Autores:
Patricio Corvalán Vera
Jaime Hernández Palma

3.6 Funciones de ahusamiento

La descripción del perfil fustal o ahusamiento de un árbol mediante un modelo matemático resulta útil cuando se está interesado en cuantificar secciones del fuste de largos y diámetros variables, debido a la dificultad práctica que presenta la medición de éstos atributos en árboles en pié. Es práctico medir con mucho detalle una sección superior del fuste cuando está presente de por medio el error y su alto costo de medición. Si es posible construir un modelo flexible y que se adapte bien a **la forma fustal** del o los árboles que se quiere estimar, se dispone de una poderosa herramienta de cuantificación dendrométrica.

La necesidad de realizar estimaciones simultáneas de varios productos que se obtienen al momento de realizar el trozado de un árbol en la cosecha, resulta evidente la ventaja de disponer de una herramienta con éstas características.

Las características apropiadas del modelo fustal

Son varias las exigencias que debe cumplir una función fustal para que se considere adecuada:

- Debe ser lo suficientemente flexible para adaptarse a los cambios de forma del perfil fustal. Al menos debe pasar por dos puntos de inflexión típicos de cualquier árbol: el cambio de forma basal desde un neiloide -producto de su sistema radicular- al cilindro o paraboloide central cuando se trata de árboles adultos, o bien, al cono cuando está en etapa juvenil y el cambio desde un paraboloide central al cono terminal, en la sección superior de árboles adultos, cuando se trata de formas excurrentes. Para árboles delicuescentes es usual fijar el diámetro límite de aprovechamiento, por lo cual se desecha la predicción en la copa fustal.
- Debe ser insesgado en todo el perfil fustal. Tal vez sea ésta la condición más restrictiva de los modelos reportados. Especial connotación tiene ésta característica cuando se está estimando un conjunto de productos simultáneamente, para ello es indispensable que la predicción de todos los productos sea insesgada.
- Debe resolver la estimación del diámetro al DAP y la altura total igualando la solución en ésos puntos con los datos medidos en el árbol a predecir. Si se utiliza algún diámetro superior como predictor del ahusamiento también debe cumplir la misma condición.

Los distintos tipos de modelos utilizados a la fecha

Existen modelos basados en distintos enfoques :

- Ecuación única para todo el perfil fustal.
- Conjunto de ecuaciones segmentadas para las distintas porciones del fuste y unidas entre sí, para constituir una solución combinada con continuidad en todo el rango de predicción.
- Modelos de interpolación basado en polinomios de orden cúbico que se construyen para cada árbol basado en mediciones sobre el perfil fustal y,
- Modelos “spline” ajustados para conjuntos de árboles.
- Modelos de ajuste del tipo polinomios cúbicos ajustados por secciones fustales las cuales se recalculan dinámicamente a medida que el árbol es medido y procesado por cosechadoras, utilizando la información de la sección ya medida y estimaciones de la porción superior en el fuste basado en datos almacenadas del rodal en cosecha y seleccionados con criterios de vecindad física o similitud de formas de las secciones ya medidas.

La compatibilidad de las funciones de ahusamiento con tablas de volumen

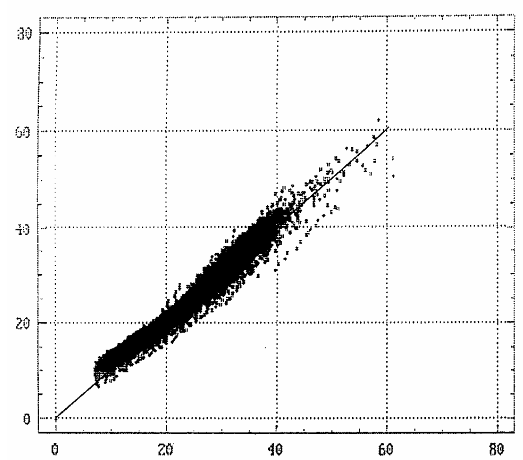
Existe una condición de mucho interés entre las funciones de ahusamiento y las funciones de volumen: Si la integral de la función de ahusamiento y la de volumen entre los límites de altura o diámetros establecidos son iguales se dice que la función de ahusamiento es compatible con la de volumen. Esta condición permite distribuir porcentualmente el volumen por productos y elimina las discrepancias existentes en la cubicación del volumen total entre ambos métodos.

Algunos casos de modelos ampliamente utilizados en la descripción del perfil fustal

a) Modelo de Bruce

$$d_i^2/D^2 = a_1*x^{3/2} + a_2*(x^{3/2}-x^3)*D + a_3(x^{3/2}-x^3)*H + a_4*(x^{3/2}-x^{32})*H*D + a_5*(x^{3/2}-x^{32})*H1/2 + a_6*(x^{3/2}-x^{40})*H^2$$

donde: $d_{i\,=}$ diámetro a altura variable h_i , D: Dap, H: altura total, h_i: altura de observación,
$x = (H-h_i)/(H-1.3)$



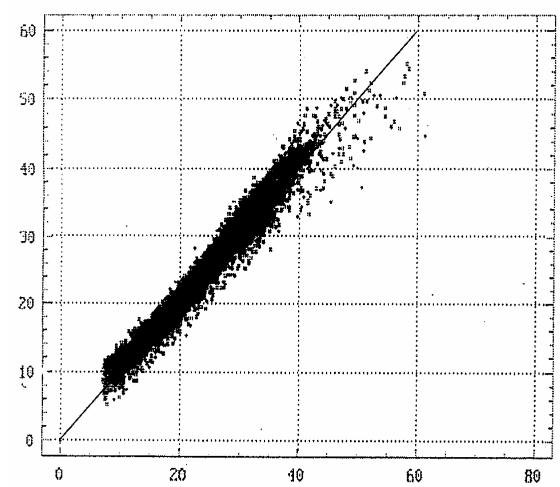
Este modelo polinómico es único para todo el perfil fustal y los parámetros **ai** se pueden ajustar fácilmente a través de un modelo de regresión lineal múltiple. Los términos grado alto de este polinomio permite un buen ajuste en la base del árbol, sin embargo sobreestima el diámetro en la porción superior del fuste, como se observa en el gráfico lateral que indica la dispersión de puntos entre los diámetros observados (y) vs los diámetros estimados (x).

