UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS AGRARIAS, VETERINARIAS Y FORESTALES
ESCUELA DE CIENCIAS FORESTALES

MODELO DE AHUSAMIENTO DEL FUSTE DE ARBOLES DE PINO INSIGNE

ROBERTO ALEJANDRO PERA CABEZAS

TESIS PARA OPTAR AL TITULO
DE INGENIERO FORESTAL
(DEPARTAMENTO DE SILVICULTURA
Y MANEJO)

PROFESOR GUIA : Ing. For. M.Sc.Ph.D. Sr. RAMIRO MORALES A.

SANTIAGO - CHILE

1982

1. INTRODUCCION

El manejo intensivo de plantaciones de pino insigne requiere mejorar los sistemas de información acerca de la disponibilidad y características de la materia prima proveniente de los bosques. Es así como en la actualidad se observa una tendencia a desagregar la información sobre existencia de madera en pie, según las dimensiones de los trozos.

Tradicionalmente, la determinación del volumen de árboles individuales se ha realizado a base de las denominadas tablas de volumen. Estas tablas permiten estimar el volumen del árbol hasta diámetros límites superiores en el fuste, lo que significa obtener solamente una información agregada acerca de la materia prima. Para superar esta dificultad y hacer más útil esta información, se han desarrollado modelos que describen el perfil del fuste de los árboles.

Estos modelos se conocen como "funciones de ahusamiento" y consisten básicamente en relaciones funcionales que usan como variable dependiente el diámetro del fuste a cualquier altura desde el nivel del suelo y como variables independientes, variables de estado del árbol que son fáciles de obtener. A su vez, el modelo de ahusamiento puede ser empleado para el cálculo de volúmenes entre secciones del fuste, bajo cualquier especificación tanto de longitud de los trozos como respecto a diámetros límites.

La información que puede derivarse del uso de una función de ahusamiento es importante ya que puede conocerse la distribución del volumen de madera existente, de acuerdo a díferentes dimensiones, tales como rollizos de exportación, trozos para madera aserrada y madera para pulpa.

El presente trabajo pretende describir el perfil del fuste de árboles de pino insigne mediante un modelo matemático y usar este modelo para determinar el volumen de madera del fuste.

En el Capítulo 2 se presenta una revisión bibliográfica de los modelos empleados para caracterizar el perfil del fuste de especies forestales. Posteriormente, en el Capítulo 3, se formula el modelo sugerido en este trabajo. La construcción y validación de este modelo se discute en el Capítulo 4, y, finalmente, en el Capítulo 5 se muestran aplicaciones y se entregan las conclusiones de este estudio.

Los datos empleados para la construcción del modelo forman parte del proyecto "Centro de información de recursos naturales y productivos de Chile" de IREN-CORFO (1981). Fueron obtenidos de las plantaciones de pino insigne presentes en la VII Región y por ende, la validez del estudio se circunscribe a esta área. No obstante, el modelo es aplicable a cualquier otra zona, previa revisión de sus parámetros.

2. REVISION BIBLIOGRAFICA

La descripción cuantitativa de la forma del fuste de los árboles forestales ha preocupado a los especialistas en dasometría desde fines del siglo pasado. Revisando la bibliografía sobre mensura forestal, se puede apreciar diferentes enfoques para abordar este problema. Así, han existido intentos para describir el fuste a través de sólidos de revolución y a través de otras variadas funciones o modelos matemáticos.

A continuación se presentan los modelos matemáticos más importantes empleados para describir el perfil del fuste, reportados en la literatura.

2.1 Sólidos de revolución

En este enfoque, la forma del fuste se asimila a un sólido de revolución, tal como neiloide, paraboloide o cono (Husch et al., 1972).

De este modo, el perfil del fuste corresponde a una expresión general del tipo:

$$y^2 = k\,x^r$$

donde:

y = diámetro del fuste a una altura "x" desde el nivel del suelo.

k, r = parámetros.

Dependiendo del valor del parámetro r, se generan los siguientes sólidos por rotación de la curva sobre el eje x:

r = 0	cilindro
r = 1	paraboloide
r = 2	cono
r = 3	neiloide

Estos modelos constituyen una simplificación importante en la descripción de la forma del fuste, implicando serios errores de estimación debido a que un árbol no puede asimilarse a uno solo de estos cuerpos, sino más bien a una combinación de ellos.

2.2 Funciones de ahusamiento

Las funciones de ahusamiento son relaciones funcionales que permiten estimar el diámetro del fuste a una altura determinada del árbol, en función de variables fáciles de medir: el DAP y altura total.

