

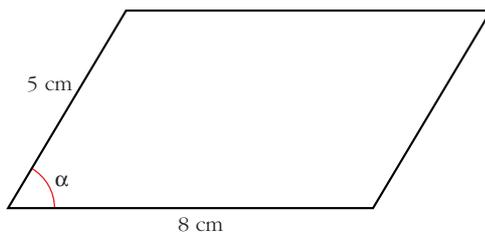
# UNIDAD 5

# VECTORES EN EL ESPACIO

## Página 132

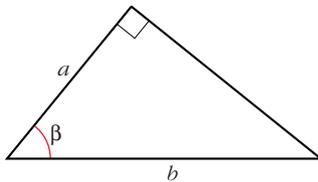
### Problema 1

- Halla el área de este paralelogramo en función del ángulo  $\alpha$ :



$$\text{Área} = 8 \cdot 5 \operatorname{sen} \alpha = 40 \operatorname{sen} \alpha \text{ cm}^2$$

- Halla el área de este triángulo en función del ángulo  $\beta$ :



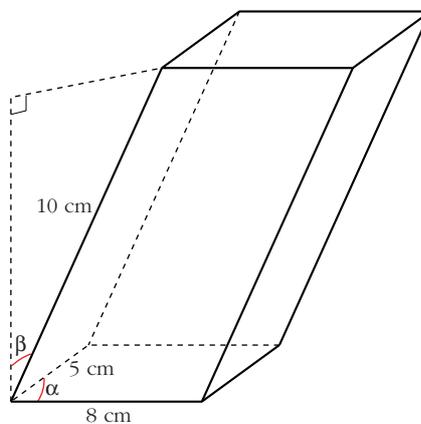
$$\text{Área triángulo} = \frac{a b \operatorname{sen} \beta}{2} \text{ cm}^2$$

### Problema 2

- Halla el volumen de este paralelepípedo en función de  $\alpha$  y de  $\beta$ .

$$\left. \begin{array}{l} \text{Área base} = 40 \operatorname{sen} \alpha \\ \text{Altura} = 10 \operatorname{cos} \beta \end{array} \right\}$$

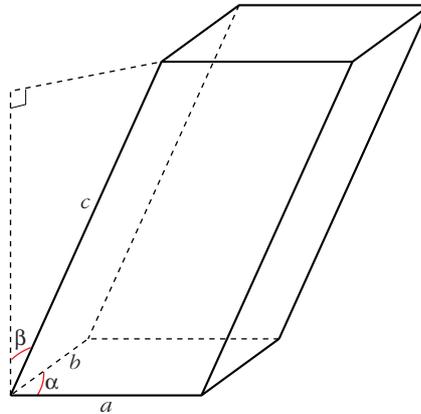
$$\text{Volumen} = 400 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta \text{ cm}^3$$



## Página 133

- ¿Cuál será el volumen de un paralelepípedo de aristas  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , tal que las dos aristas de la base formen entre sí un ángulo  $\alpha$ , y las aristas laterales formen un ángulo  $\beta$  con la perpendicular?

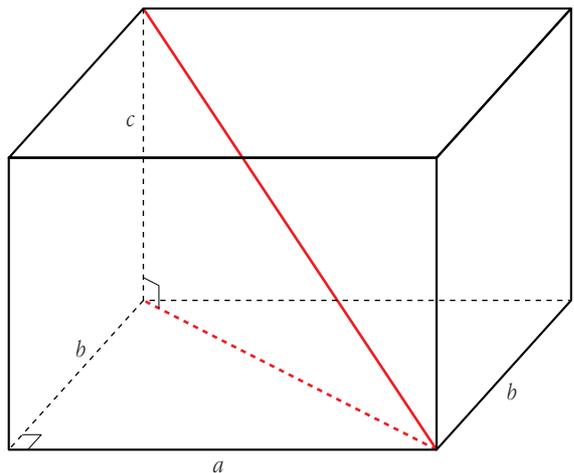
$$\text{Volumen} = a b c \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$$



### Problema 3

- Halla la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son:  $c = 3$  cm,  $b = 4$  cm y  $a = 12$  cm.

$$\begin{aligned} \text{Diagonal} &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \\ &= \sqrt{169} = 13 \text{ cm} \end{aligned}$$



- Escribe la expresión general de la diagonal de un ortoedro de aristas  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

$$\text{En general: Diagonal} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

## Página 135

1. La propiedad  $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$  relaciona el producto de números por vectores con el producto entre números.

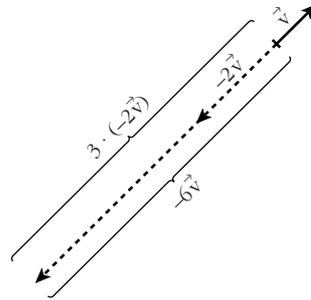
a) De los cuatro productos que aparecen, ¿cuáles son del primer tipo y cuáles del segundo?

b) Interpreta dicha propiedad para  $a = 3$ ,  $b = -2$  y  $\vec{v}$  un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Producto de números por vectores:  $b \cdot \vec{v}$ ;  $(a \cdot b) \cdot \vec{v}$ ;  $a \cdot (b \cdot \vec{v})$

Producto entre números:  $a \cdot b$

$$b) \left. \begin{array}{l} a \cdot (b \cdot \vec{v}) = 3 \cdot (-2\vec{v}) \\ (a \cdot b) \cdot \vec{v} = -6\vec{v} \end{array} \right\} 3 \cdot (-2\vec{v}) = -6\vec{v}$$



2. La propiedad  $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$  relaciona la suma de números con la suma de vectores.