Se observa n zonas de sobreestimaciones en diámetros bajo 20 cm y sobre 28 cm y subestimaciones en el resto.

b) Modelo de Max Cofre

$$d_i/D = K_1*X_1 + K_2*X_2 + K_3*X_3$$

Donde: $X = (H-h_i)/(H-1.3)$



Este simple polinomio ajusta bastante bien en bosques de pino insigne y sus parámetros pueden ser estimados por mínimos cuadrados. Es de simple construcción, admite derivada. Se puede ajustar bastante bien en la sección superior del árbol aunque en la parte inferior es bastante inflexible dado el bajo grado del polinomio. Presenta mejor ajuste que el modelo de Bruce en los diámetros pequeños, sin embargo aún presenta algún nivel de sobreestimación en productos pequeños (trozas pulpables).

c) Modelo de Frazer

Este modelo, está constituído por tres modelos distintos en el fuste: reconoce un neiloide basal, un paraboloide central y un cono terminal. Los parámetros que controlan el dominio de uso de las ecuaciones se presenta a continuación:

Ecuación	Dominio	Tipo de función
$di/DAP = \exp(p + q*x)$	$0<=h/H<=\theta$	(1) neiloide
$di/DAP = \sqrt{(r + s*x)}$	$0< h/H<=\varepsilon$	(2) paraboloide
$di/DAP = t + u*x$	$\varepsilon< h/H<=1$	(3) cono

Este modelo está condicionado a:

- Igualar la solución del neiloiede basal con el paraboloide central,
- Igualar la solución del paraboloide central con el cono terminal
- Igualar la pendiente o primera derivada del neiloide basal con el paraboloide central,
- Igualar la pendiente o primera derivada del paraboloide central con el cono terminal,
- Igualar la solución en $\alpha = 1.3/H$ a 1; esto es que el neiloide basal pase por el DAP
- Igualar la solución en $x =1$ a 0, o sea que el cono terminal tenga diámetro 0.

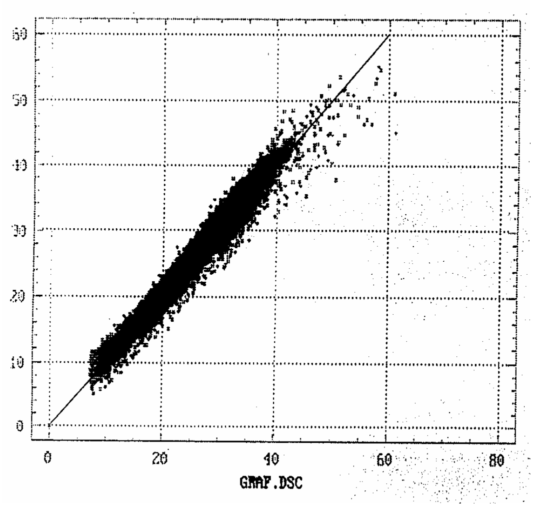
De esta forma la solución de los parámetros p,q,r,s,t y u tienen solución cerrada al tener un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas.

El sistema de ecuaciones queda entonces en función de los parámetros θ y ε. Para encontrar la mejor solución es preciso definir una cierta función objetivo que controle el error de estimación, pudiéndo ser ésta los desvíos absolutos, cuadráticos o los que se estimen adecuados. Luego de definirla se prueban combinaciones (θ , ε) que minimizen la función objetivo.

Esta función es conceptualmente clara: si el árbol está compuesto por estos tres tipos de conoides sólo hay que buscar los puntos de cambio.

Experiencias en pino insigne han probado ajustarse bastante bien a todas las seciones fustales tal como se indica en el gráfico adjunto.

Tiene un comportamiento similar al modelo de Cofré, pero con sobreestimaciones menores en los diámetros pequeños.



d) Max y Burkhart

$$d_i^2/D^2 = b_1*(h_i/H) + b2*((h_i^2/H^2)-1) + b_3*(a_1-(h_i/H))^2*I_1 + b_4*(a_2-(h_i/H)^2*I_2$$

si : $I_i = \begin{cases} 1 \text{ si } h_i/H <= a_i \\ 0 \text{ si } h_i/H > a_i, \quad \forall i \end{cases}$

donde: a_i : corresponde a la altura donde se producen los puntos de inflexión.
h_i/H : altura relativa.

Este modelo segmentado utiliza dos variables enteras para definir el uso de los términos tercero y cuarto en el dominio.En este modelo los términos b1 y b2 se utilizan en todo el dominio, en cambio b3 y b4 están condicionados por los valores de $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{a_2}$.

Este es un típico modelo lineal múltiple, segmentado por alturas relativas, construído en la base por cuatro términos, en la sección relativa intermedia por tres términos y la sección final sólo por dos términos.