En general las funciones de ahusamiento reportadas en la literatura entregan buenos resultados en la porción central del fuste, pero muestran deficiencias en los extremos de él.

La solución al problema de describir la forma, comenzó utilizando funciones logarítmicas, polinomios, ecuaciones compatibles con funciones de volumen y funciones sigmoidales, hasta llegar a modelos que combinan dos o tres relaciones funcionales. Para los efectos de esta revisión, es conveniente separar los modelos en dos grupos, aquellos que emplean una sola relación funcional y los modelos que emplean dos o tres funciones.

2.2.1 Modelos que emplean una sola relación funcional

Estos modelos comenzaron a desarrollarse a principios de siglo con el trabajo realizado por Hojer (1903) (mencionado por Loetch et al., 1973) y han evolucionado hacia relaciones funcionales cada vez más flexibles.

En el Cuadro 2.1 se presenta un resumen de los modelos de este tipo encontrados en la literatura revisada.

En este cuadro, ordenado cronológicamente, se señalan las variables tanto dependientes como independientes empleadas por los autores en cada caso.

Pese a la variedad de funciones, los resultados obtenidos indican que estos modelos dan buenas estimaciones de diámetros a lo largo de la parte central del fuste, pero no son capaces de describir apropiadamente las secciones extremas, debido fundamentalmente a que no son lo suficientemente flexibles para adaptarse a las fuertes variaciones del perfil en estas secciones.

La función presentada por Garay (1979), entrega muy buenos resultados ya que proporciona gran exactitud en las estimaciones realizadas a lo largo de todo el perfil. Sin embargo, el autor destaca que el modelo debería revisarse contando con una base muestral adecuada, puesto que la empleada es reducida.

Por su parte, el modelo desarrollado por Coffré (1981), es el único que reporta la bibliografía como construído en Chile. Consiste básicamente, en un polinomio de tercer grado cuyos parámetros son, a su vez, funciones de variables de estado del árbol (edad, altura y DAP). Estas últimas funciones son obtenidas de regresiones entre los parámetros estimados a nivel de cada árbol y las citadas variables de estado.

CUADRO 2.1

Modelos de ahusamiento que emplean una sola forma funcional

Función	Variable dependiente	Variable independiente	Autor	Año
$y = k_1 \log \dfrac{k_2 + 1}{k_3}$	$y = d/D$	$1 = x/(H-1.3)$ x = distancia al ápice	Hojer (1)	1903
$y = k_1 \log \dfrac{k_2 + 1 - 2.5}{k_3}$	$y = d/D$	$1 = x/(H-1.3)$ x = distancia al ápice	Jonson (2)	1910
$y = \dfrac{k_1}{k_2 + k_3 * 1}$	$y = d/D$	$1 = x/(H-1.3)$ x = distancia al ápice	Behre (3)	1923
$y = \dfrac{1}{k_1 + k_2 1 + k_3 \log 1}$	$y = d/D$	$1 = x/(H-1.3)$ x = distancia al ápice		1927
$y = \dfrac{1}{k_1 + k_2\ 1 + k_3\ e^1}$	$y = d/D$	$1 = x/(H-1.3)$ x = distancia al ápice		1927
$y = k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_n x^n$	y = radio del fuste	x = distancia al ápice	Grosenbaugh	1966
$y^2 = k_1 - k_2\ (x/(H - 1.3)$	$y = d/D$	x = distancia al suelo	Munro	1966
$y^2 = k_1 x^{3/2} - k_2\ (x^{3/2} - x^3)\ D +$ $k_3\ (x^{3/2} - x^3)\ H - K_4 (x^{3/2} - x^{32}) 1.3 +$ $k_5\ (x^{3/2} - x^{32}) H^{1/2} - K_6 (x^{3/2} - x^{40}) H^2$	$y = d/D$	$x = \dfrac{H - h}{H - 1.3}$ h = distancia al suelo		
$y^2 = k_1\ (x - 1) + k^2\ (x^2 - 1)$	$y = d/D$	$x = h/H$	Kozak et al.	1969
$y^2 = k_1\ (1 - 2x + x^2)$	$y = d/D$	$x = h/H$	Kozak et al.	1969
$y = k_1\ (D(H - h)/(H - 1.3) +$ $k_2 (H - h)(h - 1.3) +$ $k_3\ H(H - h)(h - 1.3) +$ $k_4 (H - h)(h - 1.3)(H + h + 1.3)$	$y = d$	D, H, h	Bennet y Swindel (2)	1972
$y = k\ x^{r/2}$	$y = d$	$x = \dfrac{H - h}{H}$ $r = 1 + (H-h)/(H-1.3)$	Bethel et al. (2)	
$y = k_1\ (1 + k_2 \text{ Ln }\ 1 - k_3\ x^{k_4})$	$y = d/D$	$x = h/H$	Garay	1979
$y = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3$	$y = d/D$	$x = \dfrac{H - h}{H - 1.3}$	Coffré	1981