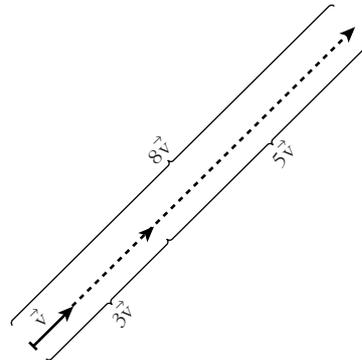
a) De las dos sumas que aparecen, ¿cuál es de cada tipo?

b) Interpreta dicha propiedad para  $a = 3$ ,  $b = 5$  y  $\vec{v}$  un vector cualquiera representado sobre el papel.

a) Suma de números:  $a + b$

Suma de vectores:  $a\vec{v} + b\vec{v}$

$$b) \left. \begin{array}{l} (a + b) \cdot \vec{v} = 8\vec{v} \\ a\vec{v} + b\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v} \end{array} \right\} 8\vec{v} = 3\vec{v} + 5\vec{v}$$



## Página 137

1. Si  $\vec{u}(-3, 5, 1)$ ,  $\vec{v}(7, 4, -2)$ , halla las coordenadas:

a)  $2\vec{u}$

b)  $0\vec{v}$

c)  $-\vec{u}$

d)  $2\vec{u} + \vec{v}$

e)  $\vec{u} - \vec{v}$

f)  $5\vec{u} - 3\vec{v}$

a)  $2\vec{u} = 2 \cdot (-3, 5, 1) = (-6, 10, 2)$

b)  $0 \cdot \vec{v} = (0, 0, 0)$

c)  $-\vec{u} = -(-3, 5, 1) = (3, -5, -1)$

d)  $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-3, 5, 1) + (7, 4, -2) = (1, 14, 0)$

e)  $\vec{u} - \vec{v} = (-3, 5, 1) - (7, 4, -2) = (-10, 1, 3)$

f)  $5\vec{u} - 3\vec{v} = 5(-3, 5, 1) - 3(7, 4, -2) = (-36, 13, 11)$

2. Sean los vectores  $\vec{x}(1, -5, 2)$ ,  $\vec{y}(3, 4, -1)$ ,  $\vec{z}(6, 3, -5)$ ,  $\vec{w}(24, -26, -6)$ . Halla  $a$ ,  $b$ ,  $c$  para que se cumpla:  $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{w}$

$$a(1, -5, 2) + b(3, 4, -1) + c(6, 3, -5) = (24, -26, -6)$$

$$(a + 3b + 6c, -5a + 4b + 3c, 2a - b - 5c) = (24, -26, -6)$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 3b + 6c = 24 \\ -5a + 4b + 3c = -26 \\ 2a - b - 5c = -6 \end{array} \right\} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -92$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 3 & 6 \\ -26 & 4 & 3 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-552}{-92} = 6; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 24 & 6 \\ -5 & -26 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{184}{-92} = -2$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 24 \\ -5 & 4 & -26 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{-92} = \frac{-368}{-92} = 4$$

Solución:  $a = 6$ ,  $b = -2$ ,  $c = 4$ , es decir,  $6\vec{x} - 2\vec{y} + 4\vec{z} = \vec{w}$ .

## Página 141

1. Dados los vectores  $\vec{u}(5, -1, 2)$ ,  $\vec{v}(-1, 2, -2)$ , calcula:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$                       b)  $|\vec{u}|$  y  $|\vec{v}|$                       c)  $(\vec{u}, \vec{v})$

d) Proy. de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$  y proy. de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$ .

e) ¿Cuánto ha de valer  $x$  para que el vector  $(7, 2, x)$  sea perpendicular a  $\vec{u}$ ?

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 - 2 - 4 = -11$

b)  $|\vec{u}| = \sqrt{25 + 1 + 4} = \sqrt{30} \approx 5,48$

$|\vec{v}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

c)  $\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-11}{\sqrt{30} \cdot 3} \approx -0,669 \rightarrow (\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = 132^\circ 1' 26''$

d) Proy. de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-11}{3} = -3,67$

Significa que el vector proyección de  $\vec{u}$  en la dirección de  $\vec{v}$  tiene módulo 3,67 y sentido contrario al de  $\vec{v}$ .

Proy. de  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-11}{\sqrt{30}} \approx -2,008$

e)  $(5, -1, 2) \cdot (7, 2, x) = 35 - 2 + 2x = 33 + 2x = 0 \rightarrow x = \frac{-33}{2}$

2. Obtén tres vectores perpendiculares a  $\vec{v}$  que no sean paralelos entre sí:  $\vec{v}(3, 2, 7)$

Un vector,  $\vec{u}(x, y, z)$ , es perpendicular a  $\vec{v}(3, 2, 7)$  si:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3x + 2y + 7z = 0$

Por ejemplo:  $(0, -7, 2)$ ;  $(-7, 0, 3)$ ;  $(-2, 3, 0)$

**3. Halla un vector que sea perpendicular a los dos vectores dados:**

$$\vec{u}(5, -1, 2) \qquad \vec{v}(-1, 2, -2)$$

Queremos hallar las coordenadas de un vector  $\vec{w}(x, y, z)$  que sea perpendicular a  $\vec{u}$  y a  $\vec{v}$ :

$$\left. \begin{aligned} \vec{w} \perp \vec{u} &\Rightarrow (5, -1, 2) \cdot (x, y, z) = 5x - y + 2z = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} &\Rightarrow (-1, 2, -2) \cdot (x, y, z) = -x + 2y - 2z = 0 \end{aligned} \right\}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones proporcionales. Una de ellas es  $x = -2, y = 8, z = 9$ .

Es decir, el vector buscado puede ser  $(-2, 8, 9)$  o cualquier otro paralelo a él.

### Página 144

**1. Halla el producto vectorial de  $\vec{u}(3, 7, -6)$  y  $\vec{v}(4, 1, -2)$ .**

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25)$$

**2. Halla un vector perpendicular a  $\vec{u}(3, 7, -6)$  y a  $\vec{v}(4, 1, -2)$ .**

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3, 7, -6) \times (4, 1, -2) = (-8, -18, -25) \text{ o cualquier vector proporcional a él.}$$

**3. Halla el área del triángulo determinado por los vectores:  $\vec{u}(3, 7, -6)$  y  $\vec{v}(4, 1, -2)$**

Área del paralelogramo determinado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v}| &= |(3, 7, -6) \times (4, 1, -2)| = |(-8, -18, -25)| = \\ &= \sqrt{8^2 + 18^2 + 25^2} = \sqrt{1013} \end{aligned}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{1013}}{2} \approx 15,91 \text{ u}^2$$

### Página 145

**1. Halla el volumen del paralelepípedo definido por  $\vec{u}(3, -5, 1)$ ,  $\vec{v}(7, 4, 2)$  y  $\vec{w}(0, 6, 1)$**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 53 \rightarrow \text{Volumen} = 53 \text{ u}^3$$

**2. Halla el valor de  $x$  para que los vectores  $\vec{u}(3, -5, 1)$ ,  $\vec{v}(7, 4, 2)$  y  $\vec{z}(1, 14, x)$  sean coplanarios (es decir, que el volumen del paralelepípedo determinado por ellos sea cero).**

