Autores:
Patricio Corvalán Vera
Jaime Hernández Palma

3.4 Función generatriz y cuerpos geométricos

Las propiedades geométricas de ciertos sólidos de revolución se utilizan para tratar de caracterizar la forma de los fustes de árboles individuales o de secciones de ellos.

En general, la forma del fuste ha sido asumida a través de la siguiente función general, llamada en ocasiones función generatriz:

$$y = k \cdot x^r$$

Donde k y r son constantes que definen la forma del sólido de revolución.

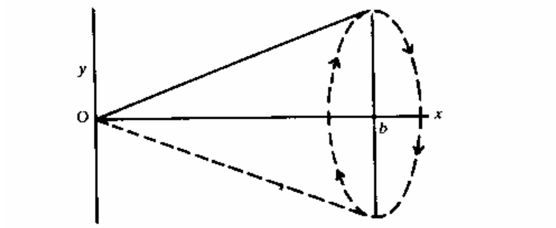


Figura 1: forma de la función generatriz para $r = 1$.

De la figura 1, se tiene que el área de la base g_i con diámetro igual a b, se puede escribir como[1]:

$$g_i = \pi \cdot y^2 = \pi \cdot (k \cdot x^r)^2$$

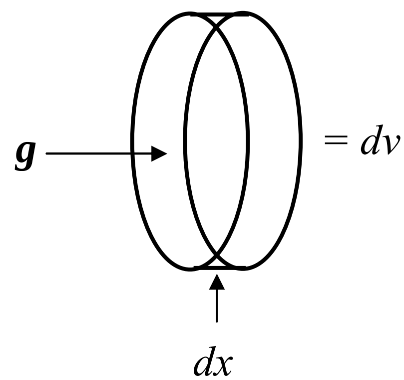


Figura 2: Volumen infinitesimal dv.

Por otra parte, de la figura 2 se deduce que un volumen infinitesimal dv puede ser calculado como el producto entre el área de una sección cualquiera del fuste g y un ancho dx (diferencial de altura en el fuste). Así, el volumen total se obtiene integrando dv entre 0 y la altura total b:

$$V = \pi \int_0^b (k \cdot x^r)^2 \, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{k \cdot x^{(2r+1)}}{2r+1} \right]_0^b$$

Volumen de un cono

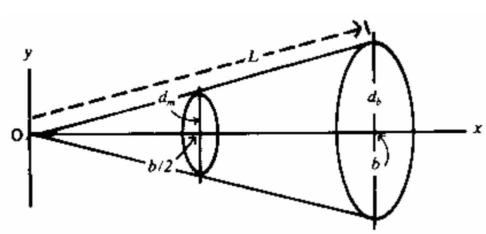
En el caso de que $r = 1$ se obtiene el volumen para un fuste que tiene la forma de un cono:

$$y = k \cdot x \rightarrow g_b = \pi \cdot (k \cdot x)^2$$

$$V_b = \pi \int_0^b (k \cdot x)^2 \, dx = \pi \left[\frac{k^2 \cdot x^3}{(2+1)} \right]_0^b$$

$$V_b = \frac{1}{3} (\pi \cdot k^2 \cdot x_b^2) x_b$$

$$V_b = \frac{1}{3} (g_b) \cdot (H)$$



[1] El área de la base g se asume igual al área de un círculo de radio $r = y$, es decir que $g = \pi r^2 = \pi y^2$.

De la ecuación anterior se deduce que el volumen del fuste (cono) se obtiene reduciendo el volumen de un cilindro de base igual a g_b y de altura igual a H en un tercio (1/3). En donde g_b es el área de la sección circular del fuste de diámetro igual a b ($g_b = \pi /4\ b^2$) y H es la altura total del fuste. El factor de reducción, en este caso igual a 0,333 es conocido como **factor de forma**.