d = diámetro del fuste a una altura h desde el nivel del suelo.
h = altura a la que se mide el diámetro d.
H = altura total del árbol.
1.3 = altura (m), a que se mide D.
D = diámetro del árbol, medido a 1.3 m de altura.
$k_1, k_2, \ldots, k_n$ = parámetros.

(1) Mencionado por Loetch et al. (1973)
(2) Mencionado por Garay (1979)
(3) Mencionado por Husch et al. (1972)

2.2.2 Modelos que emplean dos o tres formas funcionales

La mayoría de los modelos que se han propuesto, describen todo el perfil con una sola función. Sin embargo, es extremadamente difícil lograr que un solo modelo se ajuste bien a todo el perfil (Demaerschalk et al., 1977).

Esto sugiere la idea de usar diferentes funciones para construir un modelo. Esta idea no es nueva, muchos textos de mensura forestal señalan que las secciones del tronco del árbol, se aproximan a distintas formas funcionales (Husch et al., 1972).

Ya en 1927, algunos autores indican que la ecuación para la parte superior y para la parte principal del fuste deben ser diferentes. Petterson, 1927 (mencionado por Garay, 1979), sugiere el uso de una curva logarítmica para las secciones media y baja y otra curva logarítmica con distinto exponente para describir el extremo superior del fuste del árbol.

Heijbel (1928), Ormerod (1973), Max y Burkhart (1976) (citados por Demaerschalk et al., 1977), desarrollaron también modelos empleando distintas funciones a lo largo del perfil, que sin embargo muestran sesgos importantes.

Demaerschalk et al. (1977), señala que existen varias razones que explican en términos generales los errores que se producen en la aplicación de este tipo de modelos:

- Las funciones utilizadas fueron muy simples.
- Las funciones no fueron restringidas apropiadamente para generar una curva continua, en el punto de contacto entre ellas.
- Las funciones no fueron condicionadas a hacer cero el diámetro en el límite superior del fuste, como tampoco a asumir el valor del DAP a la altura de 1.3 m, desde el nivel del suelo.

En particular, dicho autor, plantea como solución un modelo de dos funciones condicionadas para superar los inconvenientes señalados, esto es la continuidad de la curva en el punto de unión de las dos funciones y paso obligado tanto por el DAP como por el límite superior del árbol.

La forma general del modelo seleccionado por él es:

$$y = a\, x^{b}\, c^{(1-x)}$$

para describir el perfil desde el límite superior del fuste hasta el punto de inflexión (cambio de concavidad en el perfil del fuste), e:

$$y = a + b\,(1 - x)^{c}$$

para describir el perfil desde ese punto de inflexión hasta el nivel del suelo.

En este modelo:

y = d/diámetro en el punto de inflexión.

x = distancia al ápice/altura total.

Aunque aparentemente simples en su forma general, las condiciones a que se somete el modelo complican bastante el procedimiento de ajuste al transformarlas en ecuaciones no lineales.

Basado en los resultados obtenidos, el autor señala que aunque existe un pequeño error cerca de la base del árbol, la predicción de los diámetros es a menudo muy confiable en la mayor parte del fuste.

A continuación se presenta el modelo propuesto en este estudio, el cual está basado en el empleo de tres relaciones funcionales para representar matemáticamente la forma del fuste. El modelo fue originalmente sugerido por Frazer (1978) en un trabajo inédito.

3. FORMULACION DEL MODELO

3.1 Modelo de ahusamiento

El modelo que se presenta, describe el perfil del fuste de árboles de pino insigne a través de tres funciones interconectadas. Estas funciones generan, por revolución en torno al eje longitudinal del tronco, un neiloide, un paraboloide y un cono, desde el nivel del suelo hacia el extremo superior del fuste, respectivamente.