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & 14 & x \end{vmatrix} = 47x = 0 \rightarrow x = 0$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Dependencia lineal

1 Dados los vectores  $\vec{u}(3, 3, 2)$ ,  $\vec{v}(5, -2, 1)$ ,  $\vec{w}(1, -1, 0)$ :

a) Halla los vectores  $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$ ,  $-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w}$ .

b) Calcula  $a$  y  $b$  tales que  $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$ .

$$a) \vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w} = (3, 3, 2) - 2(5, -2, 1) + 3(1, -1, 0) = (-4, 4, 0)$$

$$-2\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{w} = -2(3, 3, 2) + (5, -2, 1) - 4(1, -1, 0) = (-5, -4, -3)$$

$$b) (3, 3, 2) = a(5, -2, 1) + b(1, -1, 0) = (5a + b, -2a - b, a)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 = 5a + b \\ 3 = -2a - b \\ 2 = a \end{array} \right\} \begin{array}{l} b = -7 \\ b = -7 \\ a = 2 \end{array} \quad \text{Solución: } a = 2, b = -7, \text{ es decir: } \vec{u} = 2\vec{v} - 7\vec{w}.$$

2 Comprueba que no es posible expresar el vector  $\vec{x}(3, -1, 0)$  como combinación lineal de  $\vec{u}(1, 2, -1)$  y  $\vec{v}(2, -3, 5)$ . ¿Son linealmente independientes  $\vec{x}$ ,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ?

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} \rightarrow (3, -1, 0) = a(1, 2, -1) + b(2, -3, 5)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 = a + 2b \\ -1 = 2a - 3b \\ 0 = -a + 5b \end{array} \right\} A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ Como } |A'| = 28 \neq 0, \text{ el sistema es incompatible.}$$

Luego **no** es posible expresar  $\vec{x}$  como combinación lineal de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

Como  $\text{ran}(A') = 3$ , los tres vectores son linealmente independientes.

3 ¿Cuáles de los siguientes vectores tienen la misma dirección?

$$\vec{a}(1, -3, 2) \quad \vec{b}(2, 0, 1) \quad \vec{c}(-2, 6, -4) \quad \vec{d}(5, -15, 10) \quad \vec{e}(10, -30, 5)$$

$\vec{a}$ ,  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , pues sus coordenadas son proporcionales.

4 Comprueba que cualquiera de los vectores  $\vec{a}(1, 2, 3)$ ,  $\vec{b}(2, 1, 3)$ ,  $\vec{c}(1, 0, 1)$  puede expresarse como C.L. de los otros dos.

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c} \rightarrow (1, 2, 3) = x(2, 1, 3) + y(1, 0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 2x + y \\ 2 = x \\ 3 = 3x + y \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -3 \\ x = 2 \\ y = -3 \end{array} \quad \text{Por tanto: } \vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

De aquí, también obtenemos que:  $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{c}$ ;  $\vec{c} = \frac{-1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

**5** Halla, en cada caso, todos los valores de  $m, n$  y  $p$  tales que  $m\vec{u} + n\vec{v} + p\vec{w} = \vec{0}$ :

a)  $\vec{u}(3, 0, 1), \vec{v}(1, -1, 0), \vec{w}(1, 0, 1)$

b)  $\vec{u}(1, -1, 0), \vec{v}(1, 1, 1), \vec{w}(2, 0, 1)$

a)  $m(3, 0, 1) + n(1, -1, 0) + p(1, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} 3m + n + p = 0 \\ -n = 0 \\ m + p = 0 \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como  $|A| = -2 \neq 0$ , la única solución del sistema es:  $m = 0, n = 0, p = 0$   
(Luego  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente independientes).

b)  $m(1, -1, 0) + n(1, 1, 1) + p(2, 0, 1) = (0, 0, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} m + n + 2p = 0 \\ -m + n = 0 \\ n + p = 0 \end{array} \right\} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0; \text{ luego } \text{ran}(A) = 2.$$

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} -m + n = 0 \\ n + p = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} m = n \\ p = -n \end{array} \left. \right\} \text{Soluciones: } m = \lambda, n = \lambda, p = -\lambda$$

**6** Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

a)  $\vec{u}(1, 2, 1), \vec{v}(-1, 0, 3), \vec{w}(1, 2, -1)$

b)  $\vec{a}(1, 2, 3), \vec{b}(1, 4, 11), \vec{c}(1, 1, -1), \vec{d}(0, 1, 4)$

c)  $\vec{u}(1, 1, 0), \vec{v}(1, 0, 1), \vec{w}(5, 2, 3)$

a)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ . Luego  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  son **linealmente independientes**.

b) Al ser cuatro vectores en  $\mathbb{R}^3$ , son **linealmente dependientes**.

c)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ . Por tanto,  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  son **linealmente dependientes**.

**7** Determina  $k$  para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:

a)  $\vec{u}(k, -3, 2), \vec{v}(2, 3, k), \vec{w}(4, 6, -4)$

b)  $\vec{u}(3, 2, 5), \vec{v}(2, 4, 7), \vec{w}(1, -1, k)$

$$a) \begin{vmatrix} k & -3 & 2 \\ 2 & 3 & k \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -6k^2 - 24k - 24 = -6(k^2 + 4k + 4) = -6(k+2)^2 = 0 \rightarrow k = -2$$

Si  $k = -2$ , los vectores son linealmente dependientes.

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = 8k + 5 = 0 \rightarrow k = \frac{-5}{8}$$

Si  $k = \frac{-5}{8}$ , los vectores son linealmente dependientes.

### 8 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base?

S

$$A = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)\}$$

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$C = \{(-3, 2, 1), (1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$$

$$A = \{(1, 2, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 2)\}$$

Como  $(2, 2, 2) = (1, 2, 1) + (1, 0, 1)$ , los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, **no** son una base.

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Al ser cuatro vectores en  $\mathbb{R}^3$ , son dependientes, luego **no** son una base.

$$C = \{(-3, 2, 1), (1, 2, -1), (1, 0, 1)\}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{Los vectores son linealmente independientes.}$$

Un conjunto de tres vectores de  $\mathbb{R}^3$ , linealmente independientes, son una **base** de  $\mathbb{R}^3$ .

