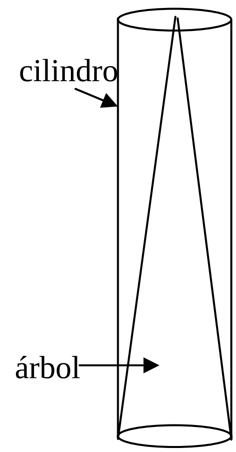
Autores:
Patricio Corvalán Vera
Jaime Hernández Palma

3.5 Factores y Coeficientes de Forma

A fines del siglo XIX, Toward desarrolla la idea de los factores de forma como una respuesta a las dificultades surgidas del uso de los sólidos en revolución. La idea de Toward plantea que el factor de forma relaciona forma y volumen a través de una relación entre el volumen real del fuste y el de un sólido de revolución:

$$f = \frac{Vol.\ fuste}{Vol.\ sólido\ de\ revolución}$$



Más tarde, Reineke desarrolló la forma más común de los factores de forma:

$$f = \frac{Vol.\ fuste}{Vol.\ cilindro}$$

Así: *Vol fuste = Vol. Cilindro * f = g * H *f*

Donde *g = área basal*

El volumen de los sólidos de revolución es conocido:

Tipo de conoide	Volumen	Factor de forma
Cilindro	$\pi/4 * D^2 * H$	*1*
Paraboloide	$\pi/4 * D^2 * H * 1/2$	*0.5*
Cono	$\pi/4 * D^2 * H * 1/3$	*0.33*
Neiloide	$\pi/4 * D^2 * H * 1/4$	*0.25*

$\pi/4 * D^2 = g$ *(área basal)*

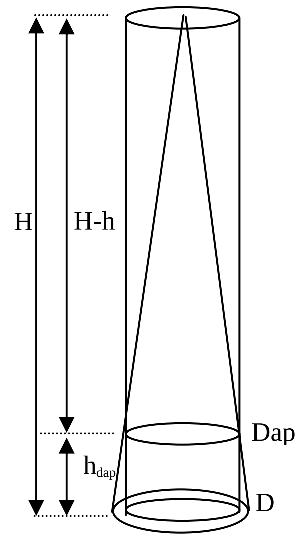
$\pi/4 * D^2 * H = g*H =$ *volumen del cilindro de base "g" y altura "H"*

Existen factores de forma basados en paraboloides, conos y otros sólidos de revolución, pero el más usado es sobre la base de un cilindro. El factor de forma es, en consecuencia, un **factor de reducción del volumen del cilindro al volumen real del árbol**.

Factor de Forma Normal (f_n)

Si tomamos las relaciones de la función generatriz y la expresión del factor de forma para el caso de un paraboloide tenemos que el volumen del fuste puede escribirse como:

$$V_{fuste} = g_i \cdot x_i \cdot \left(\frac{1}{r+1} \right)$$



Como: $$g_i = \frac{\pi}{4} D_i$$
$$x_i = H$$

Entonces: $$V_{fuste} = \left(\frac{\pi}{4} D^2 \right) \cdot H \cdot \frac{1}{2}$$

De la figura se deduce que: $$\frac{D^2}{Dap^2} = \frac{H}{H - h_{dap}}$$

$$D^2 = Dap^2 \left(\frac{H}{H - h_{dap}} \right)$$

Donde h es la altura a la que se mide el *Dap*.

Así: $$V_{fuste} = \left(\frac{\pi}{4} Dap^2 \frac{H}{H - h_{dap}} \right) \cdot H \cdot \frac{1}{2} \qquad (1)$$

De la misma forma el volumen del cilindro:

$$V_c = \left(\frac{\pi}{4} Dap^2 \right) \cdot H \qquad (2)$$

Entonces el factor de forma normal f_n = *Vol. árbol / Vol. Cilindro = (1) / (2)* :

$$f_n = \frac{\left(\frac{\pi}{4} Dap^2 \frac{H}{H - h_{dap}} \right) \cdot H \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{\pi}{4} Dap^2 \right) \cdot H} = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{H - h_{dap}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + h_{dap} / H} \right)$$

De la misma forma, se puede deducir el factor de forma normal para un cono:

$$f_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + h_{dap} / H} \right)^2$$

Por lo tanto la expresión general de f_n es :

$$f_n = \frac{1}{r+1}\left(\frac{1}{1+h_{dap}/H}\right)^r$$

Como la relación h_{dap}/H no es constante, árboles de la misma forma pero diferente tamaño deben tener diferente factor de forma. Para solucionar este inconveniente el término h_{dap}/H es reemplazado por una fracción constante de la altura total que comúnmente es $1/20 = h_{dap}/H$ y por lo tanto el factor de forma normal queda:

$$f_n = \frac{1}{r+1}(1{,}05)^r$$

Debe revisarse la relación h_{dap}/H antes de aplicar la ecuación anterior.

¿Cómo efectuar una rápida definición de r sin tener que medir todo el árbol?

