprende: mientras el crecimiento medio ima_1 del año siguiente sea mayor que el del año anterior, ima_0 , también el crecimiento corriente i_1 es mayor que el crecimiento medio ima_1 y viceversa.

La diferencia

$$i_1 - ima_1$$

cambia también el signo en el mismo momento que la diferencia

$$ima_1 - ima_0$$

por lo tanto,

$$ima_1 - i_0$$

De esta relación se puede derivar fácilmente el desarrollo general del crecimiento medio en relación con la curva de crecimiento corriente.

Hasta su punto de culminación el crecimiento medio está bajo el crecimiento corriente; después del punto de culminación está sobre él.

El máximo del crecimiento corriente jamás es alcanzado por el crecimiento medio. En la Figura 6-4 se presenta en forma evidente la relación del crecimiento corriente y medio.

El crecimiento corriente en un punto del tiempo está dado por la pendiente de la curva de rendimiento. El crecimiento medio en un punto del tiempo está dado por la pendiente de los trazos OA , OM , OB , etc., expresado desde el origen hasta la curva.

El trazo OM es tangencial a la curva. Entonces en el punto del tiempo P_m el crecimiento corriente es igual al crecimiento medio. Sin embargo, se puede observar en la Figura 6-4 que el trazo OM tiene la mayor pendiente (máxima del crecimiento medio). Después del punto M la pendiente de los trazos desciende más lentamente que la pendiente de la curva.

VI.2.5 Crecimiento de rodal

Al traspasar los conceptos del árbol individual al rodal se debe observar que el rodal es una comunidad viviente, es decir, una población en términos biométricos. Las distintas magnitudes de crecimiento pueden determinarse en el cambio de valores medios (por ej.: diámetro medio, altura media y similares) o de las curvas (por ej.: área basal de rodal, volumen de rodal, valor del rodal).

El cambio del marco poblacional (el número de árboles) con la edad ocasiona que tanto los valores medios como las curvas se refieran constantemente a un distinto número de árboles.

Si se determina el área basal de rodal al inicio y final de un período, entonces también debe considerarse la disminución del número de árboles por mortalidad, por raleos u otras intervenciones.

Según el Cuadro 6-2 el número de árboles disminuye de 500 a 400 árboles/ha en el período 1950-60. La diferencia de las áreas basales sin considerar la disminución del número de árboles habría entregado un incremento en área basal demasiado pequeño (36.3-35.3). Por otro lado, el desplazamiento matemático en que se produce la disminución del número de árboles determina un crecimiento diamétrico demasiado grande (34.0-30.0).

En la diferencia 34.0-30.0 cm están contenidos el crecimiento real (32.9-30.0 cm) y el desplazamiento matemático 34.0-30.0. El incremento calculado en área basal de 7.2 m²/ha equivale al crecimiento medio de 2.8 cm en el árbol de área basal media.

Cuadro 6-2. Ejemplo numérico del cálculo de crecimiento en área basal en un rodal

	1950	1960	Df en el periodo	Total en 1960	Aumento en el periodo
N/ha	500	400	100	500	
G/ha	35,3	36,3	6,2	42,5	7,2 m ² /ha
d _m	30,0	34,0	28,0	32,9	2,9 cm

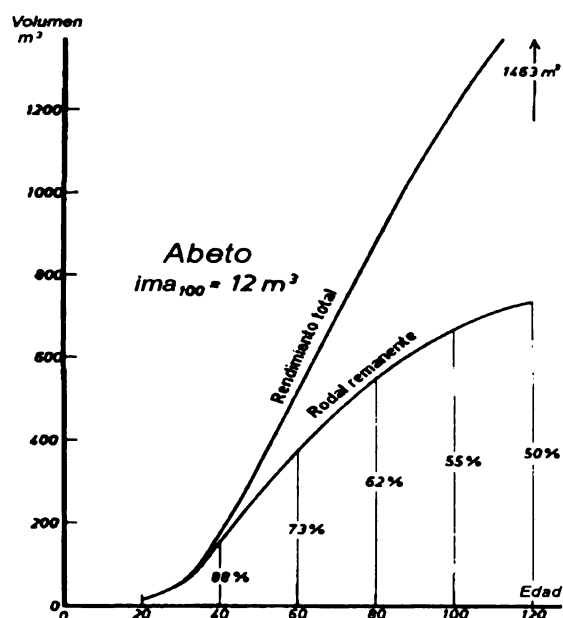


Figura 6-6. Rendimiento total y del rodal remanente para *pinus* ($ima_{100} = 12 \text{ m}^3$)

rendimiento y crecimiento

Para el rendimiento en volumen de un rodal en pie también deben registrarse las sumas de los volúmenes extraídos anteriormente (raleos) u otros descuentos, para que se establezca el rendimiento volumétrico total (Figura 6-6).

Por la disminución del número de árboles en general es difícil determinar el crecimiento de valores medios para un período más largo.

VI.2.6 Puntos de culminación de crecimiento

La curva de crecimiento corriente en diámetro muestra los puntos de culminación *A* y *B* (Cuadro 6-3).

El crecimiento en área basal calculado según la fórmula:

$$i_g = \frac{\pi}{4} (2d \cdot i_d \pm i_d^2) \quad (6-10)$$

como magnitud derivada tiene otro punto de culminación.

Cuadro 6-3. Dos curvas de crecimiento medio y anual corriente (*A* y *B*) en el rango de su culminación

d	A		B	
	ld	d · ld	ld	d · ld
cm	mm	mm	mm	mm
8	4,8	38,4	6,3	50,4
9	5,3	47,7	7,2	64,8
10	5,4	54,4	7,8	78,0
11	5,3	58,3	7,7	84,7
12	5,2	62,4	7,3	87,6
13	4,9	63,7	6,8	88,4
14	4,6	64,4	6,2	86,8
15	4,3	64,5	5,5	82,5
16	3,9	62,4	4,9	78,4
17	3,5	59,5	4,3	72,1
18	3,2	57,6	3,8	68,4
19	2,8	53,2	3,2	60,8
20	2,4	48,0	2,6	52,0

Demostración. El desplazamiento de la culminación en área basal en el árbol individual puede calcularse en forma más simple cuando la curva de crecimiento corriente se expresa en función del diámetro en vez de la edad.

$$y_1 = i_d = f(d)$$

Para determinar el punto de culminación en área basal basta con observar el desarrollo de la función

$$y_2 = d \cdot i_d$$

dado que por su magnitud i_d^2 puede despreciarse y la constante $\pi/4$ no influye en la posición del punto máximo.

Si se elige el modelo de crecimiento diamétrico y_1 donde ($x = d$) (PRODAN 1962),

$$y_1 = ax^b e^{-cx} \quad (6-11)$$

entonces se puede obtener el punto de culminación igualando la primera derivada a 0.

$$y_1 = abx^{b-1} e^{-cx} - acx^b e^{-cx} = 0$$

y de ahí

$$b - cx = 0 \quad y \quad x_1 = \frac{b}{c} \quad (6-12)$$

en donde x_1 = el valor del diámetro normal d donde culmina el crecimiento. A este diámetro se le asigna la edad t_1 . La curva

$$y_2 = x \cdot ax^b e^{-cx} = ax^{b+1} e^{-cx} \quad (6-13)$$

tiene otro punto de culminación, para el que

$$y_2 = a(b+1)x^b e^{-cx} - acx^{b+1} e^{-cx} = 0$$

$$y \quad (b+1) - cx = 0 ; \quad x_2 = \frac{b+1}{c} \quad (6-14)$$

La comparación de ambos valores x_1 y x_2 (6-12) y (6-14) muestra el desplazamiento.

$$x_2 > x_1 \quad (6-15)$$

En el Cuadro 6-3 se entregan los valores desplazados de las curvas A y B de la Figura 6-7.

Cuadro 6-4. Crecimiento en volumen según fórmula exponencial (6-34) y de interés compuesto (6-35)

t	$400 \cdot 1,0 p^t$	$\log 400 + kt \log e$	$\log y$	y
1	2	3	4	5
1	400,00	2,602060 +	2,602060	400,00
1	409,03	0,009691	2,611751	409,03
2	418,26	0,019382	2,621442	418,26
3	427,69	0,029073	2,631133	427,69
4	437,34	0,038764	2,640824	437,34
5	447,21	0,048455	2,650515	447,21
6	457,31	0,058146	2,660206	457,31
7	467,62	0,067837	2,669897	467,62
8	478,18	0,077520	2,679588	478,18
9	488,97	0,087219	2,689279	488,97
10	500,00	0,096961	2,698970	500,00

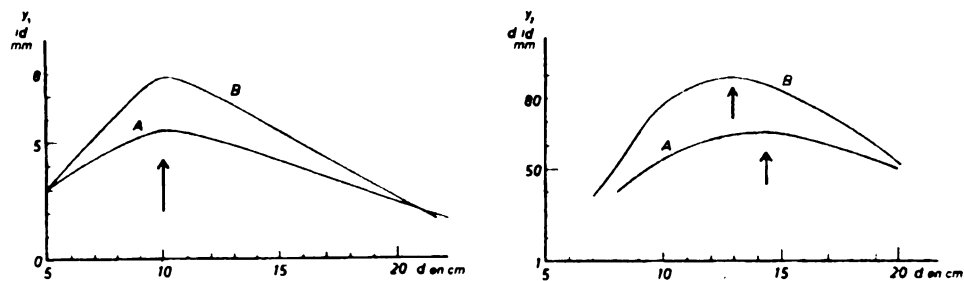


Figura 6-7. Comparación de las curvas de crecimiento medio anual y crecimiento anual corriente según Cuadro 6-4

Para las curvas de regresión se producen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 A: \quad y_1 &= 0.311x^{2.246} e^{-0.2246x} \\
 y_2 &= 0.311x^{3.246} e^{-0.2246x}
 \end{aligned}
 \tag{6-16}$$

$$\begin{aligned}
 B: \quad y_1 &= 0.1495x^{3.090} e^{-0.3090x} \\
 y_2 &= 0.1495x^{4.090} e^{-0.3090x}
 \end{aligned}
 \tag{6-17}$$

Según las fórmulas (6-12) y (6-14) se calculan los siguientes puntos de culminación:

$$A: x_1 = \frac{2.216}{0.2246} = 10.0 ; x_2 = \frac{3.246}{0.2246} = 14.4$$

$$B: x_1 = \frac{3.090}{0.3090} = 10.0 ; x_2 = \frac{4.090}{0.3090} = 13.2$$

El desplazamiento en el rodal se puede calcular considerando la disminución del número de árboles en función de la edad o el diámetro, lo que se puede representar aproximadamente por una función exponencial. Para el rango del punto de culminación vale la ecuación:

$$N = k \cdot e^{-cx} \quad (6-18)$$

la que también representa aproximadamente la distribución diamétrica en el monte irregular, siendo $x = d$.

$$N = k \cdot x^{-a} \quad (6-19)$$

Esta expresión se utiliza para modelar la mortalidad del número de árboles en función de la edad (Figura 6-8).

Entonces el crecimiento en área basal de rodal, $n \cdot i_g$, corresponde a la curva:

$$n \cdot d \cdot i_d = y_3 = k \cdot e^{-ax} \cdot ax^{b+1} \cdot e^{-cx} = k \cdot ax^{b+1} \cdot e^{-x(a+c)} \quad (6-20)$$

Maximizando:

$$y_3 = (b+1) \cdot k \cdot ax^b \cdot e^{-x(a+c)} - (a+c) \cdot k \cdot ax^{b+1} \cdot e^{-x(a+c)} = 0 \quad (6-21)$$

y de ahí:

$$b+1 - (a+c)x_2 = 0 \quad y$$

$$x_2 = \frac{b+1}{a+c} \quad (6-22)$$

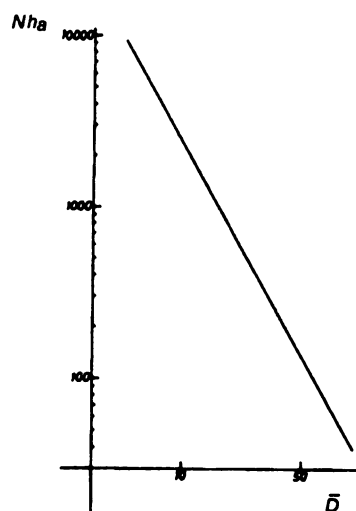


Figura 6-8. Número de árboles en función del diámetro promedio

Ejemplo:

Para una mortalidad en número de árboles según las fórmulas:

$$a) N = k \cdot e^{-0.05 \cdot x}$$

$$y \quad b) N = k \cdot e^{-0.10 \cdot x} \quad (6-23)$$

se obtienen para la curva de crecimiento (6-20) los siguientes puntos de culminación:

$$x_2 = \frac{3.246}{0.2246 + 0.05} = 11.8 \text{ cm} \quad y \quad x_2 = \frac{3.246}{0.2246 + 0.1} = 10.0 \text{ cm}$$

También, aplicando la ecuación para mortalidad

$$N = k \cdot x^{-a} \quad (6-24)$$

se puede calcular fácilmente la relación

$$n \cdot d \cdot i_d = y_3 = kx^{-a} \cdot ax^{b+1} \cdot e^{-cx} = kax^{b-a+1} \cdot e^{-cx} \quad (6-25)$$

La condición de maximización determina que:

$$y_3 = k \cdot a(b-a+1) x^{b-a} \cdot e^{-cx} - ckax^{b-a+1} \cdot e^{-cx} = 0 \quad (6-26)$$

$$(b-a+1) - cx = 0 ; x_3 = \frac{b-a+1}{c} \quad (6-27)$$

VI.3 PORCENTAJES DE CRECIMIENTO

Para cálculos de rentabilidad y para fines de comparación muchas veces es conveniente expresar las magnitudes de crecimiento en porcentajes. La utilización de los llamados porcentajes de crecimiento partió de la teoría del interés. De ese modo se comparó el volumen del árbol a un valor con capital trabajando e igualando el crecimiento en volumen o valor al correspondiente interés.

El volumen representa el capital y el crecimiento equivale al interés.

VI.3.1 Fórmulas de interés

Para períodos cortos es posible aplicar las fórmulas de las series de interés. Según esto, una magnitud de k que trabaja con una tasa de interés de $p\%$ produce en un año un interés de:

$$k \cdot \frac{p}{100} ,$$

o bien usando otra nomenclatura $k_1 \cdot 0.0p$

El capital después de un año es:

$$k_1 + k_1 \cdot 0.0p = k_1 \cdot 1.0p$$

después de n años es igual a:

$$k_1 + 1.0p^n = k_2 + k_n \quad (6-28)$$

Si se da la dimensión inicial k_1 , la dimensión final k_n y el número n de años del período, entonces

rendimiento y crecimiento

$$k_1 \cdot 1.0p^n = kn ; \quad 1.0p^n = \frac{k_n}{k_1} ; 1.0p = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k_1}}$$

y de ahí:

$$0.0p = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k_1}} - 1 ; \quad p = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{k_n}{k_1}} - 1 \right) \quad (6-29)$$

Esta fórmula también ha sido aplicada para el cálculo del porcentaje de crecimiento en volumen, en área basal y en valor.

La fórmula del interés compuesto corresponde al llamado crecimiento exponencial.

Bajo el supuesto que el crecimiento en todo momento es proporcional a la dimensión alcanzada, el factor de proporcionalidad k equivale al porcentaje de crecimiento p .

$$\text{Crecimiento} = \frac{p}{100} \cdot \text{dimensión alcanzada}$$

Si se expresa con y la dimensión alcanzada, entonces el crecimiento d_y en el lapso d_t es proporcional a la dimensión misma.

$$\frac{d_y}{d_t} = k_y ; \quad \frac{d_y}{y} = k \cdot d_t \quad (6-30)$$

De aquí se obtiene por integración:

$$\ln y = k_t + c \quad (6-31)$$

En el momento $t = 0$ la dimensión alcanzada es y_0 (dimensión inicial o capital inicial) y correspondientemente

$$\ln y_0 = c \quad \text{y finalmente: } \ln y = k_t + \ln y_0$$

o

$$\ln \frac{y}{y_0} = k_t ; \quad y = y_0 \cdot e^{k_t} \quad (6-32)$$

Si $t = n$ años, entonces:

$$\frac{y_n}{y_0} = e^{kn}$$

De igualar

$$y_n = k_n ; y_0 = k_1 ; e^{kn} = 1.0p^n$$

$$e^k = 1.0p ; k = \ln 1.0p \quad (6-33)$$

Ejemplo:

$$k_1 = V_1 = 400 \text{ m}^3/\text{ha} ; k_n = V_n = 500 \text{ m}^3/\text{ha} ; n = 10 \text{ años}$$

$$p = 100 \left(\sqrt[10]{\frac{500}{400}} - 1 \right) = 100 \left(\sqrt[10]{1.25} - 1 \right)$$

Luego del cálculo logarítmico resulta:

$$\log \sqrt[10]{1.25} = \frac{1}{10} 0.0969100 = 0.00969100$$

$$\sqrt[10]{1.25} = 1.022565$$

$$p = 100(1.022565 - 1) = 2.2565\%$$

$$k = \ln 1.0p = \ln 1.022565 = \frac{0.0096910}{0.4342945} = 0.022315$$

Por lo tanto, las fórmulas

$$y = 400 e^{0.022315t} \quad (\text{función exponencial}) \quad (6-34)$$

$$y = 400 \cdot 1.022565^t \quad (\text{fórmula del interés compuesto}) \quad (6-35)$$

dan el mismo resultado.

Ambas ecuaciones graficadas en papel semilogarítmico entregan una recta, sobre la cual pueden leerse directamente los valores k_1 o p' (Figura 6-9).

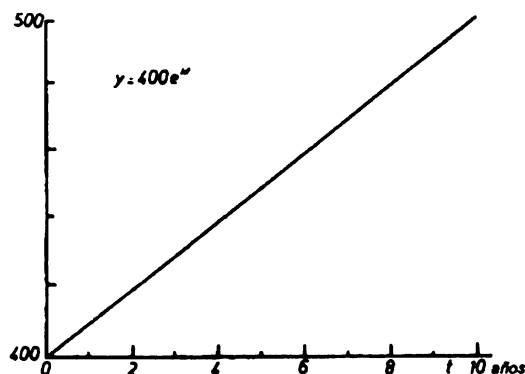


Figura 6-9. Presentación de las funciones (6-34) y (6-35)

En el Cuadro 6-4 se entrega la evaluación de las ecuaciones (6-34) y (6-35). Los valores de $1.0 p'$ pueden obtenerse en las tablas de interés compuesto.

Para el crecimiento de las variables del árbol sólo se puede hacer uso de las fórmulas del interés compuesto por períodos cortos.

VI.3.2 Fórmulas de aproximación

En vez de la fórmula del interés compuesto se han derivado diversas fórmulas de aproximación para fines forestales. Ellas tienen la ventaja de su fácil aplicabilidad.

Sea i_y el crecimiento periódico de un elemento, y , dentro de un período de n años, entonces los porcentajes de crecimiento anual se calculan como:

$$p_y = \frac{i_y}{n \cdot y_2} \cdot 100 \quad (\text{Fórmula de BREYMANN}) \text{ o}$$

$$p = \frac{i_y}{n \cdot y_1} \cdot 100 \quad (6-36)$$

dependiendo del valor final y_1 ó y_2 .

Pero el crecimiento también puede expresarse en relación con un valor medio:

$$\frac{y_2 + y_1}{2}$$

$$p_y = \frac{iy}{\frac{y_2 + y_1}{2}} \quad 100 = 200 \cdot \frac{y_2 - y_1}{y_2 + y_1} ,$$

o para 1 año:

$$p_y = \frac{200}{n} \cdot \frac{y_2 - y_1}{y_2 + y_1} \quad (\text{Fórmula de PRESSLER}) \quad (6-37)$$

Como ejemplo se calculará el porcentaje de crecimiento en volumen con diferentes fórmulas:

$$v_2 = 0.309 \text{ m}^3 \text{ sólidos}, \quad v_1 = 0.237 \text{ m}^3 \text{ sólidos}$$

$$i_v = 0.036 \text{ m}^3 \text{ sólidos, período} = 2 \text{ años}$$

Según la fórmula del interés

$$p_v = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{0.309}{0.273}} - 1 \right) \cong 6.4\%$$

Según la fórmula basada en el valor inicial

$$p_v = 100 \cdot \frac{0.036}{2 \cdot 0.273} \cong 6.6\%$$

Según la fórmula de BREYMANN

$$p_v = 100 \cdot \frac{0.036}{2 \cdot 0.309} \cong 5.8\%$$

rendimiento y crecimiento

Según la fórmula de PRESSLER

$$p_v = \frac{200}{2} \cdot \frac{0.036}{0.582} \cong 6.2\%$$

Por lo general la fórmula de PRESSLER entrega valores inferiores a la fórmula del interés compuesto, y la fórmula de BREYMANN (fórmula de volúmenes extremos) por su parte entrega valores menores a la fórmula de PRESSLER. Ella, sin embargo, se presta para calcular (capitalizar) el crecimiento para el siguiente período.

En este caso el volumen final v_2 (o en el caso general y_2) puede ser considerado como el volumen medio entre los observados y los "capitalizados" a futuro.

Se produce una relación destacable para el valor de porcentaje de crecimiento en el tiempo a_1 de la culminación del crecimiento medio de dimensión y . Aquí el crecimiento corriente i_y es igual al crecimiento medio.

$$i_y = \frac{y}{t_1}$$

El porcentaje de crecimiento es entonces:

$$p_v = 100 \cdot \frac{i_y}{y} = 100 \cdot \frac{y}{t_1 y} = \frac{100}{t_1} \quad (6-38)$$

Las fórmulas indicadas para el volumen de un árbol individual tienen validez para todos los elementos de un árbol y para los valores medios de un rodal, no así para los elementos agregados como crecimiento global, rendimiento en área basal y rendimiento en valor. Para estos elementos se calcula el crecimiento medio a partir del rendimiento global. Por el contrario, los porcentajes de crecimiento en volumen se refieren a las existencias actuales, las que varían con los tratamientos del rodal.

Antes de la culminación de crecimiento medio

$$p_v > \frac{100}{t_1}$$

después de la culminación

$$p_v < \frac{100}{t_1} \quad (6-39)$$

El porcentaje de crecimiento de una dimensión compuesta multiplicativamente, por ejemplo $v = g \cdot h \cdot f$, es igual a la sumatoria de los porcentajes de sus componentes

$$p_v = p_g + p_h + p_f \quad \text{ó} \quad (6-40)$$

$$p_v = 2p_d + p_h + p_f$$

todos los elementos de un árbol y para los valores medios de un rodal, no así para los elementos agregados como crecimiento global, rendimiento en área basal y rendimiento en valor. Para estos elementos se calcula el crecimiento medio a partir del rendimiento global. Por el contrario, los porcentajes de crecimiento en volumen se refieren a las existencias actuales, las que varían con los tratamientos del rodal.

VI.4 INFORMACION BASICA DE CRECIMIENTO

La información para el ajuste de las tablas y funciones de rendimiento debe provenir preferentemente de parcelas permanentes, aun cuando también se ha empleado información de parcelas temporales (VUOKILA 1965). Dentro de esta última pueden utilizarse análisis de tallo o tarugos de incremento.

VI.4.1 Análisis de tallo

El camino más directo y preciso para estudiar el desarrollo de un árbol, determinar su crecimiento e investigar diferentes relaciones que lo controlan es realizar un análisis de tallo. Este consiste en la medición por secciones de las dimensiones del árbol a diferentes edades y a partir de ello se calculan los distintos elementos y el crecimiento. Los datos requeridos para esto se obtienen por conteo y medición de los anillos sobre las rodela obtenidas a diferentes alturas fustales. Para confeccionar estas rodela de 5 a 10 cm de ancho es necesario voltear el árbol. La primera rodela se obtiene a la altura del tocón (0.3 m), la segunda a 1.3 m, las restantes, según los requerimientos, a 1, 2 ó más metros de distancia. Antes del volteo se marcan en el árbol algunas direcciones importantes para el estudio (dirección de los vientos dominantes, inclinación del terreno, etc.). Inmediatamente después del volteo se marcan las rodela considerando la dirección para permitir las comparaciones entre las mediciones. Para simplificar el conteo de anillos de crecimiento se cepillan o liján las rodela.

El ejemplo a continuación, tomado de GUTTENBERG (1915), describe la realización de un análisis de tallo (Figura 6-10 y Cuadros 6-5 y 6-6).

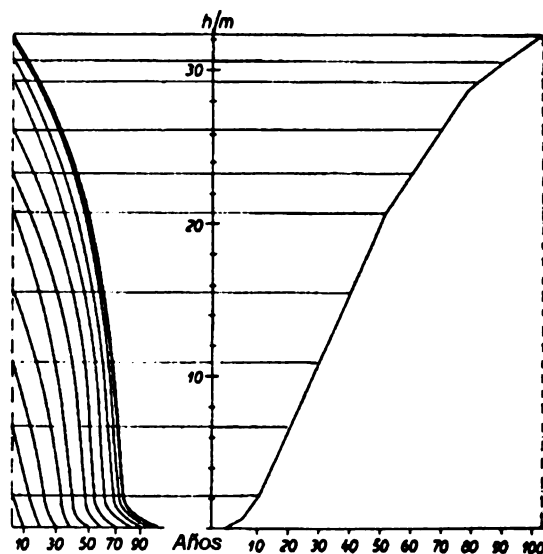


Figura 6-10. Análisis de tallo

Cuadro 6-5. Análisis de tallo en *picea* de 103 años

Rodela		Diámetro en cm por edad											
Número de anillos	Altura desde el suelo	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	103	m. R.
98	0,4	3,31	7,95	12,68	17,32	21,95	27,08	31,99	36,05	39,81	42,71	43,91	45,37
94	1,3	1,44	6,96	11,54	16,08	19,79	23,83	27,14	30,36	33,28	35,81	36,79	37,97
87	4,3		2,16	8,85	14,62	18,68	22,65	25,95	28,85	31,37	33,57	34,25	35,30
79	8,3			3,50	11,38	16,65	21,00	24,42	27,20	29,71	31,75	32,43	33,45
70	12,3				6,22	13,16	18,57	22,32	25,25	27,58	29,52	30,14	31,05
61	16,3					8,07	13,82	18,49	22,10	24,80	26,92	27,55	28,50
52	20,3					1,07	6,99	12,71	17,71	21,41	23,83	24,55	25,55
44	23,3						0,50	7,11	13,10	17,52	20,38	21,31	22,35
36	25,3							2,75	9,03	13,92	17,27	18,34	19,30
29	27,3								5,03	10,00	13,30	14,48	15,20
24	29,3								0,30	4,68	8,31	9,54	10,35
7	31,3										3,24	4,60	5,40
0	32,4												

En el caso del ejemplo (Cuadro 6-6), se cuentan $t_1 = 98$ anillos de crecimiento en la rodela basal obtenida a 0.4 m de altura. A esta cifra se agregan 5 años (= edad asumida del árbol para alcanzar 0.4 m de altura).

Edad del árbol: $t = 98 + 5 = 103$ años

Luego en todas las rodela se miden desde afuera hacia adentro los primeros 3 años.

$103 \cdot 3 = 100$ años

y se marcan luego cada 10 años.

$100 - 10 = 90$, etc.

Cuadro 6-6. Análisis de tallo en *picea* de 103 años. Evolución de las alturas

Número de anillos de la rodela	98	94	87	79	70	61	52	44	36	29	24	7	0
Altura de la rodela desde el suelo en m	0,4	1,3	4,3	8,3	12,3	16,3	20,3	23,3	25,3	27,3	29,3	31,3	32,4
Edad del árbol al alcanzar la altura de la rodela	5	9	16	24	33	42	51	59	67	74	79	96	103

Los anillos marcados en cada rodela se registran en forma separada. Por el conteo y marcación de los períodos de 10 años se puede determinar el diámetro a los 100, 90, etc. años. Estos se miden habitualmente en forma cruzada con precisión milimétrica. Para la simplificación de este trabajo se marcan los diámetros con una regla en la dirección determinada. En rodela irregulares es posible determinar los diámetros en varias direcciones. Los valores diamétricos son registrados en una tabla (Cuadro 6-5). Con estos valores es posible realizar todos los cálculos siguientes.

La determinación de las alturas. La edad del árbol hasta la altura de la rodela obtenida se calcula como:

$$t_i = t - N_i$$

donde t_i es la edad deseada, t la edad del árbol (103 años) y N_i el número de los anillos contados en la rodela.

Ejemplo (Cuadro 6-6):

$t = 103$, N_i (anillos contados) = 98 t_i a 0.4 m = 5 años
 $t = 103$, N_i = 94 t_i a 1.3 m = 9 años
 etc.

La representación gráfica de estos datos sobre la edad describe el desarrollo en altura (Figura 6-10).

Los valores diamétricos de cada rodela se representan de igual forma en un diagrama. Uniendo los valores diamétricos de las correspondientes clases de edad de las distintas rodela (alturas fustales) se produce el perfil longitudinal (perfil fustal) del árbol a las edades 10, 20, etc. años. Las escalas para los largos y los diámetros se eligen en distintos tamaños para la representación gráfica. Para la altura se eligen escalas 1:100 ó 1:50 para el diámetro 1:5 ó 1:2.5. La escala del diámetro es habitualmente 20 veces mayor a la escala de la altura. La distorsión que se produce por esto se asume porque permite una mejor evaluación de la forma fustal. Con los datos determinados es posible realizar los siguientes cálculos:

- La determinación del crecimiento diamétrico a la altura del pecho u otras alturas fustales.
- El cálculo del crecimiento en altura.
- El cálculo del área basal a diferentes alturas por clases de edad del árbol.
- El cálculo del crecimiento en área basal.
- El cálculo del volumen fustal y comercial por cubicación por secciones.
- El cálculo del factor de forma fustal y el factor de forma comercial. Por medio de la interpolación de los valores diamétricos también se puede calcular el factor de forma real o natural.
- El cálculo del crecimiento corriente y medio del área basal y el volumen.
- El cálculo de los porcentajes de crecimiento, etc.

El crecimiento del volumen de ramas

En los análisis de tallo también el desarrollo de las ramas puede jugar un papel. Si no es posible realizar el estudio diamétrico en rodela de ramas, entonces es posible derivar el crecimiento de las ramas desde los datos de la rodela fustal más cercana. Los crecimientos de la rodela fustal se reducen por el cociente

$$\frac{d \text{ rama}}{d \text{ la rodela fustal}}$$

Crecimiento diametral (ramas) = crecimiento (rodela)

$$\frac{d \text{ rama}}{d \text{ la rodela fustal}}$$

VI.4.2 Tarugos de incremento

Aunque las predicciones de crecimiento diametral a partir de tarugos pueden ser bastante buenas, la técnica no producirá información confiable acerca del crecimiento del rodal en su conjunto a menos que la mortalidad y el ingreso de nuevos individuos puedan ser predichos con facilidad. MEYER (1952) demostró que el error en la determinación del crecimiento depende básicamente del número de tarugos extraídos. El mismo autor recomienda entre 50 y 100 tarugos.

El mismo MEYER señala que el crecimiento anual varía considerablemente año a año debido a los cambios climáticos, por lo cual es preferible determinar crecimientos periódicos. También concluye que si los árboles presentan un rango pequeño de distribución diamétrica, la precisión del cálculo del crecimiento desde tarugos es mayor que en el caso de un rango diamétrico mayor.

STRAND, citado por CHAGAS (1979), usando árboles muestra distribuidos por un procedimiento estratificado con afijación proporcional al área basal, logró la máxima precisión. También SPURR (1952) sugiere estratificar y obtener el número de tarugos de muestra en forma proporcional a la contribución de cada clase diamétrica al crecimiento en volumen.

VI.4.3 Parcelas permanentes

El método más generalizado en estudios de crecimiento y rendimiento es el empleo de parcelas permanentes, sean éstas experimentales o bien representativas de inventario continuo. La remediación periódica de unidades de muestra permanentes entrega una estimación más precisa del crecimiento comparada con cualquier otro método aplicado con igual intensidad de muestreo (BURKHART y STRUB 1974). Estos investigadores plantearon que mientras más corto el período de tiempo entre mediciones, más alta es la correlación entre mediciones sucesivas y mayor la ventaja proporcionada por este tipo de parcelas.

Una fuente de error importante en las parcelas permanentes es el hecho de que entre mediciones periódicas no se registre la información en el momento que se producen las intervenciones silviculturales.

VI.5 MODELOS DE CRECIMIENTO Y TABLAS DE RENDIMIENTO

Un modelo es una forma de caracterizar un sistema o parte de un sistema. Es una abstracción y simplificación de un proceso natural que permite su estudio y análisis.

El modelo puede estar constituido por uno o varios gráficos, una o más tablas, una o múltiples ecuaciones, uno o más subsistemas, etc.

Antes del advenimiento de la computación los investigadores tuvieron serias limitaciones para la formulación de modelos complejos, por lo que tuvieron que simplificarlos al máximo de forma de producir herramientas de utilidad práctica.

Los modelos de crecimiento y rendimiento han evolucionado mucho desde que PAULSEN en el siglo XVIII elaborara las primeras tablas de rendimiento con ajuste gráfico. La evolución y secuencia natural que han seguido estos modelos según WHYTE (1986) es la siguiente:

Tablas de rendimiento normales

Tablas de rendimiento empíricas

Tablas de rendimiento de densidad variable

Modelos de rodal agregados

Modelos de rodal con proyección de la tabla de rodal

Modelos de árbol individual independientes de la distancia

Modelos de árbol individual dependientes de la distancia

La necesidad de contar con modelos de este tipo radica, desde el punto de vista de la planificación de la producción, en que el manejo y el aprovechamiento eficientes de cualquier bosque requieren de la toma de decisiones racionales. Tales decisiones sólo pueden adoptarse si la respuesta de los bosques a estas operaciones puede cuantificarse (FAO 1980).

CURTIS (1972) señala que un modelo de crecimiento y rendimiento debe proporcionar estimaciones del desarrollo y su rendimiento potencial para cualquier régimen de intervenciones factible.

Un modelo de crecimiento y rendimiento, cualquiera sea su estado de evolución, entrega las características del bosque coetáneo a las diferentes edades dependiendo de las intervenciones silviculturales y del índice de sitio en que el bosque esté creciendo. También se han desarrollado algunos intentos por modelar bosques multietáneos sobre bases algo diferentes (HUSCH *et al.* 1982).

Las tablas o modelos de rendimiento se derivan de relaciones estocásticas entre las variables dependientes (altura, área basal, número de árboles, volumen) y un conjunto de variables independientes predictoras del estado de desarrollo de un rodal, como por ejemplo la edad y el índice de sitio.

VI.5.1 Tablas de rendimiento

Son tablas que reproducen el desarrollo de rodales coetáneos por especie y clase de sitio, por unidad de superficie.

VI.5.1.1 Tablas de rendimiento normales

Como su nombre lo indica, están referidas a rodales catalogados como de densidad normal o completa no intervenidos.

Este tipo de tablas se originó antes de que los métodos analíticos estuvieran disponibles y por ello generalmente se desarrollaron empleando métodos gráficos que podían manipular normalmente hasta dos variables, edad y sitio, considerando la densidad como un elemento fijo. Ellas tienen en general la forma

$$Y = f(t, s)$$

Un rodal normal ("fully stocked stand") es aquel que ocupa completamente un sitio dado y hace uso de toda su potencialidad de crecimiento. Debido a la dificultad de describir cuantitativamente esta condición, se usan pautas cualitativas y algo subjetivas como dosel de copas completamente cerrado, ausencia de intervenciones o alteraciones (raleos, podas, incendios y daños bióticos) y espaciamiento regular de los árboles (HUSCH *et al.* 1982).

Una de las primeras tablas de este tipo desarrollada analíticamente corresponde a la función ajustada por BRUCE y SCHUMACHER en 1950 para pino de hojas largas.

$$\log V = b_0 + b_1 \log t + b_2 S + b_3 \frac{S}{t} \quad (6-41)$$

COX (1982) ajusta para *Pinus radiata* la función:

$$\log V = b_0 + b_1 \log t + b_2 \log S \quad (6-42)$$

Donde

V = volumen en metros cúbicos por hectárea

S = índice de sitio, metros

t = edad del rodal, años

Los mismos autores anteriores y también CHAPMAN y MEYER (1949) presentan diferentes procedimientos gráficos para construir tablas normales de rendimiento.

La realidad muestra que muy pocos rodales pueden calificarse como normales. Para estimar el rendimiento de rodales en condiciones distintas a las normales se hace uso del grado de aprovechamiento relativo referido al área basal.

rendimiento y crecimiento

$$\text{Grado de aprovechamiento} = \frac{G_{\text{real}}}{G_{\text{normal}}}$$

Mientras menor es el grado de aprovechamiento o “stocking”, mayor es la pérdida de crecimiento potencial. El producto de grado de aprovechamiento y volumen normal permite estimar el volumen actual del rodal (LOETSCH *et al.* 1973).

ASSMANN introdujo el concepto de nivel de rendimiento como resultado de la evidencia que la sola relación de edad y sitio con el rendimiento normal no basta, ya que se pueden obtener para iguales valores de ambas variables variaciones en rendimiento de 40% y más (FRANZ 1967).

VI.5.1.2 Tablas de rendimiento empíricas

Este tipo de tablas representa una situación particular de manejo de un rodal. Se construyen sobre la base de información de rodales tratados de acuerdo a normas estándares de manejo silvicultural y representan el desarrollo de un rodal que crece en esa determinada situación de manejo.

El procedimiento de construcción es similar a las tablas de rendimiento normales y se basa en las mismas variables predictoras, salvo en lo que respecta a la selección de los lugares de muestra que deberá hacerse en lo posible en forma aleatoria. La información proveniente de inventarios puntuales o continuos puede emplearse con este fin.

GROOHAUSEN desarrolla para *Pinus oocarpa* en Honduras funciones de rendimiento empíricas para rodales con y sin raleo en la región de Comayagua (citado por FERREIRA 1993). Los modelos aplicados son

$$\ln N = a_0 + a_1 t + a_2 S \quad (6-42a)$$

$$\ln G = a_0 + a_1 \ln t + a_2 t + a_3 S \quad (6-42b)$$

$$V = (a_0 + a_1 t + a_2 S) \quad (6-42c)$$

VI.5.1.3 Tablas de rendimiento de densidad variable

Este tipo de tablas incorpora entre sus variables predictoras algún indicador de la densidad, y permiten evaluar diferentes alternativas de manejo silvicultural.

GRUT (1970) desarrolla en Sudáfrica para *Pinus radiata* una función de densidad variable del tipo

$$G = a_0 + a_1 \bar{H} + a_2 \bar{H}N + a_3 N^2 + a_4 \bar{H}^2 + a_5 N + a_6 t^2 + a_7 t \quad (6-43)$$

Donde

G = área basal por hectárea, m²/ha

$\bar{H}$ = altura media, m

N = número de árboles por hectárea

t = edad, años

HUSCH (1964) en Chile obtuvo una función de rendimiento también para *Pinus radiata* que incorpora como indicador de densidad el índice de REINEKE (IDR).

$$\log G = a_0 + a_1 1/t + a_2 S + a_3 IDR \quad (6-44)$$

VI.5.2 Modelos de rodal

Con la aparición de la computación y la aplicación de la simulación se ha reemplazado el antiguo concepto de tablas de rendimiento por el moderno modelos matemáticos de rodal.