### 9 ¿Para qué valores de $a$ el conjunto de vectores $S = \{(1, 1, 1), (a, 1, 1), (1, a, 0)\}$ es una base?

S

Como son tres vectores de  $\mathbb{R}^3$ , formarán base cuando sean linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = a^2 - a = a(a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Por tanto,  $S$  es una base cuando  $a \neq 0$  y  $a \neq 1$ .

## Producto escalar

### 10 En una base ortonormal tenemos $\vec{a}(1, 2, 2)$ y $\vec{b}(-4, 5, -3)$ . Calcula:

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$     b)  $|\vec{a}|$  y  $|\vec{b}|$     c)  $(\vec{a}, \vec{b})$     d) La proyección de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a}$ .

$$a) \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 2) \cdot (-4, 5, -3) = -4 + 10 - 6 = 0$$

$$b) |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$$

$$c) \text{ Como } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 90^\circ$$

$$d) \text{ Proyección de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = 0$$

- 11** Dados los vectores:  $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j} + \vec{k}$  y  $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + m\vec{k}$ , halla  $m$  para que los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sean:

a) Paralelos.      b) Ortogonales.

$$\vec{a}(1, m, 1) \quad \vec{b}(-2, 4, m)$$

$$a) \frac{-2}{1} = \frac{4}{m} = \frac{m}{1} \rightarrow m = -2$$

$$b) \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, m, 1) \cdot (-2, 4, m) = -2 + 4m + m = 5m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{2}{5}$$

- 12** Halla la proyección del vector  $\vec{u}(3, 1, 2)$  sobre el vector  $\vec{v}(1, -1, 2)$ .

$$\text{Proyección de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3 - 1 + 4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \approx 2,45$$

- 13** ¿Son  $\vec{a}(1, 2, 3)$  y  $\vec{b}(2, -2, 1)$  ortogonales? Si no lo son, halla el ángulo que forman.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 3) \cdot (2, -2, 1) = 2 - 4 + 3 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{no son ortogonales.}$$

Si llamamos  $\alpha$  al ángulo que forman, entonces:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{14} \sqrt{9}} \approx 0,089 \rightarrow \alpha = 84^\circ 53' 20''$$

- 14** Calcula  $m$  para que el vector  $\vec{a}(1, 3, m)$  sea ortogonal al vector  $\vec{b}(1, -2, 3)$ .

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3, m) \cdot (1, -2, 3) = 1 - 6 + 3m = 3m - 5 = 0 \rightarrow m = \frac{5}{3}$$

- 15** Comprueba que el vector  $\vec{u}(1/2, 1/2, 0)$  no es unitario y da las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que  $\vec{u}$ .

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 \rightarrow \vec{u} \text{ no es unitario.}$$

Un vector unitario de la misma dirección que  $\vec{u}$  sería:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right). \text{ También podría ser } \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right).$$

## Producto vectorial

- 16** Dados  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  y  $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ , comprueba que los vectores  $\vec{u} \times \vec{v}$  y  $\vec{v} \times \vec{u}$  son opuestos, y halla su módulo.

$$\vec{u}(2, -1, 1) \quad \vec{v}(-1, 3, 2)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-5, -5, 5); \quad \vec{v} \times \vec{u} = (5, 5, -5) = -\vec{u} \times \vec{v}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 5^2} = \sqrt{3 \cdot 25} = 5\sqrt{3} \approx 8,66$$

- 17** Halla el área del paralelogramo que forman los vectores  $\vec{a}(7, -1, 2)$  y  $\vec{b}(1, 4, -2)$ .

$$\text{Área} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |(-6, 16, 29)| = \sqrt{(-6)^2 + 16^2 + 29^2} = \sqrt{1133} \approx 33,66 \text{ u}^2$$

- 18** Halla un vector perpendicular a  $\vec{u}(2, 3, 1)$  y a  $\vec{v}(-1, 3, 0)$  y que sea unitario.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3, -1, 9)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{91}$$

$$\text{Luego el vector que buscamos es: } \left( \frac{-3}{\sqrt{91}}, \frac{-1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}} \right)$$

- 19** Halla un vector ortogonal a  $\vec{u}(1, -1, 0)$  y  $\vec{v}(2, 0, 1)$  y cuyo módulo sea  $\sqrt{24}$ .

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-1, -1, 2) \rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{6} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2}$$

$$\text{El vector que buscamos será: } 2(-1, -1, 2) = (-2, -2, 4)$$

## Producto mixto

- 20** Halla  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  en los siguientes casos:

a)  $\vec{u}(1, -3, 2), \vec{v}(1, 0, -1), \vec{w}(2, 3, 0)$

b)  $\vec{u}(3, 2, 1), \vec{v}(1, -2, 0), \vec{w}(-4, 1, 1)$

c)  $\vec{u}(1, 2, -1), \vec{v}(3, 0, 2), \vec{w}(-1, 4, -4)$

$$\text{a) } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15$$

$$b) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

$$c) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

## Página 150

- 21** Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por  $\vec{u}(1, 2, 3)$ ,  $\vec{v}(-2, 1, 0)$  y  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ .

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 2, 3) \times (-2, 1, 0) = (-3, -6, 5)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 70 \rightarrow \text{Volumen} = 70 \text{ u}^3$$

- 22** Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por  $\vec{a}(3, -1, 1)$ ,  $\vec{b}(1, 7, 2)$  y  $\vec{c}(2, 1, -4)$ .

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -111 \rightarrow \text{Volumen} = 111 \text{ u}^3$$

- 23** Calcula el valor de  $m$  para que  $\vec{u}(2, -3, 1)$ ,  $\vec{v}(1, m, 3)$  y  $\vec{w}(-4, 5, -1)$  sean coplanarios.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2m + 8 = 0 \rightarrow m = -4$$

## PARA RESOLVER

- 24** Prueba que los vectores  $(1, a, b)$ ,  $(0, 1, c)$ ,  $(0, 0, 1)$ , son linealmente independientes cualesquiera que sean  $a, b$  y  $c$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ para cualquier valor de } a, b, c. \text{ Por tanto, son linealmente independientes.}$$

- 25** Dados los vectores  $\vec{a}(1, 2, -1)$  y  $\vec{b}(1, 3, 0)$ , comprueba que el vector  $\vec{a} \times \vec{b}$  es perpendicular a  $\vec{a} + \vec{b}$  y a  $\vec{a} - \vec{b}$ .