Método de los tres puntos (Relascopio)

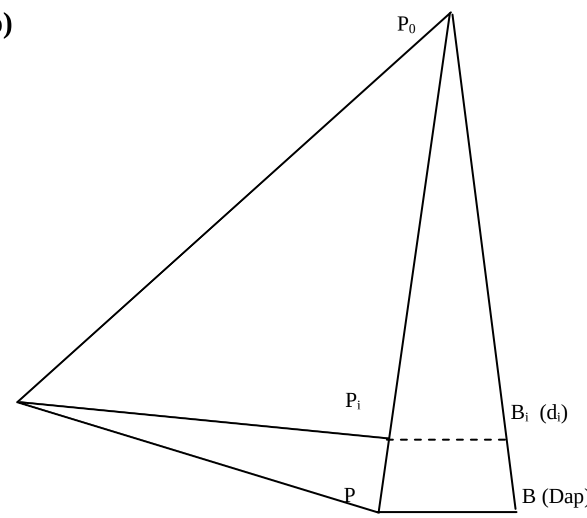
P = % altura al Dap

P_i = % altura al diámetro d_i

P_o = % altura al tope del árbol

B_i = diámetro (sección) a h_i

B = diámetro (sección) en la base (ejem: Dap)



De la figura se tiene que:

$$\frac{B_i}{B} = \left(\frac{P_0 - P_i}{P_0 - P}\right)^r$$

Por lo tanto r queda definido como:

$$r = \frac{2\ln\left(\frac{B_i}{B}\right)}{\ln\left(\frac{P_0 - P_i}{P_0 - P}\right)}$$

Una vez conocido el r se calcula f, luego el volumen del cilindro conociendo el area de la base y la altura total. Finalmente se obtiene el volumen fustal como f_n * *vol. cilindro*.

Factor de Forma Absoluto (f_a)

Considera sólo el volumen sobre el Dap, se tienen las siguientes expresiones (altura total = H – 1,3):

Fuste igual a un paraboloide: $$f_a = \frac{\pi/4 \cdot D^2 \cdot H/2}{\pi/4 \cdot D^2 \cdot H} = \frac{1}{2}$$

Fuste igual a un cono: $f_a = \frac{1}{3}$ Fuste igual a un neiloide: $f_a = \frac{1}{4}$

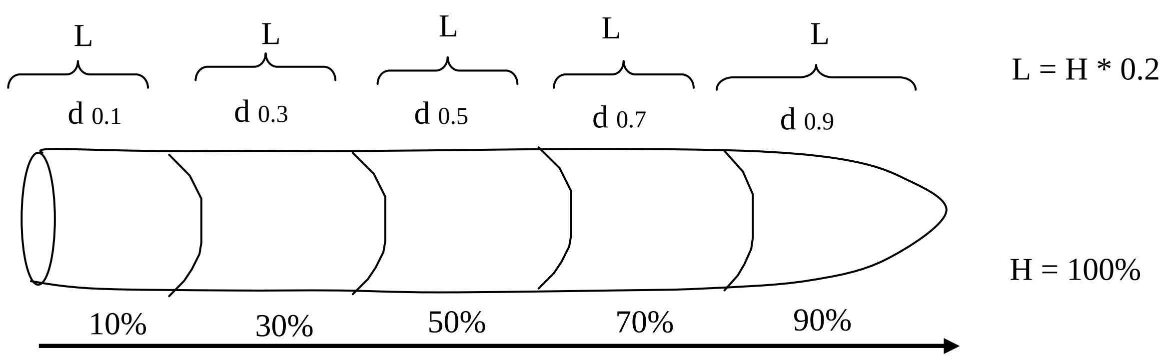
Ecuación general: $$f_a = \frac{1}{r+1}$$

Desventajas frente al factor de forma normal:

- No entrega información sobre el volumen que se encuentra bajo el DAP.
- Para corregir se requiere agregar el volumen faltante
- Se puede recurrir al cálculo en base al diámetro basal.
  - Mucho más variable
  - Disminuye correlación con el volumen

Factor de Forma Verdadero (f_v) (Hohendal, 1922 – 1924)

Consiste en dividir el fuste en 5 partes iguales y medir el volumen de cada uno de ellas de acuerdo a la forma de Huber



$$V = \pi/4 \cdot H \cdot 0{,}2 \cdot (d_{0.1}^2 + d_{0.3}^2 + d_{0.5}^2 + d_{0.7}^2 + d_{0.9}^2)$$

$$V = \boxed{\pi/4 \cdot d_{0.1}^2 \cdot H} \cdot \boxed{0{,}2 \cdot (1 + \frac{d_{0.3}^2}{d_{0.1}^2} + \frac{d_{0.5}^2}{d_{0.1}^2} + \frac{d_{0.7}^2}{d_{0.1}^2} + \frac{d_{0.9}^2}{d_{0.1}^2})}$$

Vol. Cilindro con base en $d_{0.1}$ Factor de forma verdadero

Kreen y Prodan (1944) definieron una relación de diámetros que facilita el cálculo del factor de forma verdadero:

$$\frac{d_{0.1}^2}{d_{0.5}^2} = \eta_{0.5}$$

$$f_v = 0{,}894 \cdot \eta_{0.5} - 0{,}126$$

Este factor es mejor que los anteriores, aún cuando asume forma de conoide truncado en cada sección. Podría mejorarse determinando el parámetro *r* por partes del árbol y usarlos separadamente en el cálculo de volúmenes.