JÖBSTL (1973) caracteriza la estructura de un modelo matemático de la siguiente manera (Figura 6-11):

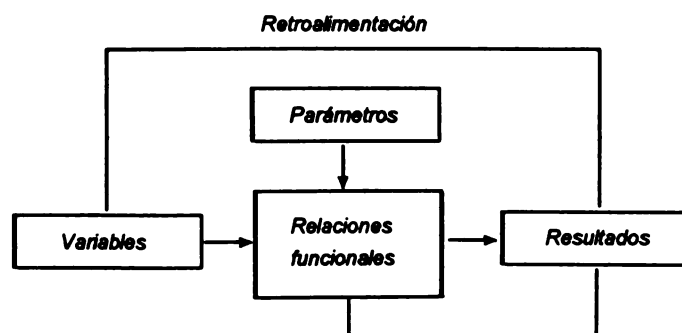
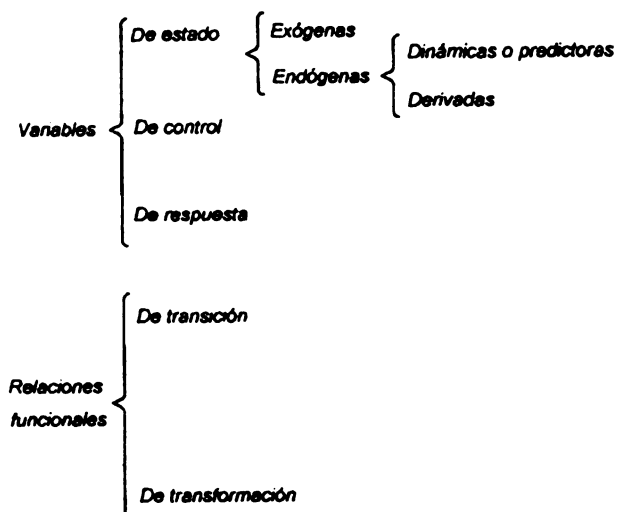


Figura 6-11. Estructura de un modelo matemático

En el Cuadro 6-7 se presenta una clasificación de las variables y funciones utilizadas para describir un sistema a través de un modelo matemático.

Cuadro 6-7. Clasificación de las variables y relaciones funcionales utilizadas en un modelo matemático



Un simulador de rodal corresponde a un conjunto de variables y relaciones funcionales que permiten predecir el crecimiento y rendimiento del bosque en diversas condiciones de sitio y sometido a distintas alternativas silviculturales.

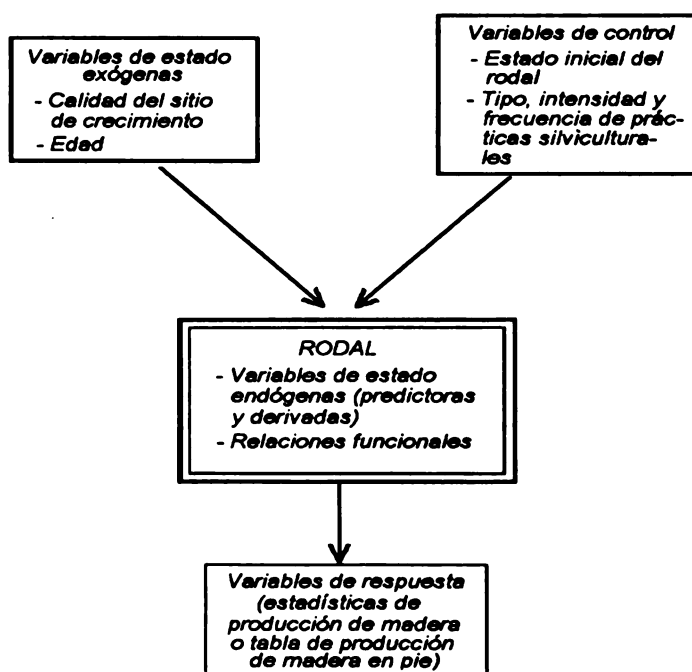


Figura 6-12. Componentes de un modelo de simulación de rodal

La Figura 6-12 muestra los componentes de un modelo de simulación de rodal. El medio o entorno está representado por variables de estado exógenas (sitio y edad), por variables de control, estado inicial y prácticas silviculturales (tipo, intensidad y frecuencias) y por variables de respuesta (tablas de rendimiento resultantes).

VI.5.2.1 Modelos agregados de rodal

Un modelo agregado de rodal emplea sólo variables de estado referidas a la unidad de superficie y no de árboles individuales. Sus predicciones son de naturaleza determinativa.

El estado inicial del rodal queda caracterizado totalmente por la edad, la altura dominante, el número de árboles y área basal, variables que sirven de base a funciones de transformación para la estimación del diámetro medio y los volúmenes (LEWIS *et al.* 1976; BEEKHUIS 1966; TURNER *et al.* 1977; TASMANIAN FORESTRY COMMISSION 1979; MYERS 1968, 1973; CONAF/PNUD/FAO 1980).

El crecimiento del rodal se describe mediante funciones de transición que proyectan en el tiempo simulado las variables área basal, altura dominante y número de árboles, todo referido a la hectárea.

Como una variación de este tipo de modelos están los modelos agregados con despliegue de la tabla de rodal. Estos modelos proyectan las distribuciones de frecuencias o tablas de rodal mediante funciones de densidad de probabilidad (CLUTTER y ALLISON 1974; Mc MULLAN 1978; STARK 1979; ALDER 1978; HALL 1974; FUNDACION CHILE 1990).

VI.5.2.2 Modelos de árbol individual

Un método alternativo de predicción de crecimiento y rendimiento es el modelo de árbol individual. Los árboles son proyectados en su crecimiento en función de su tamaño, sitio y condiciones de competencia. La situación de competencia de cada árbol es cuantificada en términos de un índice de competencia el cual es función del espacio vital del árbol y de la distancia de sus vecinos.

Con respecto justamente a esta última variable, la distancia entre los árboles, HEGYI (1974) reconoce tres tipos fundamentales de simuladores de árbol individual. Aquellos independientes de la distancia entre árboles que proyectan el crecimiento por grupos de árboles de características similares (DRESS 1970; GOULDING 1972; OPIE 1972); y los modelos dependientes de la distancia entre árboles que entregan una información más detallada (NEWNHAM 1964; LEE 1967; EK y MONSERUD 1974; MITCHELL 1975). Derivado de estos últimos existe un tercer tipo denominado "simuladores tridimensionales" (ARNEY 1971; HEGYI 1974).

VI.5.3 Compatibilidad y funciones biológicas

Durante los años previos a la computación, la literatura volcó su atención en demostrar la relación matemática existente entre crecimiento y rendimiento. Este último frecuentemente no correspondía a la suma de los crecimientos netos anuales. En un esfuerzo por eliminar esta inconsistencia, BUCKMAN (1962) y CLUTTER (1963) formularon la necesidad de elaborar modelos de crecimiento y rendimiento que llamaran compatibles. La compatibilidad residía justamente en que la primera derivada de la ecuación de rendimiento fuera un modelo apropiado de crecimiento, o viceversa, que la integral del modelo de crecimiento representara una función de rendimiento.

Este postulado de compatibilidad también es compartido por los defensores de los modelos biológicos o biomatemáticos de rodal aparecidos posteriormente y que son normalmente de tipo no lineal.

Durante muchos años, en la mayoría de las fórmulas matemáticas usadas en investigación forestal no se consideró la biología del crecimiento. Por el contrario, la literatura revela que los modelos empíricos fueron siempre los más frecuentes.

Sin embargo, la aplicación de modelos biológicos reviste hoy gran importancia y éstos se aplican normalmente a los estudios de crecimiento. La principal diferencia entre un modelo empírico y uno biológico es que mientras el primero es sólo una expresión matemática de una relación entre variables, un modelo biológico es la expresión de una hipótesis precisa respecto de la biología del proceso de crecimiento (AMARAL 1978).

ASSMANN (1970) señala que las curvas de crecimiento tienen forma sigmoidea y presentan dos características comunes a todas ellas:

- a) Son asintóticas.
- b) Tienen un punto de inflexión a una edad que varía con la especie y la calidad de sitio.

VI.5.4 Funciones de crecimiento principales

KIVISTE (1988) describe 75 ecuaciones de crecimiento. Sin embargo, sólo unas cuantas han probado ser las mejores y más populares. Entre ellas, de acuerdo con ZEIDE (1993) y GARCIA (1983), están la función de Chapman-Richards y sus derivaciones, la función de Schumacher y su derivación que corresponde a la función de Korf, y otros múltiples modelos todos los cuales tienen la propiedad de presentar una forma integral (rendimiento) y una forma diferencial (crecimiento).

WHYTE (1986) plantea la similitud entre las funciones de crecimiento más populares. A partir de la expresión general

$$Y = \left[a + b \cdot \exp(-ct^d) \right]^f \quad (6-45)$$

Donde

$Y =$ rendimiento

$t =$ edad

$a, b, c, d, f =$ parámetros

se pueden obtener las siguientes situaciones especiales:

Si $a = 0$ y $f = 1$ función de KORSUN

$$Y = b \cdot \exp(-ct^d) \quad (6-46)$$

Si en la función anterior $a_3 = 1$ queda la función de SCHUMACHER.

$$Y = b \cdot \exp(-ct^{-1}) \quad (6-47)$$

Si en la ecuación original (6-45) $d = 1$, tenemos la función de Chapman-Richards.

$$Y = a[1 - b \cdot \exp(-ct)]^f \quad (6-48)$$

La función molecular o de MITSCHERLICH (6-49) se obtiene para $f = 1$, mientras que la logística es con $f = -1$ (6-50).

$$Y = a[1 - b \cdot \exp(-ct)] \quad (6-49)$$

$$Y = a / [1 - b \cdot \exp(-ct)] \quad (6-50)$$

La función de GOMPERTZ representa el límite cuando f tiende a infinito.

$$Y = a \cdot \exp(-ct)^{-d} \quad (6-51)$$

Incluso la función de WEIBULL es similar, siendo b constante y $f = 1$

$$Y = a[1 - \exp(-ct)^d] \quad (6-52)$$

El objetivo de presentar estas ecuaciones en una forma generalizada y no en su expresión usual es demostrar su similitud. Por lo anterior, argumentar en favor de una u otra no tiene mayor sentido. Todas presentan un punto de inflexión y una asíntota, por lo tanto, la elección de cualquiera de ellas va a depender de la calidad del ajuste de los datos. La tendencia hoy en día no es ajustar funciones de rendimiento sino funciones de crecimiento y luego integrarlas para obtener estimaciones de rendimiento.

En el Cuadro 6-8 se incluye la expresión diferencial de las funciones enunciadas más otras de interés (ZEIDE 1993).

MACHADO (1978) probó para área basal neta en *Pinus taeda* L. la función monomolecular con asíntota común para diferentes densidades.

HERNANDEZ *et al.* (1990) en México desarrollan una función de crecimiento periódico para distintas coníferas sobre la base de variables fisiográficas del tipo:

$$\ln ip_h = a_0 MSNM + a_1 PENCOSSEX + a_2 h + a_3 h^2 t^2$$

Donde

ip_h = crecimiento periódico en altura

$MSNM$ = altitud en metros sobre el nivel del mar

$PENCOSSEX$ = pendiente por coseno de exposición

h = altura

t = edad

Para *Pinus oocarpa* los coeficientes son:

$$a_0 = 0.41$$

$$a_1 = 0.143$$

$$a_2 = 0.3471$$

$$a_3 = 0.0032$$

Cuadro 6-8. Funciones de crecimiento y relación entre sus componentes

Hossfeld IV	
$y = t^c/(b + t^c/a)$	$y' = bct^{c-1}/(b + t^c/a)^2$
Gompertz	
$y = ae^{-be^{-at}}$	$y' = abce^{-at}e^{-be^{-at}}$
Logistic	
$y = a/(1 + ce^{-bt})$	$y' = abce^{-bt}/(1 + ce^{-bt})^2$
Monomolecular	
$y = a(1 - ce^{-bt})$	$y' = abce^{-bt}$
Bertalanffy	
$y = a(1 - e^{-bt})^3$	$y' = 3abe^{-bt}(1 - e^{-bt})^2$
Chapman-Richards	
$y = a(1 - e^{-bt})^c$	$y' = abce^{-bt}(1 - e^{-bt})^{c-1}$
Levakovic I	
$y = a(t^d/(b + t^d))^c$	$y' = bcdy/t(b + t^d)$
Levakovic III	
$y = a(t^2/(b + t^2))^c$	$y' = 2bcy/t(b + t^2)$
Korf	
$y = ae^{-bt^{-c}}$	$y' = abct^{-c-1}e^{-bt^{-c}}$
Weibull	
$y = a(1 - e^{-bt^c})$	$y' = abct^{c-1}e^{-bt^c}$
Yoshida I	
$y = at^d/(b + t^d) + c$	$y' = abd t^d/t(b + t^d)^2$
Sloboda	
$y = ae^{-be^{-at^d}}$	$y' = bcdy t^{d-1} e^{-at^d}$

VII. USO DE FOTOGRAFIA AEREA EN INVENTARIOS FORESTALES

Las necesidades de información sobre los cambios de uso del suelo en las regiones tropicales y subtropicales han adquirido una gran importancia, debido a la creciente presión a que se ve sometido el medio ambiente. La acelerada tala de bosques, con el fin de abrir nuevas áreas agrícolas o pecuarias, la gran superficie de plantaciones, etc. representan algunos de los problemas forestales y ecológicos en Latinoamérica (TREVINO 1992).

El registro periódico de esos cambios por medio de inventarios forestales regionales, considerando la extensión y la infraestructura de los países en cuestión, es impracticable con métodos terrestres. La única alternativa es, por lo tanto, el uso de técnicas fotogramétricas, satelitales y terrestres combinadas.

A esta combinación de técnicas, se añade en los últimos tiempos el uso de los sistemas de información geográficos (SIG), que permiten administrar y actualizar de modo eficiente y dinámico los datos de los recursos naturales de un área (FISCHER y LINDENBERG 1989).

El fundamento de la percepción remota reside en el hecho físico de que todo cuerpo tiene su propia rúbrica espectral que lo define. Esto significa que cada objeto tiene ciertos valores de reflectividad y emisividad de partes del espectro electromagnético que lo hacen diferenciarse de los demás.

La Figura 7-1 muestra un esquema del espectro electromagnético y de la región de operación de algunos sensores.

Como la función de los sensores remotos es registrar la radiación electromagnética emitida o reflejada por los diferentes cuerpos, algunos sensores permiten la ampliación del espectro visible, obteniéndose imágenes de los objetos mediante la captación de la energía que éstos reflejan en la región invisible del espectro electromagnético (ej.: infrarrojo cercano, infrarrojo termal, microondas, etc.), lo que representa una ventaja adicional sobre la cantidad de información interpretable (AMERICAN SOCIETY OF PHOTOGRAMMETRY 1975).

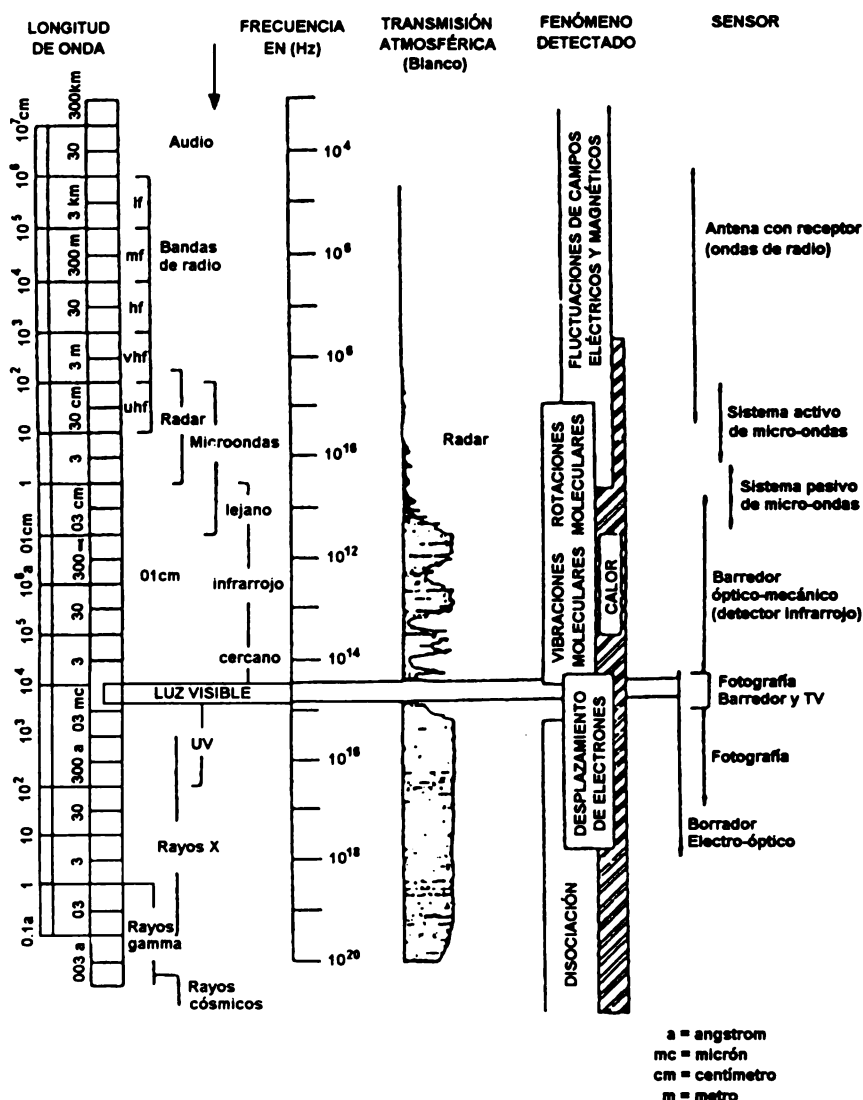


Figura 7-1. División del espectro electromagnético

VII.1 FOTOGRAFIA AEREA COMO SISTEMA DE INFORMACION

El valor especial de la fotografía aérea se basa en que proporciona un registro permanente de información para una fecha determinada, además de posibilitar el estudio intensivo y detallado del medio ambiente, por medio de la formación y observación de un modelo tridimensional del bosque (REAL y SANDOVAL 1983). Otro de los factores que han influido en la masificación del uso de la fotografía aérea vertical ha sido la creación y el desarrollo de instrumentos y técnicas destinados a extraer de manera sencilla cierta información de los objetos fotografiados, aisladamente o formando conjuntos.

VII.1.1 Ventajas y limitaciones de las fotografías aéreas

Los antecedentes mencionados hacen evidentes algunas ventajas que tiene el uso de las fotografías aéreas. Estas se precisan a continuación.

Ventajas:

- Obtención de detalles.
La fotografía aérea (dependiendo de su escala) presenta al usuario una gran cantidad de detalles en forma clara y precisa.
- Precisión en relación con otros objetos.
La fotografía presenta los objetos en una posición relativa correcta con respecto a la posición y disposición que tienen en el terreno.
- Obtención rápida de datos en relación con otros recogidos en terreno.
- Permiten la recolección de información sobre áreas remotas e inaccesibles.
- La información puede ser archivada permanentemente, lo que permite su revisión y complementación permanente.
- Se pueden observar actividades en cualquier fase, con vuelos sucesivos.

Desventajas:

- Las fotografías generalmente no poseen todas la misma escala.
- La obtención de fotografías aéreas utilizables requiere condiciones climáticas especiales.
- Si el uso del terreno cambia rápidamente, la fotografía pierde actualidad en muy poco tiempo.

VII.1.2 Escala de las fotografías aéreas

VII.1.2.1 Concepto de escala

La escala se define como la relación o equivalencia que existe entre una distancia medida entre dos puntos en la fotografía aérea y la distancia entre estos dos puntos medida en el terreno. La Figura 7-2 muestra esta relación, que se resume en la fórmula:

$$E = \overline{ab} / \overline{AB} \quad (7-1)$$

$$1 / E \Rightarrow 1 / \overline{AB} / \overline{ab} \quad (7-2)$$

Donde

E = escala

$\overline{ab}$ = distancia entre los puntos en la fotografía aérea

$\overline{AB}$ = distancia medida entre los puntos en el terreno

Si en la fórmula anterior se divide el numerador y el denominador por la distancia $\overline{ab}$, la escala queda expresada como una fracción representativa, en la que numerador y denominador están en la misma unidad.

Ejemplo: Distancia fotografía aérea $\overline{ab} = 5.5 \text{ cm}$

Distancia terreno $\overline{AB} = 200 \text{ m}$

$$E = 0.055 \text{ m}/200$$

$$1: E = 1/200 : 0.055$$

$$1: E = 1 : 3636.3$$

VII.1.2.2 Determinación de la escala

La escala de una fotografía aérea depende de la altura de vuelo sobre el terreno y de la distancia focal de la cámara aérea usada. La relación entre escala, altura de vuelo, distancia focal y distancia en foto y terreno se muestra en la Figura 7-2.

El concepto de escala de una fotografía aérea vertical es más complejo que el de escala de un mapa. Para un mapa, la escala es constante; en cambio, la escala de las fotografías aéreas verticales es variable para cada punto del terreno que posea una cota distinta.

$$E_A = f / (H_o - h_a) \quad (7-3)$$

Donde H_o es la altura de vuelo sobre el datum, f es la distancia focal y h_a es la cota del punto A. De la Figura 7-2 se desprende que la escala de la fotografía aérea vertical es:

$$E_A = \overline{ao} / \overline{AO}_A = f / (H_o - h_a) \text{ y } E_B = \overline{bo} / \overline{BO}_B = f / (H_o - h_B)$$

En general, la escala de cualquier punto i del terreno es:

$$E_i = f / (H_o - h_i) \quad (7-4)$$

Fórmula que, expresada como fracción representativa, se convierte en:

$$FR_i = 1 / [(H_o - h_i) / f] \quad (7-5)$$

Esta fracción expresa el número de unidades de terreno representado por cada unidad en la foto. Por ejemplo la escala 1:20.000 significa que una unidad en la fotografía representa 20.000 unidades en el terreno.

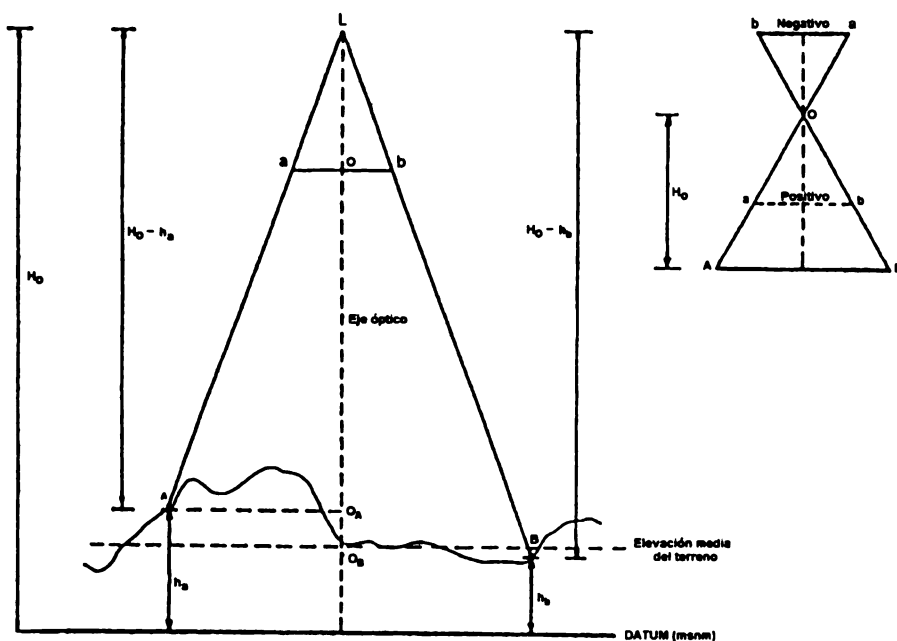


Figura 7-2. Geometría de la determinación de la escala de fotografías aéreas verticales (MOFFIT 1970)

VII.1.2.3 Otros métodos para determinar la escala

Un método alternativo para determinar la escala de una fotografía es a través de la relación de la distancia ab medida en la fotografía, con la distancia AB medida en el terreno. Se tiene que según las fórmulas (7-1) y (7-2):

$$E = \overline{ab} / \overline{AB} \quad (7-6)$$

$$FR = 1 / E = 1 / (\overline{AB} / \overline{ab})$$

Ambas distancias deben expresarse en las mismas unidades. Estas fórmulas entregan la escala de la fotografía aérea para una elevación sobre el datum que es el promedio entre la elevación de *A* y *B*.

Una modificación del método descrito consiste en encontrar dos o más puntos en un buen mapa de la zona cubierta por las fotografías: se mide la distancia entre dos puntos inequívocamente identificables en el mapa y en la foto aérea; como se conoce la escala del mapa, es posible obtener la escala de la foto de la siguiente manera:

$$mk / \overline{ab} = mb / \overline{AB} \quad (7-7)$$

$$mb = (mk \cdot \overline{AB}) / \overline{ab}$$

Donde

mk = denominador de la escala de la carta

mb = denominador de la escala de la foto aérea

y la escala de la foto, como fracción representativa, es $1 / mb$.

Ejemplo:

mk = 50.000 (escala de la carta 1:50.000)

mb = ?

Distancia en foto aérea $\overline{ab} = 10$ cm

Distancia en carta $\overline{AB} = 8$ cm

$mb = (50.000 \cdot 8) / 10$

$mb = 40.000$

Escala foto = 1:40.000

Para determinar la escala usando cualquiera de los métodos que consideran la medición de distancias, conviene elegir los puntos entre los que se medirá la distancia en extremos opuestos

de la fotografía, de tal forma que la línea que los conecte pase cerca del punto principal. Esta precaución minimizará el efecto de la inclinación que pueda tener el fotograma. Es deseable también que ambos puntos posean una cota similar (CARRE 1975).

Una vez que se ha calculado la escala de la fotografía para una elevación en particular, y si se conoce la distancia focal de la cámara, puede determinarse la escala para cualquier otra elevación del terreno. Se tiene:

$$mb_1 = (H_0 - h_1) / f \quad (7-8)$$

$$mb_2 = (H_0 - h_2) / f$$

Donde mb_1 es el denominador de la FR calculada para la cota h_1 y mb_2 es el denominador de la FR para la cota h_2 .

Restando las dos expresiones anteriores, resulta:

$$mb_2 = mb_1 + (h_1 - h_2) / f \quad (7-9)$$

Si h_2 es mayor que h_1 , el término de corrección $(h_1 - h_2) / f$ será negativo, sustrayéndose de mb_1 y viceversa. En base a esta fórmula, es posible construir una tabla que indique el factor de corrección para distintas cotas y distancias focales.

VII.1.3 Estereoscopia

Los seres humanos poseen la capacidad de percibir, por medio de la vista, la sensación del espacio en su aspecto tridimensional, la cual se denomina efecto estereoscópico. La ciencia y arte de producirlo se llama estereoscopia (SCHNEIDER 1964).

La percepción de la profundidad está influida por algunos aspectos de nuestra experiencia diaria, como las ideas de delante y detrás, la comparación del tamaño relativo de objetos conocidos, el aspecto geométrico de la perspectiva, etc.

La causa fundamental de la visión estereoscópica, cuando están ausentes todos los factores citados, es "la diferencia entre las imágenes que al mirar al espacio se forman en la retina de los ojos derecho e izquierdo". Esta diferencia de imágenes se debe a la visión binocular. Las imágenes son coordinadas por el cerebro, formando un modelo espacial de la realidad.

VII.1.3.1 Visión estereoscópica y fotografía aérea

Las fotografías aéreas se toman en líneas o bandas de vuelo, cubriendo sistemáticamente un área determinada. Las exposiciones se regulan de manera que entre las fotografías exista un cierto recubrimiento (traslapo, área común).

La Figura 7-3 muestra la analogía entre visión binocular normal y la toma de fotografías aéreas con recubrimiento. En las fotografías, las alturas quedan impresas con un desplazamiento de la imagen llamado desplazamiento por relieve.

Para lograr un buen recubrimiento estereoscópico del área, y facilitar los trabajos de aerotriangulación, el traslapo sucesivo se recomienda de un 60% y el adyacente o entre líneas de vuelo, de un 30%.

Si tenemos un par de fotografías con recubrimiento, denominado par estereoscópico, enfocando cada ojo hacia la imagen del objeto en la fotografía correspondiente, se reconstituye el momento de la obtención de las fotografías y se produce un modelo virtual del terreno denominado "modelo estereoscópico".

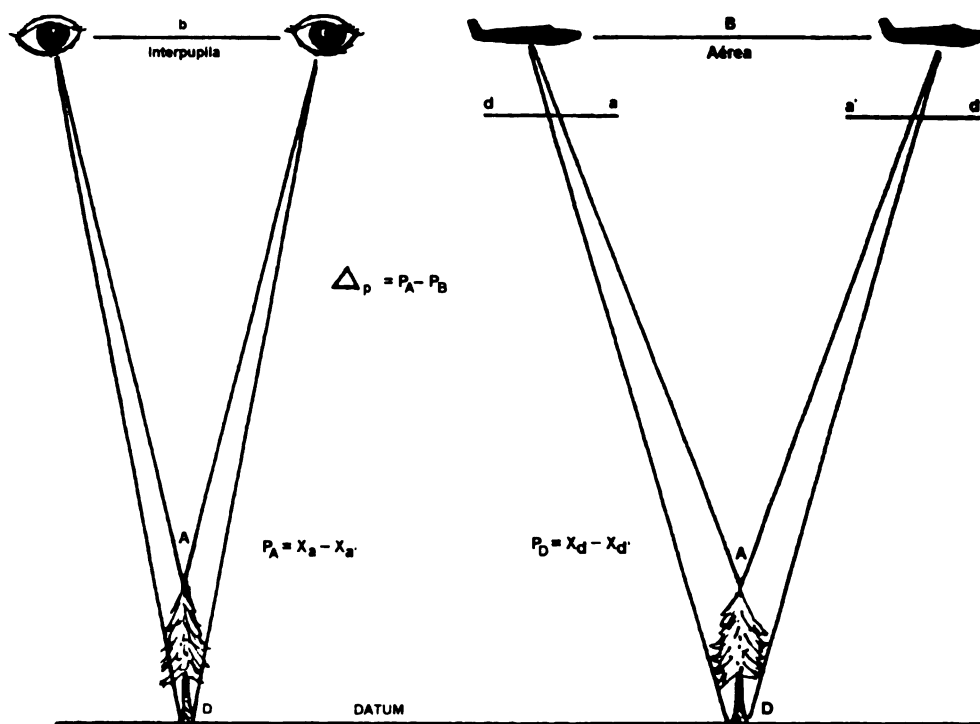


Figura 7-3. Analogía entre visión binocular normal y el modelo estereoscópico

Para formar el modelo estereoscópico y utilizar fotogramétricamente un par estereoscópico, éste debe cumplir las siguientes condiciones:

- a) Recubrimiento de aproximadamente un 60%.
- b) Eje de la cámara aproximadamente en un mismo plano.
- c) Base aérea no muy grande en relación con la altura de vuelo.
- d) Deben estar contenidos los puntos principales.
- e) Fotogramas con escalas sensiblemente iguales.

VII.1.3.2 Instrumentos para la observación tridimensional

El problema fundamental por resolver en la formación del modelo estereoscópico con un par de fotografías es eliminar la convergencia natural de los ojos y lograr el enfoque al infinito en distancias cortas. Para este fin se utilizan los instrumentos llamados estereoscopios.

Existen diversos tipos de estereoscopios, cuya diferencia fundamental es el método óptico usado para evitar que las líneas de visión converjan. Entre ellos, hay modelos que presentan ventajas o inconvenientes, ajustándose mejor a un tipo de trabajo u otro.

a) Estereoscopio de lentes

Es el tipo más simple de estos aparatos; consiste en dos lentes de poco aumento: aproximadamente $1.5 \times$, $3 \times$, separados entre sí por un largo correspondiente a una distancia interpupilar promedio del común de las personas. Sin embargo, encontramos un tipo de estereoscopio en que la distancia interpupilar se puede variar para una mejor adaptación del centro de los lentes a los ojos.

b) Estereoscopio de espejo

Este aparato, además de los lentes, posee prismas de reflexión que proyectan el haz luminoso, a su vez transmitido por unos espejos laterales que reflejan todo o casi todo el área de las fotografías en que es posible lograr visión estereoscópica. Además, lleva incorporados unos binoculares de aumento que permiten estudiar las fotografías con gran detalle.

VII.2 FOTOGRAFIA AEREA E INVENTARIOS FORESTALES

El proceso de inventario forestal puede definirse en forma general como una metodología cuyos objetivos de información son los siguientes:

- Localización de los recursos de superficie mediante mapas, con el objeto de planificar su estrategia de manejo y observar su interrelación con la infraestructura y centros de consumo de importancia.

- Captación de información sobre los recursos boscosos de un área, los que pueden ser medibles, estimables o contables.
- Estimación de existencias totales y parciales, obtenidas mediante la multiplicación de la superficie de las unidades básicas de inventariación por las existencias promedio por unidad de superficie; y mediante el cálculo de su respectivo error de estimación.

Considerando estos objetivos generales, se pueden diferenciar distintos niveles de utilización de las fotografías aéreas en el ámbito de los inventarios forestales, los cuales se indican en el Cuadro 7-1.

Cuadro 7-1. Intensidad de uso de la fotografía aérea en inventarios forestales (AKCA 1985)

Intensidad de uso	Forma de empleo de la fotografía	Instrumental necesario
1. Como medio de orientación terrestre	Análisis monocular de la fotografía aérea	Ninguno. Eventualmente, estereoscopio de bolsillo
2. Para estratificación de bosques	Análisis estereoscópico	Estereoscopio de espejo
3. Para determinación de volumen	Análisis estereoscópico 1. Analógico (gráfico) 2. Digital	1. Estereoscopio de espejo 2. Barras de paralaje 3. Restituidores simples 4. Restituidores digitales

1. La utilización más simple de la fotografía aérea en inventarios forestales es como medio de orientación terrestre. Por ejemplo, para la localización en campo de las unidades de muestreo. Un análisis estereoscópico de la fotografía aérea para este objetivo no es esencialmente necesario, sólo basta un análisis monocular.
2. Una forma más intensiva de usar las fotografías aéreas corresponde a la estratificación de una población (tipos y subtipos forestales). Para esta tarea, es necesario un análisis tridimensional de la imagen mediante el uso de la visión estereoscópica; eventualmente, la estimación o medición de algunos parámetros del bosque, como grado de cobertura de copa, mezcla de especies, altura media del rodal.
3. El grado más intenso de uso de las fotografías aéreas es en la determinación directa de volumen del bosque mediante el conteo, estimación o medición de variables fotogramétricas y de fotointerpretación. La información que se capta de la fotografía aérea vertical puede observarse en el siguiente esquema (Figura 7-4).

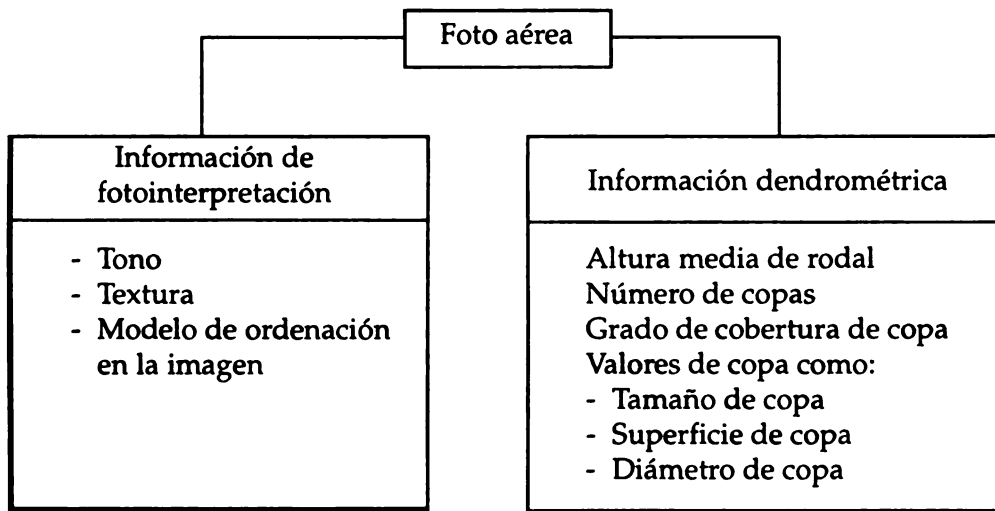


Figura 7-4. Información de fotointerpretación y fotodendrometría que se obtiene en fotografías aéreas verticales (SANDOVAL y REAL 1993)

VII.2.1 Información proveniente de un proceso de fotointerpretación

El área de recubrimiento de un par fotográfico permite al observador percibir relaciones entre los objetos y sus alrededores. La técnica de reunión, análisis y ordenamiento sistemático de datos proporcionados por las fotografías se denomina fotointerpretación. Al fotointerpretar, se examinan imágenes fotográficas con el propósito de identificar objetos y juzgar su significado. La fotointerpretación difiere de la observación aérea directa en la naturaleza de la perspectiva observada y las relaciones de tiempo. La permanencia y fidelidad de la imagen fotográfica permite al fotointérprete realizar un estudio más próximo y cuidadoso del área, pudiendo así interpretar en circunstancias más favorables que en la observación directa del terreno desde el avión.

Gran parte del proceso de fotointerpretación es subjetivo, por lo que con propiedad podría calificársele como arte y no como ciencia. La identificación de los objetos depende en gran medida de la visibilidad de éstos en el par estereoscópico: en realidad no es el objeto el que vemos, sino su representación en una imagen.

La visibilidad de los objetos no es nunca una visibilidad directa; depende, en primer término, de las características propias del objeto (tamaño, forma, relación con el ambiente, etc.), y en segundo término, de la clase, escala y calidad de las fotografías usadas.

Una clasificación de distintos rangos de escala fotográfica en relación con los objetivos de uso en el ámbito forestal, se muestra en el siguiente cuadro.

Cuadro 7-2. Escalas fotogramétricas y características forestales observables (HUSS 1984)

Escala fotográfica	Características forestales observables o medibles	Factor o característica utilizable en la imagen fotográfica
1:30000 - 1:60000	Tipos y eventualmente subtipos forestales	Contraste tonal y de textura
1:15000 - 1:30000	Estratos forestales de distintas alturas, eventual cubicación aérea	Textura, tono y altura promedio de rodal
1:5000 - 1:15000	Composición de especies en rodal, volumen de árboles. Daños forestales	Tono, textura. Detalles de la copa en árboles individuales

Las fotografías de escala grande y muy grande se usan para la estimación de medidas fotogramétricas (estimación de parámetros de masa) o estratificación refinada basada en criterios calculados cuantitativamente. En cambio, las de escala media permiten sólo una estratificación más amplia basada en criterios cualitativos (incluyendo presencia de especies), o en criterios cuantitativos estimados (tales como densidad de copas o altura de los árboles dominantes); mientras que si se trabaja con las fotografías de escala pequeña sólo es posible una estratificación basada en clases amplias de criterios cuantitativos y también cualitativos, excluyendo en muchos casos la presencia de especies.

Respecto a la cámara para fotointerpretación forestal, se recomienda una distancia focal grande (cámara ángulo normal) como por ejemplo 210 a 300 mm para escalas desde 1:5.000 a 1:30.000 y focales cortas como 150-115 mm para escalas de 1:30.000 o más pequeñas. Si se toman escalas grandes con una distancia focal corta, las fotografías presentarán un desplazamiento excesivo de los árboles, mientras que una distancia focal más grande proporcionará una mejor concepción del bosque y de los árboles donde la densidad de éste lo permita.

Al requerirse fotografías de gran nitidez y un máximo de detalles, es de vital importancia la elección de una película adecuada. La velocidad de exposición y el tiempo de revelado de una película dependen del tamaño de los granos o compuestos de plata: cuanto más grandes sean éstos, más rápida es la película, pero el contraste es menor; y al contrario, las películas de grano fino son menos rápidas, pero de alto contraste. El poder de resolución de la película también depende del tamaño de los granos: películas con grano fino poseen un gran poder de resolución y las de grano mayor un grado de resolución menor.

Las características de la película se elegirán de acuerdo con los fines perseguidos. La sensibilidad de la película a las diferentes longitudes de onda del espectro magnético tiene una gran importancia, y de acuerdo con ella las más comunes de encontrar son:

- **Película pancromática:** Su sensibilidad va desde 0.40 a 0.68 μ ; cubre las radiaciones del azul violeta, azul, verde, amarillo naranja y rojo, es decir, todo el espectro electromagnético visible. Es la película más difundida y usada en la actualidad y estará presente aún por muchos años en el ámbito de la fotointerpretación forestal.