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3, -1, 1)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2, 5, -1)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (0, -1, -1)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (3, -1, 1) \cdot (2, 5, -1) = 6 - 5 - 1 = 0$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (3, -1, 1) \cdot (0, -1, -1) = 1 - 1 = 0$$

Por tanto,  $\vec{a} \times \vec{b}$  es perpendicular a  $\vec{a} + \vec{b}$  y a  $\vec{a} - \vec{b}$ .

**26 a)** Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores  $\vec{u}(3, -2, 1)$  y  $\vec{v}(4, 3, -6)$  es un rectángulo.

**b)** Halla su área multiplicando la base por la altura y comprueba que obtienes el mismo resultado si hallas  $|\vec{u} \times \vec{v}|$ .

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 1) \cdot (4, 3, -6) = 12 - 6 - 6 = 0$ . Luego  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son perpendiculares, y el paralelogramo es un rectángulo.

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) Base} = |\vec{u}| = \sqrt{14} \\ \text{Altura} = |\vec{v}| = \sqrt{61} \end{array} \right\} \text{Área} = \sqrt{854} \approx 29,22 \text{ u}^2$$

Por otra parte:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(9, 22, 17)| = \sqrt{854} \approx 29,22 \text{ u}^2$$

**27** Dado el vector  $\vec{v}(-2, 2, -4)$ , halla las coordenadas de los siguientes vectores:

**a)** Unitarios y de la misma dirección que  $\vec{v}$ .

**b)** Paralelos a  $\vec{v}$  y de módulo 6.

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{a) } \left( \frac{-2}{2\sqrt{6}}, \frac{2}{2\sqrt{6}}, \frac{-4}{2\sqrt{6}} \right) = \left( \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) = \left( -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right) \text{ y } \left( \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

$$\text{b) } \left( \frac{-6}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{-12}{\sqrt{6}} \right) \text{ y } \left( \frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{-6}{\sqrt{6}}, \frac{12}{\sqrt{6}} \right)$$

**28** Halla un vector ortogonal a  $\vec{u}(2, 3, -1)$  y a  $\vec{v}(1, 4, 2)$  cuya tercera componente sea 1.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (10, -5, 5) // (2, -1, 1)$$

El vector que buscamos es  $(2, -1, 1)$ .

**29** **S** Dados los vectores  $\vec{u}_1(2, 0, 0)$ ,  $\vec{u}_2(0, 1, -3)$ ,  $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ , ¿qué relación deben cumplir  $a$  y  $b$  para que  $\vec{u}_3$  sea ortogonal al vector  $\vec{v}(1, 1, 1)$ ?

$$\vec{u}_3 = a(2, 0, 0) + b(0, 1, -3) = (2a, b, -3b)$$

Para que  $\vec{u}_3$  sea perpendicular a  $\vec{v}$  ha de ser:

$$\vec{u}_3 \cdot \vec{v} = (2a, b, -3b) \cdot (1, 1, 1) = 2a + b - 3b = 2a - 2b = 0, \text{ es decir, } a = b.$$

**30** **S** Calcula las coordenadas de un vector  $\vec{u}$  que sea ortogonal a  $\vec{v}(1, 2, 3)$  y  $\vec{w}(1, -1, 1)$  y tal que  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$ .

$$\vec{v} \times \vec{w} = (5, 2, -3)$$

Un vector ortogonal a  $\vec{v}$  y a  $\vec{w}$  es de la forma  $(5k, 2k, -3k)$ .

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 5k & 2k & -3k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 38 = 19 \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Por tanto:  $\vec{u} \left( \frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2} \right)$

**31** Dados los vectores  $\vec{a}(1, -2, 3)$ ,  $\vec{b}(3, 1, 1)$ ,  $\vec{c}(-2, 0, 1)$ , comprueba que:

a)  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

b)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

a)  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, 1, 2) = (-7, 1, 3)$

$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = (-5, 8, 7) + (-2, -7, -4) = (-7, 1, 3)$

b)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (-5, 8, 7) \times (-2, 0, 1) = (8, -9, 16)$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (1, -2, 3) \times (1, -5, 2) = (11, 1, -3)$

**32** a) Obtén  $\lambda$  para que los siguientes vectores sean linealmente dependientes:

S

$\vec{u}_1 = (3, 2, 5)$ ,  $\vec{u}_2 = (2, 4, 7)$ ,  $\vec{u}_3 = (1, -3, \lambda)$

b) Para  $\lambda = 3$ , expresa el vector  $\vec{v} = (7, 3, 15)$  como combinación lineal de  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  y  $\vec{u}_3$ .

a)  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 8\lambda + 27 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-27}{8}$

b) Para  $\lambda = 3$ , tenemos que:  $\vec{u}_1(3, 2, 5)$   $\vec{u}_2(2, 4, 7)$   $\vec{u}_3(1, -3, 3)$

Expresamos  $\vec{v}$  como combinación lineal de  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$ ,  $\vec{u}_3$ :

$(7, 3, 15) = a(3, 2, 5) + b(2, 4, 7) + c(1, -3, 3)$

$$\left. \begin{array}{l} 3a + 2b + c = 7 \\ 2a + 4b - 3c = 3 \\ 5a + 7b + 3c = 15 \end{array} \right\} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 51$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 15 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{84}{51} = \frac{28}{17}; \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 5 & 15 & 3 \end{vmatrix}}{51} = \frac{30}{51} = \frac{10}{17}$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 15 \end{vmatrix}}{51} = \frac{45}{51} = \frac{15}{17}$$

Por tanto:  $\vec{v} = \frac{28}{17} \vec{u}_1 + \frac{10}{17} \vec{u}_2 + \frac{15}{17} \vec{u}_3$

- 33** a) Comprueba que los vectores  $\vec{b}_1 = 1/2(\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$ ,  $\vec{b}_2 = 1/2(\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j})$  y  $\vec{b}_3 = \vec{k}$  son los de una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , siendo  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  y  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ .

b) Halla las coordenadas de  $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  respecto a la base  $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ .

$$a) |\vec{b}_1| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4} = \frac{2}{2} = 1$$

$$|\vec{b}_2| = \frac{1}{2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4} = 1$$

$$|\vec{b}_3| = 1$$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = \frac{1}{4} (\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 0$$

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_3 = 0$$

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = 0$$

Por tanto  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ .

