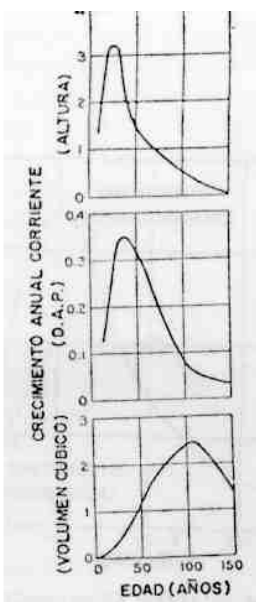
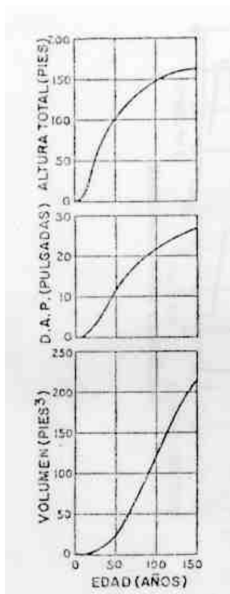
Autores:
Patricio Corvalán Vera
Jaime Hernández Palma

2.4. Modelos de crecimiento

2.4.1 Introducción

Todo ser vivo nace, crece, se desarrolla y muere. Este ciclo vital está condicionado por una gran variedad de factores: genéticos, suelo, competencia local por factores del sitio, clima etc. Independientemente de ello, en forma intrínseca existe un patrón común en el desarrollo en el tamaño de todos los seres vivos. A modo de ejemplo se ilustra en las siguientes imágenes el desarrollo de las curvas de crecimiento recogidas del texto “Medición Forestal” de Schumacher.





En particular los árboles presentan un crecimiento anual corriente inicial bajo debido a que está formando sus estructuras básicas: fuste, ramas, raíces etc. Este crecimiento aumenta progresivamente hasta alcanza tasas máximas de crecimiento una vez que se ha alcanzado el desarrollo completo de las estructuras básicas. Durante ese tiempo el árbol se desarrolla a ritmos constantes luego declinar y llegar a ser prácticamente nulas.

Todas las variables: Altura total, DAP y Volumen desarrollan el mismo tipo de crecimiento, difiriendo sólo en que la Altura total y el DAP alcanzan su máximo crecimiento corriente a edades muy tempranas lo cual ocurre con el Volumen a edades mucho mayores.

Todas las curvas de tamaño vs. edad tienen una forma de “S”, como se muestra en el gráfico del lado derecho, situación que a nivel de crecimientos anuales corrientes tienen forma de curvas normales unimodales y sesgadas. Esta forma típica se logra en árboles en condiciones “normales de crecimiento libre”, esto es sin efectos climáticos ni de competencia serios.

Los árboles sujetos a grandes variaciones climáticas y de competencia tenderán a formar alteraciones de esta curva con máximos y mínimos locales variables. En general el crecimiento anual medio se entrecruza con la curva de crecimiento anual corriente en su punto máximo. Esto suele ocurrir varias veces cuando el árbol está sujeto a variaciones de crecimiento diametral por efecto de competencia con los vecinos.

En general la curva más estable es la de crecimiento en altura total, ya que depende del sitio y del clima fundamentalmente y está mucho menos afectado por el crecimiento lateral, -en las condiciones de crecimiento libre-. En cambio el diámetro no sólo está afectado por éstas variables sino también por la competencia. El volumen está menos afectado por cuanto depende de las dos anteriores más sus cambios en la forma fustal, - el cambio - en diámetros superiores, los cuales a su vez también son afectados por los procesos de competencia. La poda y el raleo afectan fuertemente los cambios de forma y por ende en el volumen.

2.4.2. Los modelos tradicionales

Aún cuando se ha desarrollado una extensa investigación y reportes sobre modelos que presenten razonablemente bien este fenómeno, se presentará a continuación los más utilizados tradicionalmente, y que han probado funcionar correctamente en la modelación dendrométrica.

a) El modelo de Chapman-Richards

$$V = A \cdot (1 - b \cdot c^{-k \cdot t})^{(\frac{1}{1-m})}$$

Donde: *A*,*b*,*k*,*m* : parámetros
V : variable de tamaño
t : edad

Los parámetros tienen el siguiente significado biológico

- A es una constante y representa la asíntota de la variable, esto es el tamaño máximo (V) que el árbol puede alcanzar en el tiempo .
- b es una constante donde se cumple la relación :

  $$t = \frac{\ln b}{k}$$ esto es el momento *t* en el cual *V* comienza a tener valores positivos

- *k* es una constante conocida como "tasa constante de crecimiento", la cual determina la amplitud de la curva sobre el eje del tiempo.
- *m* es una constante que define la máxima tasa de crecimiento, se cumple que:

$$V_{\max} = A \cdot m^{\frac{1}{1-m}}$$ con solución en t igual a $$\frac{Ln\left(\frac{1}{1-m}\right)}{k}$$

La función *V* tiene su máxima tasa de crecimiento numérica (V_{max}) en esta condición. Esta función ha sido reportada como una de las más adecuadas en la literatura para definir los fenómenos de crecimiento.