- **Película infrarroja blanco y negro:** Su sensibilidad abarca desde 0.55 a 0.84 μ ; se caracteriza por una gran sensibilidad a la faja azul, una falta de ésta en la faja verde y una marcada sensibilidad en la faja del infrarrojo cercano. El costo de la película es cerca de un 20% mayor que la pancromática, y se necesitan condiciones especiales para su almacenamiento y conservación. La película infrarroja se usa mucho en la fotointerpretación forestal para separar especies coníferas de latifoliadas, que aparecen en la imagen infrarroja bastante contrastadas. Son importantes, además, en estudios hidrológicos, ya que por la característica del agua de absorber la radiación infrarroja, los cuerpos y cursos de agua aparecen claramente identificables en la imagen, presentando una tonalidad oscura, casi negra.
- **Película en colores:** La película en colores está compuesta de tres capas, sensibles cada una a un color aditivo primario (azul, amarillo, rojo), o sea, es sensible a las longitudes de onda que van desde 0.4 a 0.7 μ . Después de la exposición y mediante el proceso de desarrollo, cada una de las capas adquiere un color sustractivo determinado, produciéndose por sustracción de colores la imagen deseada. La película en colores no ha sido muy usada en fotointerpretación, debido principalmente a su costo y su necesidad de almacenaje especial. En la actualidad, estas desventajas tienden a desaparecer, visualizándose ya este tipo de fotografías en colores como una poderosa herramienta de fotointerpretación forestal, especialmente en el campo de las prospecciones de daños y comunidades forestales.
- **Película infrarroja en colores:** Esta fotografía se obtiene también con una película de tres capas, siendo cada una de ellas sensible a un tipo de radiación determinado. Una capa es sensible al verde, otra al rojo y otra al infrarrojo; y las tres son sensibles a la radiación azul, razón por la cual debe usarse siempre con un filtro amarillo. Después del revelado, una imagen positiva amarilla aparece grabada en la capa sensible al verde, e imágenes positivas magenta y cian aparecen en las capas sensibles al rojo e infrarrojo respectivamente. Si la imagen positiva amarilla de la capa sensible al verde es brillante, predominarán cian y magenta, colores que se combinarán para formar el azul. Se forman varios otros colores, dependiendo de las proporciones de radiación verde, rojo e infrarrojo transmitidas por los objetos. Este tipo de películas es recomendado especialmente en la detección previsional de plagas forestales, pues generalmente los daños fisiológicos hacen decrecer la reflexión infrarroja cercana antes que se presenten signos visibles de infestación. El corrimiento de los colores utilizados en la película infrarroja y la alta reflectividad de la vegetación verde en el infrarrojo cercano hacen que la vegetación verde sana aparezca en la imagen de un color rojo intenso; el follaje decadente aparece en amarillo y el follaje muerto en color verde oscuro. Debido al fuerte contraste de color, los árboles muertos o por morir se aprecian más rápidamente que con otros tipos de películas, aun cuando la seguridad de interpretación es semejante a la obtenida con películas en colores normales.

Con el objeto de enfatizar o detener la radiación de alguna longitud de onda del espectro a la cual la película usada es sensible, se usan filtros. Estos constituyen una pantalla que se interpone al paso de la luz, con el fin de excluir ciertas longitudes de ondas y dejar que pasen otras. Esta propiedad de los filtros les confiere especial importancia en la obtención de imágenes para ser fotointerpretadas, ya que permite mejorarlas.

VII.2.2 Reconocimiento de especies y tipos forestales

La posibilidad de reconocer e identificar especies en las fotografías aéreas depende de factores asociados con la especie en cuestión, como tamaño, forma de la copa, hábito de crecimiento, etc., y de las características del vuelo utilizado, dentro de las que destacan la escala de las fotografías y la película. En muchos casos, sólo es posible la identificación de un conjunto de especies forestales o tipo forestal de un área.

VII.2.3 Organización de un proceso de fotointerpretación

El desarrollo de cualquier proyecto o catastro de los recursos naturales en su fase de fotointerpretación requiere el cumplimiento de las siguientes etapas:

1. Definición de objetivos.
2. Recopilación de información básica y su elaboración.
3. Fotointerpretación preliminar.
4. Planificación y ejecución de campaña de terreno.
5. Fotointerpretación y delineamiento definitivo del uso actual del terreno, de acuerdo con objetivos previamente definidos.

VII.2.3.1 Definición de objetivos

Definir formalmente los objetivos del estudio por realizar constituye la primera etapa de un proceso de interpretación. La importancia de esta primera parte radica en que aísla las interrogantes, esclareciendo los alcances y restricciones del trabajo. Los objetivos deben formularse con el máximo de rigurosidad, puesto que en ellos se basa la elección de un nivel de percepción adecuado, y en consecuencia, el tipo de información y el detalle que entregará el estudio.

VII.2.3.2 Recopilación de información básica

Con esta segunda etapa se pretende obtener de los organismos competentes, la información cartográfica, fotográfica, bibliográfica, antecedentes legales, materiales menores, etc. necesarios para la ejecución y planificación de las restantes actividades del proyecto.

Al terminar esta etapa, se contará con información preliminar evaluada y sistematizada, y con los materiales cartográficos necesarios para la marcha del proyecto. Los elementos cartográficos de mayor relevancia se mencionan a continuación:

- Planos regionales de ubicación, planos prediales de la empresa o zona bajo estudio.
- Cubierta fotográfica positiva y ortofotos.
- Cartas sectoriales.
- Material bibliográfico de estudios anteriores.

VII.2.3.3 Fotointerpretación preliminar

Parte con la delimitación de las áreas efectivas en las fotos aéreas, definidas como la porción central de cada foto delimitada por las bisectrices con las fotos de la misma línea de vuelo y las líneas adyacentes.

La fotointerpretación preliminar del área efectiva tiene como objetivo subdividir la superficie en estudio en clases de uso homogéneo. Para ello es necesario ceñirse en forma estricta a los objetivos inicialmente planteados.

VII.2.3.4 Planificación y ejecución de campaña de terreno

Tomando en cuenta el personal, los recursos materiales disponibles y las características de área de estudio, se planificará la campaña terrestre.

Conforme a lo anterior, se confecciona un calendario y recorrido de trabajo, intentando cubrir al máximo zonas no identificadas en la fotointerpretación preliminar, como también corroborando algunas unidades abstractamente clasificadas (ETIENNE y PRADO 1982).

VII.2.3.5 Fotointerpretación y delineamiento definitivo

Incluye la descripción de las superficies delineadas en el proceso de análisis y su inclusión dentro de un sistema de clasificación para su uso en el trabajo de terreno, o para su publicación (si previamente se han incorporado antecedentes suficientes). Considera también la creación de un sistema de codificación para expresar el sistema de clasificación. En fotointerpretación esta clasificación se basa en la comparación de las superficies por clasificarse. El proceso de clasificar es a menudo indicado en la fotointerpretación; aún más, frecuentemente es su fin.

El proceso de fotointerpretación anteriormente explicado puede esquematizarse según el siguiente diagrama de flujo (Figura 7-5):

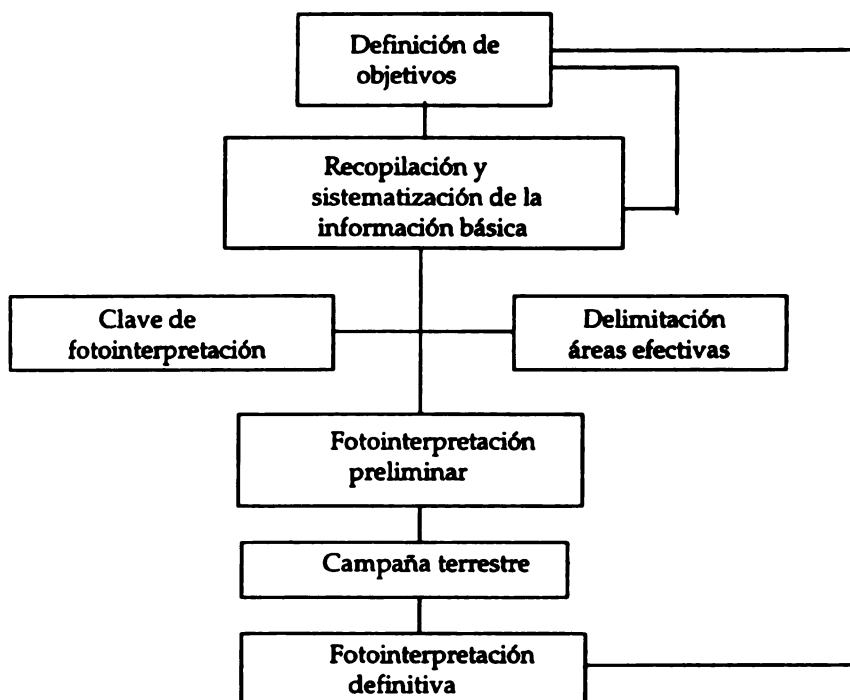


Figura 7-5. Diagrama simplificado de un proceso de fotointerpretación

VII.2.4 Manipulación de fotografías

Para una correcta manipulación de las fotografías aéreas es necesario manejar la siguiente información:

- **Información marginal:** Aparece en el borde de la fotografía y contiene, como mínimo, la siguiente información: lectura del altímetro con altura de vuelo sobre el datum, nivel con número de la cámara y distancia focal calibrada de ella, hora de obtención de la fotografía e identificación del vuelo.
- **Marcas fiduciales:** Marcas en forma de cruces u otras señales impresas en los bordes de la fotografía y que definen el punto principal.
- **Punto principal:** Centro geométrico del fotograma, que se obtiene mediante la intersección de las marcas fiduciales opuestas.
- **Punto principal conjugado:** La imagen del punto principal de una fotografía en la anterior o siguiente. La línea que une el punto principal y el conjugado en una foto define aproximadamente la dirección del vuelo y se llama precisamente línea de vuelo. Cuando se colocan las fotografías de modo que los puntos principales y los dos conjugados estén sobre una misma línea, se obtiene la mejor posición para la observación estereoscópica.

VII.2.5 Información fotodendrométrica

En los siguientes puntos se presenta información sobre algunas mediciones posibles de realizar en las fotografías aéreas que están relacionadas con características cuantitativas de bosques y rodales y que pueden ser utilizadas como estimaciones de parámetros de rodal o con fines de aplicación de modelos de inventarios forestales multifásicos-multietápicas combinados.

a) Número de árboles

El número de árboles por ha se usa comúnmente como una medida de densidad. En rodales abiertos, en los cuales las copas se aprecian separadas e identificables, es posible hacer el conteo de árboles en las fotografías aéreas. En rodales densos, el conteo de árboles es difícil de realizar: los árboles suprimidos y muchos de los intermedios no se pueden visualizar, y frecuentemente se cuentan como una sola copa las copas de dos o tres árboles, o viceversa.

El número de árboles se determina normalmente en parcelas circulares de cierta superficie, cuyo radio depende de la escala de la fotografía en uso. Esta medición se realiza generalmente sólo en fotografías de escalas grandes (1:10.000) y puede emplearse sobre todo en rodales ralos o semirralos, o en bosque nativo de dos estratos, donde las copas dominantes se distinguen claramente.

b) Diámetro de la copa

Es una variable que, en conjunto con la altura, se usa en la predicción del diámetro a la altura del pecho. También se usa al construir tablas de volumen para árboles individuales aplicables a rodales poco densos.

Existen diversas definiciones de esta variable:

- **Ancho total de la copa:** Es el promedio de una medición realizada en el punto más ancho de la copa y otra perpendicular a ella.
- **Ancho efectivo de la copa:** Es el promedio de dos mediciones en ángulo recto, en las cuales las ramas de la copa son despreciadas.
- **Diámetro de la copa:** Distancia medida en ángulo recto a una línea trazada desde el punto principal de la fotografía hacia el centro de la copa.

La medición del diámetro de la copa es básicamente una medición de distancia y puede realizarse sólo en fotografías de escala grande en las que las copas puedan identificarse claramente. Esta medición dependerá también de la forma de las copas que se analizan y de la densidad del rodal.

Se usan dos elementos en la medición de esta variable. El primero es denominado **cuña de diámetros**, consistente en dos líneas divergentes cuya distancia en mm está graduada en uno de sus lados. En uso, la cuña se pone sobre el modelo estereoscópico tangente a dos puntos opuestos de la copa, y la lectura así obtenida se transforma en diámetro a través de la escala de la foto. El otro elemento de medición consiste en una serie de puntos testigo de diferente tamaño, los que se comparan en el modelo estereoscópico con el tamaño de la copa utilizada, realizando la lectura del diámetro en el punto cuya dimensión es la más cercana al tamaño de la copa. La lectura encontrada se transforma en diámetro con la escala de la foto (Figura 7-6).

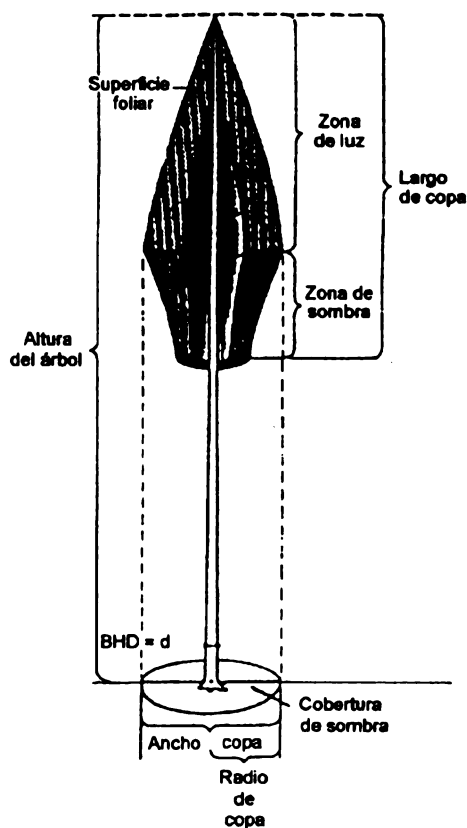


Figura 7-6. Definición de diámetro de copas

c) Cubrimiento del suelo por las copas

Se define como la proporción del área de un rodal cubierto por la superficie de la copa de los árboles. Esta variable se usa como una medida de densidad y en algunos casos reemplaza al área basal, medición no factible de ser realizada en las fotografías.

Para determinar el valor de esta variable, se puede recurrir al uso de una fina red de puntos y determinar en una fotoparcela la proporción de puntos sobre las copas en relación con el número total de puntos. Los valores obtenidos se expresan en forma porcentual (ej.: 0.7 = 70%). Esta medición puede realizarse con facilidad en fotografías a escala grande 1:10.000 y en rodales abiertos.

En escalas más pequeñas, se recurre a estimaciones visuales bajo el estereoscopio. Como metodología puede adoptarse la siguiente:

- a) Dividir la fotoparcela en cuadrantes y determinar el porcentaje de cubrimiento en cada uno de ellos.
- b) Transformar estas estimaciones parciales en el total de la fotoparcela.
- c) Mentalmente, agrupar en un sector de las fotoparcels todas las copas visibles y determinar cuál es el porcentaje de la fotoparcela ocupado por ellas.

Como ayuda visual de la determinación de esta variable se han desarrollado las denominadas escalas de densidad, que consisten en arreglos sistemáticos o aleatorios de puntos distribuidos sobre una superficie fija, de manera de representar un porcentaje dado de la superficie de referencia. Si la escala de densidad se imprime en papel transparente, ésta podrá compararse directamente con la imagen estereoscópica del rodal (Figura 7-7).

Finalmente, de acuerdo con los métodos indicados en el punto anterior, la información fotodendrométrica puede ser estimada con la siguiente exactitud, en fotografías aéreas en el rango de escalas 1:5000 - 1:15000 (Cuadro 7-3).

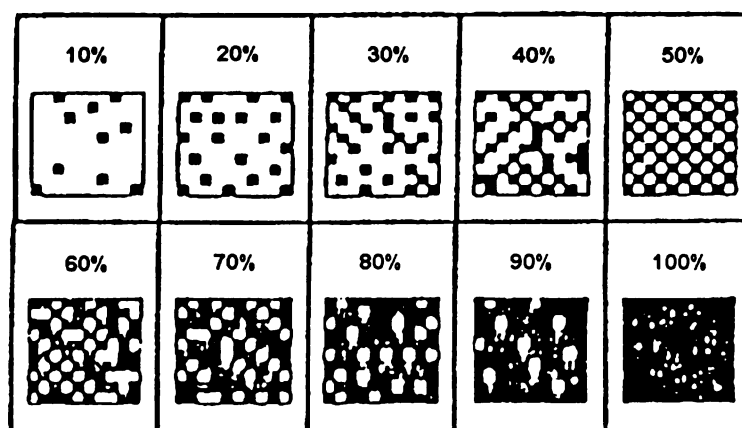


Figura 7-7. Escala de comparación para estimación de cobertura de copa MOSSER

Cuadro 7-3. Calidad de información fotodendrométrica estimada y medida en fotos aéreas verticales, escala 1:5000 -1:15000 (HUSS 1989)

Información fotodendrométrica	En fotografía aérea			
	Estratificable	Estimable	Contable	Medible
Altura de árboles	++	+ (2 m-3 m)		++ (1-1.5)
Número de copas	++		++	+
Valores de copas				
- diám. de copa	+			+10%
- superf. de copa	++			+ 5%
- largo de copa	+			+ 5%
Grado de cobertura de copas	++	+ (0.2)		++ 0.1
Clases de edad		++		

+ Bueno

++ Excelente

VII.2.6 Cubicación aerofotogramétrica. Métodos de estimación del volumen

VII.2.6.1 Comparación visual

El método tiene su base en la comparación que el fotointérprete realiza entre un modelo de rodal cuyo volumen es conocido (estereograma) y el rodal de su interés. En estas circunstancias, es posible analizar una gran cantidad de variables y factores de interpretación que pueden conducir a buenas estimaciones del volumen (ej.: tono, textura, densidad, alturas, etc.). El método, denominado también "de los estereogramas", es de fácil y rápida aplicación, siendo su principal inconveniente la subjetividad con que se realizan las estimaciones. Estas son de uso local y están restringidas al número de condiciones (sitio, topografía, edades, etc.) cubiertas por los estereogramas de comparación.

VII.2.6.2 Tablas de volumen para uso con fotografías aéreas

Se basan en el uso de relaciones funcionales entre el volumen de los árboles y/o rodal y las variables que son medibles en las fotografías aéreas. Ejemplos: altura, cubrimiento del suelo por las copas, diámetro de copas. Según la escala de las fotografías aéreas y las características de los rodales a los cuales se apliquen, se han desarrollado dos tablas como solución al problema.

VII.2.6.3 Tablas de volumen para árboles individuales

Son ecuaciones que entregan el volumen de cada árbol en función de variables de individuo tales como diámetro de la copa, superficie de la copa, altura del árbol y

transformaciones e interacciones de estas variables. Las funciones de volumen para árboles individuales son sólo aplicables en rodales poco densos y con fotografías de escala muy grande (1:5.000 o mayores), lo que limita fuertemente su aplicación.

Este tipo de funciones presenta como ventaja la posibilidad de desagregar las existencias por clases de dimensión, como por ejemplo, clases de diámetro de copa. Se ha demostrado que en algunas especies existe una fuerte relación entre tamaño de copa y el DAP, situación que permite adicionalmente la desagregación de las existencias por clase diamétrica. Aprovechando esta relación, una función local de volumen puede transformarse en una tabla de volumen aéreo.

Las estimaciones a nivel de hectárea, con el uso de este tipo de funciones, están afectadas además por el error proveniente del conteo del número de árboles en la fotografía.

VII.2.6.4 Tablas de volumen de rodal

El uso de tablas de volumen de rodal es la solución más sencilla para la obtención del volumen por hectárea, basada en mediciones fotogramétricas y en estimadores de razón y/o regresión. Las variables de uso común son las que estiman el volumen con la altura media de la fotoparcela, el porcentaje de cubrimiento del suelo por las copas y el número de copas visibles (estrato superior) como variables dependientes. Este tipo de funciones puede incluir también otras variables, como la combinación de las variables básicas o la expresión cuadrática o cúbica de éstas.

Para la cubicación aérea del bosque siempreverde en la costa de la provincia de Valdivia en Chile, se emplearon estimadores de regresión que tuvieran como variables auxiliares la cobertura de copas y la altura promedio del rodal. Los resultados obtenidos para estimar el volumen bruto del estrato superior del bosque fueron superiores en un 50% a un inventario forestal sólo con parcelas terrestres, y presentaron un error de muestreo menor.

VII.3 PRODUCCION DE CARTOGRAFIA FORESTAL

El proceso cartográfico comprende las metodologías y procedimientos destinados a producir la cartografía necesaria para satisfacer los objetivos de información del inventario (ETIENNE y PRADO 1982; REAL y SANDOVAL 1983).

La elección de una alternativa técnica para producción de cartografía forestal en un proyecto de inventario deberá considerar aspectos tales como: fondos disponibles, tiempo para realizar el inventario, área mínima de inventariación, valor del bosque y factibilidad técnica de la metodología que se desee implementar. Tradicionalmente, se han empleado las siguientes alternativas de producción de cartografía forestal:

VII.3.1 Mosaicos controlados

Un mosaico fotogramétrico está formado por la unión de un conjunto de fotografías aéreas para dar una visión general del área bajo estudio. Es práctica común someter las fotografías aéreas que se utilizarán en el mosaico a un procedimiento de rectificación que consiste en eliminar la inclinación y en homogeneizar las escalas de las fotos. No obstante, en las fotografías rectificadas persisten problemas de desplazamiento causados por el relieve y cambios de escala debidos a las distintas elevaciones del terreno.

Las fotografías rectificadas pueden montarse sobre una red de puntos de control, formando lo que se denomina un mosaico controlado que constituye un valioso elemento de planificación y, en algunos casos, la primera fuente de información cartográfica a la que el inventariador puede recurrir. Un mosaico fotogramétrico no es un mapa y por lo tanto está sujeto a las mismas limitaciones que se describen en la sección VII.3.6 en cuanto a medición de superficies y distancias para las fotografías aéreas verticales.

VII.3.2 Actualización de cartografía restituida

La existencia de cartografía regular de un país para el área de un inventario posibilita obtener cartografía forestal haciendo uso de instrumentos actualizadores que, basados en el principio de coincidencia de imágenes, permiten corregir parte del desplazamiento causado por el relieve y los cambios de escala presentes en las fotos.

El instrumento de uso más generalizado en la transferencia de información foto/carta es el denominado "sketchmaster". Este instrumento, haciendo uso de un prisma (sketchmaster vertical) o de un espejo del 50% (sketchmaster horizontal), presenta al observador en forma simultánea la imagen de la foto interpretada y del plano base a actualizar. Ambos instrumentos tienen un mecanismo de ajuste que permite cambiar la escala y hacer coincidir detalles o puntos de control en el mapa con la misma información de las fotografías.

Existen otros instrumentos que incluyen mejoras con respecto a los mecanismos de observación y ajuste de imágenes propias del sketchmaster, dentro de los cuales cabe mencionar el Zoom Transfer Scope de Baush y Loom, instrumento que ha reemplazado al sketchmaster en operaciones de cartografía forestal en muchos países.

La actualización con instrumentos basados en coincidencia de imágenes es un paso adelante en relación con el uso de mosaicos. Sin embargo, debe tenerse presente que los instrumentos mencionados no eliminan sino que corrigen parte del desplazamiento y los cambios de escala en las fotografías.

VII.3.3 Restitución aerofotogramétrica

La estéreorrestitución o restitución aerofotogramétrica comprende un conjunto de procedimientos destinados a obtener, mediante el uso de un par de fotografías con recubrimiento, un modelo estereoscópico geoméricamente semejante al terreno fotografiado. La palabra restitución alude en forma precisa a la necesidad de recrear el momento de la exposición de un par con el fin de cumplir con el objetivo señalado (HUSS 1984).

Los primeros instrumentos de restitución, denominados de proyección directa, consistieron en dos o más proyectores con una distancia principal igual a la de la cámara con la cual se obtuvieron las fotos. En ellos se montaban diapositivas del par fotográfico. Los proyectores podían ser girados con respecto a los ejes X (rotación omega), Y (rotación ϕ) y Z (rotación kappa); además, los proyectores podían ser trasladados con respecto a los tres ejes mencionados (traslaciones X , Y y Z) en los procedimientos para recrear en forma exacta el momento de la exposición.

Los instrumentos de este tipo han sido reemplazados casi en su totalidad por otra generación de instrumentos fotogramétricos que usan un principio de proyección denominado óptico-mecánico, que simulan la proyección directa de los haces luminosos mediante el uso de dos barras metálicas con manufactura de alta precisión. Estos instrumentos fueron desarrollados fundamentalmente en Europa, pero han sido universalmente aceptados debido a su versatilidad, conveniencia de operación, alta precisión y estabilidad.

Los instrumentos de proyección directa y los óptico-mecánicos se denominan analógicos debido a que en ellos se realizan los procedimientos de orientación necesarios para recrear el instante de la exposición, imprimiendo giros o movimientos a proyectores que simulan la cámara aérea para crear un modelo tridimensional exacto del terreno.

El concepto de restitución analógica se opone al de restitución analítica, en el cual los elementos de orientación de un par fotográfico son calculados mediante programas computacionales, que transforman las coordenadas medidas sobre el modelo estereoscópico en coordenadas terrestres. Los instrumentos de restitución analíticos constituyen la tercera generación de restituidores.

VII.3.4 Ortofotografía

Una ortofotografía es una fotografía que muestra la imagen de los objetos en su verdadera posición ortogonal. Dada esta característica, las ortofotografías son geoméricamente equivalentes a los mapas planimétricos convencionales que, mediante líneas y símbolos, muestran la posición ortogonal de los objetos en un plano. La diferencia más importante entre ortofoto y mapa es que la primera está compuesta de imágenes de los elementos planimétricos del terreno, en tanto que los mapas utilizan líneas y símbolos restituidos a una cierta escala para representar la planimetría.

Debido a que las ortofotografías son planimétricamente correctas pueden utilizarse como los mapas para la medición directa de distancias, posiciones de objetos y superficies sin realizar correcciones de desplazamiento por relieve, como en el caso de una fotografía aérea convencional. La técnica ortofotoscópica permite transformar en mapas fotográficos (proyección ortogonal) fotos aéreas, incluso las de terrenos accidentados. La producción de ortofotografías se realiza mediante un proceso denominado «rectificación diferencial», que elimina el desplazamiento de la imagen debido al relieve e inclinación presentes en una fotografía vertical o casi vertical. Durante el proceso de rectificación diferencial se eliminan cambios de escala, llegando ésta a ser constante para toda la imagen, por lo que la ortofoto posee las mismas características que un mapa (AMERICAN SOCIETY OF PHOTOGRAMMETRY 1975).

VII.3.4.1 Ventajas del uso de ortofotomapas

Los mapas preparados con ortofotos tienen ventajas sobre los mapas planimétricos y las fotografías aéreas, ya que combinan la abundancia de detalles, claridad de imagen y actualidad de la foto aérea, con la exactitud planimétrica de un mapa dibujado. El poder correlacionar imágenes del ortofotomapa con lo que realmente se observa en terreno es importante en muchos usos forestales de la ortofotografía. Esta puede utilizarse, por ejemplo, para clasificar y delinear diferentes tipos forestales, clases de manejo, rodales de distinta edad, límites prediales, etc. En su verdadera posición, directamente sobre el ortofotomapa. En Chile se practica bastante la actualización de ortofotos, empleando fotografías en colores no métricas obtenidas con avionetas.

Debido a la posibilidad de correlacionar la imagen con el terreno, los ortofotomapas constituyen una buena herramienta para preparar planes de vuelo. Son, además, un excelente elemento de comunicación: el común de las personas, en general, puede entenderlos mejor que los mapas regulares con símbolos. Con el uso de ortofotos, un profesional forestal puede discutir con mayor claridad con los propietarios sobre problemas de delimitación predial, servidumbres, compras, accesos, etc.

Comparados con el mapa convencional, los ortofotomapas en general pueden ser preparados más rápidamente y a menor costo, especialmente en mapeo de escalas pequeñas (escalas menores que 1:20.000) o en sectores con una alta densidad de detalles planimétricos y culturales (ej.: áreas urbanas). En algunos casos, sin embargo, el costo de reproducción puede eliminar los ahorros obtenidos con el menor tiempo de confección del ortofotomapa.

Un ortofotomapa no ofrece información sobre la elevación, pero puede servir de mapa base sobre el cual se superponen curvas de nivel derivadas de una restitución. La superposición se denomina ortofotomapa topográfico. Como la ortofotografía elimina la necesidad de restituir la planimetría, permite reducir los tiempos y costos involucrados en su producción, además de eliminar el riesgo de omisión de detalles que puede ocurrir en una restitución convencional. La apariencia de una ortofotografía puede ser mejorada y suplementada agregándole líneas, símbolos y nombres.

VII.3.5 Presentación de la cartografía forestal

El uso actual del suelo, reflejado en los mapas en una leyenda, debe ser definido de manera tal que cumpla con dos fines: a) que dicha leyenda presente la información necesaria y suficiente para los usuarios de la cartografía y b) que sea representada de manera clara y sencilla en los mapas, sin complicar su lectura y entendimiento. Por razones de costo, la reproducción de planos prediales no cuenta con colores, lo que limita el número de características posibles de representar con el riesgo de comprometer seriamente la legibilidad del documento (SANDOVAL y REAL 1993).

En general, los siguientes elementos básicos podrían ser parte de una leyenda del uso actual del suelo:

- Nombre del predio, escala del mapa, norte magnético, fecha de su última actualización, autor y base cartográfica utilizada.
- Plano de ubicación predial que muestre los accesos principales claramente definidos y los centros urbanos más cercanos.
- Ubicación administrativa del predio con respecto a la división política del país.
- Leyenda caminera, de acuerdo con los niveles definidos por los departamentos de caminos y explotación.
- Red hidrográfica, diferenciando los diversos cauces de acuerdo con sus características: ríos, esteros, cauces estacionales, etc.
- Límites del uso actual: debe clasificarse toda la superficie predial dentro de alguna categoría, de manera que la superficie total predial se mantenga siempre constante. Aun cuando las categorías del uso actual pueden ser representadas en el mapa con un mismo tipo de línea, la identificación de ellas debe ser proporcionada por un rotulado dentro de la clase de uso, que contenga por lo menos la siguiente información:

Plantaciones

Bosque natural

Matorral

Terrenos agrícolas

Casas y elementos culturales

Terrenos de protección

VII.3.6 Mediciones de superficie

La determinación de superficies mediante fotografías aéreas es uno de los principales aportes que esta poderosa herramienta ha hecho a la ciencia forestal, superando una de las grandes limitaciones e inconvenientes de los levantamientos terrestres.

Dependiendo del grado de exactitud requerido, las clases de uso actual interpretadas sobre las fotografías aéreas pueden ser medidas directamente sobre las fotos, en mapas planimétricos o mosaicos controlados actualizados con la información de las fotografías. En áreas planas o de relieve moderado, los errores producidos por diferencias de escala y desplazamiento por relieve en la foto no afectan la determinación de superficies en más de un 5%. En áreas con diferencias de alturas moderadas o fuertes, el error debido a la variación de la escala puede ser considerable; en este caso, ellas deberán medirse sobre mapas antes que sobre fotografías. Los mapas preparados con fotos aéreas minimizan o eliminan los errores inherentes a ellas, dependiendo del tipo de instrumento que se use en la transferencia de información de las fotos al plano. Detalles sobre los métodos corrientes de medición de áreas se entregan en el Capítulo III.4.

VII.4 SISTEMAS DE INFORMACION GEOGRAFICOS (SIG)

El uso de un sistema de información geográfico (SIG) es una solución eficiente en el manejo integrado de la información sobre recursos naturales y mapas. Un SIG es esencialmente un sistema de programas computacionales usados para almacenar, organizar, recuperar y analizar datos sobre los recursos de acuerdo con sus relaciones espaciales. La información se guarda en un formato de base de datos organizada de acuerdo con su ubicación espacial. En este aspecto, la información en un SIG constituye una representación simbólica de lo que realmente existe en el terreno. Incorporada dicha información al sistema, los datos pueden ser recuperados y analizados en formatos que respondan a la resolución de problemas específicos del manejador del recurso. Con un SIG, la interpretación de las relaciones espaciales puede ser automatizada, lo que en gran medida simplifica el uso de información de naturaleza diversa.

Sin embargo, un SIG no está destinado sólo al almacenamiento y reproducción de mapas que pueden ser de interés para una comunidad o individuo, sino que debe además permitir la integración de varios tipos de datos geográficos y de atributos para dar respuesta a preguntas tan específicas como: ¿qué tratamientos silviculturales fueron aplicados a los rodales de pino insigne durante los últimos cinco años?, ¿qué tipos de suelo se encuentran en las propiedades de una determinada empresa forestal?, etc.

Por otra parte, debe establecerse a priori que un sistema de información geográfico no es un elemento destinado a la producción de cartografía, sino que constituye una poderosa herramienta para el almacenamiento, administración y uso de la información cartográfica y de atributos existente. El uso de un SIG no mejorará la calidad o precisión de la cartografía disponible, sino que facilitará su consulta y aplicaciones, haciendo que el flujo de información sea expedito, oportuno y de alta flexibilidad.

VII.4.1 Ambiente computacional y SIG

Hay una gran diversidad de configuraciones de "hardware" que se encuentran disponibles en el mercado para explotar sistemas de información geográficos, desde sistemas adaptados para ser usados en computadores PC, PS/2 o compatibles con DOS, hasta sistemas que sólo pueden ser explotados en grandes computadores ("mainframe").

Cualquiera sea la configuración de hardware en donde resida el SIG, existen una serie de elementos comunes que deben ser incluidos en la instalación:

1. **Computador:** Corazón de la configuración elegida y que en gran medida determinará la velocidad de operación y tiempos de respuesta del SIG, como también la posibilidad de manejar exitosamente áreas geográficas grandes.
2. **Unidad de disco:** Sistema magnético de almacenamiento que permite un acceso rápido a la información almacenada; puede ser un elemento limitante del sistema, aun cuando hoy existen discos de grandes capacidades que no significan un alto costo.
3. **Unidad de cinta:** Unidad magnética de almacenamiento masivo, facilita el archivo de información histórica o de elementos de la base de datos que no se necesita que estén en línea en un momento determinado. La unidad de cinta es también el elemento más universal de transferencia e intercambio de información con otros sistemas o instalaciones.
4. **Mesa digitalizadora:** Permite el ingreso manual de la información gráfica al SIG; es también un elemento importante en la actualización de la base de datos gráfica y en la edición y corrección de la misma.
5. **Pantallas gráficas y alfanuméricas:** Son los elementos de comunicación y despliegue de la información gráfica contenida en la base de datos. Permiten la interrogación interactiva de la base de datos gráfica.
6. **Impresora de líneas:** Elemento para la reproducción de informes.
7. **Plotter:** Instrumento de dibujo computacional manejado por el SIG, que permite producir cartografía de alta calidad.

La interrelación del sistema de información geográfico con los elementos del hardware arriba mencionados se muestra gráficamente en la Figura 7-8.

VII.4.2 Elementos de un SIG

Los sistemas de información geográficos pueden estar formados por una gran cantidad de sofisticados programas computacionales. Sin embargo, todos ellos deben contener como mínimo los siguientes componentes fundamentales (DUANE y MARBLE 1987):

1. Un subsistema de entrada de datos, que recibe y procesa datos espaciales derivados de mapas existentes, sensores remotos, reconocimientos terrestres, etc.
2. Un subsistema de almacenamiento y recuperación de información, que organiza los datos espaciales de manera que permita su fácil recuperación para análisis posteriores, a la vez que posibilite una exacta y rápida actualización y corrección de la base de datos gráfica.
3. Un subsistema de manipulación y análisis, que realiza funciones como por ejemplo cambiar la forma de los datos según reglas definidas por el usuario o producir estimaciones de parámetros y restricciones para varios modelos de simulación espacio-tiempo.
4. Un subsistema de informes, capaz de desplegar toda o parte de la base de datos original, como los datos manipulados y las salidas de modelos espaciales, en forma tabular o de mapas.

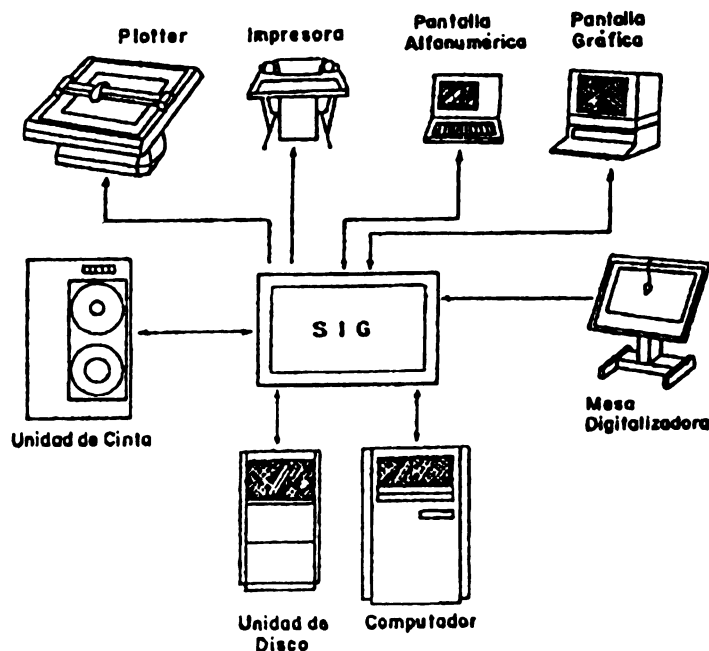


Figura 7-8. Ambiente computacional de un SIG

Las cuatro condiciones enumeradas excluyen como no aptos como SIG numerosos paquetes computacionales que satisfacen sólo alguna de ellas, como por ejemplo: sistemas de digitalización cuya aplicación se centra en el problema de almacenamiento de datos, proveyendo una mínima capacidad de recuperación y análisis; sistemas de dibujo (CAD); o sistemas de producción de mapas temáticos por medio de computadores, etc.

Se pueden distinguir dos aspectos fundamentales dentro del software de un sistema de información geográfico: una parte destinada al manejo de la información espacial (información geográfica) y otra dirigida al manejo de la información de atributos, asociada con la información gráfica existente. Los atributos son descripciones de características relacionadas con los elementos gráficos; como ejemplo puede visualizarse el elemento gráfico rodal, al que están ligados una serie de atributos como especie, edad, superficie, tratamientos silviculturales, etc.

Dentro de un SIG debe existir una concepción de base de datos que permita el uso independiente de la parte gráfica y de los atributos, así como su integración, administrando la información de ambos conjuntos de datos como una unidad. Esto significa que la actualización de una de las bases de datos debería automáticamente modificar los elementos relacionados de la otra. Por otra parte, la integración administrativa de las bases de datos gráfica y de atributos permite dar respuesta en forma de mapas e informes escritos a requerimientos de información del usuario. Esta interrelación se muestra en la Figura 7-9.