$$b) (1, 1, 1) = x\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) + y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}, 0\right) + z(0, 0, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + \sqrt{3}y = 2 \\ \sqrt{3}x - y = 2 \end{array} \left\} \begin{array}{l} x + \sqrt{3}y = 2 \\ 3x - \sqrt{3}y = 2\sqrt{3} \\ \hline 4x = 2 + 2\sqrt{3} \end{array}$$

$$x = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \quad y = \sqrt{3}x - 2 = \frac{\sqrt{3} + 3}{2} - 2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

Por tanto:

$$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \vec{b}_1 + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \vec{b}_2 + \vec{b}_3, \text{ es decir:}$$

$$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

- 34** a) Determina los valores de  $a$  para los que resultan linealmente dependientes los vectores  $(-2, a, a)$ ,  $(a, -2, a)$  y  $(a, a, -2)$ .

b) Obtén en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.

$$a) \begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 2(a-1)(a+2)^2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Para  $a = 1$  y para  $a = -2$ , los tres vectores dados son linealmente dependientes.

b) Para  $a = 1$ , queda:  $(-2, 1, 1)$ ,  $(1, -2, 1)$ ,  $(1, 1, -2)$ , y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, 1, 1) - 1 \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, -2)$$

Para  $a = -2$ , queda:  $(-2, -2, -2)$ ,  $(-2, -2, -2)$ ,  $(-2, -2, -2)$ , y tenemos que:

$$-1 \cdot (-2, -2, -2) + 0 \cdot (-2, -2, -2) = (-2, -2, -2)$$

**35** **S** **Dados los vectores  $\vec{u}(1, -1, 2)$  y  $\vec{v}(3, 1, -1)$ , halla el conjunto de vectores que, siendo perpendiculares a  $\vec{u}$ , sean coplanarios con  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .**

Sea  $\vec{w}(x, y, z)$  un vector tal que:

1º) Es perpendicular a  $\vec{u}$ , es decir:

$$(x, y, z) \cdot (1, -1, 2) = x - y + 2z = 0$$

2º) Es coplanario con  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , es decir:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -x + 7y + 4z = 0$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + 2z = 0 \\ -x + 7y + 4z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 2z = y \\ -x + 4z = -7y \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Sumando: } 6z = -6y \rightarrow z = -y \\ x = y - 2z = y + 2y = 3y \end{array} \right\}$$

Soluciones:  $(3\lambda, \lambda, -\lambda)$   $\lambda \neq 0$

**36** **S** **Dados los vectores  $\vec{a}, \vec{b}$  y  $\vec{c}$  tales que  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,  $|\vec{c}| = 4$  y  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ , calcula la suma de los productos escalares  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ .**

Como  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) = 26 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) = 0$$

Por tanto:  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -13$

**37** **S** **Dados los vectores  $\vec{u}(a, 1 + a, 2a)$ ,  $\vec{v}(a, 1, a)$  y  $\vec{w}(1, a, 1)$ , se pide:**

a) **Halla los valores de  $a$  para los que los vectores  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente dependientes.**

b) **Estudia si el vector  $\vec{c}(3, 3, 0)$  depende linealmente de  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{w}$  para el caso  $a = 2$ .**

c) **Justifica razonadamente si para  $a = 0$  se cumple la igualdad  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ .**

$$a) [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a = a(a^2 - 1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

b) Para  $a = 2$ , los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente independientes. Como son tres vectores de  $\mathbb{R}^3$  linealmente independientes, forman una base de  $\mathbb{R}^3$ . Así, cualquier otro vector, y, en particular  $\vec{c}(3, 3, 0)$ , depende linealmente de ellos.

Obtenemos la combinación lineal:

Para  $a = 2$ , tenemos que:  $\vec{u}(2, 3, 4)$ ,  $\vec{v}(2, 1, 2)$ ,  $\vec{w}(1, 2, 1)$

$$(3, 3, 0) = x(2, 3, 4) + y(2, 1, 2) + z(1, 2, 1)$$

$$\left. \begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{cases} \right\} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\text{Por tanto: } \vec{c} = \frac{-3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} + 3\vec{w}$$

c)  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$  para  $a = 0$ . Está probado en el apartado a).

**38** a) **Halla el número de vectores linealmente independientes que hay en el conjunto  $S = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, 0, -3), (-1, 1, 2)\}$ .**

b) **Un vector no nulo tiene sus tres componentes iguales. ¿Puede escribirse como combinación lineal de los dos primeros vectores de  $S$ ?**

c) **Determina un vector que, teniendo sus dos primeras componentes iguales a 1, se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de  $S$ .**

a) Tenemos que hallar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \text{ } \text{ran}(M) = 3.$$

Por tanto, hay tres vectores linealmente independientes en  $S$ .

b) Sí. Si tiene sus tres componentes iguales y es no nulo, es de la forma:  $\vec{u} = (k, k, k)$  con  $k \neq 0$ . Entonces, podemos obtenerlo a partir de los dos primeros vectores de  $S$  como sigue:

$$\vec{u} = k \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 1)$$

c) Sea  $\vec{v}(1, 1, x)$  el vector que buscamos. Para que se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de  $S$ , tenemos que:

$$(1, 1, x) = a(0, 2, 1) + b(2, 0, -3)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2b = 1 \\ 2a = 1 \\ a - 3b = x \end{array} \right\} \text{ Debe tener solución: } b = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = x \rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow x = -1$$

Por tanto, el vector es  $\vec{v}(1, 1, -1)$ .

## Página 151

**39** **S** **Halla un vector  $\vec{u}$  de la misma dirección que  $\vec{v}(1, -2, 3)$  y tal que forme con  $\vec{w}(-2, 4, -1)$  un paralelogramo de área  $25 \text{ u}^2$ .**

Si  $\vec{u}$  es de la misma dirección que  $\vec{v}(1, -2, 3)$ , será de la forma  $\vec{u}(x, -2x, 3x)$ , con  $x \neq 0$ .