Volumen de un paraboloide

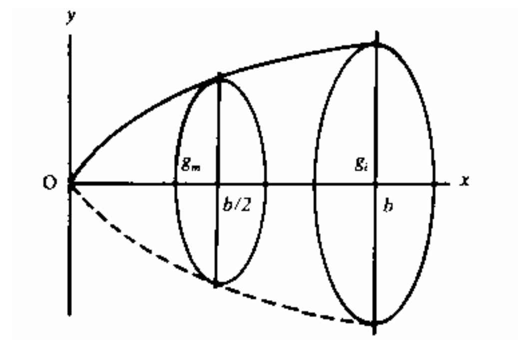
En el caso de que $r = 0.5$ se obtiene el volumen para un fuste que tiene la forma de un paraboloide:

$$y = k \cdot x^{1/2} \rightarrow y^2 = k' \cdot x \rightarrow g_i = \pi \cdot (k^2 \cdot x)$$

$$V_b = \pi \int_0^b (k \cdot x^r)^2 dx = \pi \left[\frac{1}{(2r+1)} \frac{k^2 \cdot x^{(2r+1)}}{} \right]_0^b$$

$$V_b = \frac{1}{2} (\pi \cdot k^2 \cdot x_b) x_b$$

$$V_b = \frac{1}{2} (g_i) \cdot (H)$$



El factor de forma para reducir el volumen de un cilindro al de un paraboloide es 0,5.

Volumen de un neiloide

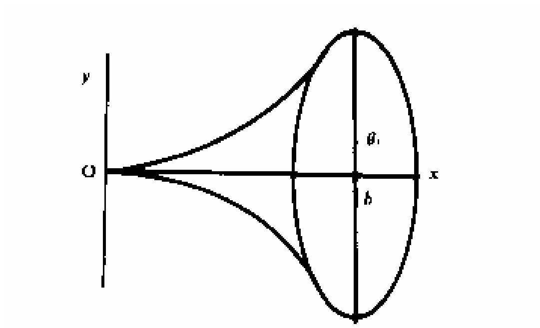
En el caso de que $r = 3/2$ se obtiene el volumen para un fuste que tiene la forma de un neiloide:

$$y = k \cdot x^{3/2} \rightarrow y^2 = k^2 \cdot x^3 \rightarrow g_i = \pi \cdot (k^2 \cdot x^3)$$

$$V_b = \pi \int_0^b (k \cdot x^{3/2})^2 dx = \pi \left[\frac{1}{4} (k^2 \cdot x^4) \right]_0^b$$

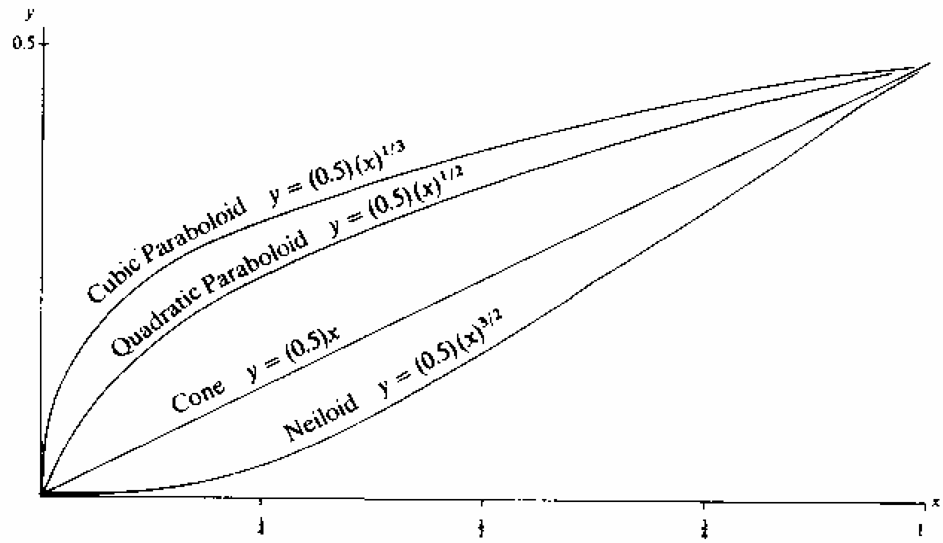
$$V_b = \frac{1}{4} (\pi \cdot k^2 \cdot x_b^3) x_b$$