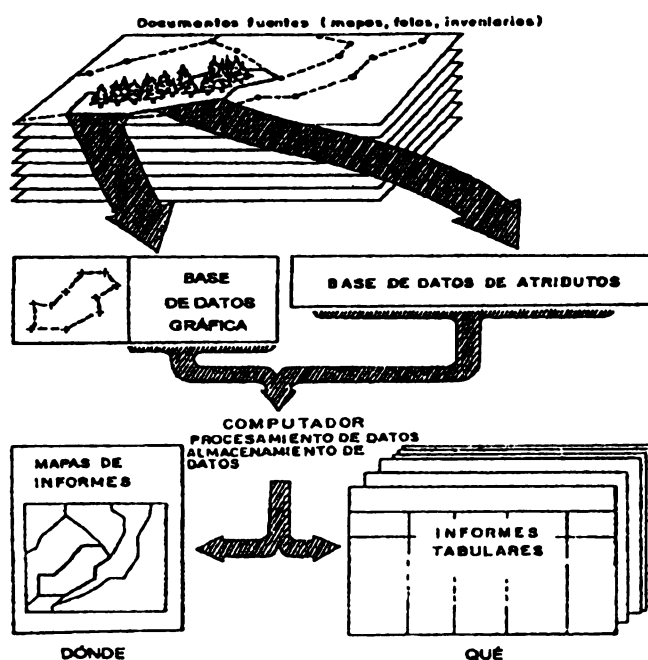


Figura 7-9. Manejo integrado de las bases de datos gráfica y de atributos de un SIG

La información cartográfica forestal es esencialmente dinámica: la operación sobre el recurso implica cambios constantes que significan establecer procesos de actualización rutinarios. En general, la información cartográfica forestal se construye en el transcurso de los años, produciendo mapas prediales; la velocidad de los cambios implica revisiones de la cartografía o la creación de nuevos mapas. Los métodos manuales de actualización pueden crear duplicaciones costosas, y confusión en torno a cuál es la información realmente vigente.

Un SIG puede proporcionar las herramientas para automatizar los procedimientos o aplicaciones de los distintos usuarios y unidades de una empresa de un modo que consolide la información tabular y de mapas. Lo anterior puede lograrse a través de las funciones de análisis y servicios, entre las que destacan:

- **Superposición de mapas temáticos ("overlay"):** El SIG deberá ser capaz de superponer información temática diversa, como la procedente de distintas capas de datos (ej.: plano de rodales y plano de curvas de nivel). En general, se espera que se superponga exitosamente (manteniendo las posiciones geográficas correctas): a) una cubierta que contiene puntos con otra que incluye polígonos; b) una cubierta compuesta de líneas con otra capa con polígonos; y c) dos cubiertas de polígonos. En todos los casos mencionados, se espera que las salidas respectivas (un tercer archivo magnético: mapa) combinen los atributos asociados con los archivos de entrada asociados.
- **Análisis de visibilidad:** Función que permite situarse en cualquier punto de un plano (debe contarse con información de elevación) y determinar las áreas visibles o invisibles desde esa localización.
- **Análisis de proximidad:** Se refiere a la creación de líneas límites con relación a elementos lineales. La distancia límite o zona buffer puede ser variable y especificada por el usuario. El sistema debería proporcionar, además, las superficies creadas por estas áreas "buffer", considerando el efecto de superposición de los distintos elementos lineales involucrados.
- **Definición de polígonos o áreas homogéneas:** El sistema debe ser capaz de producir mapas que contienen áreas homogéneas con respecto a características del terreno tales como pendiente, mapa de rangos de pendiente, elevación, mapas de rangos de elevaciones y exposición, mapas de tipos de exposición.
- **Emisión de informes:** Las rutinas de dibujo deben proporcionar, como mínimo, los siguientes servicios:
 - Dibujo a cualquier escala especificada por el usuario.
 - Simbología caminera.
 - Simbología para representar la red hidrográfica.
 - Toponimia: posibilidad de incluir nombres en el plano.
 - Otra simbología: archivos de símbolos y achurados que permitan una clara identificación de los distintos elementos.

En forma general, los beneficios que pueden obtenerse por el uso de un SIG son:

- Eficiencia en el acceso y utilización de las bases de datos y registros sobre el recurso en manejo.

- Una mayor exactitud de la información que llega al usuario final.
- Mayor productividad.
- Mejora en la información para tomar decisiones.
- Mejor acceso a la información actualizada dentro de la organización.
- Eliminación de la duplicación de esfuerzos.
- Eliminación de los registros en papel.
- Mejor servicio a los usuarios.

La existencia del SIG puede ser aprovechada para el establecimiento de una apropiada estrategia y calendarización de los inventarios que anualmente se realizan en una empresa. Las consultas a las bases de datos gráficas y de atributos pueden realizar lo siguiente: producir informes y mapas con las áreas por inventariar dentro de una temporada por tipo de inventario (precosecha, prerraleo, control de faenas silviculturales, etc.); permitir el estudio de la accesibilidad de las zonas por inventariar para calendarizar los inventarios en concordancia con las condiciones climáticas favorables (dentro de lo posible); almacenar la información volumétrica en forma eficiente y asociada con su ubicación espacial, pudiéndose recuperar la información en forma segura y oportuna; etc.

Por otra parte, el SIG proporciona las facilidades necesarias para el almacenamiento de información histórica de inventarios, facilitando la posible utilización de inventarios en procesos posteriores o el reprocesamiento de la información bajo nuevos requerimientos de información.

Es posible integrar la información en el SIG con los diferentes sistemas de inventarios (precosecha, preoperativos de manejo, compras a terceros) que se realicen y los módulos de evaluación económica, simulación, etc. Ligar la información de atributos y la espacial, manejada por un SIG con modelos de crecimiento y simulación, es hoy una tarea básica que permitirá extender fuertemente las capacidades de planificación y toma de decisiones en el sector forestal.

Otra posible aplicación de un SIG en inventarios forestales es en el uso de índices de sitio definidos a través de variables topográficas y ambientales, o en el posible establecimiento de índices de productividad diferentes del índice de sitio. Esta información puede utilizarse al estratificar y al planificar la instalación de redes de parcelas de inventario continuo y parcelas permanentes experimentales.

La evaluación de predios para compra es una actividad constante en el sector forestal. Incluye, entre otras tareas, la determinación de existencias, tipificación de roces y limpias producción de planos de rangos de pendiente. La existencia de un SIG podría aprovecharse para agilizar la producción de esta información, hacerla más completa y planificar la expansión de la empresa, que necesariamente incluirá inventarios.

El adecuado registro de la infraestructura de transporte y sus atributos asociados puede ser utilizado en la planificación del levantamiento de información de campo para inventarios. Atributos tales como carpeta de rodado, estacionalidad y transitabilidad de los caminos apoyarán efectivamente un proceso de planificación del levantamiento de la información de terreno, haciéndola más eficiente.

VII.5 SISTEMA DE POSICIONAMIENTO GLOBAL SATELITAL (GPS)

La preocupación del hombre por conocer su posición exacta sobre el globo terrestre le ha hecho desarrollar múltiples sistemas cada vez más perfeccionados para conseguir mejores precisiones. En las últimas décadas, con la ayuda de técnicas satelitales y computadores logra resultados altamente confiables y lo que es más, con gran comodidad y rapidez. Crea el sistema de posicionamiento global satelital (GPS).

Este sistema, GPS, fue diseñado y desarrollado en los Estados Unidos por el Ministerio de Defensa y la Marina para establecer la posición de un objeto determinado en cualquier punto de la Tierra, con fines militares. El éxito del sistema hace que su uso se extienda al área civil y así, desde principios de 1980, se utiliza en las ciencias de la Tierra.

VII.5.1 Descripción del sistema GPS

Este sistema utiliza una constelación de satélites y un georreceptor; indica la posición del punto en donde se ubica este último en términos de coordenadas de latitud, longitud y altitud, mediante un método muy diferente de los tradicionales geodésicos.

La base de este nuevo sistema está constituida por tres partes:

- Los satélites
- El sistema de control
- Los georreceptores

Existen numerosos satélites, que orbitan a 20.000 kilómetros de altitud aproximadamente, cuyas señales son recibidas por los georreceptores. Para control de las órbitas de los satélites y su funcionamiento hay estaciones de rastreo y monitoreo, ubicadas en un cordón cercano al Ecuador.

Los receptores, que conforman a los usuarios militares y civiles, son todos los equipos georreceptores de diferentes marcas y características que fundamentalmente se apoyan en el sistema.

La determinación de las coordenadas geográficas y de altitud según los métodos tradicionales mediante el uso de teodolitos, distanciómetros y otros instrumentos topográficos,

basándose en la visibilidad, ángulos y distancias, no son necesarios si se usa el sistema GPS, que puede medir sin intervisibilidad, en condiciones climáticas adversas, en completa oscuridad y a cualquier hora.

VII.5.2 Configuración del sistema GPS

a) Satélites

El sistema contempla una constelación de 24 satélites activos, lo que da la posibilidad de medir las 24 horas del día en cualquier parte de la superficie terrestre.

Los satélites transmiten su posición en dos frecuencias de radio, y una tercera frecuencia es transmitida en forma oculta sólo para usos militares para dar mayor precisión a la determinación de la posición.

b) Sistema de control

El sistema de control está conformado por cinco estaciones rastreadoras, encargadas del monitoreo de las órbitas de los satélites, su funcionamiento, correcciones, etc.

La estación principal está en los Estados Unidos, Colorado Springs, y las otras en Isla Diego García, Isla Asunción, Isla Kwajalein e Isla Hawaii.

c) Usuarios

Esta parte del sistema lo constituyen todos los receptores, en uso militar y civil, para navegación o geodésicos, de diferentes marcas.

VII.5.3 Bases del sistema

El sistema basa su funcionamiento en cinco principios básicos:

1. Realización de una trilateración desde las antenas de los receptores a los satélites.
2. Medición de la distancia entre antena y satélite, mediante el tiempo de viaje de las radioseñales.
3. Determinación precisa del tiempo. Cada satélite cuenta con cuatro relojes atómicos, más dos relojes por cada receptor.

4. Tener totalmente determinadas las posiciones de los satélites para cualquier instante de tiempo, lo que se denomina «almanaque».
5. Aplicar las respectivas correcciones al retardo que sufre la señal por las distintas capas de la atmósfera que cubren la tierra.

Disposición y precisión de los satélites:

PDOP pobre	PDOP bueno
satélites aglomerados	satélites apartados en 120° en azimut y uno hacia el cenit

VII.5.4 Metodologías de trabajo

Los receptores GPS se pueden utilizar en dos modalidades de trabajo:

1. Medición individual:

En esta primera categoría se encuentran todos los trabajos realizados con un solo equipo (receptor), y las mediciones resultantes son de poca precisión, entre los 30 m y 50 m, según la calidad de los instrumentos. Dentro de este tipo de trabajo se pueden mencionar la navegación, posicionamiento de terreno, etc.

2. Medición simultánea o método diferencial:

El método diferencial es el que se realiza con un mínimo de dos equipos (receptores) utilizados en forma simultánea, con la salvedad de que al menos uno de los equipos se sitúe en un punto de coordenadas conocidas.

Independiente de las modalidades de trabajo indicadas en los párrafos anteriores, existe un modo de coordenadas planimétricas y otro de coordenadas planimétricas y de altitud optométrica. Esto es que los equipos se pueden operar en 2D, dos dimensiones: **latitud** y **longitud**, y en 3D, tres dimensiones: **latitud**, **longitud** y **altura** (cota referida al nivel del mar).

VII.5.5 Precisión

La precisión de las medidas es dependiente de dos elementos: el equipo y el tipo de medición por un lado, y por el otro, el factor S/A o disponibilidad selectiva, que es un error inducido por el DOD (Department of Defense) que restringe el uso para fines militares.

Sin duda, la aplicación del método diferencial mejora la calidad de la exactitud.

1. Medición individual:

±15 m en 2D ó 3D, posición fija individual
±12 m en 2D ó 3D, con promedios
±20 m en 2D y 3D

2. Medición diferencial:

± 3 m en horizontal
10 mm ±1 ppm horizontal, frecuencia L1
20 mm ±2 ppm vertical, frecuencia L1
5 mm ±1 ppm horizontal, frecuencias L1 y L2
10 mm ±2 ppm vertical, frecuencias L1 y L2

VII.5.6 Sistemas de coordenadas

Las coordenadas que entregan los sistemas GPS son coordenadas geográficas: latitud, longitud y altura.

Estas coordenadas se refieren a un sistema geocéntrico, que considera al centro de masa de la tierra como el origen de los tres ejes, X , Y y Z .

X e Y representan latitud y longitud, y Z , la altitud.

Se usa para las mediciones al Elipsoide WGS-84 (World Geodetic System 1984) como referencia.

El sistema de coordenadas, en casi todos los equipos, es posible obtenerlo en términos de latitud y longitud en grados sexagesimales o en coordenadas UTM, expresadas en kilómetros.

VII.5.7 GPS y posproceso

Los sistemas GPS, además de dar la información en tiempo real, pueden almacenar en memoria gran cantidad de datos, los cuales se analizan con un software de posproceso que incluye cada equipo.

Mediante el uso de esta herramienta pueden trazarse los recorridos de una navegación, establecer el máximo de precisión de series de medidas, verificar almanaques, etc.

Su uso en la actividad forestal y especialmente en los trabajos de mensura e inventarios es de indudables proyecciones.

BIBLIOGRAFIA

- ABETZ, K. 1931. Zur Theorie und Praxis des forstl. Erfolgsausweises unter besonderer Berücksichtigung d. Erfolgsrechnungsverfahrens der braunschw. Staatsforstverwaltung. AFJZ.
- ABETZ, P. 1960. Die Genauigkeit der Radialzuwachs- und Jahrringbreitenmessung mit der Eklundschen Jahrringmeßmaschine an Stammscheiben und Bohrspänen. AFJZ.
- _____.; MERKLE, R. 1962. Zur Genauigkeit der Baumhöhenmessung mit dem Höhenmesser Blume-Leiss. AFJZ.
- ADRIAN, A. 1960. Barème forestier. Berger-Levrault. Paris.
- AGUIRRE, O. A.; ZEPEDA, E.M. 1985. Estimación de índice de sitio para *Pinus pseudostrobus* Lindl. de la región de Iturbide, Nuevo León. Ciencia Forestal, Vol. 10, N° 56. México.
- AGUIRRE, O. A. 1984. Preliminary growth and yield study of *Pinus patula* natural stands. M.S. Thesis For. and Wood Sci. Dept. Colorado State Univ. 98 p.
- _____. 1989. Aufstellung von Ertragstafeln auf der Basis einmaliger Waldaufnahmen am Beispiel von *Pinus pseudostrobus* Lindl. im Nordosten Mexikos. Dissertation Georg-August-Universität Göttingen.
- _____. 1991. Elaboración de tablas de producción en base a sitios temporales de muestreo. Un ejemplo con *Pinus pseudostrobus* Lindl. en el noroeste de México. Reporte Científico N° 24. Facultad de Ciencias Forestales. Linares, N.L. México.
- _____. 1992. Elementos para el desarrollo de un método óptimo de inventario forestal. Conferencia Colegio de Postgraduados, Montecillo, Edo. de México. 22 p.
- ALBERTI, U. 1959. Maß und Gewicht. Berlín.
- ALDER, D. 1978. PYMOD: A forecasting model for conifer plantations in the Tropical Highlands of Eastern Africa. In J. Fries, H. E. Burkhart and T. A. Max (eds.). FWS-1-78 School of Forestry and Wildlife Resources Virginia Polytechnic Institute and State University.
- _____. 1980. Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento con referencia especial a los trópicos. Vol. 2. Predicción del rendimiento, FAO, Roma. 80 p.
- ALTHERR, E. 1953. Genaue Sortimentierung und Bewertung von Nadelholzbeständen mit Hilfe "echter" Ausbauchungsreihen. Fw. Cbl., S. 193-210.
- _____. 1953. Vereinfachung des Hohenadlschen Massenermittlungsverfahrens durch Verwendung des "echten" Formquotienten. Mitt. d. Württ. Forstl. Vers. Anst. Bd. 10.
- _____. 1954. Berücksichtigung der Formigkeit bei der Sortimentierung dargestellt am Beispiel der Holzart Fichte. Diss. Freiburg.
- _____. 1960. Die Genauigkeit verschiedener Verfahren der Sektionierung in absoluter und relativer Schaftlänge. AFJZ.

bibliografía

- ALTHERR, E. 1962. Ergebnisse Vergleichender Draufholzuntersuchungen bei der Fichte. AFJZ.
- _____. 1963. Untersuchungen über die Schaftform, Berindung und Sortimentsanfall bei der Weißtanne. AFJZ. S. 111-122 u. 140-151.
- AMARAL, S. 1978. Studies in growth and yield estimation for *Pinus taeda* L. plantations in the State of Paraná - Brasil. Ph. D. Thesis. Univ. of Washington.
- AMERICAN SOCIETY OF PHOTOGRAMMETRY. 1975. Manual of Remote Sensing. 2 Vol., Falls Church, Virginia. 2144 p.
- ANUTSCHIN, N.P. 1960. Forstliche Taxation (en ruso).
- ARBONNIER, P. 1958. Une méthode graphique pour la détermination rapide du volume approché d'un peuplement RFF, Nr. 12.
- ARMADESCU, S. 1956. Die Bestimmung des Mitteldurchmessers gleichaltriger Eichenbestände, auf Grund der Beziehung zwischen Mittel- und Höchstdurchmesser. Rev. Pad. S. 662-666.
- _____.; DISCESCU, R. 1956. Die Beziehung zwischen Alter, Durchmesser und Höhe der Buchenbestände der R.V.R. Rev. Pad. S. 429.
- ARNEY, J.O. 1973. Tables for quantifying competitive stress in individual trees. Can. For. Serv. Inf. Rpt. BC-X-78.
- ARNSWALDT, H.J. v. 1950. Wertkontrolle, AFZ, S. 199.
- _____. 1953. Wertkontrolle, AFZ, S. 408-410.
- ARO, P.; NISSULA, P. 1958. Kubik- und Aufnahmetabellen für Fichten- und Kiefernlangholz. Comm. Inst. For. Fen. 49.8.
- _____.; KORPELA, T.; NISSULA, P. 1958. Untersuchungen über den Entrindungsverlust bei Fichtendünnholz und Birkenzellstoffholz. Comm. Inst. For. Fen. 50.2.
- ARVANITIS, L.G.; O'REGAN, W.G. 1970. Cluster or satellite sampling in forestry: A Monte Carlo computer Simulation Study. IUFRO, Advisory Group of Forest Statistician. Francia. 28 p.
- ASSMANN, E. 1936. Zur Frage der Kopezky-Gehrhardtschen Linien. Diss. Freiburg.
- _____. 1943. Untersuchungen über die Höhenkurven von Fichtenbeständen. AFJZ.
- _____. 1949. Zur Ertragstafelfrage. Fw. Cbl.
- _____. 1955. Die Bedeutung des "erweiterten Eichhornschen Gesetzes" für die Konstruktion von Fichtenertragstafeln. Fw. Cbl. S. 321-330.
- _____. 1957. Holzmeßlehre. S. 209-273 in Neudammer Forstliches Lehrbuch. Radebeul u. Berlin, 6. Lieferg.
- _____. 1959. Höhenbonität und wirkliche Ertragsleistung. Fw. Cbl. H. 1/2.

- ASSMANN, E. 1957. 1960. Form- und Zuwachsveränderungen von Nadelbäumen an freigestellten Bestandesrändern. Fw. Hochschultagung München 1959. Mitt. a.d. Staatsforstverw. Bayerns, H. 31.
- _____. 1961. Waldertragslehre. BLV München.
- _____. 1970. The principles of forest yield study. Pergamon Press. p. 506.
- AUSSCHUSS FÜR WIRTSCH. VERWALTUNG. 1958. Handlochkarte. Technik und Anwendung in Wirtschaft und Verwaltung. AWV. Arbeitskreis Handlochkarten, Frankfurt/M.
- VERY, T.E. 1955. Gross volume estimation using "plotless cruising" in Southeast Arkansas. J. For. 53(3) S. 206-207.
- AYRAL, P.; ABADIE, J. 1956. Méthode de calcul du volume des peuplements sur pied dans les places d'essais de sylviculture. I. Définition et présentation. p. P. Ayral. II. Etudes mathématiques et statistiques. p. J. Abadie. Ann. de l'Ec. Nat. des Eaux et Forêts. T.X.V, Fasc. 1.
- BAADER, G. 1942. Forsteinrichtung als nachhaltige Betriebsführung und Betriebsplanung. Frankfurt/M.
- BACK, H. 1964. Tagung der Arbeitsgemeinschaft für Forsteinrichtung. Arbeitskreis für forstl. Luftbildwesen. AFZ. S. 296.
- BACKMUND, F. 1956. Das Luftbild im Forstwesen. Fw. Cbl. S. 469-487.
- BADAN, H.; HINSON, W.H.; STEWARD, H. 1961. Un compas forestier enregistreur; nouvelle application de la mécanographie dans les inventaires forestiers. IUFRO-Tagungsberichte. Wien 1961. 25/7-S/1.
- BADOUX, E. 1946. Relations entre développements de la cime et l'accroissement chez l'éclaircie. Diss. ETH. Zürich.
- _____. 1949. L'allure de l'accroissement dans la forêt jardinée. Mitt. d. schweiz. Anst. f.d. forstl. Versw. Bd. XXVI, S. 9-58.
- BAILEY, R.L.; DELL, T.R. 1973. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. For. Sci. 19:97-104.
- BAILEY, R.L. 1973. Weibull model for *Pinus radiata* diameter distributions. Proceedings IUFRO 56.02. Vancouver, B.C., Canadá; 51-59.
- _____.; CLUTTER, J.L. 1974. Base-age invariant polymorphic site curves. Forest Science 20(2): 155-159.
- BAKER, F.E. 1923. Notes on the composition of evenaged stands. J. For.
- BAKER, D.R.; HUNT Jr., V.E. 1958. Continuous forest inventory with punched card machines for a small property. Bull. 5/1960 St. F. Austin St. College. Nacogdoches Texas.
- BALDWIN, V.C.; FEDUCCIA, D.P. 1987. Loblolly pine growth and yield prediction for managed plantations. Southern For. Exp. SO-236.
- BARGER, R.L.; FFOLLIOTT, P.F. 1969. Multiproduct timber inventory. For. Prod. J. 19(11): 31-36.
- _____. 1970. Evaluating product potential in standing timber. USDA. For. Serv. Res. Pap. RM-57, 20 p.

bibliografía

- BATCHELER, C.L.; HODDER, R.A.C. 1975. Tests of a distance technique for inventory of pine plantations. For. Sci. 5(1): 3-17.
- BATIAS, J. 1958. Rendement financier et aménagements. RFF. Nr. 7.
- BAUERSACHS, E. 1942. Bestandesmassenaufnahme nach dem Mittelstammverfahren des zweitkleinsten Stammabstandes. Fw. Cbl. S. 182-186.
- BAUMANN, H. 1957. Rationelle Stichprobenverfahren in der Forsteinrichtung. AFJZ. H. 1, 1955.
- _____. 1957. Forstliche Luftbildinterpretation. Diss. Freiburg. Schriftenreihe der Bad.-Württ. Landesforstverwaltung.
- BAUR, F. Varias fechas. Die Holzmeßkunde. 2. Aufl. 1875, 3. Aufl. 1882, 4. Aufl. 1891. Wien.
- BECERRA, F.; GARCIA, E.; MUSALEM, M.A.; ZARATE DE LARA, G.; ZEPEDA, M. 1988. Guías de densidad para *Pinus patula* Schl. et Cham., en la región Chignahuapan-Zacatlan, Puebla. Sistemas de Producción Forestal en Bosques Templados. Colegio de Postgraduados, Montecillo, México. Sobretiro de Agrociencia No. 72.
- BEEKHUIS, J. 1966. Prediction of yield and increment in *Pinus radiata* stands in New Zealand. New Zealand For. Ser. Wellington. Tech. Pap. N° 49.
- BEERS, T.W. 1966. The direct correction of boundary line slopover in horizontal point sampling. Purdue Univ. Agric. Exp. Sta. Lafayette-Ind. Res. Progr. Rep. N. 224.
- _____.; MILLER, C.I. 1964. The purdue point sampling block. Journ. For. 62,10. 729-731.
- BEHRE, C.E. 1923. Preliminary notes on the study of tree form. Jour. For. 21:507-511.
- _____. 1927. Form class taper curves and volume tables and their application. Journal Agric. Research 35:673-743.
- BELL, J.F. s.f. School of Forestry. Oregon State University. Corvallis, Oregon, USA.
- _____.; ALEXANDER, B.L. 1957. Application of the variable plot method of sampling forest stands. Oregon State Board of For. Res. Note Nr. 30.
- BELLA, I.E. 1971. A new competition model for individual trees. For. Sci. 17:364-372.
- BELYEA, H.C. 1932. Forest Mensuration. 1. Ed. New-York.
- _____. s.f. Logrules with special reference to the Scribner and to the Doyle log rule. Sth. Lumberm. 187, 276, 285.
- BENGTTSSON, G. 1978. The swedish national forest survey. Proceedings, IUFRO meeting, Group 54.02, Rumania, 1-9.
- BIJIT, M.A. 1988. Distribuciones diamétricas para rodales de *Pinus radiata* D. Don en Arauco. Tesis Universidad Austral de Chile.
- BIOLLEY, H.E. 1922. Die Forsteinrichtung auf der Grundlage der Erfahrung und insbesondere das Kontrollverfahren. Karlsruhe.

- BITTERLICH, W. 1948. Die Winkelzählprobe. Allg. Forest. U. Holzwirtschaft. Ztg, 59, 1/2:4-5.
- _____. 1952. Der Visiermeßwinkel. Österr. Forst-u Holzwirtschaft. Nr. 12.
- _____. 1952. Die Winkelzählprobe. Fwiss. Cbl. 71, Jg.
- _____. 1952. Die Winkelzählprobe. Zbl. f.d. ges. Forst-u Holzwirtschaft., 71. Jg. H. 3, S. 191-205. Wien.
- _____. s.f. Gebrauchs anweisung für das Meßblättchen zum forstlichen Meßverfahren "Winkelzählprobe", Merkblatt.
- _____. 1955. Was ist die Hirata-Höhe? AFZ, Wien.
- _____. 1959. Sektorkluppen aus Leichtmetall. Holz-Kurier Nr. 35.
- _____. 1958/59. Das neue Relaskop. AFZ, Wien.
- _____. 1959. Presslers Richthöhe im neuen Licht. AFZ, Wien.
- _____. 1959. Relaskoptechnik rationelle Waldmessung durch Spiegelrelaskop. Cbl. f. d. ges. Forstw. H. 1.
- _____. 1960. Vorteile der variablen Probekreistechnik. AFZ, Wien.
- _____. 1961. Schlußgrad durch Winkelzählprobe. Holzkurier Wien.
- _____. 1961. Relaskopische Probeflächen nach Strand. AFZ, Wien.
- _____. 1962. Genauere Umrechnungsfaktoren. Raummaß-Festmaß durch Winkelzählprobe. Holzkurier, Nr. 48.
- _____. 1964. Der Daumen als Relaskop. Holzkurier, Wien.
- BLANCKMEISTER, J. 1959. Physikalischer und mathematischer Grundriß für Forstwirte. Neumann-Neudamm.
- BLOCK. 1888. Eine Smiliansche Formel. Z. f. F. u.J.
- BLUME, K. 1930. Einfaches Verfahren zum Schätzen stehender und liegender Stämme. Forstarchiv, S. 449.
- BLUME-LEISS. 1936. Höhenmesser. Druckschrift Nr. 60.
- BLUTEL, Y. 1960. Vite, bien, complètement: Le relascope de Bitterlich le permet-il? RFF. Nr. 10.
- _____. 1960. Mesures de volumes au relascope de Bitterlich. RFF, Nr. 12.
- BONNEMANN, A. 1955. Die Buchungseinheit in der Forsteinrichtung und Forstverwaltung. Forstarchiv Nr. 26, S. 49-54.
- _____. 1939. Der gleichaltrige Mischbestand von Kiefer und Buche. Mitt. aus Forstwirtschaft und Forstwissenschaft.
- BONNOR, G.M. 1967. Predicting stand diameter distributions for red pine plantations in Ontario. For. Man Inst. Inf. Rep. FMR-X-8.

bibliografia

- BONNOR, G.M. 1975. The error of area estimation pour dot grides. Can J. For. Res. 5(10).
- BORGESON, A.E.; COLCLOUGH, D.M.; YOUNG, H.E. 1958. A field test of the Bitterlich variable plot cruising method in Maine. For Dept. Maine. Techn. Notes Nr. 48.
- BORZEMSKI, O. 1937. Bemerkungen zum Referat von Dr. T. Kolenda: Über die bisherigen Versuche der Anwendung der Theorie der Statistik auf die biometrisch-forstlichen Forschungen. L. Polski, Nr. 6, S. 270-276.
- BRABAENDER, H.D. 1957. Gesetzmäßigkeiten im Volumenaufbau und Wertaufbau des Schaftes als Grundlage zur Qualitätskontrolle von Laubholzbeständen. Diss Freiburg y. Br.
- BRAUN, R. 1957. Eine laufende Forstinventur in Österreich. Ö.V. Schr. f. Fw.
- . 1958. Das Aufgabengebiet der Abteilung Forstinventur. Inf. d. Forstl. Bundesvers. Anst. Mariabrunn in Schönbrunn. 5. Folge. AFZ, Wien Folge 3/4.
- . 1960. Ergebnisse der Österr. Waldstandsaufnahme 1952/56. Forstl. Bundesvers. Anst. Mariabrunn.
- . u.a. 1961. Instruktion für die Feldarbeit der österreichischen Forstinventur 1961-1970. Wien.
- BREYMANN, K. 1868. Anleitung zur Holzmeßkunst, Waldertragsbestimmung und Waldwertberechnung. Wien.
- BROWN, G.S. 1965. Point density in stems per acre. New Zealand. For. Res. Note N° 38.
- BRUCE, D.; SCHUMACHER, F.X. 1965. Forest Mensuration. New York, 1. Aufl.
- . 1950. Forest Mensuration. Mc Graw-Hill Book Co. N. 4, 483 p
- BRUCE, D.; CURTIS, R.O.; VANCOEVEERING, G. 1968. Development of a system of taper and volumen tables for red alder. For. Sci. 14(3): 339-50.
- BUCHHEIM, W. 1938. Kluppung und Kreisform des Stammquerschnittes. Über Stammquerschnitte gleicher Breite in allen Richtungen. Z.f.F.u.J., S. 656-658.
- BUCKMAN, R.E. 1962. Growth and yield of red pine in Minnesota. U.S. Dept. Agric. Tech. Bull. N° 1272.
- BURGER, H. 1937. Der Rindenzuwachsfehler. Schw. Z.f. Fw. S. 131-135.
- BURK, T.E.; NEWBERRY, J.D. 1984. A simple algorithm for moment based recovery of Weibull distribution parameters. For. Sci. 30(2): 329-332.
- BURKART, E. 1952. Grenzstammzahl und maximale Kreisfläche bei der Winkelzählprobe. AFZ, Wien, Nr. 15/16.
- BURKHART, H.E.; STRUB, M.R. 1974. A model for simulation of planted loblolly pine stands. In Growth models for tree and stand simulation. IUFRO, Working Party S. 4.01-4 Fries, J. (ed.).
- BURKHART, H.E. 1977. Cubic-Foot volumen of Loblolly Pine to any merchantable top limit. Southern Journal of Applied Forestry 1 (2). p. 7-9.

- BURKHART, H.E.; WALTON, S.B. 1985. Incorporating crown ratio in taper equations. *For. Sci.* 31: 478-484.
- CABALLERO, M.; VILLA S., A.B. 1970. Evaluación estadística de cuatro tamaños de sitios circulares en inventarios forestales. *Bosques y Fauna*.
- CAILLIEZ, F. 1980. Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento con referencia especial a los trópicos. Vol. 1. Estimación del volumen, FAO, Roma. 92 p.
- CAJANUS, W. 1914. Über die Entwicklung gleichaltriger Waldbestände. Eine statistische Studie. Helsingfors.
- CANCIO-MORENZA, G. 1952. Volume tables from sample trees of *Pinus insignis* Dougl. in the North of Spain. Transl. *For. Timb. Bur. Anst.*, p. 8.
- CANO, M.O. 1984. Proyección de la tabla de rodal en modelos de crecimiento en *Pinus radiata* (D. Don). Tesis Universidad Austral de Chile.
- CAO, Q.V.; BURKHART, H.E.; MAX, T.A. 1980. Evaluation of two methods for cubic volumen prediction of loblolly pine to any merchantable limit. *For. Sci.* 26(1): 71-80.
- CARDERERA, L. 1956. La fotogrametría aérea y sus aplicaciones forestales. *Montes* Nr. 71, S. 319-324.
- CARL, C.M.; YOUNG, H.E. 1953. Form class volume tables for estimating board foot content of northern conifers-Maine log rule. *Tech. Note. Univ. Ma. For. Dep.* Nr. 22, p. 4.
- CARMEAN, W.H.; HAHN, J.T. 1981. Revised Site Index Curves for Balsam Fir and White Spruce in the Lake States. U. S. D.A. Forest Service, North Central Forest Experiment Station Note NC-269.
- CARRASCO, J.P. 1986. Estudio comparativo de dos métodos para evaluar la calidad a árboles en pie y para representar la forma del fuste en el bosque siempreverde valdiviano. Tesis Universidad Austral de Chile.
- CARRE, J. 1975. Explotación de las fotografías aéreas. Traducido por J. Navarro, Ed. Paraningo. Madrid. 258 p.
- CARRON, L.T. 1974. Changes in the nature and scope of inventory as an aid to forest management. Tenth Commonwealth Forestry Conference. Sept. 1974. 20 p.
- _____. 1953. Measurement of stacked fire-wood. *Austr. For.* 17(2), 43-8.
- _____.; HALL, N. 1954. National forest inventory: Beech forest (Victoria) military sheet area-western half. *Austr. For.*, Vol. XVIII, Nr. 2.
- CARRON, L.T.; CROMER, D.A.N. 1957. The volume line with reference to *Pinus radiata*. Its derivation without the use of sample trees. Forestry and timber bureau. Leaflet Nr. 76.
- CARRON, L.T.; MC INTYRE, G.A. 1959. The taper line (Gray) and sectional methods for merchantable volume of *Pinus radiata* stems. *Austr. For.*, Vol. XXIII, Nr. 1.
- CARSON, G.L. 1953. The 'spot' method of enumeration survey in Matang Mangroves. *Malay. Forester* 16(4), 206, 12.
- CHAGAS, J.C. 1979. A growth and yield study in thinned, even-aged stands of *Pinus patula* in Brazil. University of Washington.

bibliografía

- CHAPMAN, R.A.; MEYER, W.H. 1949. Forest Mensuration. New York.
- CHINTE, F.O. 1956. Methods used in the Philippines. IUFRO. Sec. 25. Oxford Congr.
- CHISMAN, H.H.; SCHUMACHER, F.X. 1940. On the tree-area ratio and certain of its applications. Jour. For. 38:311-17.
- CHRISTMANN, V. 1957. Untersuchungen über den Rindenmantel der Pfälzer Kiefer. Dipl. Arbeit, Freiburg.
- CLUTTER, J.L.; BENNETT, F.A. 1965. Diameter distribution in old-field slash pine plantations. Georgia For. Res. Council Rep. 13.
- CLUTTER, J.L.; FORSTON, J.C.; PIENAAR, L.V.; BRISTER, G.H.; BAILEY, R.L. 1983. Timber management: a qualitative approach. New York. J. Wiley. 333 p.
- CLUTTER, J.L. 1963. Compatible growth and yield models for loblolly pine. For. Sci. 9:354-71.
- _____.; ALLISON, B.J. 1974. A growth and yield model for in New Zealand, in growth models for tree and stand simulation. IUFRO Working Party S. 4.01-4, 136-160.
- COCHRAN, W.G. 1977. Sampling techniques. John Wiley and Sons. N.Y. 428 p.
- COFFRE, M. 1982. Modelos fustales. Tesis Ing. For. Universidad Austral de Chile. 44 p.
- CONAF/PNUD/FAO. 1980. Modelos de simulación y manejo para plantaciones forestales: Conceptos y revisión bibliográfica. Informe N° 2.
- CONTRERAS, C.; PETERS, R. 1982. Indices de sitio para pino oregón en la provincia de Valdivia y sus relaciones con sitios para pino insignne. Actas: Evaluación de la productividad de sitios forestales. Universidad Austral de Chile.
- COTTA, H. 1804. Systematische Anleitung zur Taxation der Waldungen. Berlín.
- COTTAM, G.; CURTIS, J.T. 1956. The use of distance measured in phytosociological sampling. Ecology 37:451-460.
- COX, F. 1971. Dichtebestimmung und Strukturanalyse von Pflanzenpopulationen mit Hilfe von Abstandsmessungen. Diss. Univ. Göttingen, 183 p.
- _____. 1980. Inventario forestal nacional permanente de bosque nativo. Diseño y Manual de Instrucciones. Proyecto FO:DP/CHI/76/003. Docto. de Trabajo. N. 33.
- _____. 1981. Inventario de los recursos forestales de la zona de Talamanca. Diseño. Programas forestales prioritarios. Documento de trabajo N° 8, Costa Rica. p. 112.
- _____. 1982. Indices de productividad en la evaluación de la calidad de sitio. Actas: Evaluación de la productividad de sitios forestales. Universidad Austral de Chile.
- _____. 1985. Inventarios para el manejo de plantaciones. IX Congreso Forestal Mundial, México (contribución solicitada por el Comité Organizador). 18 p.
- _____. 1992. Parcelas de control y matrices de volúmenes para análisis de estimaciones de volumen de productos. Informe de estudio realizado para varias empresas forestales en Chile. 47 p.