Para que forme con  $\vec{w}(-2, 4, -1)$  un paralelogramo de área  $25 \text{ u}^2$ , ha de ser:

$$|\vec{u} \times \vec{w}| = |(-10x, -5x, 0)| = \sqrt{100x^2 + 25x^2} = |x| \sqrt{125} = 25;$$

$$\text{es decir: } 125x^2 = 625 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

Por tanto, hay dos soluciones:  $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$  y  $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$

**40** **S** **Halla un vector  $\vec{v}$  coplanario con  $\vec{a}(2, -1, 1)$  y  $\vec{b}(1, 0, 3)$  y ortogonal a  $\vec{c}(2, 3, 0)$ .**

Sea  $\vec{v}(x, y, z)$  tal que:

1º) es coplanario con  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , es decir:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 5y + z = 0$$

2º) es ortogonal a  $\vec{c}$ , es decir:  $(x, y, z) \cdot (2, 3, 0) = 2x + 3y = 0$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} -3x - 5y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3x + z = 5y \\ 2x = -3y \end{array} \left\} \begin{array}{l} z = 5y + 3x = 5y - \frac{9}{2}y = \frac{1}{2}y \\ x = -\frac{3}{2}y \end{array}$$

Soluciones:  $(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$  ( $\lambda \neq 0$ )

Todos los vectores de esta forma cumplen las condiciones. Por ejemplo, para  $\lambda = 1$ , tenemos el vector  $(-3, 2, 1)$ .

- 41** Sean  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  tales que  $|\vec{a}| = 4$  y  $|\vec{b}| = 2$ , con  $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ . Calcula  $|\vec{a} + \vec{b}|$  y  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \\ &= 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 16 + 4 + 8 = 28 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \\ &= 16 + 4 - 8 = 12 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

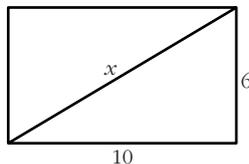
- 42** De dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  sabemos que son ortogonales y que  $|\vec{u}| = 6$  y  $|\vec{v}| = 10$ . Halla  $|\vec{u} + \vec{v}|$  y  $|\vec{u} - \vec{v}|$ .

Si  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales, entonces  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . Así:

$$\begin{aligned} |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 0 = 36 + 100 = 136 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11,66 \end{aligned}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 136 \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11,66$$

**Observación:** Si  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , entonces forman los lados de un rectángulo con base y altura  $|\vec{u}|$  y  $|\vec{v}|$ . En este caso,  $\vec{u} + \vec{v}$  y  $\vec{u} - \vec{v}$  son sus diagonales, que tienen el mismo módulo (por tratarse de un rectángulo). Además, para hallar la longitud de la diagonal, podemos aplicar en este caso el teorema de Pitágoras:



$$x^2 = 10^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 136 \rightarrow x = \sqrt{136} \approx 11,66$$

- 43** Calcula el ángulo que forman  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  sabiendo que  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$  y  $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$ .

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = 9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \\ &= 34 + 30 \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = 7^2 = 49 \end{aligned}$$

Por tanto:  $\cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}) = \frac{49 - 34}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} \rightarrow \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 60^\circ$

- 44** De los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , sabemos que cumplen  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$ ,  $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}$ , siendo  $\vec{a}(2, -1, 0)$  y  $\vec{b}(1, 3, -1)$ . Halla el ángulo formado por  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} + \vec{v} = \vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3\vec{u} + 3\vec{v} = 3\vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b} \\ \hline 5\vec{u} = 3\vec{a} + \vec{b} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{a} \\ -2\vec{u} + 3\vec{v} = -\vec{b} \\ \hline 5\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} \end{array}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{5}(3\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{5}(7, 0, -1) = \left(\frac{7}{5}, 0, -\frac{1}{5}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{5}(2\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{5}(3, -5, 1) = \left(\frac{3}{5}, -1, \frac{1}{5}\right)$$

Por tanto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{7}{5}, 0, -\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, -1, \frac{1}{5}\right) = \frac{20}{5} = \frac{4}{5}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{35}{25}} = \sqrt{\frac{35}{5}}$$

$$\cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{4/5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{35/5}} = \frac{4}{\sqrt{70}} \approx 0,478 \rightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 61^\circ 26' 21''$$

## CUESTIONES TEÓRICAS

- 45** Si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ , ¿podemos asegurar que  $\vec{v} = \vec{w}$ ?

**No.** Por ejemplo, si  $\vec{u}(3, -2, 0)$ ,  $\vec{v}(5, 1, 0)$  y  $\vec{w}(7, 4, 0)$ , tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 15 - 2 = 13 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 21 - 8 = 13 \end{array} \right\} \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Sin embargo,  $\vec{v} \neq \vec{w}$ .

- 46** Prueba, utilizando el producto escalar, que si  $\vec{a} \perp \vec{b}$  y  $\vec{a} \perp \vec{c}$  entonces  $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$ .

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

Para demostrar que  $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$ , tenemos que probar que su producto escalar es cero:

$$\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a} \cdot \vec{b} + n\vec{a} \cdot \vec{c} = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$$

Por tanto  $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$ .

- 47 Demuestra que si  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son dos vectores no nulos que tienen el mismo módulo, entonces  $\vec{a} + \vec{b}$  y  $\vec{a} - \vec{b}$  son ortogonales.**

Supongamos que  $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$ , entonces:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0 \quad (\text{pues } |\vec{a}| = |\vec{b}|)$$

**Observación:** Si recordamos que  $\vec{a} + \vec{b}$  y  $\vec{a} - \vec{b}$  son las diagonales del paralelogramo determinado por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , hemos probado que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

- 48 Demuestra que si  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente independientes, también lo son los vectores  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} - \vec{w}$  y  $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ .**

Si  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente independientes, entonces, si hacemos una combinación lineal de ellos y la igualamos a cero,  $a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w} = \vec{0}$ , necesariamente han de ser  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ .

Veamos que sucede lo mismo con los vectores  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} - \vec{w}$  y  $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ . Consideremos una combinación lineal de ellos igualada a cero:

$$x(\vec{u} + \vec{v}) + y(\vec{u} - \vec{w}) + z(\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0}, \text{ entonces:}$$

$$(x + y + z)\vec{u} + (x - z)\vec{v} + (-y + z)\vec{w} = \vec{0}$$

Como  $\vec{u}, \vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente independientes, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{array} \right\} \text{ Pero } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

luego la única solución del sistema es la solución trivial  $x = y = z = 0$ .

Por tanto, los vectores  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} - \vec{w}$  y  $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$  son linealmente independientes.

- 49 Justifica que cualquier conjunto de vectores que contenga al vector nulo es L.D.**

Sea  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n, \vec{0}\}$  un conjunto de  $n + 1$  vectores que contiene el vector nulo. Si hacemos una combinación lineal de estos vectores e igualamos a cero:

$$(*) x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_n\vec{u}_n + x_{n+1}\vec{0} = \vec{0}$$

tenemos infinitas soluciones para  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ ; pues todas las soluciones de la forma  $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (0, 0, \dots, 0, \lambda)$  satisfacen la igualdad (\*).