Coeficientes de forma (q)

En forma paralela se efectuó una aproximación al problema de la forma fustal a través de los llamados cuocientes o coeficientes de forma (q), que corresponden a una razón entre dos diámetros del fuste (d_1 y d_2):

$$q = \frac{d_1}{d_2}$$

Habitualmente d_2 corresponde al Dap y d_1 a algún diámetro en altura superior (ejemplo: a la mitad de la altura total). Por ello, estos coeficientes son una rápida forma de describir la forma del fuste y su aguzamiento.

Coeficiente de forma de Schiffel (q_s) ("Clase de forma")

Corresponde a uno de los primeros coeficientes de forma y fue desarrollado por Schiffel en el año 1899. Conceptualmente se define como la proporción del diámetro a la mitad de la altura $d_{H/2}$ sobre el Dap (100 %):

$$q_s = \frac{d_{H/2}}{D}$$

El diámetro es asumido como aquel de mayor importancia en la determinación de la forma del fuste y su comparación con un cilindro de igual base y altura. Tiene la deficiencia de generar el mismo resultado para árboles de igual forma pero de alturas diferentes. Para su cálculo las alturas deben ser medidas en forma precisa.

Existen además algunos problemas para árboles pequeños. Por ejemplo, si el árbol tiene altura total igual a 2,6 m el coeficiente de Schiffel es igual a 1. En estos casos, y en general para rodales con árboles de baja altura, la relación de diámetros es estrecha y el coeficiente pierde sensibilidad a la forma.

Coeficiente de forma absoluto (q_a) (Jonson, 1912)

Para tratar de corregir algunos de los inconvenientes del coeficiente de forma de Schiffel, Jonson propone un coeficiente que utiliza el diámetro a la mitad de la distancia en la altura del Dap y la altura total:

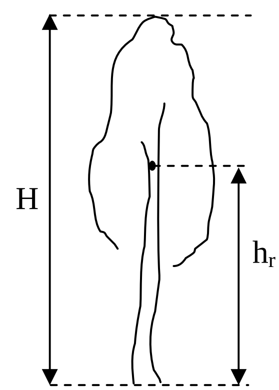
$$q_a = \frac{d_{(H-h_{Dap})/2}}{D}$$

Con ello se soluciona el problema para árboles de poca altura pero siguen necesitándose mediciones precisas de las alturas.

Punto de forma

Jonson también definió el coeficiente denominado "punto de forma", que corresponde a la razón entre la altura del centro de resistencia al viento del árbol, aproximadamente igual al centro de gravedad de la copa, y su altura total.

$$pf = \frac{h_r}{H}$$



Coeficiente de forma de Girard (q_g)

En 1933, Girard desarrolló un coeficiente de forma basado en la razón entre el diámetro sin corteza en el extremo superior de la primera troza de 16 pies de largo (troza basal) y el Dap con corteza. Lo anterior constituyó un esfuerzo por encontrar un coeficiente que se pudiese obtener a través de mediciones de diámetros de fácil acceso:

$$q_g = \frac{d_{16's/c}}{Dap_{c/c}} \quad \text{(a)} \qquad\qquad q_g = \frac{d_{17,3's/c}}{Dap_{c/c}} \quad \text{(b)}$$

El diámetro $d_{16's/c}$ indica que es la primera troza sobre el tocón. Si se mide desde el suelo debe agregarse la altura del tocón y el coeficiente queda como está expresado en (b). Este coeficiente ha dado origen a un conjunto de tablas de clases de forma en porcentaje que se utilizan en el cálculo de volúmenes fustales.

Relación entre factores y coeficientes de forma

Puede estudiarse la relación entre un factor y un coeficiente de forma asumiendo que podemos describir el volumen del fuste a través de la ecuación de Huber y que el factor de forma se calcula en referencia a un cilindro de base igual al Dap y de altura igual a H:

Por Huber el volumen del fuste: $v_f = g_{H/2} \cdot H = \pi / 4 \cdot d_{H/2} \cdot H$

Por lo tanto el factor de forma: $$f = \frac{v_f}{v_{cilindro}} = \frac{\pi / 4 \cdot d_{H/2}^2 \cdot H}{\pi / 4 \cdot Dap^2 \cdot H}$$

Es decir: $$f = \frac{d_{H/2}^2}{Dap^2} = q^2$$

Esto es, un factor de forma equivale a un coeficiente de forma al cuadrado.