- COX, F. 1993. Unidades muestrales en inventarios. Curso práctico de inventarios para control de planes de manejo. CONAF-CHILE.
- _____. 1994. Modelos parametrizados de altura. Informe de convenio de investigación interempresas. 88 p.
- CRAFTS, C.E. 1949. Coordination of forest survey data for large areas. Acte III. Congr. for. mond. Helsinki, Nr. 1, S. 80-84.
- CROCOLL, A. 1957. Der Massenertrag von Pappelbeständen in der nordbadischen Rheinebene. Fwiss. Forschungen, Berlin, H. 8.
- CROCOLL, L. 1953. Untersuchungen über die Stammform von Schwarzpappelhybriden. Dipl. Arbeit.
- CROMER, D.A.N. 1949. Aerial survey and photo interpretation in Australian Forestry. Actes III. Congr. for. mond. Helsinki, Nr. 3, S. 143-146.
- _____. 1952. Basal area per acre. Austr. For. 16 (2), S. 57-61.
- _____. 1954. Techniques and instruments for the determination of basal area and volume per acre. Austr. For. 1812, S. 86-92.
- _____.; BOWN, A.G. 1956. Plantation inventories with serial photographs and angle-count sampling. Forestry and timber bureau. Bull. Nr. 34, Canberra.
- _____.; MC INTYRE, G.A.; LEWIS, N. 1955. General volume table for *Pinus radiata* giving underbark volumes in cubic feet to 4 inches D.U.B. Forestry and timber bureau. Bull. Nr. 33.
- CUNIA, T. 1964. Weighted least squares methods and construction of volume tables. For. Sci. 10: 180-191.
- _____. 1990. Main objectives and basic characteristics of National Forest Inventories. Proceedings IUFRO S. 5.4.02 and 5.6.04 Symposium, May 14-16, 1990. Birmensdorf, Switzerland. 27-23.
- CURTIS, R.O. 1967. Height diameter and height-diameter-age equations for second growth douglas fir. For. Sci. 13(4): 365-375.
- _____. 1970. Stand density measures: an interpretation. For. Sci. 16:403-314.
- _____. 1972. Yield tables-past and present. Jour. For. 71(1):28-32.
- DANIELS, R.F. 1976. Simple competition indices and their correlation with annual loblolly pine growth. Forest Science 22(4): 434-456.
- _____.; BURKHART, H.E.; CLASON, T.R. 1986. A comparison of competition measures for predicting growth of loblolly pine trees. Can. Jour. of For. Res. 16:1230-1237.
- DASCALESU, J.; POPESCU-ZELETIN, G. 1933. Studie über die instrumentalen Fehler an Baumkluppen. R.P. 45.
- DAVIDOV, M.V. 1952. Yield tables for beech growing in closed canopy. Lesn. Hoz. 5 (4). S. 48-51.
- DAVIS, K.P. 1954. American forest management. New York-Toronto-London.
- DAWKINS, H.C. 1954. The construction of commercial volume tables for tropical forest trees. Emp. For. Rev. 33 (1), S. 61-70.

bibliografía

- DE LOS SANTOS POSADAS, H.M.; VELAZQUEZ, A.; RAMIREZ, H. 1992. Respuesta de crecimiento en rodales coetáneos de *Pinus patula* Schl. et Cham. relacionando variables de densidad y productividad.
- DE MILDE, R. 1971. A promising forest inventory method, based on quality appraisals and assesment of hidden defect of the various sections of the stem. In XVth IUFRO Congress in Gainesville. University of Missouri, Florida, p. 41-57.
- DE PAULA, J.E.; IMAÑA, J.; DA SILVA, B. 1993. Inventario de um hectare de mata ripária.
- DE PAULA, J.E.; IMAÑA, J.; CUNHA DE MENDOÇA, R.; TELES LEAO, D. 1993. Estudo dendrométrico de mata ripária da regioao centro-oeste.
- DE VRIES, P.G. 1986. Sampling theory for forest inventory. A teach yourself course. Springer Verlag. 399 p.
- DEADMAN, M.W.; GOULDING, G.J. 1979. A method for the assessment of recoverable volume by log types. New Zealand For. Ser. 173 p.
- DECEL, J. 1954. Tabele generale de cubaj pentru mestecan. I.C.E.S., Ser. III, Nr. 52 (en rumano).
- DEMAERSCHALK, J.P. 1972. Converting volume equations to compatible taper equations. For. Sci. 18(3): 241-245.
- _____. 1973. Integrated systems for the estimation of tree taper and volume. Can. J. For. Res. 3:90-94.
- _____.; KOZAC, A. 1977. The whole-bole system: a conditioned dual equation system for precise prediction of tree profiles. Can. J. For. Res. 7: 488-497.
- DENZIN. 1929. Schätzung der Masse stehender Waldbäume. Forstarchiv, S. 382-384.
- DICE, L.R. 1952. Measure of the spacing between individuals within a population. Lab. Vert. Biol. Univ. Michigan, N. 55: 1-23.
- DIJK, V. 1950. Untersuchungen über den Bestandesaufbau und das Leistungsvermögen von ungleichaltrigen Laubholz-mischbeständen in Abhängigkeit vom Standort. Diss. Freiburg.
- DISSESCU, R.; STANESCU, M. 1956. Neue Methoden für die Aufstellung von Massentafeln. Rev. Pad. S.39 (en rumano).
- DISSESCU, R.; POPESCU-ZELETIN, J. 1957. Virsta exploatabilitatii arboreleor echine de brad. Analele, Ser. I, Vol. XVIII, S. 173-188 (en rumano).
- DISSESCU, R.; ARMASESCU, S.; DECEL, J. 1957. Contributii la studiul relatiilor intre diametrul si inaltimea arborilor in arboretele de brad. Bul. Stiintific, sect. de biol. si stiinte agr. Tom. IX, 2 (en rumano).
- DITTMAR, O. 1956. Formzahluntersuchungen mit dem Ziel der Verbesserung von Holzmassen und Zuwachsermittlung langfristiger forstlicher Versuchsflächen. Diss. Eberswalde.
- _____. 1958. Eine Studie über die "graphischen" Massenermittlungsverfahren. Speidelsche Massenkurve und Kopezky-Gehrhardtsche Massenlinie (K.G.-Linie) and Hand einer Kiefernkahtschlag-Vollsektionierung. Arch. f. Fw. jS. 130 ff.
- _____. 1958. Untersuchungen über die Zusammenhänge zwischen der Hohenadlschen echten Schaftholzformzahl, dem echten Formquotienten KH und echter Ausbauchungsreihe in mittel- und nordostdeutschen Waldbweständen. Arch. f. Fw. S. 2 ff.

- DOLEZAL, B. 1959. Hospodárské plánování. Praha.
- DOMAN, A.P.; ENNIS; WEIGEL, D. 1981. North Central Forest Exp. Sta., Renewable Resource Evaluation. Field Manual (USDA). 120 p.
- DRAUDT, A. 1860. Die Ermittlung der Holzmassen. Gießen.
- DRESSLER, W. 1924. Zopfungstafel für Holzsparer. Neudamm.
- DREW, J.T.; FLEWELLING, J.W. 1979. Stand density management: an alternative approach and its application to Douglas-Fir plantations. For. Sci. 25: 518-532.
- DUDZINSKI, M. 1960. Estimation of regressionslope from tail regions with special reference to the volume line. Biometrics: The Biometrie Soc. Vol. 16, Nr. 3.
- DUFF, G. 1954. Volumen tables for exotic coniferous species grown in New Zealand. For. Res. Notes, N. Z. For. Serv. 1(12). p. 39.
- . 1956. Estimation of volume of forked trees in exotic coniferous stands in New Zealand. For. Res. Notes, N.Z. For. Serv. 6.
- DU HAMEL DU MONCEAU. 1763. Abhandlungen von Bäumen, Stauden und Sträuchern. Nürnberg.
- DUHOVNIKOV, J. 1953. Taper tables for scots pine stands in Bulgaria. Trud. lesotch. Fak. selsk. Akad. Sofia, 2.
- DUMBAR, J.F. 1940. Use of square plots in place of circular plots in timber estimating. Jour. For. 38:514-515.
- ECKERT, K.H. 1957. Die Verwendung halblogarithmischer Zeichenpapiere als Hilfsmittel der Höhenmessung bei der praktischen Forsteinrichtung und der Darstellung von Höhenkurven. AFZ. H. 12.
- EDWARDSON, T.E. 1956. Dean Forest. Progress report on periodic inventory project. Manuskript.
- EICHHORN, F. 1902. Ertragstafel für die Weißtanne. Berlin.
- EIDMANN, F.E. 1956. Vorratsaufnahme nach Stärke- und Güteklassen. AFZ, S. 517-519.
- . 1958. Vorläufige Anweisung zur Durchführung der Holzvorratsaufnahme nach einem kombinierten Verfahren. FE-Amt Nordrhein-Westfalen, 23,4.
- . 1960. Die Forstwirtschaft als Vollstrecker des praktischen Naturschutzes und der Landschaftsgestaltung. Leitsätze.
- EK, A.R.; MONSERUD, R.A. 1974. FOREST - A computer model for simulating the growth and reproduction of mixed species forest stands. Res. Rep. R2 635. School of Nat. Resources. U. Wisconsin.
- EL TATASCAN. 1989. Revista Técnico-científica Forestal de la Escuela Nacional de Ciencias Forestales. Artículos de Investigación. Vol. 6, No. 1. Siguatepeque, Honduras.
- . 1989. Revista Técnico-científica Forestal de la Escuela Nacional de Ciencias Forestales. Artículos de Investigación. Vol. 6. No. 2. Siguatepeque, Honduras.

bibliografía

- EL TATASCAN. 1990. Revista Técnico-científica Forestal de la Escuela Nacional de Ciencias Forestales. Artículos de Investigación. Vol. 7. No. 1-2. Siguatepeque, Honduras.
- EMROVIC, B. 1954. Über die Konstruktion von Tarifen in Funktion vom Durchmesser. Sumarski List 8/54 (en croata).
- _____. 1951. Graphische Anwendung der Formel von Levakovic. Sum. List. (en croata).
- _____. 1960. Über die geeignetste Formel der Ausgleichung von Massentafeln mit zwei Eingängen. Annales pro experim. for. Zagreb.
- ENCINAS, J.; IMAÑA, J. 1991. Inventario florestal por faixas de amostragem. Pesq. Agropec. Bras. Brasília, 26(1):25-30.
- ENGSTLER, F. 1955. Abweichung und Berichtigung der Einzelstamm- und Bestandesmessung nach dem Verfahren Hohenadl gegenüber der Massenermittlung nach 2-cm Sektionen. Mitt. d. Württ. Forstl. Vers. Anst. Bd. XII.
- ERTELD, W. 1954. Die Durchmesser- und Massendifferenzen zwischen geschälten und ungeschälten Fichten bei Klappung in Bruthöhe. Arch. f. Fw. S. 706-717.
- _____. 1957. Richtlinien für die Anlage und Bearbeitung von langfristigen waldbaulich-ertragskundlichen Versuchsflächen des Instituts für Forstwissenschaft, Eberswalde.
- ESSED, F.E. 1956. A quick, simple and at the same time accurate method for estimating the total volume and the increment percent of even-aged stands. Indian For, 82:260-263.
- _____. 1957. Estimation of standing timber. Diss. Wageningen.
- ETIENNE, M.; PRADO, C. 1982. Descripción de la vegetación mediante la cartografía de ocupación de tierras. Fac. Cs. Agrarias y Vet., U. de Chile. Stgo. 119 p.
- ETTER, H. 1952. Beitrag zur Leistungsanalyse der Wälder. Schweiz. Ztschr. f. Fw. Nr. 1/2.
- EULE, H.W. 1959. Verfahren zur Baumkronenmessung und Beziehungen zwischen Kronengröße, Stammstärke und Zuwachs bei der Rotbuche, dargestellt an einer NW deutschen Durchforstungsversuchsreihe. AFJZ.
- FABRICIUS, L. 1928. Die Durchmesserschwindung von Fichten- und Buchenstammholz nach der Fällung. Fw. Cbl.
- _____. 1929. Forstliche Versuche. VIII. Durchmesserunterschiede gefrorenen und aufgetauten Stammholzes von Fichten und Buchen. Fw. Cbl., S. 541-544.
- FAO (ORGANIZACION DE LAS NACIONES UNIDAS PARA LA AGRICULTURA Y LA ALIMENTACION). 1980. Estimación del volumen forestal y predicción del rendimiento. Vol. 1 y 2.
- _____. 1981. Manual of forest inventory. FAO Forestry Paper 27, 200 p.
- FARIAS, H.; IMAÑA, J.; FELFILI, J. 1992. Análise estrutural da matailiar do córrego capetinga-DF. Habitat de *Callithrix jacchus penicillata* L.
- FBVA. 1981. Instruktion für die Feldarbeit der Oesterreichischen Forstinventur 1981-1985. Forst, Bunderversuchsanstalt, Wien. 173 p.

- FEISTMANTEL, R. 1876. Allg. Waldbestandestafel oder übersichtliche Darstellung d. vorzüglichsten Wachstums v. Holzertragsverhältnisse der Forste. 1. Aufl. Wien, 1854, 2. Aufl.
- FEKETE, Z. 1939. Die ungarischen Ertragstafeln. Zschr. f. Weltforstw., 7, S. 155-162.
- FERGUNSON, J.H.A. 1953. Consideration on the computation of diameter growth by diameter classes from stand tables. 11. Congr. Rome, Comptes rendus, p. 776.
- FERREE, M.J. 1953. Holzmassenermittlung aus dem Luftbild. Stat. Univ. of New York. Coll. of Forestry at Syr. Techn. Publ. 75.
- FERREIRA, O. 1990. Manual de Inventarios Forestales. Escuela Nacional de Ciencias Forestales. Corporación Hondureña de Desarrollo Forestal. Siguatepeque, Honduras. Serie Miscelánea N° 8.
- _____. 1991. Ecuaciones edad-diámetro normal altura total para *Pinus oocarpa* en Honduras. Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación. Instituto Nacional de Investigación y Tecnología Agraria y Alimentaria. Vol. 0. Separata No. 14.
- _____. 1993. Fórmulas, funciones y tablas usadas en medición forestal. Escuela Nacional de Ciencias Forestales (ESNACIFOR). Proyecto CAFOR. Siguatepeque, Honduras.
- FINCH, H.D.S. 1957. Plotless enumeration with angle gauges. Forestry, Nr. 2, Oxford.
- FINLAYSON, W. s.f. FOB (Manual de Relascopio).
- FINNEY, D.J. 1948. Random and systematic sampling in timber surveys. Forestry, Vol. XXII, Nr. 1. p. 64-99.
- _____. 1953. The estimation of error in the systematic sampling of forests. J. of the Indian Soc. of agr. statistics, New Delhi 5(1) 6-16.
- FIRAT, F. 1941. Vergleichende Untersuchungen über Wachstum und Ertrag der Rotbuche in Sachsen. Diss. Dresden 1936/37, Freiburg.
- _____. 1958. Dendrometri. Istanbul, 2. Aufl.
- FISCHER, R.A.; TIPPET, H.C. 1928. Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest members of a sample. In 24th. Camb. Philos. Soc. Proc. 1927:180-190.
- FISCHER, P.; LINDENBERG, R. 1989. On distinction among Cartography, Remote Sensing, and Geographic Information Systems. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing. 55(10): 1431-1434.
- FLEMMING, W.J. 1954. A design for a relascope. For. Chron. 30 (3), 284-286.
- FLURY, P. 1897. Einfluß der Berindung auf die Kubierung des Schaftholzes. Mitt. d. Schw. Centralanst. f. d. forstl. Versuchsw. S. 203.
- _____. 1907. Ertragstafel für die Fichte und Buche. M.S.A.V.
- _____. 1933. Über die Wachstumsverhältnisse des Plenterwaldes. M.S.A.V.
- FLUYT, P.C.M. 1935. Die Art der Holzkubierung im Holzhandel in Singapur. Tectona 28, S. 108-117.
- FOG, D.; JENSEN, A. 1954. General volume table for beech in Danmark. Det Forstlige Forsfgsv. i.r. Danmark, Nr. 171, S. 93-197.

bibliografía

- FOIL, R.R. 1959. Adaptation of local volume table to hand tally-meter yields rapid and accurate pulpwood estimate. LSU For. Notes. Agr. Exp. St. cRes. Release, Louisiana State Univ. Nr. 30.
- FONTENY, B. De. 1914. Détermination des accroissements en diamètre des arbres. Rev. d. E. et F.
- FRAUENDORFER, R. 1954. Forstliche Hilfstafeln. Schriftenreihe. d. forstl. Bundes-Vers. Anst. Mariabrunn. Bd. II, Wien.
- _____. 1954. Ein Massentarif für die Gebirgsfichte im gleichaltrigen Hochwald. Cbl. f. d. ges. Fw. S. 76-103.
- _____. 1957. Planung und Durchführung von Stichprobenanahmen. Schriftenreihe d. forstl. Bundes-Vers. Anst. Wien, Nr. 6.
- _____. 1958. Zur Frage der Bewertung des forstlichen Betriebsvermögens. Cbl. f.d. ges. Fw. S. 116-141.
- FREESE, F. 1960. Testing accuracy. For. Sci. 6(2):139-145.
- _____. 1961. Relation of plot size to variability: an approximation. Jour. of For. 59:679.
- FRIEDRICH, J.F. 1877. Über den Einfluß der Witterung auf den Baumzuwachs. Mit. a Forst. Versw. Öster. Wien.
- FRITZSCHE, K. 1934. Über Genauigkeit und Zeitaufwand bei Bestandesaufnahmen für Zwecke der Leistungskontrolle. Thar. Forstl. Jb. 85, S. 41-70.
- FUNDACION CHILE. 1990. Proyecto Modelo Nacional de Simulación de Pino radiata. Tomo I: Metodología. Vol. I. Modelo de Crecimiento. 144 p.
- FURNIVAL, G.M. 1961. An index for comparing equations used in constructing volume tables. For. Sci. 7:337-341.
- GALOUX, A.; REGINSTER, P. 1953. L'inventaire des peuplements à graines de Belgique. Trav. Sta. Rech. Groenendaal, (Ser. B) Nr. 15.
- GAMBILL, C.W.; WIAN, H.W.; YANDLE, D.O. 1985. Optimum plot size and BAF. For. Sci. 31(3), 587-594.
- GANCHOFER, A. 1950. Der praktische Holzrechner nach Metermaß und Markwährung. 7. Aufl. Augsburg.
- GARCIA, O. 1970. Indices de sitio para pino insigne en Chile. Instituto Forestal. Serie de investigación N° 2.
- _____. 1983. A stochastic differential equation model for the height growth of forest stands. Biometrics 39, 1059-1072.
- _____. 1992. Sampling for tree-ring analyses Proceedings of the IUFRO Conference Integrating Forest Information. Over Space and Time, 13-17 January 1992. Camberra, Australia. 13 p.
- GARCIA, F. 1992. Elaboración de dos guías de densidad para *Pinus patula* Schl. et Cham. en la región de Macuiltianguis, Oaxaca. Universidad Autónoma de Chapingo. División de Ciencias Forestales.
- GARRISON, G.A. 1949. Uses and modification of the "moosehorn" crown closure estimator. Jour. For. 47: 733-735.
- GASCARD, F. 1936. Von der Berechnung des laufenden Zuwachses. Schweiz. Z. f. Forstw. Nr. 87, S. 90-95.

- GAYER, E. 1912. Sortiment- und Wertzuwachsuntersuchungen an Tannen- und Fichtenstämmen. Karlsruhe.
- GAYER, L. FABRICIUS. 1921. Die Forstbenutzung. Berlin. Parey.
- GEORGOPOULOS, A.D. 1955. Die Kontrollmethode - entwickelt im forstlichen Unterricht der Eidgen. Techn. Hochschule. Schweiz. Z. F. Fw.
- _____. 1957. Estimation du capital ligneux des peuplements par sondage. To Dasos.
- _____. 1957. Über die Aufstellung von Massentafeln und Tarifen. Athem (en griego).
- GERHARDT, E. 1901. Die theoretische und praktische Bedeutung des arithmetischen. Mittelstammes. Diss. Tübingen. Meiningen.
- _____. 1930. Ertragstafeln für reine und gleichaltrige Hochwaldbestände von Eiche, Buche, Tanne, Fichte, Kiefer, grüner Douglasie und Lärche. 2. Aufl. Berlin.
- GERRARD, D.J. 1966. The construction of standard tree volume tables by weighted regression. Univ. of Toronto, Tech. Report N° 6.
- GEVORKIANTZ, S.R.; OLSEN, L.P. 1948. An improved increment-core method for predicting growth of forest stands. Lake States Forest Exp. Sta. p. 12.
- _____. 1955. Composite volume tables for timber and their application in the Lake States. Techn. Bull. U.S. Dep. Agric. Nr. 1104, p. 51.
- GIER, SCH.; STELLINWERF, D. 1990. Beech-vac timber volume by two-phase (aerial photo-field) sampling. Proceedings IUFRO 5.4.02 and 5.6.04 Symp. Birmensdorf, Switz, 164-75.
- GIERUSZINSKI, T. 1938. Computation of forest growth in volume. Sylvan.
- _____. 1953. Accuracy of Huber's formula. Sylvan 97 (4), S. 258-268 (en polaco).
- _____. 1959. Promiar drzew i drzewostanow (Messung der Baume und Waldbestände). Warszawa.
- _____. 1960. Über die Variabilität der Taxationselemente der Stämme in hiebsreifen Fichtenbeständen. Folia Forestalia Polonica, Zesz. 2, Ser. A, S. 1-44 u. S. 45-99.
- GINGRICH, S.F. 1967. Measuring and evaluating stocking and stand density in upland hardwood forests in the Central States. For. Sci. 13:38-53.
- GIRARD, J.W. 1939. Timber cruising. For. Serv. US-Dept. of Agr.
- GIURGIU, V. 1953. Neue Nomogramme in der Holzmeßlehre und Forsteinrichtung. Rev. Pad. Bucuresti. S. 24-31.
- GLÄSER, H. 1953. Die photographische Methode zur Festgehaltsermittlung von Schichtholz. Holz-Zentralbl. Nr. 47, S. 545.
- _____. 1955. Schichtfestmeter? Kritische Gedanken zur geplanten Einführung dieses Schichtmaßes. Holz-Zentralbl. Nr. 25.
- GLOVER, G.R.; HOOL, J.N. 1979. A basal area ratio predictor of loblolly pine plantations mortality. For. Sci. 25(2):275-282.

bibliografía

- GOMEZ, W. 1988. Relación entre la copa y DAP en *Pinus radiata* en el Parque Nacional Tunari. Universidad Mayor de San Simón. Facultad de Ciencias Agrícolas y Pecuarias. Escuela Técnica Superior Forestal. Cochabamba, Bolivia.
- _____. 1989. La medición de la corteza en *Pinus radiata*. Universidad Mayor de San Simón. Facultad de Ciencias Agrícolas y Pecuarias. Escuela Técnica Superior Forestal. Cochabamba, Bolivia.
- GOULDING, C. J.; MURRAY, J. 1972. Simulation techniques for a stochastic model of the growth of Douglas-fir. Ph.D. Thesis, Univ. of British Columbia. 233 p.
- _____. 1976. Polynomial taper equations that are compatible with tree volume equations. N. Z. J. For. Sci. 5:313-332
- GRAY, H.R. 1956. The form and taper of forest-tree stems. Oxford Univ., Imp. For. Inst. Paper 32:1-74.
- GREGOIRE, T.G.; BARRETT, J.P. 1979. The effect of sample size on coefficient of variation estimation. Res. Inv. Notes, BLM-26. Denver, Colorado, 1-8.
- GRIFFITH, A.L.; PRASAD, J. s.f. The tree and crop measurement manual. Silv. Res. Manual. Vol. 3.
- GROCHOWSKI, J. 1937. Über die Ermittlungsverfahren der Schaftform der Waldbäume. Roczn. Nank. Roln. i. Lesnych. 41, 59-79.
- _____. 1953. Bewertung der Genauigkeit der Massentafeln von Grunduer-Schwappach und Laer am Beispiel eines Kiefernbestandes in Rogciv. Roetz. Nauk Lesnych Bd. II. 3-16.
- _____. 1953. Method of investigating the volume increment of stands. Sylvan 97 (4). 242-57. (en polaco).
- GROOTHAUSEN, C.; FERREIRA, O. 1989. Curvas de índice de sitio para *Pinus caribaea* Morelet en Honduras. El Tatascán. Vol. 6, N° 1. Siguatepeque, Honduras.
- GROSENBAUGH, L.R. 1952. Shortcuts for cruises and scalers. South. For. Ext. St. occ. pap. 126.
- _____. 1952. Plotless timber-estimates-New. Fast. Easy. J. of For.
- _____. 1954. New tree-measurement concepts: height accumulation, giant tree, taper, and shape, South. For. Exp. St. occ. ppa. 134.
- _____. 1963. Optical dendrometers for out-of-reach diameters: a conspectus and some new theory. For. Sci. Monogr.
- GROSSMANN, H. 1956. Genauigkeitsuntersuchungen über die in der DDR angewandten mathematisch-statistischen Holzvorratsaufnahmen. Archiv. f. Fw.
- _____. 1959. Ergebnisse der im Jahre 1957 durchgeführten Holzvorrats- und Zuwachsinventure im Plenterwald Keula. Archiv. f. Fw. H. 6/7.
- _____. 1961. Die Höhe der Variabilitätskoeffizienten der Massenhaltigkeit in Abhängigkeit von verschiedenen Faktoren und ihre Bedeutung für Holzvorratsinventuren. Archiv. f. Fw. H. 3.
- _____. 1961. Der Einfluß verschiedener Faktoren auf den Variabilitätskoeffizienten des Radialzuwachses. Archiv. f. Fw.
- GRUNDNER, F. 1882. Untersuchungen über die Querflächenermittlung der Holzbestände. Berlin. 41 S.

- GRUNDNER, F. 1898. Formzahlen von Massentafeln für die Buche. Berlín. 90 S.
- GRUNDNER, F.; SCHWAPPACH, A. Varias fechas. Massentafeln zur Bestimmung des Holzgehaltes stehender Waldbäume und Waldbestände. 1. Aufl. 1898, 2. Aufl. 1906, 4. Aufl. 1913, 5. Aufl. 1919, 6. Aufl. 1922, 7. Aufl. 1928, 8. Aufl. 1942, 10. Aufl. 1952. Hersg. v. R. Schober, Berlín.
- GRÜBEL. 1956. Zur Frage der Verbesserung des Meßzahlensystems. Holz-Zbl. Nr. 33.
- GRUT, M. 1970. *Pinus radiata*, growth and economics. Balkema. Capedown.
- GUATEMALA. 1991. Plan de Desarrollo Integrado de Petén. Inventario Forestal del Departamento de Petén. Convenio Gobiernos Alemania/Guatemala.
- GÜDE, H. 1955. Anleitung zur Aufnahme von Bitterlich-Proben. AFZ, 23/24.
- GÜNTHER, M. 1955. Untersuchungen über das Ertragsvermögen der Hauptholzarten im Bereich verschiedener Standortseinheiten des württembergischen Neckarlandes. Mitt. d. Vereins f. forstl. Standortskartierung. Nr. 4, S. 5-31.
- GUTTENBERG, R.v. 1912. Holzmeßlehre. In Loreys Handbuch d. Forstw., Berlín. III. Bd.
- _____. 1915. Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge. Wien - Leipzig. 153 S.
- HÄBERLE, S. 1954. Die Holzvorratsinventur mit Repräsentativverfahren. Dipl.-Arbeit.
- HAFLEY, W.L.; SCHREUDER, H.T. 1977. Statistical distributions for fitting diameter and height data in even-aged stands. Can. J. For. Res. 7:481-87.
- HAGBERG, E. 1957. Die 3. schwedische Reichswaldtaxation. Arch. f. Fw. S. 29 ff.
- _____. 1957. The new swedish national forest survey. Unasylva. Vol. 11, Nr. 1, p. 3-8 u. 28.
- _____.; TERSMEDEN, C. 1954. The national forest survey of western sweden carried out in 1949-1951. Medd. f. St. Skogsforsk. inst.
- HAGGLUND, B. 1981. Evaluation of forest site productivity. For. Abstract Comm. For. Bureau. Vol. 42(11): 515-527.
- HAIG, T.J. 1932. Second growth yield, stand and volume table for western white pine type. T.B. Nr. 323.
- HALAY, J. 1955. Tafeln zur Massenberechnung von Beständen. Bratislava (en checo).
- _____. 1957. Mathematisch-statistische Untersuchung der Stärkestruktur slowakischer Waldbestände. Lesnický Casopis.
- _____. 1959. Untersuchungen des Höhenwachstums der Holzarten in der Slowakei und ein Entwurf der Höhenbonitätsklassen. Lesnický Casopis. Rocnik V.
- HALL, M.J. 1974. A plantation simulation model for Radiata Pine. Appita, 27(4).
- HALLA, H. 1947. Statistische Untersuchungen an Fichtenbeständen im Forstbezirk Blaubeuren. Diss, Freiburg.
- HALLER, K.E. 1959. Untersuchungen über die zahlenmäßige Erfassung des Wertes stehender Waldbäume am Beispiel der Rotbuche. Mitt. d. Bundesanst. f. F. u. H.-Wirtsch. Reinbek b. Hamburg. Nr. 43.

bibliografía

- HALLER, K.E. 1969. The determination of the variable round wood potential from measurable inventory data, as a new way of quality assesment in tropical forestal inventories, demonstrated on the species *shorea albida* Mitt. Bundesforsch. Forst-u. Holawirtschaft. Reineke-Hamburg.
- HAMPE, F.E. 1954. Relationship of stump diameter to d.b.h. for white pine in Northeast. For. Res. Note Northeast. For. Exp. Sta. Nr. 38. p. 4.
- _____.; BICKFORD, A. 1959. A method of estimating cubic volume in felled tree. For. Res. Note. Northeast. For. Exp. Sta. Nr. 117.
- HAMPEL, R. 1955. Forstliche Ertragselemente. Mitt. d. forstl. Bundesvers. Anst. Mariabrunn 51.
- HANKS, L.F. 1971. Interim Hardwood tree grades for factory lumber. USDA For. Serv. Res. Pap. NE 199.
- HANNEKE, J. 1988. Método para construir tablas de volúmenes comerciales (por medio del análisis troncal). Programa de repoblamiento forestal CORDECO- COTESU IC. Cochabamba, Bolivia.
- HANNIBAL, L.W. 1953. Forstliche Luftbildauswertung in Indonesia. Kimba Indonesia 2 (4). 139-163.
- HARDER, H. 1955. Die neue Sortierung der Holzmasten nach Technischen Grundsätzen und der Ermittlung des Festgehaltes. Holz-Zbl. Nr. 6, S. 49.
- HARRISON, J.D.B. 1950. Planning a national forest inventory. FAO-Forestry and Forest Products Studies. Nr. 1. Washington.
- _____. 1956. Summary of growth and yield studies in Canada. IUFRO, Section 25, Oxford Cong.
- HARRY, J.; SMITH, G.; KERR, J.W. s.f. Growing douglas fir and western helmlock trees at desired rates. Res. Note. Univ. Columbia, Vancouver, Canadá.
- HARTIG, R. 1895. Doppelringe als Folge von Spätfrost. Forstl, naturw. Z.
- HARTIG, TH. 1847. Vergleichende Untersuchungen über den Ertrag der Rotbuche im Hoch- und Pflanzwalde, im Mittel und Niederwaldbetriebe nebst Anleitung zu vergleichenden Ertragsforschungen. Anhang: Ertragstafel v. J.C. Paulsen u. G.L. Hartig, Berlin.
- HASEL, A.A. 1938. Sampling error in timber surveys. J.A.R. Nr. 10.
- HASENKAMP, J.G. 1954. Die Genauigkeit der systematischen Stichprobennahme bei forstlichen Vorratsinventuren. Mitt. d. Bundesforschungsant. f. Forst- u. Holzw. Nr. 35, Fritz Haller Verlag, Berlin.
- HAUCK, W. 1963. Untersuchungen nach Stammanalysen über das Wachstum der Traubeneiche im inneren Pfälzer Wald. Diss. Freiburg.
- HAUSBURG, H. 1962. Das Stammabstandsverfahren. Allg. F. u. J. Ztg.
- _____. 1961. Das Stammabstandsverfahren. Frbg. Dipl.-Arb.
- HAUSSER, K. 1933. Sortierungstafel für Forche. Mitt. d. Württ. Forstl. Versuchsanst.
- _____. 1956. Eine Derbholzmassentafel für die grüne Douglasie. Mitt. d. Württ. Forstl. Versuchsanst., H. 2.
- _____.; BOLSINGER, E. 1956. Inhalt und Schaftform der grünen Douglasie. II. Ausbauchungsreihen, Rindenstärke und Sortierungstafel der grünen Douglasie. Mitt. d. Württ. Forst. Versuchsanst. H. 2.

- HAWES, E.T. 1948. Is a management cruise really necessary? J. For. S. 895-896.
- HAWLEY, R.C.; WHEATON, R.G. 1940. Studies of Connecticut hard woods, the form of hardwoods and volume tables of a formquotient basis. Y.U.F.B.
- HEDJAZI, R.; TABATABAL, M.; NILOOFARI, P.; SOLEYMANI, P.; GNAZI-MOGADDAM, G. 1957. Study on poplar tree in Iran (*Populus nigra*. Var. *pyramidalis* Roz.). Univ. of Teheran, Agric. Coll. Nr. 12.
- HEGYI, F. 1974. A simulation model for managed jackpine stands. In Growth models for tree and stand simulation. IUFRO Proceedings of Working Party, S. 4.01-4. Fries, J. (ed.).
- HEIJBEL, J. 1928. Ein System von Gleichungen für die Bestimmung der Stammform der Kiefer, Skogsh. Festschr. _____ 1929. Mathematische Untersuchungen über die Borke der Kiefer. Skogsv. Tidsskr. 27.
- HELLRIGL, B. 1960. Le compas forestier pour la mesure de la surface terrière. Ital. For. e Montana Anno XV-Fasc. Nr. 4.
- _____. 1960. Una nuova teoria dendrometrica: la relaskopia. Ebda.
- _____. 1961. Le calcul du coefficient de forme par la méthode relascopique. Ital. For. e Montana Anno XV-Fasc. Nr. 1.
- _____. 1963. Il calcolo del volume col metodo relascopico. Ebda.
- HENGST, E. 1959. Die Schaftform der Weymouthskiefer. Wiss. Z. d. T.-H. Dresden. Fak. f. Forstw. 8, H. 4
- _____. 1959. Allgemeine Bemerkungen zur Weymouthskiefer und zu ihrer Form. Arch. f. Fw. 8, H. 9, S. 781-811.
- HENRIKSEN, H.A. 1951. Rfntgenfotografering som diagnostik hjaelpeniddel ved undersfgelse af tracer. Dansk. Skovforenings Tidsskr. 10, S. 515-520.
- _____. 1951. Allocation to diameter classes for beech. Særtryk af det forstlige Fors. i Danmark, Nr. 163.
- _____. 1953. Die Holzmasse der Buche. Særtryk af det forstlige Fors. i Danmark, Nr. 172.
- HENSLER. 1951. Rammeter ode Schichtfestmeter. (Ein Kapitel über die Homa). Holz-Zbl. Nr. 129, S. 1954.
- _____. 1952. Einige Fragen zur Anwendbarkeit des Lochkartenverfahrens im Forstbetrieb. AFJZ, S. 22-24.
- HERNANDEZ, P.; MENDOZA, M.; RODRIGUEZ, C. 1991. Modelos de incremento en altura para coníferas de Atenquique. Jal., México.
- HERRICK, A.M. 1958. Grading and measuring hickory trees, logs, and products. South. For. Exp. Sta. For. Serv. Nr. 7.
- HEYER, G. 1852. Über die Ermittlung der Masse des Alters und des Zuwachses der Holzbestände. Dessau, 150 S.
- HEYER, K. 1883. Waldertragsregelung. 3. Aufl. von S. Heyer, Leipzig.
- HILD, TH. 1934. Zählverfahren zur Vereinfachung der Bestandsmassenaufnahme. Forstarchiv 10, S. 241-246.

bibliografia

- HILDEBRANDT, G. 1954. Untersuchungen an Fichtenbeständen über Zuwachs und Ertrag reiner Holzsubstanz. Deutscher Verl. d. Wissenschaften, Berlin.
- _____. 1956. Der Stand der forstlichen Luftbildauswertung für die Forsteinrichtung und Forstvermessung. Archiv. f. Forstw. H. 1/2.
- _____. 1961. Methoden der Waldinventur im Nordwestern und in den Rocky Mountains der USA. AFZ Nr. 1.
- HILF, R.B.; SCHMEEL, H. 1930. Die Photographie im Dienste der Zuwachsmessung. Forstarchiv.
- HILLS, G.A. 1952. The classification and evaluation site for forestry. Ontario dep. of Lands and Forests. Res. Rep. 24.
- HIRATA, T. 1951/53. Fundamental studies on the formation of cutting series (I). Bulletin of the Tokyo University Forests. Nr. 39/45.
- _____. 1955. Height estimation through Bitterlich's methods, vertical angle count sampling. Jap. Journ. Forestry 37: 479-80.
- _____. 1956. Harmonic means in Bitterlichs sampling. Repr. form the Miscellaneous Information, the Tokyo University Forests. Nr. 11.
- _____. 1962. Studies on methods for the estimation of the volume and increment of a forest by angle count sampling. Ebda.
- _____. 1958. Precisions of variable plot methods.
- _____. 1959. A photographic estimation of stand mean height. Journ. of the Jap. For. Soc. Vol. 41, N.
- _____. 1961. An easy way to estimate the increment. Journ. of the Jap. For. Soc.
- _____.; TANIGUTI, J. 1956. On the experiment of vertical angle count sampling. The measurement of stand mean height. Journal of the Japanese Forestry Society, Nr. 10.
- HOFFMANN; BOLLAND, G. 1959. Über Lochkartenverfahren und ihre Anwendungsmöglichkeiten in der Forstwissenschaft. Archiv. f. Forstwesen. H. 3.
- HOHENADL, W. 1923/24. Ziele und Methoden der forstlichen Forschung oder "Praktischer Beweis, daß die Mathesis bei dem Forstwesen unentbehrliche Dienste tue" (Öttelt 1764). Fw. Cbl.
- _____. 1924. Der Aufbau der Baumschäfte. Fw. Cbl.
- _____. 1936. Die Bestandesmessung. Fw. Cbl.
- _____. 1938. Holzmessung u. forstliche Forschung. Fw. Cbl.
- _____. 1939. Einführung in die Bestandesberechnung mit Hilfe von zwei Mittelstämmen. Fw. Cbl.
- _____. 1940. Leistungsprüfung u. Rationalisierung. Fw. Cbl.
- _____. 1949. Einführung forstlicher Buchungsmaschinen. Fw. Cbl.

- HÖJER, A.G. 1903. Tallens och granens tillväxt (Pine and spruce growth). Bihang till Fr. Lovén. Om rara barrskogar. Stockholm. Sweden.
- HOLLERWÖGER, F. 1954. Is there a correlation in the Teak Forests between crown diameter and the height of the trees with regard to the diameter at breast height? Journ. of Scientific Research in Indonesia. Djakarta 3.
- HOLMSGÅRD, E. 1955. Ärringsanalyser af danske skovtræer (Tree-ring analyses of Danish forest trees). Forstl. Forsgsv. Daum. 22(1).
- _____. 1958. Basic growth concepts. State Univ. Coll. of For. Bull 42.
- HOMA. 1936. Bestimmungen über die Ausformung, Messung und Sortenbildung des Holzes in den deutschen Forsten. Gültig ab 1. 10.
- _____. 1950. Umrechnungszahlen zur Homa. Holz-Zentralblatt. Nr. 129, 1950. S. 1430, Nr. 132, 1950, S. 1463. Nr. 142, S. 1601.
- HOMA-NEUFASSUNG. 1951. Vorschlag zur Homa-Neufassung. Raummeter oder Schichtfestmeter? Holz-Zbl. Nr. 117. S. 1448.
- HONDURAS. 1991. Guía para la elaboración de Planes de Manejo Forestal. Desarrollo del Bosque Latifoliado. Programa Forestal Canadá - Honduras.
- _____. 1991. Desarrollo del Bosque Latifoliado. Capítulo 2. Metodología de Inventario Forestal. Programa Forestal Canadá-Honduras.
- HOPMANN, J. 1951. Forstmathematik in Forschung und Unterricht. Huan. München.
- HORKY, A. 1952. Die Waldstandsaufnahme und ihre Durchführung in Österreich. AFZ. Wien. Nr. 15/16.
- _____. 1953. Die Waldstandsaufnahme in der Durchführung. AFZ. Wien. Nr. 9/10, S. 109-115.
- HOSIUS, A. 1988. Manual del Técnico Forestal. Materia: Dasometría. Escuela Técnica Superior Forestal - Misión Forestal Alemana. UMSS-GTZ. Cochabamba, Bolivia.
- HOSOL, M.; MANABE, T. 1954. A method of micro-measurement of stem diameter growth (measurement of current daily increment of Pawlownia). J. Jap. For. Soc. 36, S. 54-56. Jap. J.
- HOSSFELD, W. 1812. Niedere und höhere praktische Stereometrie aller regel- und unregelmäßigen Körper und selbst der Bäume im Walde usw. Leipzig.
- HOTTA, Y.; MAEZAWA, K. 1954. The error of basal area (as) affected by method of estimation. Bull. Tokyo Univ. For. Nr. 46, S. 145-157. Japan.
- HOUBA, A. 1953. Diameter distribution curve in *P. sylvestris* stands. Lesn. Práce. 32, S. 432-6, Ch.
- HUBER, F.X. 1828. Hilfstabellen für Bedienstete des Forst-u. Bauachs zunächst zur leichten und schnellen Berechnung des Massengehaltes roher Holzstämmen usw. München.
- HUDECEK, F. 1932. Tafeln zur graphischen Ermittlung des Massenzuwachsesprozentes. Forstarchiv. Nr. 8.
- _____. 1933. Die Korrelationsrechnung als forstl. Arbeitsmethode. Th. F. Jb. Nr. 84.

bibliografia

- HUDECZEK, F. 1933. Das Schwinden von Stammscheiben. Forstarchiv. Nr. 10, 1933, S. 307-317.
- HUFFEL, G. 1919. Economie forestière. Vol. 2, Paris.
- HUGERSHOFF, R. 1933. Die photogrammetrische Vorratsermittlung, eine Übersicht über ihre Grundlagen und Methoden. Th. F. Jb.
- HUMMEL, F.C. 1949. The methods employed in the national forest survey of Great Britain. Actes du 3 Congr. Forest. Mond. Helsinki, Nr. 1. S. 39-52.
- _____. 1951. Instruments for the measurement of height, diameter and taper of standing trees. Forestry Abstr. 12:261-269.
- _____. 1953. Hedgerow and park-timber and woods under five acres 1951. For. Comm. Nr. 2, London.
- _____. 1955. The volume/basal-area line: a study in forest mensuration. Bull. For. Comm., London, Nr. 24, S. 84
- _____. 1956. Die Massengerade als Grundlage von Einheitstarifen für den Altersklassenwald. Fw. Cbl. Nr. 75, S. 65-128.
- _____. 1958. Methods of forecasting productions from thinnings. Unasylva, Nr. 2. S. 67-71.
- _____.; BRETT, J. 1953. A simple method of estimating volume increment in stands of young conifers. Ileme Congr. Rome, Comptes rendus. S. 794.
- HUMMEL, F.C.; CHRISTIE, J.M. 1957. Methods used to construct the revised yield tables for conifers in Great Britain Forest Research.
- HUMMEL, F.C.; LOCKE, G.M.L.; JEFFERS, J.N.R.; CHRISTIE, J.M. 1959. Code of sample plot procedure. London. Her Majesty's Stationary Office, 1959, V, Bulletin Nr. 31
- HUMMEL, F.C.; WATERS, W.T. 1950. General volume table for Beech, Birch. Oak. European Lärch. Scotspine in Great Britain. For. Comm. Forest Record Nr. 5-9.
- HUSCH, B. 1956. Use of D.B.H. as a variable in the Site Index Concept Jour. of For. 54:340.
- _____. 1962. Tree weight relationships for white pine in southeastern. New Hampshire. Univ. New. Hampshire Agric. Exp. Sta. Tech. Bull. N° 106.
- _____. 1963. Forest mensuration and statistics. New York: The Ronald Press Co.
- _____. 1964. Tablas de rendimiento para *Pinus radiata* D. Don. Instituto Forestal.
- HUSCH, B.; MILLER, C.I.; BEERS, T.W. 1972. Forest mensuration. 2nd. ed. New York. The Ronald Press Co.
- _____. 1982. Forest mensuration. John Wiley & Sons, 402 p.
- HUSS, J. 1984. Luftbildmessung und Fernerkundung in der Forstwirtschaft. 406 S.
- HYINK, D.M. 1979. A generalized method for the projection of diameter distributions applied to unevenaged forest stands. Ph. D. thesis. Purdue Univ.
- IBM. s.f. Einführung in das IBM-Lochkartenverfahren.