Las relaciones funcionales empleadas por el modelo, son las siguientes:

$$y = \begin{cases} \exp(p + qx)^{*} & 0 \leq x \leq \theta \quad (1) \\ \sqrt{r + sx} & \theta \leq x \leq \varepsilon \quad (2) \\ t + ux & \varepsilon \leq x \leq 1 \quad (3) \end{cases}$$

donde: $y = d/D$

$x = h/H$ $\Theta = h'$

- d : diámetro del fuste (sin corteza) a una altura h (cm).
- h : altura, medida desde el nivel del suelo (m).
- D : diámetro medido a 1.3 m desde el nivel del suelo (cm), sin corteza.
- H : altura total del fuste (m).
- θ, ε : puntos de cambio de la relación funcional.
- p,q,r,s,t,u : parámetros.

---

* $\exp(x) = e^{x}$

θ representa el punto donde la forma del fuste cambia de un neiloide a un paraboloide y, ε el punto de cambio de esta última forma, a una forma conoidal.

Las siguientes restricciones se imponen a (1), (2) y (3).

a) En los puntos de cambio de forma funcional la variable y debe asumir los mismos valores, cualquiera sea la función empleada. Lo anterior implica que:

$$\exp\,(p + q\theta) = \sqrt{r + s\theta} \qquad (4)$$

$$\sqrt{r + s\varepsilon} = t + u\varepsilon \qquad (5)$$

b) La pendiente (primera derivada) de las funciones, evaluada en θ y ε, debe ser igual, para garantizar la continuidad del modelo. Esto implica que:

$$q\,\exp(p + q\theta) = \frac{s}{2\,\sqrt{r + s\theta}} \qquad (6)$$

$$\frac{s}{2\,\sqrt{r + s\varepsilon}} = u \qquad (7)$$

c) El diámetro del fuste a su altura total debe anularse, es decir, $d_H = 0$, lo cual implica que:

$$0 = t + u \qquad (8)$$

d) El diámetro del fuste a 1.3 m desde el nivel del suelo debe igualarse al DAP sin corteza, es decir $d_{1.3} = D$, lo cual implica que:

$$1 = \exp(p + q\alpha) \qquad \text{si} \quad \alpha \leq \theta \qquad (9)$$

$$1 = \sqrt{r + s\alpha} \qquad \text{si} \quad \theta \leq \alpha \leq \varepsilon \qquad (10)$$

$$1 = t + u\alpha \qquad \text{si} \quad \alpha \geq \varepsilon \qquad (11)$$

donde: $\alpha = 1.3/H$

Después de imponer al modelo estas cuatro restricciones, los parámetros p, q, r, s, t, u quedan determinados únicamente por los valores de α, θ y ε. En efecto, el valor de estos seis parámetros se puede establecer resolviendo el sistema de igual número de ecuaciones, resultante de a), b), c) y d). (El valor de los parámetros depende de α tal como lo indica d)). La Tabla 3.1 muestra el valor de cada parámetro, después de resolver el sistema de ecuaciones correspondiente.

CUADRO 3.1

Valor de los parámetros p, q, r, s, t, u del modelo, en función de α, θ y ε

Parámetro	$\alpha \leq \theta$	$\theta \leq \alpha \leq \varepsilon$	$\alpha \geq \varepsilon$
p	α/A	$Ln(\sqrt{A/B}) + \theta/A$	$Ln(\sqrt{AC/E^2}) + \theta/A$
q	$-1/A$	$-1/A$	$-1/A$
r	$(2-C)/(exp(2F/A)A)$	$(2-C)/B$	$(2-C)\ C/E^2$
s	$-2/(exp(2F/A)A)$	$-2/B$	$-2C/E^2$
t	$1/(exp(F/A)\sqrt{AC})$	$1/\sqrt{BC}$	$1/E$
u	$-t$	$-t$	$-t$

Donde: $A = 1 + \varepsilon - 2\theta$

$B = 1 + \varepsilon - 2\alpha$

$C = 1 - \varepsilon$

$E = 1 - \alpha$

$F = \theta - \alpha$

Nota: simbología en el texto.

Luego de reemplazar el valor de los parámetros p, q, r, s, t, u del Cuadro 3.1 en las relaciones funcionales (1), (2) y (3), el modelo condicionado se presenta en el Cuadro 3.2.