$$V_b = \frac{1}{4} (g_i) \cdot (Ht)$$



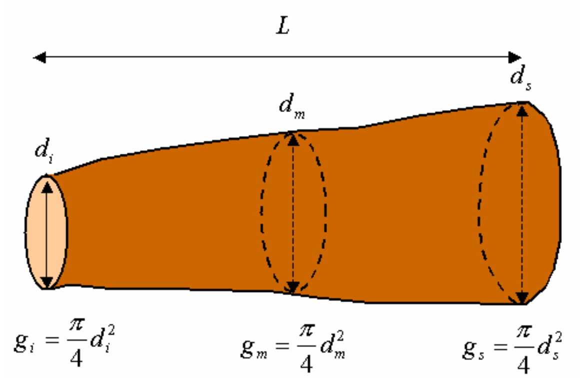
El factor de forma para reducir el volumen de un cilindro al de un paraboloide es 0,25.

La siguiente figura muestra el perfil fustal para fustes que pueden ser representados por cuerpos geométricos definidos por la función generatriz:



Fómulas de cubicación de trozas

Fórmula	Expresión
Smalian	$V = (g_i + g_s) \cdot L/2$
Huber	$V = g_m \cdot L$
Newton	$V = \left(\frac{g_i + 4g_m + g_s}{6} \right) \cdot L$
Gossfeld	$V = (3g_{1/3} + g_s) \cdot L/4$

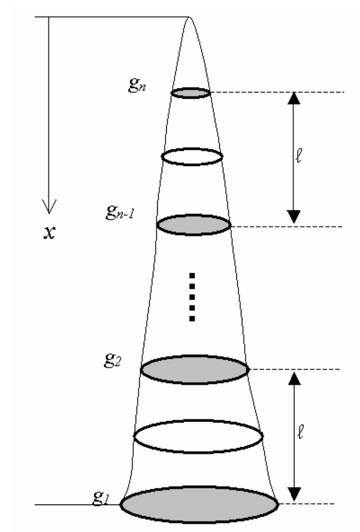


Precisión de las fórmulas anteriores

Fórmula	Si la verdadera forma es:			
	Cilindro	**Paraboloide**	**Conoide**	**Neiloide**
Smalian	exacta	exacta	subestima	subestima
Huber	exacta	exacta	subestima	subestima
Newton	exacta	exacta	exacta	exacta

Derivación de las fórmulas de cubicación

Si se considera que el área de una sección del fuste g_j puede ser estimada usando una función del tipo:



$$g_j = A + B \cdot x_j + C \cdot x_j^{\ 2} + D \cdot x_j^{\ 3} + \ldots$$

En donde x_j es la altura del fuste a la que se encuentra g_j

De lo anterior, se puede calcular el volumen total del fuste como sigue:

$$V = \int_0^x g_j dx = \int_0^x A + B \cdot x_j + C \cdot x_j^{\ 2} + D \cdot x_j^{\ 3} + \ldots$$

Como la integral de $x^n = x^{n-1}/(n-1)$, entonces:

$$V = A \cdot x + \frac{B \cdot x_j^2}{2} + \frac{C \cdot x_j^3}{3} + \frac{D \cdot x_j^4}{4} + \ldots$$

Para obtener una ecuación de dos parámetros sólo es necesario considerar los dos primeros factores:

$$V = A \cdot x + \frac{B \cdot x_j^2}{2} \qquad (*) \qquad (g_j = A + B \cdot x_j)$$

Para encontrar los valores de A y B:

$$g_0 = A + B \cdot x_0 \qquad\qquad g_L = A + B \cdot x_L$$

Pero como x_0 es igual a 0 (base del fuste) y x_L es igual a L (altura total del fuste):

$$g_0 = A \qquad\qquad g_L = A + B \cdot L$$

La solución respecto de B es:

$$B = \frac{g_L - A}{L} = \frac{g_L - g_0}{L}$$

Sustituyendo los valores de A y B en (*), y considerando que $x = L$:

$$V = g_0 \cdot L + \frac{g_L - g_0}{L} = \frac{g_0 + g_L}{2} \cdot L$$

Lo cual equivale a la fórmula de Smalian para el cálculo del volumen de la troza (ecuación con 2 parámetros). Las derivaciones para el resto de fórmulas son equivalentes.