- ICES. 1950. Seria III. Nr. 11. Tabele Generale du cubaj pentro speciile Brad, molid, stejar, cer, fag, carpentei, salcâm, frasin in paltin (unpremia en jugastru).
- ICHIM, R. 1956. Procedeu Dr. W. Bitterlich. Rev. Päd, S. 379.
- ILVESSALO, Y. 1920. Untersuchungen über die taxatorische Bedeutung der Waldtypen, hauptsächlich auf den Arbeiten für die Aufstellung der neuen Ertragstafeln Finnlands fußend. A.F.P.
- _____. 1923. Ein Beitrag zur Frage der Korrelation den Eigenschaften des Bodens und dem Zuwachs des Waldbestandes. A.F.P.
- _____. 1927. Methods for preparing yield tables. Silva fennica. Nr. 5. Helsinki.
- _____. 1942. Die Waldvorräte und der Zustand der Wälder Finnlands - II. Reichswaldabschätzung. Ebda.
- _____. 1949. Sampling techniques in forest inventory. Proceedings of the U.N. Scientific conference on the conservation and utilization of resources. UNSCCUR. Lake Success, New York, Vol. V, Forest Ressources. S. 2-5.
- _____. 1953. The third inventory of Finnish Forests. Finnish Paper and Timber, Helsinki 4,8. 100-1.
- _____. 1956. On the methods for determination of increment generally used in Finland. IUFRO, Sect. 25, Oxford Congr. Helsinki.
- _____. 1957. Die Wälder Nordfinnlands und ihre Abnutzungsmöglichkeiten. Vortrag, gehalten am 14.9.1956; Sonderabdruck aus den Sitzungsberichten der Finnischen Akademie der Wissenschaften 1956. S. 170-184. Helsinki.
- IMANÁ, J. 1991. Inventario Florestal por Faixas de Amostragem. Pesq. Agrop. Bras., Brasília, 26(Y): 25- 30.
- _____. 1993. Forstinventuren in Brasilien. Die Weiterentwicklung der Forstwissenschaft auf Grund des Plantagenbetriebes. Universität Freiburg.
- _____.; RIBEIRO, E. 1993. Cálculo do coeficiente de volume no cerrado grosso de Brasília.
- IMANÁ, J.; DE PAULA, J. 1993. Fitosociología de la regeneración natural de un bosque de galería. Vol. 28. Brasília.
- INFOR. 1965. Tablas de volumen para pino insigne (*Pinus radiata* D. Don). Boletín Técnico N° 2.
- _____. 1992. Modelos forestales. Taller Internacional. 21-22 Marzo 1991. Santiago, Chile. p. 351.
- INFORA. 1975. Inventario Forestal Cordillera de la Costa, Provincia de Valdivia. Informe principal. Circulación restringida.
- _____. 1984. Modelos fustales para plantaciones de Forestal Mininco. Informe de circulación restringida.
- _____. 1985. Modelos fustales para plantaciones de pino insigne de Forestal Arauco-Concepción. Informe de circulación restringida.
- _____. 1988. Inventario Forestal Rodal Contao. Circulación restringida.

bibliografía

- INFORA. 1989. Modelos fustales para plantaciones de pino insigne Celco-Temuco. Informe de circulación restringida.
- _____. 1990. Modelos fustales para plantaciones de pino insigne. Soc. Forestal Millalemu. Informe de circulación restringida.
- _____. 1990. Funciones de altura e índice de sitio. Soc. Forestal Millalemu. Circulación restringida.
- _____. 1990. Evaluación de nuevas metodologías en la proyección de la tabla de rodal mediante la función de distribución de Weibull. Circulación restringida.
- _____. 1991. Funciones de índice de sitio. Forestal Celco. S.A. Circulación restringida.
- _____. 1991. Funciones de índice de sitio. Forestal Arauco S.A. Circulación restringida.
- _____. 1992. Inventario Forestal Neltume-Carranco. Circulación restringida.
- INIF. 1984. Ciencia Forestal. Revista del Instituto Nacional de Investigaciones Forestales (INIF), México. Publicación bimestral. N° 52. Vol. 9. México, D.F.
- _____. 1985. Ciencia Forestal. Revista del Instituto Nacional de Investigaciones Forestales (INIF), México. Publicación bimestral. N° 56. Vol. 10. México, D.F.
- ITC. 1962. Holzmassenbestimmung in *Pinus silvestris*-Beständen aus Luftbildern. Versuch STELLINGWERF. AFZ, Delft.
- IUFRO (UNION INTERNACIONAL DE ORGANIZACIONES DE INVESTIGACION FORESTAL). 1969. La normalización de los símbolos en Dasometría. Doc.
- IVONINSKII, A.F.; CILINGARJAN, T.H.; POPOV, V.A. 1952. Aerial survey-new technique in forest management. Lesn. Hoz 5, S. 34-4 (Rus).
- JACK, W.H. 1960. The distribution of tree stems in a tropical high forest.
- _____. 1960. A "check method" applied to tropical high forest.
- JANZ, K. 1959. Die schwedische Reichswaldtaxierung. Dipl.-Arbeit Freiburg.
- JEDLINSKI, W. 1933. Die Verteilungskurven der relativen und absoluten Dezilenweite der Baumstärken und -höhen als Mittel zur Erhebung der biologischen Bestandsstruktur. Nancy, Berger-Levrault.
- _____.; GROSCHOWSKI, J. 1932. Grundsätze der Methodik Forstl. Forschungs- und Versuchsarbeiten in Polen. Warschau.
- JEFFERS, J.N.R. 1953. Statistical methods in forest research. 11e Congrès. Rome. Comptes rendus, S. 593.
- _____. 1956. Barr and Stroud dendrometer, Type F.P. 7. Rep. For. Res. For. Comm., London 1954/1955:127-136.
- _____. 1960. Experimental designs and analysis in forest research. Stockholm.
- JELEM, H. 1950. Studie über die Bestandesmaße als Funktion der Bestandesmittelhöhe. AFZ, Wien, S. 23-24.

- JÖBSTL, H.A. 1973. Ein Modell des Forstbetriebes. Neue Ansätze und Mittelfristige Planung. Veroff. des Inst. für forstlichen Wirtschaftslehre. Wein, 207 p.
- JOHNSON, N.L. 1949. Bivariate distributions based on simple translation systems. *Biometrika* 36, p. 297-309.
- JOHNSON, F.A. 1950. Estimating forest areas and volumes for large tracts. *J. For.* S. 340-342.
- _____.; HIXON, H.J. 1952. The most efficient size and shape of plot to use for cruising in old-growth Douglas-fir timber. *Jour. For.* 50(1), 17-20.
- JOHNSON, E.W. 1954. Ground control for planimetric base maps. *J. For.* 52. S. 89-95.
- JONSON, T. 1928. Einige neue Methoden zur Berechnung des Volumes und des Zuwachses bei stehenden Bäumen. Skogsh. Festschr.
- KAJFEZ, D. 1953. Circular sample plots for the determination of stand volume. *Soz. Vestn.* 11, S. 97-104 (en eslovaco).
- KALIPSIZ, A. 1957. Ertragskundliche Untersuchungen über die orientalische Buche. *Revue de la Fac. des sc. for. de l'Univ. Istanbul.*
- _____. 1958. Schaftholz-Massentafel bei orientalischer Buche. *Orman Fakültesi Dergise, Istanbul, Cit.* 8, Say. 1.
- _____. 1959. Ertragstafel für Schwarzkiefer. *Orman Fakültesi Dergise, Istanbul, Cit.* 9, S. 2.
- KAWAS, M.; ZILLER, A. 1975. Estudios cuantitativos sobre aprovechamiento de trozos de Pino insignie (*Pinus radiata* D. Don) en aserradero mecanizado de sierra alternativa. Tesis Universidad Austral de Chile.
- KEMP, P.D. 1957. Regression coefficients for computing cubic-foot volume of Rocky Mountain trees. Intermountain Forest and Range Experiment Station. Forest. Serv. US Dep. of Agric., Ogden, Utah. Research Paper Jan. 1957/ March 1957.
- KENNEL, R. 1959. Die Genauigkeit von Klappung und Umfangmessung nach einem Vergleichsversuch. *Fw. Cbl. H.* 7/8. S. 243-251.
- KERN, K.G. 1958. Untersuchungen über den Wachstumsgang der Kiefer im Buntsandsteingebiet des Pfälzer Waldes. Diss. Freiburg.
- _____. 1961. Beiträge zur Zuwachsmessung mit dem Arnbergschen Mikrodendrometer. *AFJZ.*
- _____. 1960. Jahreszeitlicher Ablauf des Dickenwachstums von Fichten verschiedener Standorte im Trockenjahr 1959. *AFJZ.*
- KEYLWERTH, R. 1954. Die Genauigkeit quantitativer Zuwachsanalysen. *Holz als Roh- und Werkstoff*, Jg. 12, S. 41-44, Berlin-Göttingen-Heidelberg.
- _____. 1954. Ein Beitrag zur qualitativen Zuwachsanalyse. *Ebda.* Jg. 12, S. 77 bis 83.
- KHATOURI, M. 1986. A simulation study of maximum likelihood and maximum product of spacing estimators of the three-parameters Weibull distribution. Ph D. Thesis Univ. Idaho.

bibliografia

- KINASHI, K. 1954. Forest inventory by sampling methods. Repr. from Bull. of the Kyushu Univ. Forests. Nr. 23, S. 153. Engl.
- _____. 1959. Yield table study of Cryptomeria growing in Northern Kyushu. Repr. from Bull. of the Kyushu Univ. Forests. Nr. 12.
- _____.; SCHUMACHER, F.X. 1958. A test of the standard volume table by multiple regression. Bull. of the Kyushu Univ. Forests. Nr. 30.
- KIRCHHOFF, J. P. HESS; ZOEHRER, F.; FOSTER, H. 1986. Entwicklung eines Schulungskonzeptes und Durchfuehrung der Schulung fuer die Bundeswaldinventur. DFS/BWI-Bericht N.d.
- KIVISTE, A.K. 1988. Mathematical functions of forest growth. Growth 29:233-238.
- KLAUPRECHT, J.L. 1846. Die Holzmeßkunst 2. Aufl., Karlsruhe.
- KLEINERT, R.; HENGST, E. 1956/57. Massen- und Wertzuwachs, dargestellt and Versuchsergebnissen von Eiche, Roteiche und Douglasie. Wiss, Zschr. d. T. Hochschule Dresden, H. 2.
- KLEPAC, D. 1953. Management volume tables ("tariffs"). Sum. List. 77, 4/5, S. 192-206.
- _____. 1954. Comparative investigations on diameter, height, and volume increment (of Silver Fir) in the association Abieto-Blechnetum. Sum. Lst 78, 2/3, 83-110 (en croata).
- _____. 1963. Rast i prirast (Wachstum und Zuwachs). Zagreb.
- _____. 1954. Increment % tables. Some possibilities of determining the increment %. Sum. Lst. 78 9/10. S. 454-486.
- KLUMP. 1930. Das Schälen von Kiefernholz. Forstarchiv.
- KNIGGE, W. 1956. Möglichkeiten der Verbesserung des Meßzahlsystems. Holzbl. Nr. 25.
- _____. 1956. Verbesserung des Meßzahlsystems. Holzbl. 40/41.
- _____. 1957. Entwicklung Stand und Aussichten der deutschen Rundholzsortierung. Der Forstwirt. H. 19/12.
- KNUCHEL, H. 1930. Zur Bildung von Durchmesserstufen bei Einrichtungsarbeiten. Schw. Z. f. Fw.
- _____. 1930. Über Leistungen und Kosten der Bestandsaufnahmen. Schw. Z. f. Fw.
- _____. 1951. Planung und Kontrolle im Forstbetrieb. Aarau.
- KOCH, J. 1955. Untersuchungen über das Wachstum von Fichtenbeständen im Bereich verschiedener Standortseinheiten des nördlichen Oberswabens. Mitt. des Vereins für forstl. Standortskartierung Nr. 3, S. 39-51. Stuttgart, z. Zt. Ludwigsburg.
- KÖHL, M.; SUTTER, R. 1990. Application of aerial photographs in the estimation of standing volume in the Swiss National forest inventory. Proceedings, IUFRO 5.4.02 and 5.6.04 Symp. Birmensdorf, Switz. 176-191.

- KÖHLER, A. 1951/52. Vorratsermittlung in Buchenbeständen nach Stammdurchmesser und Stammabstand. AFJZ.
- . 1952. Vorratsermittlung in Buchenbeständen nach Baumdurchmesser und Stammabstand. Allg. Forst. u. Jagdztg. 123:69-74.
- KOLLMANN, F. 1951. Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe. 2. Aufl. Springer. Verlag, Berlin.
- KONDO, M. 1954. Statistical research on timber survey -a study of the precision of classical sample tree methods as depends on the type of D.B.N. distribution based on modern mathematical statistics. Special Bull. of the Coll. of Agric. Utsunomya, Japan.
- KÖNIG, G. 1864. Die Forstmathematik. 1. Aufl., Gotha 1835, 3. Aufl. 1846, 5. Aufl., hrsg. v. C. Grebe.
- KOPEZKI, R. 1899. Neue Verfahren der Bestandesermittlung in der Holzmeßkunde. Cbl. f.d. ges. Fw.
- . 1902. Die Flächenstufen und ihre Anwendung in der Holzmeßkunde. Österr. Viertelj. f. Fw.
- KORF, V. 1953. Dendrometrie. Statni zemedelske nakladatelstvi. Praha (en checo).
- KORHONEN, K.T.; PÄIVINEN, R. 1990. A model forest for evaluating forest inventory designs. Proceedings, IUFRO 5.4.02 Symposium: "Forest inventory in Europe with special reference to statistical methods". Switzerland, May 14-16. 192-200.
- KORPELA, T. 1958. Über das Raum- und Festmaß des Brennholzes vor und nach dem Zerkleinern. Deutsches Referat. Comm. Int. for. Fenn.
- KORSUN, F. 1934. Die Bestimmung des Festgehaltes von Rundholz. Mitt. d. staatl. forst. Vers. Anstalt., Sekt. f. forstl. Ökonomie, Brünn. Pisek.
- . s.f. Wachstumsgesetze. Lesnicka prace (en checo).
- KOVACS, E. 1935. Über die Gesetzmäßigkeit der Stammverteilungen gleichaltriger Waldbestände nach der Bruthöhenstärke und ihre praktische Verwendbarkeit. Erdészeti Kisérletek Nr. 36, S. 159-219.
- KOZAC, A.; MUNRO, D.D.; SMITH, J.H.G. 1969. Taper functions and their application in forest inventory. For. Chron. 45(4):1-6.
- KOZAK, A. 1988. A variable-exponent taper equation. Can. J. For. Res. 18:1366-1368.
- KRAJICEK, J.E.; BRINKMAN, K.A.; GINGRICH, S.F. 1961. Crown Competition - a measure of density. For. Sci. 7:36-42.
- KRAMER, H. 1960. Rationelle Stichprobenaufnahme bei Versuchsflächen in Jungbeständen. AFJZ. H. 12
- KRÄUTER, G. 1958. Das Waldhöhentarifsystem. Arch. f. Fw. H.2/3, 1955 und Akad. Verlag.
- . 1960. Tabellenwerk und Graphika zum Waldhöhentarifsystem. Abt. Ertragskunde d. Inst. f. Fw. Eberswalde.
- . 1961. Einige Grundlagen für Holzvorratsinventuren in den Wäldern der DR Vietnam und ihre Anwendung im Gebiet Huu-Lung. Arch. f. Fw.

bibliografia

- KRENN, K. 1941. Die Hohenadlschen Mittelstämme und ihre Bedeutung für die Praxis der Zuwachsermittlung an Beständen. AFJZ, Nr. 117, S. 213-230, 243-263, 279-287.
- _____. 1942. Über Näherungsverfahren zur Berechnung der Durchmesser der Hohenadlschen Mittelstämme, dargestellt an einem extremen Bestandesbeispiel. AFJZ. Nr. 118, S. 41-47.
- _____. s.f. Der Biltmore-Stock. Manuskript.
- _____. 1943. Der "Ernterverlust". AFJZ.
- _____. 1944. Die Bestandesmassenermittlung mit Hilfe stehender Probestämme. Frankfurt/M.
- _____. 1946. Durchforstungskriterium für Fichte. H. 1 d. Bad. forstl. Vers. Anst.
- _____. 1946. Neue Wege zur Erfolgsrechnung. H. 2 d. Bad. forstl. Vers. Anst.
- _____. 1946. Ertragstafeln für Fichte. H. 3 d. Bad. forstl. Vers. Anst.
- _____. 1948. Tarife zur Massenberechnung von Beständen. H. 6 d. Bad. forstl. Vers. Anst.
- _____. 1948. Holzmeßlehre (Gliederung und Leitfaden der Vorlesungen).
- _____.; PRODAN, M. 1944. Die Bestimmung der echten Schaftholzformzahl und Ausbauchungsreihe aus dem echten Formquotienten. Mitt d. Akad. d. deutsch. Fw., Bd. 8.
- _____.; REINHOLD, F. 1947. Durchforstungskriterien der wichtigsten Holzarten. H. 5 d. Bad. forstl. Vers. Anst.
- KREUTZINGER, M. 1949. Definition of increment on large areas. Actes du IIIe Congr. Forest. mond. Helsinki, Nr. 1, S. 69-79.
- KRIEGER. 1956. Geldertragstafeln für den Wald als dynamisches Problems. Hannover.
- KRIPPEL, M. 1937. Zur Frage der Meßverluste beim Rundholz. Forstarchiv Nr. 131, S. 418.
- KRÜNITZ. 1781. Ökonomische Encyklopaedie.
- KRUTZCH-LOETSCH. 1938. Holzvorratsinventur und Leistungsprüfung der naturgemäßen Waldwirtschaft. Neudamm. S. 164.
- KÜBLER, H. 1960. Die russische Rundholzvermessung. Holz-Zbl. Nr. 86, S. 20, 307/308.
- KÜHN, H. 1956. Wilhelm Tischendorf. Forstarchiv H. 8 S. 181-182.
- _____. 1958. Zur Auswirkung von Meßfehlern am Anfangsvorrat. Cbl. f. d. ges. Fw. 75. Jg., H. 2, S. 142-143.
- KÜNANZ, H.; WEBER, K. 1925. Ein Weiserflächensystem zur periodischen Messung der massenbildenden Faktoren in Nutzholzmischbeständen und deren Leistungen (Vorrat und Zuwachs); Zugleich ein Hilfsmittel zur Gewinnung zahlenmäßiger Unterlagen für Ertragsregelung, Waldbau und Bestandesgeschichte. AFJZ. 101. Jg. S. 345-359.
- KÜNSTLE. 1955. Qualitätsansprache in Laubholzbeständen. Diplomarbeit.

- KUNZE, M. 1873. Lehrbuch der Holzmeßkunst. Berlin.
- _____. 1891. Neue methode zur raschen Berechnung der unechten Schaftformzahlen der Fichte und Kiefer. Dresden, S. 30.
- _____. 1907. Unechte Schaftformzahlen und Astholzgehalte der mitteldeutschen Weißtanne. Berlin.
- _____. 1912. Untersuchungen über die Genauigkeit der Inhaltsberechnung der Mittenstärke und-länge. Tharandt.
- KUROIWA, K. 1954. Diameter growth of the stems of Paulownia girdled with band (dendrometer). I. Journ. Jap. For. Soc. 36, II, 313-17 (en japonés).
- _____. 1957. Daily growth curves. Journ. of Jap. For. Soc. 39.
- KURTH, A. 1954. Die Kontrollidee in der Schweizer Forstwirtschaft. AFJZ, Nr. 125, S. 130-135.
- _____.; WEIDMANN, A.; THOMMEN, F. 1960. Beitrag zur Kenntnis der Waldverhältnisse im Schweizerischen Nationalpark. Schw. Anst. f. d. forstl. Versuchw. H. 4.
- KURTH, A. 1962. Die Anwendung des Luftbildes im schweizerischen Forstwesen. Mitt. d. Schweiz. Anst. f. d. F.V.W. Bd. 38.
- KURTH, H. 1961. Variabilitätskoeffizienten des Radialzuwachses und mathematisch-statistische Genauigkeit der Zuwachsinventur auch f. Fw.
- KUUSELA, K. 1953/1954. Zur theorie der Forstlichen Zuwachsberechnung auf Grund der periodischen Messung. Acta for. fenn. Nr. 60, S. 136.
- LAER, W. v. 1936. Massenberechnungstafeln für Holzvorratsaufnahmen. Berlin. u. J.D. Sauerländers Verl. Frankfurt.
- _____. 1938. Formhöhenreihen. Ergänzungsband zu den "Massenberechnungstafeln für Holzvorrataufnahmen 1936".
- _____. 1956. Einführung in die forstliche Photogrammetrie. Neudamm. Forstl. Lehrbuch. 5. Lieferung.
- _____.; SPEIDEL, G. s.f. H. Forsteinrichtung. Leitsätze und Zahlengrundlagen. "Grundlagen der Forstwirtschaft", Verl. Schaper, Hannover.
- LAER, W. v.; SPIECKER, M. 1951. Massenberechnungstafeln zur Ermittlung von Vorrat und Zuwachs von Waldbeständen. Sauerländer's Verlag. Frankfurt/M.
- LAHTI, T. 1953. The measurement of the contents of pulpwood bundles. Metsät. Aikak. 5. S. 148-152 (Fi.).
- LAMFALUSSY, S. 1956. Einige Fragen über die Bestimmung des Inhalts von Holzsortimenten. Az Erdő (ung.)
- LANG, A. 1938. Die Fichtensortentafeln der Württembergischen Forsteinrichtungsanstalt. AFJZ. Nr. 114, S. 161-167.
- _____. 1938. Bestandeseinheitshöhenkurven der Württembergischen Forsteinrichtungsanstalt. AFJZ. Nr. 114, S. 168-176.

bibliografía

- LANG, A. 1938. Sortenuntersuchungen in württ. Fichtenbeständen und Aufstellungen einer Fichtenbestandssortentafel. AFJZ. Nr. 114, S. 285-297.
- . 1941. Ein Vorschlag zur Bildung von Durchmesserstufen und Stärkekassen bei der Forsteinrichtung. AFJZ. Nr. 117, S. 166-172.
- LANGSAETER, A. 1929. Die durchschnittlichen Durchmesser der Durchmesserklassen. Mittlg. a. d. forstl. Versuchswesen Norwegens Nr. 11, S. 217-241.
- . 1934. Über die Genauigkeit der Walntaxierung mittels Probestreifen. II. Bestimmung der Höhe und der Jahresringbreite. Mittlg. a. d. forstl. Versuchswesen Norwegens Nr. 18.
- . 1942. Die Verteilung der Gesamtproduktion im Fichtenwald auf Durchmesserklassen. Tidskr. f. Skogbr. Nr. 50.
- LANLY, J.P. 1963. Détermination du taux d'échantillonnage d'un inventaire statistique en fonction de la densité des peuplements à inventorier. Ann. de l'Ec. Nat. E. et For. Nancy.
- . 1971. Influence of the observer in qualitative grading of standing trees (C.T.P.T. method). In XV the. IUFRO Congress in Gainesville. Universidad de Missouri, Florida (Columbia), p. 64-84.
- . 1974. Manual de inventario forestal, con especial referencia a los bosques mixtos tropicales. FAO, Roma.
- LANLY, J.P.; LEPITRE, C. 1970. Estimation des volumes commercialisables dans les inventaires forestiers tropicaux par sondages. Bois For. Trop. N° 129.
- LAPPI-SEPPÄLÄ. 1936. Untersuchungen über die Stammform der Kiefer und Birke. AFF.
- LARSON, P.R. 1963. Stem form development of forest trees. Forest Science Monograph 5. 42 p.
- LAWRENCE, P.R.; WALKER, B.B. 1954. Methods and results of forest assessment using random sampling units in photo interpreted strata. Aust. For. Nr. 2.
- LEDEZMA, J. 1990. Inventario en Polylepis Incana. Estimación de volumen mediante análisis de regresión. Universidad Mayor de San Simón. Facultad de Ciencias Agrícolas y Pecuarias. Escuela Técnica Superior Forestal. Cochabamba, Bolivia.
- LENGER, A.; GATHY, P. s.f. Étude biométrique de la production en cônes et en graines du pin de Koekelare, critères de sélection.
- . 1960. Les méthodes d'échantillonnage en sylviculture. Biométrie-Praximétrie Nr. 3/4, S. 181-192.
- LENHARD, U. 1958. Einheitshöhenkurven und Massenberechnung bei der Kiefer im Pfälzerwald. Diplomarbeit.
- LEPORSKY, A. 1931. Über die Formel von Tretiakow. Arbeiten der Tschech. Forstl. Vers. Anstalt, Sektion f. Forstl. Ökonomie. Bd. 49, Prag.
- LESCAFETTE, J. 1951. Une propriété des arbres et des peuplements: la surface génératrice. Bull. doc. for. Franche-Comté.

- LEVAKOVIC, A. 1935. Analytischer Ausdruck für die Bestandeshöhenkurve (Glasnik za sumake pokuse.) (en croata).
- _____. 1935. Analytischer Ausdruck der Wachstumsgesetze. Ebenda.
- LEWIS, M.R.; JOHNSON, K.N. 1975. Optimal policies for managed stands. An infinite horizon markov decision process approach. For. Sci. 21. 109-122.
- LEWIS, N. B.; Mc INTYRE, G.A. 1963. Regional volume table for *Pinus radiata* in South Australia Canberra.
- LEWIS, N.B.; KEEWES, A.; LEECH, J.W. 1976. Yield regulations in South Australian *Pinus radiata* plantations. Woods and Forest Dept. South Australia. Bulletin N° 23.
- LOBOS, C. 1975. Estudio de formas de pino insignie (*Pinus radiata* D. Don). Tesis Fac. de Agronomía, Universidad de Chile. 45 p.
- LOETSCH, F.; HALLER, K.E. 1964. Forest Inventory. Vol. I. BLV-München, Basel, Wien. 436 p.
- LOETSCH, F.; ZOEHRER, F.; HALLER, K.E. 1973. Forest Inventory. Vol II. BLV-Verlagsges. 469 p.
- LOETSCH, F. 1950. Quantitative und qualitative Holzvorratsinventur nach dem Verfahren des repräsentativen Querschnitts. AFZ.
- _____. 1952. Entwicklungsmöglichkeiten mitteleuropäischer Holzvorratsinventurmethode. Z. f. Weltforstwirtschaft. 15.
- _____. 1952. Der Einfluß von Höhenstufen und Holzarten auf einen einheitlichen Massentarif bei mitteleuropäischen Waldvorratsinventuren. Z. f. Weltforstwirtschaft. 15.
- _____. 1953. Die Anwendung des Luftbildes als Grundlage von Vorratsinventuren in den USA. Folgerungen für eine deutsche Entwicklung. Forstarchiv. H. 1/3.
- _____. 1953. Massenzuwachsermittlung durch Bohrsproben unter Anwendung mathematischer Methoden. Z. f. Weltforstwirtschaft. 16(3), S. 77-98.
- _____. 1954. Das Tariffdifferenzverfahren zur Massenzuwachsermittlung. Anwendung in der Forstlichen Praxis und im Versuchswesen. Schw. Z. f. Fw. 105(3-5), S. 1-47.
- _____. 1955. Waldflächeninventur in Kleinprivatwald mit Stichprobenverfahren unter weitgehender Benutzung des Luftbildes. Forstarchiv. S. 173-182.
- _____. 1957. Report to the Government of Thailand on inventory methods for tropical forests. FAO Report Nr. 545. Food and Agr. Org. of the UN. Rome.
- _____. 1957. A forest inventory in Thailand. Unasylva, Vol. 11, Nr. 4.
- _____. 1962. Die Bedeutung des Luftbildes bei Waldinventuren in den Tropen. AFJZ.
- _____. 1964. Forest Inventory. BLV-München.
- LÖFFLER, H. 1956. Zur Geschichte der Meßzahlen. Holz-Zbl. Nr. 80.
- LOWELL, K. E. 1986. A flexible polynomial taper equation and its suitability for estimating stem profiles and volumes of fertilized and unfertilized radiata pine trees. Aust. For. Res. 16:165-174.

bibliografia

- LÜNZMANN, H. 1958. Massenumrechnungen. Holz als Roh- und Werkstoff.
- LUTHER-SCHNUR. 1937. Yield, stand and volume table for upland oak forests. Techn. Bull.
- MacDONALD, K.R. 1954. Yield data for Akure forest. Inf. Bull. For. Dep. Nigeria. Nr. 20, 1-6.
- MacDOUGAL, D. 1948. Das Wachstum des Baumes. Chronica botanica. Leiden und Berlin.
- MACHADO, S. de A. 1978. Studies in growth and yield estimation for *Pinus taeda* L. plantations in the State of Parana - Brasil. Ph.D. Thesis, U. Washington.
- Mac LEAN, C.D.; BOLSINGER, C.L. 1973. Estimating duning's site index from plant indications. USDA Forest Service. Research Note PNW-197.
- MAGIN, R. 1959. Kronengröße und Zuwachs in Mehrschichtigen Mischbeständen. Forst-u. Holzwirt. Nr. 15.
- _____. 1963. Standortgerechte Ertragsermittlung als Teil der Forsteinrichtung. AFZ Nr. 8.
- MAIR, N. 1961. Die Weiterentwicklung der Forsteinrichtung in Tirol seit Abschluß der Waldstandsaufnahme. AFZ, Wien.
- _____. 1958. Nachhaltseinheiten, Sinn und Aufgabe. Eine Folgerung aus der Waldstandsaufnahme für das Land Tirol. AFZ, Wien, S. 91-92.
- MAKKONEN, O. 1959. Measuring tests with pile density gauges model Bitterlich and model Snellman. Paper ja Pun, 6. Helsinki.
- MALLEUX, J. 1982. Inventarios forestales en bosques tropicales. Universidad Nacional Agraria, Perú.
- MANTEL, W. 1959. Forsteinrichtung. 2, Auflage. Sauerländer, Frankfurt a.M.
- _____. 1962. Waldbewertung. BLV. München.
- MARK, E. 1960. Zur gegenwärtigen Situation der forstlichen Photogrammetrie in Österreich. AFZ. Nr. 13/14, S. 153.
- MARTIN, F.S.; REAL, P.L. 1992. Construcción de modelos de volumen de razón. Tesis Universidad Austral de Chile.
- MATERN, B. 1947. Methods of estimating the accuracy of line and sample plot survey. Medd.
- _____. 1960. Spatial variation. Medd.
- _____. 1958. On the geometry of the cross-section.
- _____. 1960. Forest surveys and the statistical theory of sampling some recent developments. 5. Weltforstkongress Br. Seattle.
- _____. 1976. Om skattning au övre höjden. Särtryck ur Sveriges Skogsvårdsförbunds Tidskrift, 74, 1:51-53.
- MATHAUDA, G.S. 1954. Relationship between the average diameters of the main and the subsidiary crops in the case of plantation teak (*Tectona grandis* L. f.). Indian for. 80, S. 707-708.

- MATTE, L. 1949. The taper of coniferous species with special reference to loblolly pine. For. Chron. 25:21-31.
- MATTNEY, T.G.; SULLIVAN, A.P. 1982. Variable top volume and height predictors for slash pine trees. For. Sci. 28:274-282.
- MAUVE, K. 1931. Über Bestandesaufbau, Zuwachsverhältnisse und Verjüngung im Galizischen Karpathen-Urwald. Mitt. a. Forstwirtschaft u. Forstwiss. S. 257-311.
- MAX, T.A.; BURKHART, H.E. 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. For. Sci. 22(3):283-289.
- MAYER-WEDELIN, H. 1953. Der Einfluß von Schaftform und Holzfehlern auf den Wert des Buchenstammes. Holz als Roh-und Werkstoff. Bd. 11, S. 342-349.
- McCORMACK, J.F. 1953. D.B.H. in relation to stump diameters at various heights for southern yellow pines and hard woods. Res. Note Southeast. For. Exp. Stat. Nr. 43, S. 2.
- McGEE, C.E.; DELLA-BIANCA, L. 1967. Diameter distributions in natural yellow-poplar stands. USDA For. Ser. Res. Pap. SE-25.
- Mc MULLAN, M.J. 1978. RADHOP and RADVAL. Forestry Commission of N.S.W. In Exotic Forest Mensuration and Management. N. Zealand For. Ser. For. Re. Inst. Symposium N° 20.
- MEAD, D.J. 1990. Radiata Pine: Biology and silviculture in relation to modelling. Prepared for Fundación Chile. p. 35.
- MEJORADA, N.S.; ESCARPITA, A.H.; HUGUET, L. 1958. A forest in Mexico. Unasylva. Nr. 2, S. 55.
- MENGERSEN. 1956. Korrektur der Meßzahlen. Holz-Zbl. Nr. 37.
- MERKLE, R. 1948. Die Holzvorratsaufnahme mit Hilfe Stammabstände. Freiburger Diplomarbeit.
- _____. 1952. Zur Entwicklung des Preises und der Preisspannung beim Fi/Ta-Stammholz. Holz-Zbl. Nr. 126, S. 1733-1736.
- MESAVAGE, C.; GIRARD, J.W. s.f. Tables for estimating board foot volume of timber.
- METZGER, K. 1894/95. Studien über den Aufbau der Waldbäume und Bestände nach statistischen Gesetzen. Münd. forstl. Hefte.
- MEYER, H.A. 1933. Eine mathematisch-statistische Untersuchung über den Aufbau des Plenterwaldes. Schw. Z. f. Fw.
- _____. 1934. Die rechnerischen Grundlagen der Kontrollmethode. Zürich.
- _____. 1942. Methods of forest growth determination. Penns.
- _____. 1946. Bark volume determination in trees. Journ. of For., Nr. 12.
- _____. 1949. Cruising intensity and accuracy of cruise. Jour. of For., Nr. 8.
- _____. 1952. Forest management. New York.

bibliografía

- MEYER, H.A. 1953. Forest mensuration. Penns. Valley Publ. Inc. State Coll. Pa. pp. VIII u. 357.
- _____.; NELSON, F.B. 1953. Accuracy of forest growth determination based on the measurement of increment cores. Penns. State Coll. Bull. 547.
- MEYER, W.H. 1929. Yields of second-growth spruce and fir in the northeast. United States Department of Agric., Washington D.C., Tech. Bull. Nr. 142.
- _____. 1930. Diameter distributions series in evenaged forest stands. YU. F. B.
- MICHAÏLOFF, J.L. 1936. Untersuchungen über die Berindung der Fichte. Hofdruckerei, Sofia.
- _____. 1938. Beitrag zur Kenntnis der Schaftform der Fichte in Bulgarien. Jb. d. Univ. Land-u. Forstw. Fak, 16,2, S. 127-153.
- _____. 1943. Zahlenmäßiges Verfahren für die Ausführung der Bestandeshöhenkurven. Sonderdr. Fw. Cbl. u. Tharandter Forstl. Jb. H. 6.
- _____. 1951. Über die Anwendung der Methode der Kleinsten Quadrate bei der Aufstellung von Massentafeln mit einem Eingange. Skopje.
- _____. 1952. Mathematische Formulierung des Gesetzes für Wachstum und Zuwachs der Waldbäume und Bestände. Sonderdr. a.d. Schw. Z. f. Fw. Nr. 9/10.
- _____. 1952. Dendrometría. Skopje.
- _____. 1956. Ein neues numerisches Verfahren zur Herstellung von Bestandeshöhenkurven. Skopje.
- MIKLOSS. s.f. Persönl. Mitteilung über die Ableitung der Massenzuwachsformel.
- MINE, I. 1935. Studie über persönliche Fehler beim Messen von Baumhöhen. Tokyo Teikokudaigaju Eusnuriu, Holoku 21, S. 119-172.
- _____. 1953. Studies on the estimation of timber volume (1). The basis of stratification or of allocation of samples in estimating volume of timber stands. Bull. Tokyo Univ. For. Nr. 44, S. 107-122 (en japonés).
- _____. 1954. Forest management (3) Hokkaido.
- _____. 1956. Ertragstafeln für *Larix leptolepis*.
- MINOR, GH. O. 1953. Converting basal area to pulp volume. L.S.U. For. Notes. Agr. Exp. Sta. Nr. 3, S. 1.
- MIR DUPOUY, J. 1972. La computación y la fotogrametría. El Primer Simposio Cartográfico Nacional. Instituto Geográfico Nacional.
- MITCHELL, K.J. 1975. Dynamics and simulated yield of Douglas-Fir. Forest Science Monograph, 17-39 p.
- MITSCHERLICH, G. 1939. Sortenertragstafeln für Fichte, Kiefer, Buche und Eiche. M.F.F. Nr. 10.
- _____. 1942. Untersuchungen über die Derbholzformzahl und neue Wege zu ihrer Ermittlung. M.F.F.

