El Canelo: Una alternativa de Desarrollo para la Décima Región
Volumen III: Metodología
1987

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Forestales
Depto. Manejo de Recursos Forestales

Fondo de Investigación Agraria

(Extracto de páginas: 77 – 83)

5.2.5.1 Selección de modelos

Considerando la restricción que no se disponía de información histórica de las parcelas para la construcción de funciones de rendimiento sino sólo temporales, se cauteló que los posibles modelos predictores representaran estrictamente el fenómeno de crecimiento.

Por ello se seleccionaron 2 modelos reportados profusamente en la literatura especializada.

Modelo 1 (Schumacher) :

$$\operatorname{Ln} V = a + b/E$$

Modelo 2 (Chapman-Richards)

$$V = A(1 - b \cdot e^{-k \cdot E})^{\left(\frac{1}{1-m}\right)}$$

donde :

V = Es el volumen cúbico total por hectárea a la edad E

a,b,k,m y A = Parámetros

e = 2,71828

La selección se realizó analizando las bondades teóricas relativas de uno y otro modelo en relación a su flexibilidad para adaptarse a la información disponible, y contener analíticamente los puntos críticos de un modelo de crecimiento : una asíntota, una tasa de crecimiento variable según períodos, y un punto de partida para el volumen no necesariamente en el origen.

Analizados los factores arriba indicados se optó por el modelo de Chapman-Richards, cuyos parámetros representan las siguientes características :

A = Es una constante que define la asíntota o el máximo volumen posible de alcanzar.

b = Es una constante donde se cumple la relación :

$$E = \frac{\text{Ln } b}{k}$$

esto es E es la edad a la cual V = 0

k = Es una constante conocida como "tasa constante de crecimiento", la cual determina la amplitud de la curva sobre el eje del tiempo.

m = Es una constante que define la máxima tasa de crecimiento; se cumple que :

$$V_{máx} = A \cdot m^{\left(\frac{1}{1-m}\right)}$$

Esto es $V_{máx}$ es el volumen del rodal cuando crece a la máxima tasa de crecimiento.

De este modelo es posible obtener analíticamente el de crecimiento, derivando el modelo respecto a la edad :

$$\frac{\delta V}{\delta E} = \frac{k \cdot A^{(1-m)} \cdot V^m}{1 - m} - \frac{k \cdot V}{1 - m}$$

Aún cuando se trata de una diferenciación infinitesimal en el tiempo, representa el crecimiento instantáneo del volumen.

Suponiendo que este crecimiento se aproxima a una diferenciación finita ($\Delta E = 1$), ésta representa entonces el crecimiento anual corriente.

Si se observa la ecuación que expresa la derivada del volumen respecto a la edad se observará que la tasa de crecimiento es independiente del tiempo y sólo dependerá del volumen.

Este hecho permite entonces generar una función recurrente en el tiempo, en el que se requiere una edad y volumen inicial y luego por agregaciones sucesivas de crecimientos anuales corrientes, se genera una sucesión de valores que representan el volumen acumulado en el período de evaluación.

Para evitar el problema de expresar toda la gama de variabilidad de volumen, dada una misma edad en la misma clase de sitio, se expresa el crecimiento anual corriente como una expresión porcentual, dividiendo la ecuación de la derivada del volumen con respecto a la edad por la ecuación de volumen, resultando :

$$\Delta V_E \% = \frac{k \cdot A^{(1-m)} \cdot V^{(m-1)}}{1 - m} - \frac{k}{1-m}$$

donde :

$\Delta V_E \%$ = Es el crecimiento anual corriente expresado en porcentaje.

Esta última expresión se puede resumir en el siguiente modelo geométrico :

$$V_E \% = b_1 \cdot V^{b_2} + b_0$$

donde :

$$b_0 = \frac{-k}{1-m}$$

$$b_1 = \frac{k \cdot A^{(1-m)}}{1 - m}$$

$$b_2 = (m - 1)$$

y la función recurrente será :

$$V(E + 1) = VE \cdot (1 + b_0 + b_1 \cdot E^{b_2})$$

5.2.5.2 Estimación de parámetros de la función de rendimiento de Chapman-Richards

Dado que la función de Chapman-Richards no tiene una expresión lineal para la estimación de sus parámetros, se estimaron a partir de un paquete de programas estadísticos (S.A.S., Statistical Analysis System) que contiene estimadores para regresiones no lineales.

En lo fundamental, el programa requiere estimadores iniciales de los parámetros que utiliza como punto de partida para el cálculo de errores residuales de estimación y que luego por iteraciones sensibiliza hasta conseguir su minimización.

Es fundamental para la convergencia entonces disponer de valores iniciales relativamente cercanos a los finales.

Para ello se realizó un ajuste a mano alzada sobre el diagrama de dispersión de puntos para las parcelas pertenecientes a la misma clase de sitio.

De ellos se dedujo directamente un estimador de la asíntota A.

Del análisis de tallo se calculó la edad promedio a la cual los árboles empezaban a aportar volumen con diámetro límite superior a 5 cm.

Ese valor es el estimador directo de la relación Ln b/k.

Luego se inspeccionó el valor de m al determinar sobre la curva el volumen al cual se llega a una mayor tasa de crecimiento ($V_{máx}$).

Se calculó su valor por iteraciones usando la transformación :

$$Ln\left(\frac{V_{máx}}{A}\right) = \frac{1}{1-m} \times Ln\ m$$

donde el lado izquierdo de la ecuación resulta conocido.

La expresión $\dfrac{Ln\left(\frac{1}{1-m}\right)}{k}$ indica la edad, con lo cual se obtiene la máxima tasa de crecimiento.

Dividiendo esa expresión por $\dfrac{Ln\ b}{k}$ (valor conocido) se elimina k y se determina b por iteraciones.

Finalmente se despeja k de la expresión $E = Ln\ b/k$

Adicionalmente el programa requiere especificar las derivadas parciales de la función respecto a todos los parámetros.

Con estos antecedentes se carga el programa de entrada al programa de ajuste no lineal.

Se obtiene al final del proceso estimadores de los parámetros cuando se consigue una expresión de error residual no reducible en el proceso iterativo.

El sistema de ecuaciones diferenciales es el siguiente :

$$\frac{\delta V}{\delta A} = (1 - be^{-kE})^{(\frac{1}{1-m})}$$

$$\frac{\delta V}{\delta k} = \frac{A}{1-m} (1 - be^{-kE})^{\frac{m}{1-m}} \times b \cdot E \cdot e^{-kE}$$

$$= \frac{A \cdot b \cdot E \cdot e^{-kE}}{1 - m} (1 - b \cdot e^{-kE})^{(\frac{m}{1-m})}$$

$$\frac{\delta V}{\delta m} = A(1 - be^{-kE})^{(\frac{1}{1-m})} \times Ln (1 - be^{-kE}) \times \frac{1}{(1-m)^2}$$

$$= \frac{A \cdot Ln(1 - be^{-kE})}{(1 - m)^2} (1 - be^{-kE})^{\frac{1}{1-m}}$$

$$\frac{\delta V}{\delta b} = \frac{A}{1 - m} (1 - be^{-kE})^{\frac{m}{1-m}} \times (-) e^{-kE}$$

$$= (-) \frac{A e^{-kE}}{m - 1} (1 - be^{-kE})^{(\frac{m}{1-m})}$$