Por tanto, son linealmente dependientes.

**50 a)** ¿Puede haber dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  tales que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ ,  $|\vec{u}| = 1$ ,  $|\vec{v}| = 2$ ?

**b)** Si dos vectores verifican  $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}|$ , ¿qué puedes decir del ángulo que forman?

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \cdot 2 \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 2 \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -3 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -\frac{3}{2} > 1 \text{ Imposible.} \end{aligned}$$

Luego no existen dos vectores que cumplan estas condiciones.

$$\text{b) Si } |\vec{u}| |\vec{v}| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \rightarrow |\vec{u}| |\vec{v}| = \begin{cases} + |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \\ - |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| |\vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 1 \rightarrow \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 0^\circ \\ |\vec{u}| |\vec{v}| = -|\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -1 \rightarrow \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 180^\circ \end{cases}$$

Por tanto,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  tienen la misma dirección.

**51** Justifica por qué el producto mixto de los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{a} + \vec{b}$  es igual a 0 cualesquiera que sean  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ .

Los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{a} + \vec{b}$  son coplanarios; luego el volumen del paralelepípedo determinado por ellos (que coincide con su producto mixto en valor absoluto) es cero.

**52** Si  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$  siendo  $\vec{u} \neq \vec{0}$  y  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , ¿cómo son entre sí los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ?

Sabemos que  $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ . Si  $|\vec{u} \times \vec{v}| = 0$ ,  $|\vec{u}| \neq 0$  y  $|\vec{v}| \neq 0$ , entonces ha de ser  $\text{sen}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0$ . Es decir,  $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$  será  $0^\circ$  ó  $180^\circ$ .

Por tanto, los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  tendrán la misma dirección.

**53** Si  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ , ¿es  $\vec{b} = \vec{c}$  necesariamente? Pon ejemplos.

**No.** Por ejemplo, si consideramos  $\vec{a}(1, 2, 3)$ ,  $\vec{b}(2, 4, 6)$  y  $\vec{c}(3, 6, 9)$ , entonces:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{0} \\ \vec{a} \times \vec{c} &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}, \text{ pero } \vec{b} \neq \vec{c}.$$

**54** Sean  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  tres vectores linealmente independientes. Indica razonadamente cuál o cuáles de los siguientes productos mixtos valen 0:

$$[\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}], [\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}], [\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}]$$

Si  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  son tres vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^3$ , forman una base. Así, las coordenadas respecto a esta base de los vectores  $\vec{a} + \vec{c}$ ,  $\vec{a} - \vec{c}$  y  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  son: (1, 0, 1), (1, 0, -1) y (1, 1, 1), respectivamente.

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Son linealmente independientes} \rightarrow$$

$$\rightarrow [\vec{a} + \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}] \neq 0$$

Análogamente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow [\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}] \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow [\vec{a} - \vec{c}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}] = 0$$

## PARA PENSAR UN POCO MÁS

**55** Las tres alturas,  $AH_A$ ,  $BH_B$ ,  $CH_C$  de un triángulo  $ABC$  se cortan en un punto.

Hay una bonita forma de demostrarlo por geometría elemental.

El triángulo  $A'B'C'$  está formado con los lados paralelos a los de  $ABC$ . Los vértices de este son los puntos medios de aquel. Por tanto,  $AH_A$ ,  $BH_B$  y  $CH_C$  son las mediatrices de los lados de  $A'B'C'$ .

Organiza y completa el razonamiento anterior para concluir que  $AH_A$ ,  $BH_B$ ,  $CH_C$  se cortan en un punto.

Sea  $P$  el punto de corte de  $AH_A$  y  $BH_B$ . Entonces:

1) Como  $AH_A$  es la mediatriz del lado  $B'C'$ ,  $P$  está a igual distancia de  $B'$  que de  $C'$ .

2) Como  $BH_B$  es la mediatriz del lado  $A'C'$ , entonces  $P$  está a igual distancia de  $A'$  que de  $C'$ .

Por tanto, uniendo 1) y 2), tenemos que  $P$  está a igual distancia de  $A'$  que de  $B'$ ; es decir,  $P$  también pertenece a la mediatriz del lado  $A'B'$ , esto es, a  $CH_C$ .

Luego hemos probado que las tres se cortan en el mismo punto.

**56** La propiedad anterior puede demostrarse, también, mediante vectores. Llamamos  $H$  al punto en que se cortan  $AH_A$  y  $BH_B$ .

a) Justifica que 
$$\begin{cases} \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0 \\ \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0 \end{cases}$$

b) De las igualdades anteriores se llega a:  $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$  y de aquí se concluye que  $\vec{HC} \perp \vec{AB}$  y, por tanto, que las tres alturas se cortan en  $H$ . (Justifica las afirmaciones anteriores).

a)  $\vec{HC} - \vec{HB} = \vec{BC}$ ; y, como  $AH_A$  es la altura correspondiente al lado  $BC$ , entonces:

$$\vec{BC} \perp \vec{AH}_A \rightarrow \vec{BC} \perp \vec{HA} \rightarrow \vec{HA} \cdot \vec{BC} = 0 \rightarrow \vec{HA} \cdot (\vec{HC} - \vec{HB}) = 0$$

Análogamente, como  $\vec{HC} - \vec{HA} = \vec{AC}$ , tenemos que:  $\vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0$

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) &= \vec{HC} \cdot \vec{HB} - \vec{HC} \cdot \vec{HA} = \vec{HB} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HC} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \vec{HB} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HB} = \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) \stackrel{(2)}{=} 0 \end{aligned}$$

$$(1) \vec{HA} \cdot \vec{HC} - \vec{HA} \cdot \vec{HB} = 0 \rightarrow \vec{HA} \cdot \vec{HC} = \vec{HA} \cdot \vec{HB}$$

$$(2) \vec{HB} \cdot (\vec{HC} - \vec{HA}) = 0$$

Por tanto, si  $\vec{HC} \cdot (\vec{HB} - \vec{HA}) = 0$ , como  $\vec{HB} - \vec{HA} = \vec{AB}$ , entonces  $\vec{HC} \perp \vec{AB}$ ; luego  $H$  también pertenece a la altura correspondiente al vértice  $C$ . Así, las tres alturas se cortan en el mismo punto,  $H$ .