- MITSCHERLICH, G. 1949/1950. Bedeutung der Wuchsgebiete für das Bestandeswachstum von Kiefer, Fichte, Douglaise, Buche, Eiche, Erle und Birke. Fwiss. Clb.
- _____. 1952. Der Tannen-Fichten (Buchen) Plenterwald. Schriftenreihe d. Bd. Forstl. Vers. Anst. Freiburg. H. 8.
- _____. 1961. Untersuchungen in Plenterwäldern des Schwarzwaldes. Die Vfl. Wolfach 3/II und Freudenstadt 5. AFJZ 3/4.
- _____. 1953. Der Eichenbestand mit Buchen-und Tannenunterstand. Ertragskundliche Untersuchung der Eichenversuchsflächen in der badischen Vorbergzone. Schriftenreihe d. Bd. Forestl. Vers. Anst. Freiburg. Bd. 9, S. 3-34.
- _____. 1957. Das Wachstum der Fichte in Baden. AFJZ.
- _____. 1955. Untersuchungen über das Wachstum der Kiefer in Baden. AFJZ.
- _____.; KÜNSTLE, E.; MAURER, P.; MOLL, W. 1965. Ertragskundlich-ökologische Untersuchungen in zwei Durchforstungs-Douglasien-Beständen und in einem Kiefern-Laubholzmischbestand. Schriftenreihe der Bad-Württ. Landesforstverwaltung. Freiburg.
- MOESSMER, K.E. 1954. Photo interpretation in forest inventories. Photogram. Engag. Nr. 19, S. 496-507.
- _____. 1957. Preliminary aerial volume tables for conifer stands in the Rocky Mountains. For. Serv. U.S. Dep. of Agric. Ogden, Utah, Res. Paper Nr. 41.
- MOFFIT, F. 1970. Photogrammetry.
- MOLINOS, V. 1969. Establecimiento y análisis de un coeficiente de pérdida de volumen en explotación de bosques de pino insigné. Tesis Universidad de Chile.
- MÖLLER, C.M. 1954. Grundflächenzuwachs und Massenzuwachs mit verschiedenen Definitionen. Fw. Cbl. S. 350.
- _____. 1954. Ertragstafel für Buche, Eiche und Fichte.
- MOLLER, C. Mar. 1951. Traemåling-og tilvaekstlaere. Kfbenhavn.
- MONSERUD, R. 1984. Height-Growth and Site Index curves for Inland Douglas-fir Based on Stem Analysis and Forest Habitat Type. For. Sci. 30:(4) 493-965.
- MONTENEGRO, E. 1986. Proyecto Apoyo a la Evaluación de los Recursos Forestales del Oriente. Instrucciones para el levantamiento de muestras. Guatemala. FAO/TCP/GUA/4502, Anexo 10.
- MOORE, J.A.; BUDELSLEY, C.A.; SCHLESINGER, R.C. 1973. A new index representing individual tree competitive status. Can. Jour. For. Res. 3: 495-500.
- MOOSMAYER, H.U. 1952. Untersuchungen über den Durchmesserzuwachs. Diplom Arbeit.
- _____. 1956. Zur ertragskundlichen Auswertung der Standortsgliederung im Ostteil der schwäbischen Alb. Mitt. d. Ver. f. forstl. Standortskartierung. H. 7. Frbg. Diss.

bibliografia

- MORENZA, E. 1951. Tablas volumétricas de árboles tipo de "*Pinus insignis* Doug" en el Norte de España. Inst. For. de investig. y exp. Madrid.
- MORISITA, M. 1954. Estimation of population density by spacing method. Mem. Fac. Sci. Kyuschu Univ. Series E, 1,4: 187-197.
- MOTOVILOW, G.P. 1951. Forsteinrichtung (Lesoustroistwo). Moskwa (en ruso).
- MÜLLER, G. 1931. Stereophotogrammetrische Messungen am Bestande. Diss. Dresden, Langensalza.
- _____. 1936. Über den mittleren Okularschätzungsfehler bei der Holzmassenermittlung in Sachsen. Thar. Forstl. Jahrb. Nr. 87, S. 327-344.
- _____. 1959/60. Um Maßstab und Genauigkeit der Forstgrundkarten. Wiss. Zschr. der Th. Dresden 9, H. 4.
- _____. 1938. Die erforderliche Meßgenauigkeit bei Probestammaufnahmen am Stehenden, AFJZ, Wien, Nr. 56, S. 112-113.
- _____. 1938. Die Genauigkeit der Dendrometermessung mit Basisdendrometern. AFJZ. Wien, Nr. 56, S. 138-139.
- _____. 1954. Inhaltsberechnungen von Stämmen und sonstigen Rotationskörpern mit Hilfe der Flächenformzahlen ihrer Vertikalprofile. Arch. f. Fw. g. 3, S. 717-723.
- _____. 1957. Über Gesetzmäßigkeiten im Wachstumsgang von reinen gleichaltrigen Fichtenbeständen unter besonderer Berücksichtigung verschiedener Durchforstungsstärken. Freiburg, Diss.
- _____. 1958. Untersuchungen über die Querschnittsformen der Baumschäfte. Fw. Cbl. H. 1/2, 1957, 1. Mitt., H.1/2, 1958. 2. Mitt., 1958.
- _____.; ZAHN, E. 1958. Eine gute Ausgleichsfunktion zur Konstruktion von Massentafeln. Fw. Cbl.
- MÜLLER, U. 1920. Lehrbuch der Holzmeßkunde. 2. Aufl. 1915; 3. Aufl. Berlin.
- MYERS, C.A. 1968. Simulating the management of even-aged timber stands. USDA For. Ser. Res. Pap. RM-42.
- _____. 1973. Simulating changes in even-aged timber stands. USDA. Forest. Service. RM-109.
- NAIR, R.R. s.f. Statistische Methoden der forstlichen Forschung. Indian For. 70 (7). S. 383/9.
- NÄSLUND, M. 1936/37. Die Durchforstungsversuche der forstlichen Versuchsanstalt Schwedens im Kiefernwald. M.S.S.
- _____. 1939. On computing the standard error in line and sample plot surveying. M.S.S.
- _____. 1957. Funktioner och Tabeller for Kubering av staende träd. Tall. gran och björkei södra Sveden samt i hela landet. M.S.S.
- _____. 1957. Die schwedische Reichswaldtaxation. Forstwiss. Cbl. 76 Jg. S. 321.
- NEUMANN, CHR. 1953. Beitrag zur Vorratsermittlung aus Luftmeßbildern. Diss. Dresden. Neudamm.

- NEWBERRY, J.; BURKHART, H. 1986. Variable-form stem profile models for loblolly pine. *Can. J. For. Res.* 16:109-114.
- NEWNHAM, R.M. 1964. The development of a stand model for douglas-fir. Ph. D. Thesis Dep. For. Univ. British Columbia.
- _____. 1988. A variable-form taper function. Petawawa Nat. For. Inst. Forestry Canada. Infor. Rep. PI-X-83.
- NICOLAU-BARLAD. 1938. Über die heutige Photogrammetrie und ihre Anwendungsmögl. i.d. Forstwirtsch. u. Wildbachverbauungstechnik d. Karpathen-u. Donauländer. Wichmann, Berlin.
- NISHIZAWA, M. 1955. Direct prediction of stand increments. 1. Individual tree sampling. *Journal of the Jap. For. Soc.* Nr. 9.
- _____. 1955. A few problems of growth estimation. *Ebenda.* Nr. 10.
- _____. MANABE, A.; MINAL, J. 1956/57. Direct estimation of stand increments (II). Individual tree sampling.
- NÖRDLINGER. 1871. Der Holzring als Grundlage des Baumkörpers. Stuttgart.
- NYLAND, R.D.; REMELE, K.E. 1975. The measures distance for plot boundaries. State. Univ. of N.Y. Syracuse, N.Y. Appl. For. Res. Inst. Res. Note. N. 17.
- NYSSÖNEN, A. 1955. Estimation of stand volume by means of the relascope. *Comm. Inst. for. Fenniae.* Bd. 44, Helsinki.
- _____. 1955. On the estimation of the growing stock from aerial photographs. *Ibid.*
- _____. 1955. Estimation of the cut from stumps. *Ibid.* Bd. 45/5.
- _____. 1961. Survey methods of tropical forests. FAO-Rom.
- OBALIL, Z. 1936. Kubierung des geschichteten Holzes. Brünn.
- OHTOMO, E.; NAKAJIMA, I. 1956. Research on the method of forest inventory by the use of aerial photographs. *Journ. of Jap. For. Soc.*
- OPIE, J.E. 1972. STANDSIM - a general model for simulating the growth of even-aged stands. 3rd. Conf. Adv. Group of For. Statisticians, Sec. 25, IUFRO, France.
- ORMEROD, D.P. 1973. A simple bole model. *For. Chron.* 49: 136-138.
- ORTIZ, E. 1990. Curso: Crecimiento y rendimiento dendrométrico. Material didáctico. Convenio de Cooperación Universidad Mayo de San Simón. Cooperación Técnica Suiza-IC Instituto Tecnológico de Costa Rica. Material Didáctico.
- ORTIZ, A. 1991. Manual de Raleos. Corporación Hondureña de Desarrollo Forestal. Departamento Forestal.
- OSBORNE, J. 1951. Adaption of modern statistical methods to forest inventories. *UNSCCUR*, S. 6-9.
- _____.; SCHUMACHER. 1935. The construction of normal-yield and stand tables for evenaged timber stands. *J.A.R.* Vol. 51, Nr. 6.

bibliografía

- OSTLE, B. 1973. Estadística aplicada. Trad. del Inglés por Dagoberto de la Serna. México, Limusa. 629 p.
- OSUMI, SH. 1959. Studies on the stem form of the forest trees (1). On the relative stem form. Journ. of the Jap. For. Soc. Nr. 12.
- _____. 1960. An application of time analysis to timber cruise. Kyoto Prefectural Univ. Agr. Nr. 12, S. 87-97.
- _____. 1954. Untersuchungen über Abrundungsfehler in der Bestandesmassenermittlung. Bull. of the Kyoto Univ. Forests. Nr. 24, pp. 1-54.
- _____. 1961. On the frequency distributions of d.b.h in stands. Ibid.
- _____. 1963. Distribution of Bitterlich's Count Sampling and it's Application in Testing Homogeneity of Stand Structure. Ebda.
- ÖTTELT. 1765. "Praktischer Beweis, das die Mathesis bey dem Forstwesen unentbehrliche Dienste thue".
- PALLAY, N. 1955. Investigations for determining conversion factors for (stacked) fuelwood. Erdöm Oernöki Föiskola Kösleményei Sopron Budapest. (Hung-Russ), pp. 11-18, 1954.
- PALLEY, M.M. 1953. The Saskatchewan forest inventory. For. Chron. 29, 3, pp. 261-6.
- PARDÉ, J. 1955. Un dendromètre pratique et efficace: le dendromètre Blume-Leiss. Ec. for. franc. 7, S. 207-10.
- _____. 1956. Utilisation de la photographie pour mesurer les surfaces terrières. RFF. Nr. 7.
- _____. 1956. Un appareil révolutionnaire: Le relascope à miroir de Bitterlich. RFF.
- _____. 1957. Recherches sur l'application aux taillis sous futaie des méthodes mathématiques statistiques d'inventaire. Ann. de l'Ecole Nat. des Eaux et Forêts.
- _____. 1956. Inventaires forestiers et méthode statistique. RFF. Nr. 8-9.
- _____. 1958. Terrière de Pressler sans temps de passage. RFF.
- _____. 1959. Un nouveau dendromètre français: l'altamètre. RFF. Nr. 2, p. 104.
- _____. 1960. Recherches sur l'application aux futaies régulières des inventaires par la méthode statistique. Ann. de l'Ecole Nat. des Eaux et Forêts et de la Stat. de Rech. et Exp., Tome XVII. Fasc. 2.
- _____. 1962. Dendrométrie. Nancy.
- _____. 1963. Inventaire statistique des peuplements réguliers de chêne d'âge moyen. Notes techniques forestières.
- PARRESOL, B.R.; MOTHEDT, J.E.; CAO, Q.V. 1987. A volume and taper prediction system for baldcypress. Can. Jor. For. Res. 17: 250-259.
- PATRONE, G. 1954. Tavola alsometrica delle fustaie coctanée di fagio del molice. Ital. for. mont. 9, 1, S. 41-44.
- _____. 1955. Tavola alsometrica dell'abete rosso di Borno cresciuto in fustaia coetanea. Ebda. 10, 1, S. 39-42.

- PATRONE, G. 1963. Sul tasso del frutto delle fustaie a lento accrescimento, Firenze.
- _____. 1963. Lezioni di dendrometria. Florenz. 392 S.
- PATTERSON, D.W.; WIAIT, H.V.; WOOD, G. 1993. Log Volume Estimations. The centroid method and standard formules. Journ. of For. August.
- PAULSEN, J. 1795. Kurse praktische Anleitung zum Forstwesen. Verfaßt von einem Forstmann. Hrsg. v. Kammerrat G.F. Führer.
- PELLICO, S. 1981. National Forest Inventory in Brazil. Proceedings XVII IUFRO World Congress. 6-12 Sept. Kyoto, Japan. p. 213.
- PELZ, D.R. 1992. National Forest Inventory. Past Developments and future prospects. Proceedings of the IUFRO Centurial meeting, Berlín. 1992. II-18.
- PEREZ, D.N.; BURKHART, H.E.; STIFF, K.T. 1990. A variable-form taper function for *Pinus oocarpa* Schiede in Central Honduras For. Sci. 36:186-191.
- PESCHEL, W. 1936. Neuere Verfahren der Bestandesmassenermittlung nach Probestämmen, ihre mathematisch-statistische Begründung und ihre Erprobung an einem praktischen Bestandsbeispiel. Thar. Forstl. Jahrb. 87. S. 889-921.
- _____. 1938. Die mathematischen methoden zur Herleitung der Wachstumsgesetze von Baum und Bestand und die Ergebnisse ihrer Anwendung. Diss. Dresden. Berlín 1938. Thar. Forstl. Jahrb. 89, Bd., H. 3/4.
- PETERS, R. 1971. Konstruktion eines Massentafelmodels dargestellt am Beispiel der Baumart *Araucaria araucana* (Mol) Koch Dissertation U. Freiburg.
- _____. 1976. Sugerencias para el Inventario Forestal Nacional. Instituto Nacional Forestal. Documento de trabajo N° 14. Guatemala. p. 29.
- _____. 1976. Tablas de rendimiento preliminar para *Pinus oocarpa* Schiede (Pino Colorado). Instituto Nacional Forestal. Documento de trabajo N° 15. Guatemala. p. 17.
- _____. 1976. Sistema de procesamiento electrónico de datos de inventario forestal en bosque de coníferas. Instituto Nacional Forestal. Documento de trabajo N° 16. Guatemala. p. 62.
- _____. 1979. Prueba y corrección de las tablas de volumen para pino insignie (*Pinus radiata* D. Don). Informe Técnico N° 55, Instituto Forestal, Santiago.
- _____.; ESCOBAR, J. 1976. Tablas de volumen para *Pinus oocarpa* Schiede (Pino Colorado). Instituto Nacional Forestal. Documento interno N° 10. Guatemala. p. 32.
- PETERS, R.; JOBET, M.J.; AGUIRRE, S.A. 1985. Compendio de tablas auxiliares para el manejo de plantaciones de pino insignie. Manual N° 14. Instituto Forestal, Santiago.
- PETERS, R. 1977. Tablas de volumen para las especies coníferas de Guatemala. Instituto Nacional Forestal. Documento de Trabajo N° 17. Instituto Nacional Forestal. Guatemala. p. 162.
- _____. 1977. Inventarios y estudios dendrométricos en bosques de coníferas. FAO/PNUD. Guatemala. Informe Técnico N° 2. p. 69.

bibliografia

- PETERS, R.; CUBILLOS, V. 1985. Indices de productividad para *Pinus radiata* en la VI y VII Regiones. INFOR. 23 p.
- PETRI, G. 1952. Forsteinrichtung: Kluppung in geschälten Fichtenbeständen. Schreiben Min. Rheinl-Pfalz v. _____ . 1957. Zum ertragskundlichen Verhalten der Fichte im Nordteil Rheinl-Pfalz. Diss. Freiburg. (Mitt. a.d. Forsteinrichtungsamt Koblenz Nr. 7, 1957).
- _____.; MICHEL, G. 1959. Die Weiserflächen des Forsteinrichtungsamtes Koblenz. Entstehung. Entwicklung und Zweck sowie vorläufige Richtlinien zur Aufnahme, Bearbeitung und weiteren Kontrolle. Mitt. des FEA Koblenz, Nr. 8.
- PETTERSON, H. 1936. Studien über die Stammform, Stockholm.
- _____. 1955. Barrskogens volum produktion (en sueco). Meddelanden fr. St. Skogsforsteningsinst. Bd. 45, 1., S. 1-391.
- PFELSTICKER, K. 1950. Der Zuwachshammer. AFZ.
- _____. 1933-1960. Vorratsfortschreibung. AFZ.
- PHILIPP, K. 1931. Hilfstabellen für Forsttaxatoren. 1. Aufl. Karlsruhe 1893; 2. Aufl. 1986, IV u. 55 S. Neue Bearbeitung.
- PLATTE, G. 1936. Zur geschichtlichen Entwicklung der Rohholzsortierung. - Eine theoretische Untersuchung zur Frage der Weiterentwicklung der Homma von 1936. POLANSCHÜTZ. 1961. Eine neue Form bzw. Kubierungsfunktion. Ber. d. IUFRO-Tagung Wien, Bd. 2/25-11-8/3.
- POLANSKY, B. 1928. Der Umfang als Grundlage dendrometrischer Berechnungen. Lesnická práce VII, S. 228-235. Tschechoslowakei.
- _____. 1929. Auximeter (Zuwachsmeter). Lesnická práce 8, S. 286-300. Tschechoslowakei.
- POLLANSCHÜTZ, F. 1961. Eine neue Form bzw. kubierungsfunktion. Bericht IUFRO Wien, Bd 2/25.
- POLYCARPOU, A. 1954. Multiple standard volume table for *Pinus brutia*. Techn., Pamphl. For. Dep. Cyprus Nr. 13, pp. 3.
- POPESCU-ZELETIN, J. 1936. Die Kontrollmethode. Beiträge zur Auffassung ihrer rechnerischen Grundlagen. AFJZ, 112, S. 233-254.
- _____. 1961. Die methode des vergleichenden Auxometers. Rev. Pad. (en rumano).
- _____. 1964. Der Dendroauxograph: Ein Apparat für die Registrierung des täglichen Radialzuwachses Rev. Pad. (en rumano).
- POPESCU-ZELETIN; TOMA, G. u.a. 1956. Holzmeßkundliche Tafeln (Tabele dendrometrice). Bukarest.
- _____.; MOCANU, P. 1961. Untersuchungen über die Struktur und Dynamik des Radialzuwachses in der Vegetationszeit in Pappelbeständen (P. euram. cv. marilandica). Ber. d. Rum. Akad. d. Wiss. 4/XIII.
- POSO, S. 1972. A methods of combining photo and field samples in forest inventory. Comm. Inst. For. Fenn. 76 (1).

- POSO, S. 1990. A two phase sampling approach to gather data for GIS. Proceedings, IUFRO 5.4.02 and 5.6.04. Symp., Birmensdorf. Switz. 155-163.
- PRESSLER, M. 1865. Das Gesetz der Stammbildung. Leipzig. 153 S.
- _____. 1898. Zum Zuwachsbohrer. 3.Auf. Leipzig 1883. 4.Auf. Wien (v. Max Neumeister). 41 S.
- _____.; KUNZE, M. 1873. Die Holzmeßkunde in ihrem ganzen Umfange. 1. Bd.: Holzwirtschaftl. Taf. nach metrischem Maß. Berlin 1873, div. Angänge; 2.Bd.: Lehrbuch der Holzmeßkunst (v. Kunze), Berlin.
- PRETO, G. 1992. How to use stand maps for stratification. Proceeding of the stands inventory technologies '92. The World Forestry Center. Sept. 13-17, 1992. 92-10.
- PRODAN, M. 1938/39. Anweisungen über die Ausformung des Bau- und Schnittnadelholzes. Rev. Pad. Besprochen i.d. Forstl. Rundschau H. 1. S. 119.
- _____. 1939. Inhaltsermittlung des Rundholzes in der Praxis. Rev. Pad.
- _____. 1940. Die innere Struktur von haubaren Gebirgsbeständen. Viata forestiera.
- _____. 1944. Zuwachs- und Ertragsuntersuchungen im Plenterwald. Diss. Univ. Freiburg.
- _____. 1944/1950. Untersuchungen über die Höhenkurven von Fichtenbeständen. AFJZ.
- _____. 1944. Statistische und mechanische Untersuchungen über die Schaftform. Fw. Cbl.
- _____. 1944. Bestimmung der echten Schaftholzformzahl und der Ausbauchungsreihen aus dem echten Formquotienten (Anhang bei Bd. 8 der Mitt. d. dtsh. Forstw.). In Zusammenarbeit mit Dr. Krenn.
- _____. 1946. Der Aufbau des Holzvorrats in Fichtenbeständen Schriftenreihe d. Bad. Forstl. Vers. Anst. H.4.
- _____. 1947. Der Stärkezuwachs in Plenterwaldbeständen. Schw. Z. f. Fw.
- _____. 1949. Aufgaben der ertragskundlichen Forschung im Rahmen neuzeitlicher Forsteinrichtungen. AFZ. Nr. 30.
- _____. 1949. Die theoretische Bestimmung des Gleichgewichtszustandes im Plenterwald. Schw. Z. f. Fw.
- _____. 1949. Normalisierung des Plenterwaldes? Schriftenreihe d. Bad. Forstl. Vers. Anst, H. 7.
- _____. 1949. Die Bestimmung des Massenzuwachses von Beständen mit Hilfe des Massenzuwachsprozentes. Fw. Cbl.
- _____. 1950. Probleme der Zuwachs- und Leistungskontrolle. AFJZ, Sonderheft. Nr. 5.
- _____. 1951. Messung der Waldbestände. 260 S. m. 50 Abb. u. 71 Übers., Sauerländer. Frankfurt/M.
- _____. 1952. Mathematisch-statistische Probleme in den Forstwissenschaften. Mitt. Bl. f. math. Statistik, Jg. 4 H. 1, S. 71, München.
- _____. 1953. Arbeiten der Freiburg Schule. AFJZ.

bibliografia

- PRODAN, M. 1953. Waldstandsaufnahmen und Bestandesaufnahmen. AFZ, Wien.
- _____. 1953. Genauigkeit der Winkelzählprobe nach Bitterlich. AFZ, Wien.
- _____. 1953. Verteilung des Vorrates gleichaltriger Hochwaldbestände auf Durchmesserstufen. AFJZ, 124. 4, S. 93-106.
- _____. 1954. Durchmesser- und Massenzuwachs in Eichenbeständen. Bf. 9 d. Schriftenreihe d. Bad. Forstl. Vers. Anst.
- _____. 1956. Möglichkeiten der Zuwachsermittlung. IUFRO, Sek. 25, Oxford Congress.
- _____. 1956. Bericht über die Tätigkeit des Arbeitskreises für Forstliche Biometrie. AQFZ. Nr. 25/26.
- _____. 1956. Die wichtigsten Baumhöhenmesser. Forstarchiv.
- _____. 1957. Hilfsmittel zur raschen Durchmesserermittlung stehender Bäume. Forstarchiv.
- _____. 1957. Die Absteckung der Probekreise. Forstarchiv.
- _____. 1958. Aus der Holzmeßlehre. Kritisches Sammelreferat. Forstarchiv. 1951, 1954.
- _____. 1958. Untersuchungen über die Durchführung von Repräsentativaufnahmen. AFJZ. 1955; H. 1. S. 15-33.
- _____. 1959. Leistungskontrolle und Fortschreibung. AFZ, Nr. 11.
- _____. 1961. Ausgleichung der Jährlichen Durchmesserzuwüchse mit Orthogonalpolynomen. Ber. d. IUFRO-Tagung, Wien. 25-8-53.
- _____. 1961. Forstliche Biometrie. BLV. München.
- _____. 1965. Holzmesslehre, J.D. Sauerlaender's Verlag, Frankfurt. 644 p.
- _____. 1965. Zur Wertschätzung des Waldes. Schriftenreihe der Forstlichen Abteilung. Band 4, BLV 1965.
- _____. 1965. A Simplification of the Volume Tarif Systems. IUFRO Stockholm, 27-09/01-10-1965.
- _____. 1967. Österreichische Beiträge auf dem Gebiet der Holzmeß- und Ertragslehre. AFZ Wien, 1/67.
- _____. 1968. Punktstichprobe für die Forsteinrichtung. Forst- und Holzwirt, Heft 11.
- _____. 1968. Zur Bewertung der Sozialfunktionen des Waldes in Stadtnähe. Allgemeine Forst- und Jagdzeitung, Heft 6.
- _____. 1968. Zur Gesetzmäßigkeit der Flächenverteilung von Bäumen. Allgemeine Forst- und Jagdzeitung, Heft 9.
- _____. 1969. Les objectifs généraux de l'aménagement dans les pays de l'Europe et dans les pays développés en dehors de l'Europe. IUFRO Sect. 25 Sept. 1969. Bucarest-Roumanie.
- _____. 1969. Wirtschaftstheoretische Begründung der Waldwertschätzung. Forst- und Holzwirt, Heft 23.

- PRODAN, M. 1970. Wirtschaftstheorie und Zielsetzung in der Forstwirtschaft. Forstarchiv, Heft 10.
- _____. 1971. Zu einer Neuorientierung der Forstwissenschaften. Allgemeine Forst- und Jagdzeitung.
- _____. 1972. Intensivierung der Holzvorratsinventuren zur Beschaffung von Hilfsmitteln für die Forst- und Holzwirtschaft in Entwicklungsländern.
- _____. 1973. Spatale Variation und Punktstichproben. Allgemeine Forst- und Jagdzeitung, Heft 12.
- _____. 1976. Verpflichtung der Forstwirtschaft in der Forstwissenschaften. AFZ Nr. 3.
- _____. 1977. Allgemeingültigkeit forstlicher Prinzipien. Forstarchiv, Heft 12.
- _____. 1977. A etica da profissao florestal. Rev. Floresta Nr. 2.
- _____. 1977. Inventario Florestal Intensivo. Rev. Floresta Nr. 2.
- _____. 1977. Sustained Yield as a Basic Principle to Economic Action. Lexington Books. D.C. Heath a Co. Lexington, Massachussets. Toronto.
- _____. 1981. Ist eine neue Auffassung der Forstwissenschaften notwendig? Vortrag Göttingen, 23-04-1981.
- _____. 1983. Das Entropieprinzip in der Forstwirtschaft. Sarajevo 1983. Jugosl. Übers. Publ. v. Akademija Nauka i Umjetnosti Bosne i Hercegovine. Povodom Jubileja Pavla Fukareka.
- _____. 1993. Actualización en Inventarios Forestales. Vortrag an der Universidad Austral de Chile. Valdivia.
- _____. 1993. Nachhaltige Nutzung der natürlichen Ressourcen. -Eine globale ethische Herausforderung- Vortrag bei der Forstl. Hochschulwoche an der Forstl. Abteilung Tharandt der Technischen Universität DRESDEN.
- PRYTZ, E.V. 1888. Massenermittlungsmethode von Rittmeister H. Prytz. AFJZ.
- RAJ, D. 1968. Sampling Theory. Mc Graw-Hill, N. 4.
- RÄTZEL, K. 1955. Untersuchungen über Inhalt und Form, sowie die Beziehungen zwischen Krone und Zuwachs bei der Pappel. Freiburger Diss. Bd. 10 d. Schriftenreihe d. Bad. Forstl. Vers. Anst. Freiburg.
- RAWAT, A.S. 1954. Mathematical equation for determining the stem timber form factor of *Tectona grandis*. Indian For. 80, 9, S. 513-21.
- REAL, P.; SANDOVAL, V. 1983. Bases técnicas de los tratamientos silvícolas para la regeneración y utilización de los bosques de la zona costera de Aysén. IV. Instalación y caracterización de parcelas experimentales. Informe de Convenio N° 65-A SERPLAC-CONAF XI REGION/UACH. Universidad Austral de Chile. Facultad de Ciencias Forestales. Valdivia. Chile. 70 p.
- _____. 1985. Elementos de Fotogrametría y Fotointerpretación Forestal. Pub. Docente 18. Fac. Cs. Forestales, U. Austral de Chile, Valdivia. 114 p.
- REAL, P. 1986. Funciones de ahusamiento para plantaciones juvenes de Forestal Arauco. Informe Técnico, 52 p.
- _____.; MOORE, J. 1987. An individual tree taper system for Douglas-fir in the Inland-Northwest. IUFRO Forest Growth Modelling and Prediction Conference. Minneapolis. p. 1037-1036.

bibliografía

- REAL, P. 1989. An individual tree taper system for douglas-fir in the inland - northwest. Dissertation University of Idaho, 75 p.
- _____. 1990. Zonas de crecimiento de Pino radiata. Proyecto Modelo Nacional de Simulación de Pino radiata. Tomo I, Vol. 2:1-27.
- _____. 1993. Funciones de ahusamiento, Zonas 1, 2, 4, 6 y 7. Proyecto Modelo Nacional de Simulación de Pino Radiata. Fundación Chile, Documento de trabajo N° 14. 25 p.
- REHAK, J. 1956. Verfahrensarten der Zuwachsermittlung bei der Forsteinrichtung in der Tschechoslowakei. IUFRO Section 25, Oxford Congress.
- REINEKE, L.H. s.f. Perfecting a stand-density index for evenaged forests. I.A.R. Nr. 7.
- _____. 1933. Perfecting a stand density index for even-aged forest. Jour. Agric. Res. 46: 627-638.
- REINHOLD, G. 1926. Die Bedeutung der Gesamtwuchsleistung an Baumholzmasse für die Beurteilung der Standorts- und Bestandsgröße. S.A. aus dem forstl. Versuchswesen Bayerns. 114 S., München.
- _____. 1951. Die Inhaltszahlen vom Schichtnutzholz. Fw. Cbl. H. 9.
- RENNOLLS, K. D. 1978. "Top height"; its definition and estimation Common. For. Rev. 57,3. p. 255-219.
- _____.; GEARY; ROLLINSON, T. 1985. Characterizing Diameter Distributions by the use of the Weibull distributions. Jour. of For. 58(1): 57-66.
- REYNOLDS, M. 1984. Estimating the Error in Model Predictions. For. Sci. 30(2): 454-469.
- RICHARDS, F.J. 1959. A flexible growth function for empirical use. J. Exp. Bot. 10: 290-300.
- RICHTER, A. 1958. Über die Bedeutung großräumiger Stichprobenerhebungen für die Forstwirtschaft. Arch. f. Fw., H. 3., S. 193.
- _____.; GROSSMANN, H. 1963. Einführung in die Forsteinrichtung. Neumann-Verlag.
- _____.; GROSSMANN, H. 1951. Untersuchungen über Probekreisgröße und Netzkpunktdichte bei Holzvorratsinventuren. Arch. f. Fw., H. 11.
- _____.; GROSSMANN, H. 1960. Ergebnisse der 1956 im Gebiet der DDR durchgeführten großräumigen Holzvorratsinventuren. Arch. f. Fw., H. 8.
- _____.; GROSSMANN, H.; THIELE, H. 1953. Beiträge zur Methodik der Holzvorratsinventuren auf mathematisch-statistischer Grundlage. Arch. f. Fw., H. 2/3/4/5/5, S. 142-181, 289-339, 481-501.
- RIECKE, F. 1840. Über die Berechnung des körperlichen Inhalts unbeschlagener Baumstämme. 75 S. Stuttgart.
- RINIKER, H. 1873. Über Baumform und Bestandsmasse. Ein Beitrag zur forstlichen Statik. Aarau.
- ROCUANT, L. 1972. Un método rápido para determinar necesidad de raleo en pino insignie. Universidad de Concepción. Escuela de Agronomía. Notas informáticas N° 9.
- RÖHRL, A.M. 1927. Geschichtliche Entwicklung und waldbauliche Bedeutung der Vorrats- und Zuwachsmethoden. Neumann, Neudamm.

- ROMAN, F. 1988. El factor mórfo en el Parque Nacional Tunari en *Pinus radiata*. Universidad Mayor de San Simón. Facultad de Ciencias Agrícolas y Pecuarias. Escuela Técnica Superior Forestal. Cochabamba, Bolivia.
- ROTHKEGEL, W. 1949. Grundiß der forstlichen Schätzungslehre. Berlín. Parey.
- ROTHKIRCH-TRACH. 1958. Der Einsatz der Lochkarte bei der Forsteinrichtung. AFZ, Nr. 46, S. 680-682.
- _____. 1958/59. Möglichkeiten der mechanischen Dokumentation in der Forstwirtschaft. Forstarchiv, AS. 25-28.
- RUPE, H. 1948. Festlegung von Probeflächen mittels optischer Distanzmessung. AFZ.
- RUSTAGI, K.P. 1978. Predicting Stand Structure in Evenaged Stands. In Growth models for long forecasting of timber yields. IUFRO Working Group S4.01, Virginia 193-208.
- SANDOVAL, V.; REAL, P. 1993. Fotografía aérea - Fotointerpretación y Sistemas de Información Geográficos, aplicados a catastros forestales. Pub. Docente 39. Fac. Cs. Forestales, U. Austral de Chile, Valdivia.
- SCHABENBERGER, O. 1990. The coefficient of intraclass-correlation as a measure for efficiency of cluster sampling. Proceedings, IUFRO. 5.4.02 Symposium. Switzerland, may 14-16. 232-239.
- SCHÄFER. 1956. Bericht über die Weiterentwicklung von Repräsentativverfahren bei der Holzvorratsermittlung. AFZ, 11, S. 525-526.
- SCHAEFER, A.; D'ALVERNAY; GAZIN. 1930. Sapinières. Le jardinage par contenance. Les Presses universitaires, París.
- SCHAEFFER, L. 1938. Les comparaisons des inventaires. Bull de la Soc. For. de Franche-Comté et des Prov. de l'Est, Mars.
- _____. 1950. Gammes de barèmes à double entrée pour le cubage du trône des arbres sur pied. REF.
- _____. 1956. Détermination rapide de l'accroissement. IUFRO Section 25, Oxford Congress.
- SCHÄFFER. 1953. Dynamische Wertransprache. Vortrag b.d. Tagung der Arb. Gemeinsh. f. Forsteinr, in Coesfeld am 19, und 20.11.1953.
- SCHIFFEL, A. 1897. Über Bestandesaufnahmen mittels probestammverfahrens. Cbl. f. d. ges. Fw.
- _____. 1899. Form und Inhalt der Fichte. Mitt. a. d. forstl. Versuchswesen Österreichs, H. 24.
- _____. 1902. Die Kubierung von Rundholz aus zwei Durchmessern u. d. Länge. Wien. VIII u. 148 S. Mitt. d. forstl. Versuchswesen Österreichs, H. 27.
- _____. 1903. Über die gesetzmäßigen Beziehungen der Massenfaktoren in normalen Fichtenbeständen. Cbl. f. d. ges. Fw., H. 5, S. 189-207.
- _____. 1904. Wuchsgesetze normaler Fichtenbestände. VIII. Mitt. a. d. forstl. Versuchswesen Österreichs, H. 29.
- _____. 1905. Form und Inhalt der Lärche. Mitt. a. d. forstl. Versuchswesen Österreichs, H. 31.
- _____. 1905. Stärke und Inhalt der Lärchenrinde. Cbl. f. d. ges. Fw. S. 97.

bibliografia

- SCHIFFEL, A. 1907. Stärke und Inhalt der Weißföhrenrinde. Cbl. f. d. ges. Fw., S. 102.
- _____. 1907. Form und Inhalt der Weißföhre. Mitt. a. d. forstl. Versuchswesen Österreichs, H. 32.
- _____. 1908. Form und Inhalt der Tanne. Mitt. a. d. forstl. Versuchswesen Österreichs, H. 34.
- SCHILLING, O. 1955. Bestandesaufbau und Repräsentativverfahren. Diplomarbeit.
- _____. 1960. Die Sortentafel für die Holzart Fichte hergeleitet nach Schaftkurven für $f_{0.1} = 0.550$. AFJZ, H. 9.
- SCHLETTER, A. 1954. Betrachtungen zur WECKschen Methode der Wachstumsdiagnose. Arch. f. Fw., Jg. 3, S. 193-205. Berlin.
- SCHMID, P. 1969. Stichproben am Waldrand. Mitt. Schweiz. Aust. Forstl. Versuchsw. 45:234-303.
- _____.; WERNER, J. 1969. Kontrol-Stichproben: Aufnahmeinstruktion. Berichte der Eidgen. Anst. Forstl. Vers. Wes. N. 27. 22p.
- SCHMID, P. 1982. Sampling at the forest edge. Offprint from Statistics in theory and practice. Essays in Honour of Bertie Matern. Swedish Univ. of Agric. Sci. Umea. Sweden 263-276.
- SCHMID-HAAS, P.; WINZELER, K. 1981. Efficient determination of volume and volumen growth. 17th. IUFRO World Congress. Proceedings, 6-12 Sept., Kyoto, Japan. p. 231-257.
- SCHMIDT, G.D. 1956. Erfahrung bei der Holzvorratsaufnahme. AFZ. 11, S. 522-525.
- _____. 1951. Die Weißtanne in Ostfriesland. Diss. München. Auszug in Fw. Cbl., S. 641-665.
- SCHMITT, R.; SCHNEIDER, B. 1959. Die Aufstellung von Massentafeln nach der Methode der kleinsten Quadrate. Mitt. d. Hess. Landesforstv., Bd. Sauerländer, Frankfurt/M.
- SCHNEIDER. 1964. Manual de Fotogrametria Forestal.
- SCHNURR, G.L. 1937. Yield stand, and volume tables for evenaged upland oak forests. US Dept. of Agric., Washington, T. Bull. 560.
- SCHOBER, R. 1942. Über Stand und Aufgaben der forstlichen Ertragskunde. Mitt. Forstwirt. Forstwiss. Nr. 13, S. 89-143.
- _____. 1953. Die japanische Lärche, eine biologisch-ertragskundliche Untersuchung. Schr. Reihe forstl. Fak. Univ. Göttingen, Nr. 7/8.
- _____.; WIEDEMANN. 1957. Ertragstafeln. Schaper. Hannover.
- SCHÖPFER, W. 1961. Beiträge zur Erfassung des Assimilationsapparates der Fichte. Schriftenreihe der Landesforstverwaltung Baden-Württ.
- _____. 1962. Die Auswirkungen von Zuwachsbohrungen in Fichtenbeständen. AFJZ.
- _____. 1961. Die Bohrspanentnahme von Waldbäumen. AFZ, Nr. 19 u. 22.