Tiene las siguientes propiedades:

- permite fijar una edad mínima a la cual *V* tiene valores positivos
- admite varios cambios de pendiente
- es asintótico
- no es estrictamente simétrico ni en sus concavidades ni en el desarrollo en el punto de máximo crecimiento

Estas características son muy apropiadas para representar el desarrollo de todas las variables de importancia en el crecimiento de un árbol.

Una pequeña limitación en es la forma no lineal que presenta la función. Para realizar estimaciones iniciales de los parámetros - condición básica para el comienzo de iteraciones en búsqueda de un mínimo cuadrático – se puede realizar ésta mediante inspecciones gráficas de la función:

- *A* se estima a partir de información práctica , ya sea mediante observación del fenómeno o con información de expertos,
- *m* se encuentra por iteraciones en la condición de V_{max},
- *k* se despeja de la condición en que *V* tiene valor 0 y,
- *b* se despeja de la condición de t donde se encuentra V_{max}

b) Series cronológicas

Existen varios modelos que tienen o se ajustan a la forma de desarrollo en series. En realidad el crecimiento de un árbol es una serie donde el árbol aumenta anualmente de tamaño. Los modelos que se presentan a continuación tiene directa o indirectamente la forma de la expresión:

b.1) Exponencial modificada

$$y^* = k + a \cdot b^x$$

Donde: *k, a, b* : parámetros de la serie
*y** : variable de tamaño
x : valor de la serie

Esta ecuación se trata de una curva exponencial con cambio en el origen. El parámetro *k* representa una asíntota; *a* es la diferencia entre la asíntota y el valor de *y** cuando *x=0*; *b* es la relación constante entre incrementos sucesivos.

b.2) Curva de Gompertz

$$y^* = k \cdot a^{b^x}$$

Este modelo corresponde al de la exponencial modificada sólo que en términos del logaritmo de y*

$$\log y^* = \log k + b^x \log a$$

Léase nuevamente

$$y^* = k + a \cdot b^x$$

A diferencia del modelo exponencial modificado aquí lo que cambia es la tasa constante de cambio entre los incrementos de logaritmos de la función.

b.3) Curva logística

$$\frac{1}{y^*} = k + a \cdot b^x$$

Acá la transformación del modelo exponencial modificado es el recíproco de la variable *y**, lo cual es equivalente a escribir:

$$y^* = k + a \cdot b^x$$

Donde *b* es el incremento constante entre los recíprocos de la variable *y**.

c) Ajuste de parámetros de series

Para ajustar los parámetros (3) se debe contar con un sistema de tres ecuaciones para su solución cerrada. Se toma la serie de tiempo haciendo que el año de inicio sea *x=0* y la variable *T* (Dap, H, etc.) sea *y*.

Luego se separa la serie en 3 grupos de datos de igual cantidad (n) de observaciones cada grupo. Se intenta hacer un cálculo de los parámetros de tal forma que la solución del desarrollo de la serie (*y**) sea igual al valor observado por la serie (*y*).

Para ello se desarrollan los 3 grupos:

$$S_1 = (k + a) + (k + ab^2) + ... + (k + ab^{n-1})$$
$$S_2 = (k + ab^n) + (k + ab^{n+1}) + (k + ab^{n+2}) + ... + (k + ab^{2n-1})$$
$$S_3 = (k + ab^{2n}) + (k + ab^{2n+1}) + (k + ab^{2n+2}) + ... + (k + ab^{3n-1})$$

Como:

$$1 + b + b^2 + ... + b^{n-1} = \frac{b^n - 1}{b - 1} = S$$

Entonces:

$$S_1 = nk + Sa$$
$$S_2 = nk + b^n Sa$$
$$S_3 = nk + b^{2n} Sa$$

Restando las ecuaciones y resolviendo para *n* se obtiene:

$$S_2 - S_1 = (b^n - 1)Sa$$
$$S_3 - S_2 = (b^n - 1)b^n Sa$$
$$b^n = \frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1} = \frac{d_2}{d_1}$$

Despejando *a* desde las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$a = \frac{S_2 - S_1}{(b^n - 1)S} = \frac{d_1(b - 1)}{(b^n - 1)^2}$$
$$k = \frac{1}{n} \cdot \left(S_1 - \frac{d_1}{(b^n - 1)} \right)$$

Con estos parámetros queda completamente definida la serie.