- SCHÖPFER, W. 1963. Zur Weiterentwicklung der Massenreihen von Spiecker zu Wert-, Zeit- und Erntemassenreihen. (Manuskript).
- _____. 1962. Vorschläge zur Berechnung von Bestandesabtriebswerten mit Hilfe des Lochkartenverfahrens. AFZ.
- _____. 1963. Der WZM-Rechenstab für Fichte. AFJZ.
- SCHORER, A. 1960. Vorschlag zur Vereinfachung der Massenberechnung. AFZ, Nr. 12, S. 176/77.
- SCHREUDER, H.T.; HAFLEY, W.L.; WHITEHORNE, E.W.; DARE, B.J. 1978. Maximum likelihood estimation for selected distributions (MLESD). Raleigh, N.C. State Univ., School For. Res., Technical Report N° 61. 19 p.
- SCHUBERG, K. 1891. Formzahlen und Massentafeln für die Weißtanne. Neudamm.
- SCHULTZ, H. 1954. Untersuchungen über die Bewertung von Eichenstammholz. Diss. Hann. München.
- _____. 1955. Grundlagen der Furnierholzbewertung am Beispiel der Eiche. Holz-Zbl. S. 759.
- SCHUMACHER, F.X. s.f. Logarithmic expression of timber-tree volume. J.A.R.
- _____.; CHAPMAN, R.A. 1951. Sampling methods in forestry. Durham N.C. 1948. Dazu: Besprechung von Prodan im allg. Stat. Arch.
- SCHWAPPACH, A. 1889. Leitfaden der Holzmeßkunde. Berlin 2. Aufl. 1903; 3. Aufl. 1923, VIII.
- _____. 1912. Ertrags tafeln der wichtigeren Holzarten in tabellarischer und graphischer Form. 2. Aufl. 1923; 3. Aufl. 1929. Neudamm.
- SCOTT, C.T.; CASSELL, D.L.; HAZARD, J.W. 1993. Sampling design of the U.S. national forest health monitoring program. Proc. Ilvessalo Symp. on Nat. Forest Inventory, Finland. 1992. p. 150-157.
- SEELY, H.E. 1949. Different survey methods of large areas: aerial photography. Ber. d. Int. For. Congr. Helsinki.
- SEIP, H.K. 1964. Tremåling. Skogsbruksboka Nr. 3 Vollebekk. (en noruego).
- SENDA, M.; MAEZAWA, K. 1955. On the measurement of stand basal area by the Bitterlich method. Miscellaneous Information Report Nr. 10 (including supplement).
- _____. 1955. On the measuring instruments of stand basal area by Bitterlich's method. Miscellaneous Information Tokyo Univ. For. Nr. 10. p. 69-76.
- SERGEEV, P.N. 1953. Lesnaja Tacsacija. 6. Aufl. Goslesbumizdat. Mit. Tabellenanhan. Moskwa-Leningrad.
- SETH, S.K. 1951. Manual of instructions on experiments, preservation plots, protected trees, statistical sample plots, linear increment plots and the annual silvicultural report. Government Printer, Allahabad. p. 30.
- _____. 1956. Rapid determination of increment in Indian Forestry. IUFRO, Section 25, Oxford Congr.

bibliografia

- SETTEN, G.G.K. Rome 1953. A summary description of increment sample plot method in Malaya. Proc. Congr. int. Union For. Res. Organ. Section 25, Nr. 27 p. 7.
- _____. 1954. Girth increment (linear) sample plots in Malaya and the 1952 rules for their compilation. Res. Pamphl. For. Res. Inst. Kepong. Nr. 13, p. 10.
- SHANKS, R.E. 1954. Plotless sampling trials in Appalachian forest types. Ecology, 35, p. 237-244.
- SHIFLEY, S.; LENTZ, E. 1985. Quick estimation of the three-parameter Weibull to describe tree size distributions. For Ecology and Management 13:95-203.
- SIMAK, M. 1951. Die Entwicklung und die heute angewandte Arbeitsmethodik bei der zweiten schwedischen Reichswaldtaxierung. Schw. Z. f. Fw., S. 362-377.
- SIMONY, O. 1901. Die näherungsweise Flächen- und Körperberechnung in der wissenschaftl. Holzmeßkunde. V.
- _____. 1904. Über Formzahlgleichungen und deren forst-mathematische Verwertung. III.
- SINGH, K.D.; POSO, S. 1989. Methodological requirements for global inventory and monitoring. Proceedings Int. Conference Global Nat. Res. Monitoring and Asses-Venezia (Italy). 609-617.
- SIRAKOFF, G. 1958. Verfahren der empirischen Systeme us Kurven normaler Ausbauchungsquotienten als wichtige Grundlagen der Holzmeßlehre und Holzmeßpraxis. Arch. f. Fw., S. 417-448.
- SKINNER, E.C. 1959. Cubic volume tables for red alder and sitka spruce. US Dept. of. Agri. For. Service, Portland, Oregon, Nr. 170.
- SLOBODA, B. 1971. Investigation of growth processes using first order differential equations. Mitteilungen der Baden-Württembergischen Forstlichen Versuchs-und Forschungsanstalt. Heft 32, 109 p.
- SMALIAN, H.L. 1837. Beitrag zur Holzmeßkunst. Stralsund.
- SMALTSCHINSKI, T. 1990. Point sampling at stand boundaries. Proceedings IUFRO. 5.4.02 Symposium, May 14-16. Switzerland, 216-22.
- SMITH, J.H.G. 1958. Sequential sampling in reproduction surveys. Journal of Forestry Nr. 2.
- _____.; KER, J.W. 1959. Numerical yield equations for young forest growth. British Columbia Lumberman.
- SMITH, N.J.; HANN, D.W. 1986. A growth model based on the self-thinning rule. Can. Jour. For. Res. 16:330-334.
- SMITHERS, L.A. 1949. The DWIGHT-cofrequency principle in diameter growth analysis. Silv. res. note Nr. 91, Canadá, Dep. of mines resources, Ottawa.
- SNEE, R.D. 1977. Validation of regressions models: Methods and Examples. Technometrics 19(4): 415-428.
- v. SOEST, J. 1956. Massentafel für Douglasie. Vervielf. Bosbouwproefstation T.N.O.
- _____. 1959. Stem form and volume of Japanese Larch in the Netherlands. Diss. Wageningen.
- _____.; AYRAL, P.; SCHÖBER, R.; HUMMEL, F.C. 1959. Die Normung holzmeßkundlicher Symbole, Hersg. v. Intern. Verb. forstl. Forschungsanstalten.

- SOSTRZONEK, E. 1958. Radialzuwachs und Flächenzuwachs. Fwiss. Cbl., S. 238-254.
- SPÄTH, J.L. 1797. Anleitung die Mathematik und Physikalische Chemie auf das Forstwesen und forstliche Camerale nützlich anzuwenden. Nürnberg.
- SPEIDEL, E. 1983. Beiträge zu den Wuchsgesetzen des Hochwaldes und der Durchforstungslehre, Tübingen.
- SPEIDEL, G. 1955. Die Wertklasse als Gütemaßstab in der Forsteinrichtung. Forstarchiv, Jg. 26, S. 217-224, Hannover.
- _____. 1957. Die rechnerischen Grundlagen der Leistungskontrolle und ihre praktische Durchführung in der Forsteinrichtung. I. D. Sauerländers Vergl. Frankfurt/M., Schriftenreihe d. Forstl. Fak. d. Univ. Göttingen, Bd. 19.
- _____. 1959. Waldberwertung in "Grundlagen der Forstwirtschaft". Hrsg. v. R. Müller, Verlag Schaper, Hannover, S. 479-515.
- _____. 1949. Die SCHNEIDERsche Konstante. Fw. Cbl.
- _____.; v. LAER. s.f. Forsteinrichtung. Leitsätze und Zahlengrundlagen. Ebda, S. 517-596.
- SPIECKER, M. 1948. Beiträge zur Erfassung der Auswirkungen forstlicher Maßnahmen: Einheitsmassenkurven zur Ermittlung von Vorrat und Zuwachs von Waldbeständen. Weiserstreifen zur Erfassung des biologischen Zustandes und der Entwicklung im Walde. Diss. Freiburg.
- _____. 1950. Der Kombinierte Höhenmesser. AFZ, Nr. 32/33, S. 348.
- _____. 1953. Das Stereobildreihen-Verfahren. Allg. Vermess. Nachrichten. Nr. 6.
- _____. 1953. Vorrats- und Zuwachskontrolle mit Massenberechnungstafeln. AFZ. Nr. 29/30.
- SPURR, N.S. 1960. Aerial photographs in forestry. New York, 1948. 2. Aufl. unter dem Titel: Photogrammetry and Photointerpretation.
- _____. 1952. Forest inventory. New York.
- STACH, W. 1949. Die Schichtholzvermessung (eine kritische Untersuchung der Umrechnungskonstanten). Schw. Z. f. Fw. Nr. 5.
- STAEBLER, G.R. 1953. Long logs or short with the Scribner scale. Timberman. Nr. 54, p. 66-70.
- _____. 1954. Standard computation for permanent sample plots as recommended by the Puget Sound Research Center Advisory Committee for use in Western Washington. Pacific Northwest Forest and Range Exp. Stat. Portland, Oregon, p. 14.
- STAGE, A.R. 1959. A cruising computer for variable plots, tree heights, and slope correction. Journal of Forestry, Nr. 11.
- _____. 1977. Forest inventory data and construction of growth models. Eidg. Anst. Forstl. Versuchsw. Ber. 171(1977). 23-27.
- STARK, B. 1979. Unpublished stand simulation model at Queensland Forestry Department.

bibliografía

- STEINLIN, H.J.; LÖFFLER, H.; DIETZ, P. 1962. Gewichtsmessung und Gewichtsverkauf bei Rohholz. AFJZ, 133 Jg.
- STINGHE, V.N. 1937. Massentafeln. Formzahlen und Formhöhen für die Akazie, insbesondere für diejenige der Sandböden des Oteniens. Veröffentlg. d. Jb. d. Rum Forstl. Vers. Anst., I. Serie, Bd. 3.
- _____.; TOMA, G. 1958. Dendrometri. Bucuresti (en rumano).
- STOFFELS, A. 1954. L'exactitude de la détermination de la surface terrière par hectare à l'aide de la méthode de Bitterlich. Ned. Boschb. Tijdschr. 26, S. 256-268.
- _____. 1955. Die Genauigkeit der Bestimmung der Stammzahl pro Hektar durch Messung von Stammbeständen. Fw. Cbl., jg. 74, S. 211-219.
- _____. 1957. Schnelle Bestimmung des Zuwachsprozentes von Kiefernbeständen. Ned. Boschb. Tijdschr. Vol. 29, S. 130-155.
- STÖHR, K.F. 1949. Der Trommelsextant als indirekter Baum-Höhen- und Stärkenmesser. Diplom Arbeit, ann. München und Freiburg.
- _____. 1959. Ein Vorschlag zur Erreichung einer höheren Genauigkeit bei Probeflächenaufnahmen nach der Winkelzählprobe. AFJZ. H. 1, S. 23-29.
- _____. 1959. Der Forstentfernungs- und Stammzahlmesser. AFZ, Nr. 17.
- _____. 1963. Erweiterungsmöglichkeiten der Winkelzählprobe. Diss. Freiburg.
- STRAND, L. 1952. A measure of the distribution of individuals over a certain area. Meddel. fra Det Norske Skogforsøksvesen, Nr. 42.
- _____. 1957. The effect of the plot size on the accuracy of forest surveys. Meddel. fra Det Norske Skogforsøksvesen, Nr. 48.
- _____. 1957. Relaskopisk høyde og Kubickmassebestemmelser. Norsk Skogbruk, 3, 20:535-538.
- _____. 1958. Sampling for volume along a line. Meddel. fra Det Norske Skogforsøksvesen, Nr. 51.
- _____. 1959. The accuracy of some methods for estimating volume and increment on sample plots. Meddel. fra Det Norske Skogforsøksvesen, Nr. 52.
- STRIDBERG, E. 1953. Compound interest in the calculation of increment % for periods of several years. Skr. K. Skogshögsk., Stockholm, Nr. 12/19, S. 43-52.
- _____. 1956. Bonitetsproblemen i de nordiska länderna. Skogsv. Tidskr., Nr. 3. Skogsvårdsför. Tidskr.
- _____. 1957. Universell bonitetsbedömning på grundval av Klimatfaktorer. Ebda., Nr. 1.
- STRUB, M.R.; VASEY, R.B.; BURKHART, H.E. 1975. Composition of Diameter Growth and Crown Competition Factor in Loblolly Pine Plantations. For. Sci. 21(4): 427-436.
- STRUB, M.R.; BURKHART, H.E. 1975. A class-interval free method for obtaining expected yield from diameter distributions. For. Sci. 21(1): 67-69.

- TAKASE, G. 1952. Studies on increases in mean diameter and decreases in volume in stands after thinning with particular reference to their use in compiling yield tables. J. Jap. For. Soc. 34, S. 344-348. (Jap.).
- TAKATA, K. 1953. On the error in the measurement of diameter breast height (I.). The error owing to the direction of measurement on the random sampling method in the measurement of diameter breast height. (II.) The error, owing to the height of measurement. (III.) The error, owing to the angle between caliper and the stem axis. Rep. of the Kyushu Univ. For., Nr. 1.
- _____. 1954. On the comparison of the accuracy of bivariate and trivariate-volume table. Rep. of the Kyushu Univ. For., Nr. 2.
- _____. 1954. On the volume estimate by plotless sampling. Rep. of the Kyushu Univ. For., Nr. 3.
- _____. 1954. On the error of the increment. Rep. of the Kyushu Univ. For., Nr. 3.
- _____. 1955. On the error in the estimate of the past-diameter and basal area by the increment borer. Rep. of the Kyushu Univ. For., Nr. 5.
- _____. 1955. On the error of volume by every tree measurement. Bull. of the Kyushu Univ. For., Nr. 24.
- _____. 1957. Study of the volume estimate by basal area at breast height (3). Journal of the Jap. For. Soc., 39/7.
- _____. 1957. Study of the volume estimate by basal area at breast height (4). Construction of a land volume table. Ebda., 39/12.
- _____. 1958. Construction of universal diameter-height curve (E.H.K.) Ebda., Nr. 40/1.
- _____. 1958. Studies of the volume estimate by basal area at breast height (6). Applicable limit of monovariate volume equation in logarithmic expression (local volume equation). Journal of the Jap. For. Soc., 40/2.
- _____. 1958. On the application of ALGAS's volume table to sugi (7). Ebda., 40/3.
- _____. 1958. Stand volume estimation by stand volume table (8). Journal of the Jap. For. Soc., 40/7.
- _____. 1959. Plotless sampling compared with plot sampling in Yoshimata National Forest. Ebda., Nr. 10, 41/2.
- _____.; HIROSHIHIRANO. 1957. On the trivariate equation. Ebda., 39/9.
- _____.; KOBAYASHI. 1957. On the effect of butt swell in breast height. Ebda., 39/10.
- TANIGUCHI, S. 1961. Forest Inventory by aerial photographs. Tokyo.
- TARDIF, G. 1964. Some considerations concerning the establishment of optimum plot size in forest survey. For. Chron. March, 1964. 93-102.
- TASMANIAN FORESTRY COMMISSION. 1979. Unpublished stand simulation model for radiata pine.
- TAYLOR, R.F. 1953. Preliminary cubic form class volume tables for white spruce in Alaska. Tech. Note Alaska For. Res. Cent., Nr. 15, p. 7.
- _____.; KLEIN, J.A. 1953. Preliminary yield tables (based on 58 1/10 acre plots) for Alaska's interior forest. Tech. Note Alaska For. Res. Cent., Nr. 14, p. 6.

bibliografía

- THAMMINCHA, S. 1993. Forest inventory in Thailand: past, present and future perspectives. Proc. Ilvessalo Symp. on National Forest Inventory. Finland, 1992. p. 89-95.
- THOMAS, C.E.; PARRESOL, B.R. 1991. Simple, flexible, trigonometric taper equations. Can. J. For. Res. 21:1132-1137.
- THREN, M. 1993. Serie Técnica Forestal. Volumen 1. Dasometría - Apuntes de Clase. Proyecto UNSE/GTZ. Universidad Nacional del Estero, Facultad de Ciencias Forestales.
- TICHOMIROW; TITSTENKOW. 1930. Der Wachstumsgang der sibirischen Lärche nach Untersuchungen im Chakaß'schen Bezirk Sibiriens. Bespr.: Z. f. F.-u. Jgw., Nr. 62, S. 380-382.
- TIREN, L. 1929. Einige Untersuchungen über die Schaftform. Mitt. a. d. V. Schw.
- _____. 1929. Über Grundflächenberechnung und ihre Genauigkeit. Mitt. a. d. V. Schw.
- TISCHENDORF, W. 1927. Lehrbuch der Holzmassenermittlung. Berlin.
- _____. 1933. Macdonalds Untersuchungen über die Eignung der Behre'schen Schaftkurve. Silva.
- _____. 1930-1940. Die neuesten Arbeiten und Aufsätze aus der Holzmeßlehre, bzw. Holzmassenermittlung. FGorstarchiv.
- _____. 1949. Der arithmetische und der zentrale Mittelstamm und andere Mittelstämme. Ö. f. Versw., H. 3/4.
- TJURIN, A. 1938. Taksacja Lesa, Moskwa.
- TKATSCHENKO, M. 1934. Das Gesetz des Massengehaltes der Baumstämme und seine Bedeutung für die Massen- und Sortimentstafeln. Bespr.: Forstarchiv., Nr. 10, S. 136.
- TOMA, G.T. 1935. Über einige weniger gebrauchte Methoden der Bestandesmassenaufnahme. Rev. Pad., Nr. 47, S. 239-256.
- _____. 1939. Kronenuntersuchungen in langfristigen Kieferndurchforstungsflächen. Z. f. F. u. Jglw.
- _____. 1941. Massentafeln und Formzahlen für die Fichte aus dem Calimani-Gebirge. Analele ICEF 6, S. 82-106.
- _____. 1946-1947. Tarife de cubaj ptc. stejar. Analele I.C.E.F. a 1 Romanici.
- _____. 1955. Tabela de productie simplificata. Rev. Pad., S. 320-322.
- _____. 1956. Despre diametrul central. Rev. Pad., p. 495-498.
- _____. 1956. Procedeele de inventatiere partiala. Rev. Pad., p. 502-507.
- _____. 1957. Die teilweise (repräsentative) Waldaufnahme im Lichte der math-Statistik. Rev. Pad., S. 387.
- TOMPPÖ, E. 1990. Satellite image-based national forest inventory of Finland. ISPRS, Commission VII. Mid-Term Symp. Global and Envir. Monit. Tech. and Impacts, Victoria, Canadá. 419-424.
- _____. 1993. Multi-source National Forest. Inventory of Finland. Proceedings Ilvessalo Symp. on Nat. For. Inv. Finland. 17-21 August, 1992. p. 52-60.

- TOZAWA, A. 1929. Inhalt des stehenden Stammes und des ganzen Bestandes unter spez. Berücksichtigung der jap. Holzarten. Tokio.
- TRAMPLER, Th.; SIKORA, B. 1956. Das Verfahren der Zuwachsermittlung bei Forsteinrichtungsarbeiten in Polen. IFURO. Sec. 25. Oxford Congr.
- TRENDELENBURG-MAYER-WEDELIN. 1956. Das Holz als Rohstoff. Berlin. 2. Aufl.
- TRETJAKOV, N.W.; GORSKIJ, P.W.; SAMOILOWITSCH, G.G. 1952. Hilfstabellen für Forsttaxatoren (Sprawocnik Tacsator, russ.) Moskau.
- TREVIÑO, E. 1992. Verwendung von Satellitenaufnahmen zur Vegetations Kartierung am Beispiel der Region "Sierra Madre Oriental" in Nordostmexiko. Göttingen. 150 p.
- TSCHUENKOV, V.C. 1960. Opat rabotai lesoustroitelnoi partij. Moskau.
- _____.; ASP, U. 1960. Tovarnaje tablitzaj dlja listvennitsai.
- TURNBULL, K.J. 1958. Stem analysis techniques and applications, and some study of secondgrowth Douglas Fir in Western Washington. Univ. of Washington. Master of Forest Thesis.
- _____. u a. 1963. Comprehensive Tarif Tables. State Washington.
- TURNER, B.J.; BEDNARZ, R.W.; DARGAVEL, J.B. 1977. A model to generate stand strategies for intensively managed radiata pine plantations. Australian Forestry, 40(4).
- UNTERDÖRFER, C. 1955. Die Bestandesstammzahl nach der Winkelzählprobe. AFJZ. S. 176-179.
- VANSELOW, K. 1953. Einfluß der Abrundung bei der Durchmesserermittlung des Stammholzes auf den Festgehalt. Fw. Cbl., S. 137-144.
- _____. 1941. Einführung in die forstliche Zuwachs- und Ertragslehre. Frankfurt a. M.
- VASCHNIL; ANUTSCHIN, N.P. 1959. Tovarnaja struktura lesa pri raznaich oborotach rubkij. Moskau.
- _____. 1959. Novii metod opredelenija tekuschtschego prirosta lesonasaschdenij. Moskau.
- VAULOT, G. 1914. Détermination des accroissements en diamètre des arbres. Rev. E.F.
- VELAZQUEZ, A.; HERNANDEZ, P.; DE LOS SANTOS, H.; ANGELES, G.; GONZALEZ, M. Estrategias de manejo silvícola en aclareos experimentales. Colegio de Postgraduados. Programa Forestal. Montecillo, México.
- VERGARA, N.G. 1982. Distribuciones diamétricas en Renovales no Intervenidos de Raulí (*Nothofagus alpina* Poepp et Endl.). Tesis Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Agrarias, Veterinarias y Forestales. Santiago, Chile.
- VISKOT, M.; HUSTY, Z. 1956. Beitrag zur Frage des Einflusses der künstlichen Reduktion auf das Stärkewachstum der Eiche. Sbornik cesk. Akad. emed. Rocnik XXIX, 10.
- VOGEL, K. 1939. Eine Sortentafel für Eiche u. graphische Sortentafel für Buche. AFJZ.

bibliografia

- VOLKMANN, J.H. 1959. Untersuchungen über die Ermittlung von Bestandesmassen in den Fichtenbeständen der Harzer Mittelgebirgslagen. Diss. Hann. München.
- _____. s.f. Tarife zur Massenberechnung von Pappelbeständen. Entwurf nach den Pa- Ta von Krenn.
- VUOKILA, Y. 1955. The finnish curve calipers. J. For. 53(5), 366-67.
- _____. 1959. On the accuracy of the relascope method of cruising. Comm. instituti for. fenn. 51.4. Helsinki.
- _____. 1965. Functions of variable density yield tables of pine based on temporary sample plots. Inst. Forest. Fenniae. 60(4): 1-82.
- WALTERS, D. K.; HANN, D.W. 1986. Taper equations for six conifer species in southwest oregon. Forest Research Lab. College of Forestry Oregon State University. Research Bulletin 56.
- WANNER, J. s.f. Die Schnellkreisprobestfläche. AFZ. Wien, 56, 189.
- _____. 1918. Die "Probestfläche ohne Probestfläche". AF- u. Holzwirtschaft. Z., S. 97/98.
- WARE, K.D.; CUNIA, T. 1962. Continuous forest inventory with partial replacement of samples. For. Sci. Monograph 3, 40.
- WEBER, R. 1891. Lehrbuch der Forsteinrichtung mit besonderer Berücksichtigung der Zuwachsgesetze der Waldbäume. Berlin.
- WECK, J. 1950. Über die Brauchbarkeit von Wachstumsgesetzen als diagnostisches Hilfsmittel der Waldwachstumskunde. Fw. Cbel.
- _____. 1953. Untersuchungen über die Brauchbarkeit und Genauigkeit eines Verfahrens der Bestandesmessung unter Verwendung von Stammabständen. Forstarchiv, 4 (11/2), S. 257-260.
- _____. 1955. Vorratermittlung durch Abstandsmessung. Z. f. Weltforstwirtschaft., S. 24.
- WEIDEMANN, A. 1956. Über die Stichprobenerhebungen in den Ofenberg-Waldungen der Gemeinde Tschier. Bündler Wald, Nr. 7.
- _____. 1961. Eignung verschiedener Meßargumente und Berechnungsmethoden für die Erfassung von Zustand und Zustandsänderung von Bestockungen. Schw. Anst. f. d. Forstl. Versuchsw. H. 1.
- _____.; THOMMEN, F. 1959. Das maschinelle Lochkartenverfahren als Rationierungsmittel in der Forstwirtschaft. Schw. Anst. f. d. Forstl. Versuchsw. H. 4.
- WEISE, W. 1880. Ertragstafel für die Kiefer. Berlin.
- WEISS, H. 1956. Vorrat und Stammzahlverteilung in den Tannenbeständen des ehemaligen Klosterforsts Herrenalb bei der Forsteinrichtung im Jahre 1790. Diplom-Arbeit.
- WENK, G. 1962. Zur mathematischen Formulierung der Formhöhen-, Formzahl- und Massenkurven. Archv. Fw.
- _____. 1962. Die Ermittlung des Holzvorrates durch optische Linientaxation. Diss. Thar. u. Wiss. Ztschr. d. T.H. Dresden.

- WESTERNACHER, E. 1952. Theoretische Untersuchungen über Wertmittelstämme in Fichtenbeständen. Diplom-Arbeit.
- _____. 1956. Zur rechnerischen Kontrolle der wertmäßigen Entwicklung einzelner Waldbestände. Diss. Freiburg.
- WERNER, H. 1962. Untersuchungen über das Wachstum der Hauptholzarten auf den wichtigsten Standortseinheiten der Mittleren Alb. Diss. Freiburg, 1962. (Mitt. d. Vereins für Forstl. Standortskunde, Stuttgart, 1962).
- WHEELER, P.R. 1962. Pentaprism caliper for upper stem diameter measurements. Jour. For. 60: 877-878.
- WHITE, W.E.; LEWIS, C.E. 1982. Establishing circular plot boundaries with a wedge prism and on adjustable target pole. Jour. of Range Management 45(5).
- WIANT, H.V. 1987. When square plots are more efficient than circular ones. West Virginia University Forestry Notes N. 13.
- WIEDEMANN, E. 1931. Die neue Anweisung für die Aufnahme und Bearbeitung der Versuchsflächen der Preuß. Forstl. Vers. A. Silva, 19, S. 345-348.
- _____. 1949. Ertragstafeln der wichtigsten Holzarten bei verschiedener Durchforstung sowie einiger Mischbestandsformen mit graphischen Darstellungen. Hannover.
- _____. 1950. Über die Einführung von Ertragstafeln die auf dem dGz aufgebaut sind und über die Berücksichtigung des Sondercharakters der einzelnen Wuchsgebiete. Fw. Cbl, S. 625.
- _____. 1950. Hilfstabellen über die Massen- und Wertleistung der normalen Betriebsklasse. AFJZ, H. 2.
- _____. 1951. Ertragskundliche und waldbauliche Grundlagen der Forstwirtschaft. Das Hauptergebnis der 70jähr. Arbeiten der (ehem.). Preuß. Forstl. Vers. Anst. I.-III. Teil Sauerländer's Verlag. Frankfurt/M.
- _____.; BUCHHOLZ. 1929. Formzahl und Formquotient. Z. f. F- u. Jgdw., S. 193-209.
- WIELGOSZ, T. 1935. Biometrische Baumgruppen und deren Rolle für die Bildung der Massenermittlungsmethoden der Bestände. Poznari.
- WILHELMI, TH. 1950. Fluchtlinienmethoden bei Aufstellung forstlicher Hilfstafeln. Mitt. d. Bundesvers. Anst. f. Forst-u. Holzwirtschaft., Nr. 15.
- _____. 1956. Untersuchungen mit einem schwedischen Mikrodendrometer über das Dickenwachstum an Bäumen. Forstarchiv. H. 11, S. 241-246.
- WILLINGHAM, J.W. 1957. Estimation of forest management inventory data from aerial. Photogr. measurement For. Sec. Washington, Bd. 3, S. 270-274.
- WIMMENAUER, K. 1907. Grundriß der Holzmeßkunde. Frankfurt/M.
- WODERA, H. 1948. Die Holzmassenermittlung nach Luftbildern. Allg. Holz- u. Forstwirtschaft. Z.
- WOLF, J. 1959. Ein Versuch zur Bestimmung der Gleichungsform des zeitberücksichtigenden Richtungsfeldes der Bestandeshöhenentwicklung (Tschechisch). Lesn. Casopis.
- _____. 1960. Durchschnittlicher und laufender Zuwachs. Ebenda.

bibliografía

- WOLF, J. 1960. Die Bestimmung des laufenden Massenzuwaches der gleichaltrigen Waldbestände (Theorie der Methode des vollständigen Differentials). Ebenda.
- _____. 1960. Die Bestimmung des laufenden Zuwachses der Höhe und des Brusthöhendurchmessers der an den Versuchsflächen gefällten Probestämme. Ebenda.
- WYKOFF, W. R.; CROOKSTON, N.L.; STAGE, A.R. 1982. User's guide to the stand prognosis model. USA Forest Service General Technical Report INT-133.
- YANG, Y.C. 1981. Forest Resource Inventory Method in Taiwan. Proceedings, XVII IUFRO World Congress, Kyoto, Japan, 6-12 Sept.
- YATES, F. 1948. Systematic sampling. Phil. Trans. London. Roy. Soc. Vol. 241, A.S. 345-377.
- _____. 1949. Sampling methods for censuses and surveys. London.
- YLINEN, A. 1952. Über die mechanische Schaftformtheorie der Bäume. T.H. in Finnland, Wiss. Forschungen, Nr. 7.
- _____. 1954. Über die Beziehungen zwischen Spätholzanteil. Rohwichte. Jahrringbreite. Feuchtigkeitsgehalt und den Elastizitätsmoduln beim finnischen Kiefernholz. Holz als Roh- u. Werkstoff. S. 253.
- YOSHIDA, M.; HIRATA, T. 1954. Comparison of the growth of *Cryptomeria japonica* and *Chamaecyparis obtusa* planted in alternate rows. IV. Bull. Tokyo Univ. For., Nr. 46, 97-114 (Jap.).
- _____. 1956. Some statistical studies on the stand-composition of artificially planted forests (VII.). Bull. of. the Tokyo Univ. For., Nr. 52.
- YOUNG, H.E. 1953. Tree counts on air photos in Maine. Bull. Iniv. Me. For. Dep., Nr. 21, p. 2.
- _____. 1955. Volume tables for Maine. Publ. Me. agric. Exp. Sta., Nr. 624, p. 36.
- _____. 1963. Periodic inventory as a basis for woodlot management. Maine Farm Research (USA).
- _____. 1957. Merchantable height volume tables for red and sugar maple, white birch and poplar. Univ. of Mc. For. Dep. Drono. Techn. Notes, Nr. 45.
- _____. 1964. Untersuchungen über das Gesamtgewicht der Bäume (persönl. Mitteilung. v. 3.3.).
- ZACH, L.W. 1951. Random plot cruising. Techn. Note Alaska For. Res. Cent., Nr. 12.
- _____. 1951. Distribution of volume in southeast Alaska trees. Techn. Note Alaska For. Res. Cent., Nr. 10, p. 1.
- ZAHIR-UD-DIN, A.S.M. 1954. Aerial survey of Chittagong hill tracts forests. Pakistan. J. For. 4(4), 237-40.
- ZEIDE, B. 1980. Plot size optimization. For. Sci. 26(2): 251-257.
- _____. 1993. Analysis of growth equations. For. Sci. 39: 596-616.
- ZEPEDA, M. 1984. Ejemplificación de tres procedimientos para caracterizar rodales por su densidad. División de Ciencias Forestales. Serie de Apoyo Académico N° 4. Chapingo, México.

- ZEPEDA, M.; VILLARREAL, M. 1987. Guía de densidad para *Pinus hartwegii* Lindl., de Zoquiapán, México. Universidad Autónoma de Chapingo. División de Ciencias Forestales.
- _____.; VERRUETTE, S.; ESTRADA, O.; ESPARZA, S. 1990. Curvas polimórficas de índice de sitio de edad base invariante, para tres especies de pino del noroeste de Chihuahua. División de Ciencias Forestales. Universidad Autónoma de Chapingo. Boletín técnico No. 25. Serie Técnica.
- _____.; ESTRADA, O.; ESPARZA, S. 1990. Ecuaciones para estimar volúmenes y alturas comerciales de tres especies de pino del noroeste de Chihuahua. División de Ciencias Forestales. Universidad Autónoma de Chapingo. Boletín técnico No. 25. Serie Técnica.
- _____. 1993. Sistema de cubicación para *Pinus patula* Schl. Cham., de Perote, Veracruz, México.
- ZETSCHKE. 1891. Kreisprobenflächen-Aufnahmeverfahren. AFJZ.
- ZHIXI, L. 1982. Monitoring of tropic forest using remote sensing in Xishuangbanna, China. Proceedings, IUFRO Centennial meeting, Berlín. 139-147.
- ZIEGER. 1928. Ermittlungen von Bestandesmassen aus Flugbildern mit Hilfe des Hegershoff-HEYDEeschen Autokartographen. Mitt. a. d. Sächs. forstl. Vers. Anst. H. 3.
- _____. 1939. Untersuchungen über der Arbeitsaufwand beim Kluppen. Thar. forstl. Jb., H. 3/4.
- ZIMMERLE, H. 1930. Hilfszahlen zur Bonitierung. Vorrats- und Zuwachsschätzung in reinen Eichenbeständen. Erfahrungen mit ausländischen Holzarten in den Württ. Staatswaldungen unter bes. Berücksichtigung der Aufnahmeergebnisse von Ertragsprobenflächen. Mitt. a.d. Württ. Forstl. Vers. Anst.
- _____. 1933. Beiträge zur Biologie der Kiefer in Württemberg. Mitt. d. Württ. Forstl. Vers. Anst.
- _____. 1950. Durchmessermessung in 5 m Höhe beim stehenden Holz von Rotbuche. Silva 24, 1936. u. Hoz-Cbl., Nr. 107/10.
- _____. 1937. Die Plenterwaldversuchsflächen in Württemberg. Mitt. d. Württ. Forstl. Vers. Anst. H. 2.
- _____. 1941. Beiträge zur Biologie der europ. Lärche in Württ. Mitt. d. Württ. Forstl. Vers. Anst., S. 100.
- _____. 1942. Beiträge zur Biologie der Esche in Württemberg. AFJZ. 118.
- _____. 1947. Beiträge zur Biologie der Fichte in Württemberg. Mitt. d. Württ. Forstl. Vers. Ans., Bd. 8.
- _____. 1958. Die Entwicklung einiger Hochlagenbestände im Württ. Schwarzwald. Diss. Freiburg.
- ZIMMERMANN, E. 1960. Über das Wachstum der Hauptholzarten in den Hochlagen des württembergischen Schwarzwaldes. Allg. F. u. J.ztg.
- ZOEHRER, F. 1969. The application of the beta function for best fit of stem diameter distributions in inventories of tropical forests. Mitt. Bundesforschungsanstl. Forst. u. Holzwirtschaft. Reinbek, Hamburg N° 74.
- _____. 1978. On the precision of dot grid estimates. Res. Inventory Notes US. Dep. of Interior BLM 12.
- _____. 1980. Forstinventur. Ein Leitfaden für Studium und Praxis. Verlag Paul Parey. Hamburg. Berlín, 207 p.

bibliografia

- ALEMANIA. 1940. Verordnung über die Aushaltung, Messung und Sortenbildung des Holzes in den deutschen Forsten. Mit den Ausführungs- und Sortenbestimmungen der einzelnen Länder. Berlin.
- BADEN. Erfahrungen über die Holzhaltigkeit geschlossener Waldbestände und über die Derbräume der Holzmasse. H. 1, 1836, Nr. 38, H. 2, 1838/40. Forts. unter dem Titel: Erfahrungen über den Massenvorrat und- zuwachs geschlossener Hochwaldbestände, H. 3, 1862, H. 4, 1865, H. 5, 1873, Karlsruhe.
- _____. 1949. Dienstanweisung über die Anlage und Aufnahme ständiger Forsteinrichtungsbeflächen.
- _____. 1952. Tarif- und Sortenzerlegungstabellen. Bad. Lfv., Freiburg.
- BADEN-WÜRTTEMBERG. 1960. Dienstanweisung für die Forsteinrichtung in den Staats- und Körperschaftswaldungen. FED.
- BAYERN. 1840. Für Forstwirtschaftseinrichtung... im Königreich Bayern usw., S. 119. Gotha, 1832. Freiburg.
- _____. 1910. Anweisung für die Forsteinrichtung in den K.B. Staatswaldungen.
- _____. 1951. Forsteinrichtungsanweisung f. d. Bayer. Staatswaldungen. München.
- FRANCIA. 1945. Cubage des grumes d'oeuvre. Editée par l'Assoc. Francaise des Normes (AFNOR). NF B 53-015.
- _____. 1951. Cubage estimatif des arbres sur pied. Editée par l'Assoc. Francaise des Normes (AFNOR). NF B 53-017.
- _____. 1952. Cubage des bois d'industrie et des bois de feu. Editée par l'Assoc. Francaise des Normes (AFNOR). NF B 53-018.
- _____. 1960. Instruction pour la classification des photographies et des unités d'échantillonnage. Eaux et Forêts. Inventaire forestier national.
- _____. 1960. Manuel de chef d'équipe. Editée par l'Assoc. Francaise des Normes (AFNOR).
- _____. 1960. Barèmes de cubage des arbres sur pied. Eaux et Forêts. Serie 4, Nr. 12.
- _____. 1964. Manuel pratique d'aménagement. Min. Agri. Dir. gén. des Eaux et Forêts. GAP.
- HESSEN. 1903. Anleitung für die Forsteinrichtungsarbeiten in den Dominial- und Kommunalwaldungen des Großherzogtums Hessen.
- _____. 1937. Vorschriften und Ausführungsbestimmungen für die Durchführung der Forsteinrichtungsarbeiten im Lande Hessen.
- HESSEN. 1903. Anleitung für die Forsteinrichtungsarbeiten in den Dominial- und Kommunalwaldungen des Großherzogtums Hessen.
- _____. 1960. Anweisung über die Errechnung der Holzwerbungskosten und Stücklöhne mittels Lochkartenverfahren. Oktober.
- INDONESIA. 1953. Preliminary reports on strip surveys bases on aerial photographs in the forest division of siak Mondan. Rimba Indonesia, 2 (4). 170-3.

- ITALIA. s.f. Untersuchungen über die Vereinheitlichung der Holzmessung und über die verschiedenen Holzankaufsarten der Kulturländer. Internat. Institut für Landwirtschaft, Abt. Forstwirtschaft, Rom.
- JAPON. 1954. Ertragstabeln: *Cryptomeria japonica*. N. Fuji, M. Oouti 1949, N. Yamanouti 1952, M. Inomata 1954 und 1955, T. Sibayama, A. Kikuti 1956, K. Tuda 1952, K. Koyama 1954. *Larix leptolepis*. J. Mine 1956. *Chamaecyparis obtusa*. Y. Muramatu 1952, 1954; T. Higuti 1954, K. Oka 1952, K. Tuda 1954, K. Nisitani 1957. *Pinus densiflora*. T. Nesugi 1949, T. Koguro, M. Inamata, S. Sugai 1952; M. Asoo 1949.
- NIEDERSACHSEN. 1955. Forsteinrichtungsvorschrift für die Niedersächsische Landesforstverwaltung. F.E.V. 1955, Teil I und II. Veröff. im Niedersächs. Min. Bl., Nr. 31, S. 614.
- SKANDINAVIEN. 1953. Umrechnungstabellen für nordische Hölzer. Stuttgart, 1. Aufl. 1952, 2. Aufl. 1953.
- SUDAN. 1954. Rate growth of teak (*Tectona grandis*). Rep. For. Dep. Sudan, 1952/53, S. 42-3; 46-50.
- _____. 1954. Identification of species on air photographs. Rep. For. Dep. Sudan, 1952/53, 1954.
- SUECIA. 1953. Standardized measurement of sawtimber. Skogen 40, 10, S. 220 (en sueco).
- _____. 1953. Standardized measurement of pulpwood. Skogen 40 (II), S. 240-1 (en sueco).
- _____. 1957. Instruktion für die Außenaufnahmen bei der 3. schwedischen Reichswaldtaxation 1955. Übers. E. Haller, Reinbek. Eidgen. Anst. f. d. forstl. Vers.-Wesen, Zürich.
- TAIWAN FORESTRY RESEARCH INSTITUTE. 1959. Study on the growth of forest stand of various race of *Cunninghamia lanceolata* in Chung-Pa Branch.
- TASMANIAN FORESTRY. 1953. Standard volume table for *Eucalyptus obliqua* second growth from southern forests. Tasmanian Forestry Comm., Hobart, p. 91.
- THÜRINGEN. 1937. Forsteinrichtungsvorschrift.
- TURQUIA. 1954. Mapping and management operation of the Turkish Forest Service. T.C. Tarım Bakanligi, Orman Gend., Ankara.
- USA. 1917. Instructions for making timber surveys in the national forests. Hrsg. v. Forest Service, Washington.
- WÜRTTEMBERG. 1933. Richtlinien und Vorschriften für die Wirtschaftsführung in den württ. Staatswäldungen. R.V.W.
- _____. 1950. Vorläufige Anweisung zur Forsteinrichtung im Plenterwald. Tübingen.
- _____. 1953. Betr. Forsteinrichtung. Sammelerlaß und Anlagen. Tübingen.
- _____. 1956. Wertansprache in Fo-Beständen des Nordschwarzwaldes. Tübingen.