CUADRO 3.2

El modelo de ahusamiento en función de α, θ y ε

$\alpha \leq \theta$

$$y = \begin{cases} \exp((\alpha-x)/(1+\varepsilon-2\theta)) & 0 \leq x \leq \theta \\ \exp((\alpha-\theta)/(1+\varepsilon-2\theta))\ \sqrt{(1+\varepsilon-2x)/(1+\varepsilon-2\theta)} & \theta \leq x \leq \varepsilon \\ \exp((\alpha-\theta)/(1+\varepsilon-2\theta))\ (1-x)/\sqrt{(1+\varepsilon-2\theta)(1-\varepsilon)} & \varepsilon \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$\theta \leq \alpha \leq \varepsilon$

$$y = \begin{cases} \exp((\theta-x)/(1+\varepsilon-2\theta))\ \sqrt{(1+\varepsilon-2\theta)/(1+\varepsilon-2\alpha)} & 0 \leq x \leq \theta \\ \sqrt{(1+\varepsilon-2x)/(1+\varepsilon-2\alpha)} & \theta \leq x \leq \varepsilon \\ (1-x)/\sqrt{(1+\varepsilon-2\alpha)(1-\varepsilon)} & \varepsilon \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$\alpha \geq \varepsilon$

$$y = \begin{cases} \exp((\theta-x)/(1+\varepsilon-2\theta))\ \sqrt{(1+\varepsilon-2\theta)(1-\varepsilon)/(1-\alpha)^2} & 0 \leq x \leq \theta \\ \sqrt{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon-2x)/(1-\alpha)^2} & \theta \leq x \leq \varepsilon \\ (1-x)/(1-\alpha) & \varepsilon \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Nota: simbología en el texto.

3.2 Empleo del modelo para el cálculo del volumen de madera

El cálculo del volumen de madera contenido entre las alturas cualesquiera en el fuste, se obtiene por integración del modelo de ahusamiento presentado en 3.1.

Ya que el modelo formulado combina tres funciones, el cálculo del volumen se realiza empleando diferentes ecuaciones según sea la ubicación del comienzo y fin de la sección a cubicar, en relación a los puntos de cambio de la forma del perfil del fuste.

El Cuadro 3.3 muestra las seis ecuaciones posibles de emplear en el cálculo del volumen de acuerdo a la ubicación de h_1 (h_2), donde h_1 (h_2) representan la altura inferior (superior) de la troza a cubicar.

CUADRO 3.3

Ecuaciones para el cálculo del volumen de madera entre h_1 y h_2

$0 \leq h_1 \leq \theta H$

$0 < h_2 \leq \theta H$

$$V(h_1,\ h_2) = \frac{\pi\ D^2\ H}{8\ q} \left[e^{2(p+qh_2/H)} - e^{2(p+qh_1/H)} \right]$$

$\theta\ H \leq h_1 \leq \varepsilon H$

$\theta\ H \leq h_2 \leq \varepsilon H$

$$V(h_1,\ h_2) = \frac{\pi\ D^2}{4} \left[r\ (h_2 - h_1) + \frac{s}{2H}\ (h_2^2 - h_1^2) \right]$$

$\varepsilon\ H \leq h_1 \leq H$

$\varepsilon\ H \leq h_2 \leq H$

$$V(h_1,\ h_2) = \frac{\pi\ D^2\ H}{12\ u} \left[(t + \frac{uh_2}{H})^3 - (t + \frac{uh_1}{H})^3 \right]$$

$$0 \leq h_1 \leq \theta H$$

$$\theta H \leq h_2 \leq \varepsilon H$$

$$V(h_1, h_2) = \frac{\pi D^2}{4} \left[\frac{H}{2q} \left(e^{2(p+q\theta)} - e^{2(p+qh_1/H)}\right) + r\,(h_2 - \theta H) + \frac{s}{2H}\,(h_2^2 - \theta^2 H^2) \right]$$

$$\theta H \leq h_1 \leq \varepsilon H$$

$$\varepsilon H \leq h_2 \leq H$$

$$V(h_1, h_2) = \frac{\pi D^2}{4} \left[r\,(\varepsilon H - h_1) + \frac{s}{2H}\,(\varepsilon^2 H^2 - h_1^2) + \frac{H}{3u}\left(\left(t + \frac{uh_2}{H}\right)^3 - (t + u\varepsilon)^3\right) \right]$$

$$0 \leq h_1 \leq \theta H$$

$$\varepsilon H \leq h_2 \leq H$$

$$V(h_1, h_2) = \frac{\pi D^2}{4} \left[\frac{H}{2q} \left(e^{2(p+q\theta)} - e^{2(p+qh_1/H)}\right) + r H\,(\varepsilon - \theta) + \frac{s H}{2}\,(\varepsilon^2 - \theta^2) + \frac{H}{3u}\left(\left(t + \frac{uh_2}{H}\right)^3 - (t + u\varepsilon)^3\right) \right]$$

Nota: simbología en el texto.

4. CONSTRUCCION Y VALIDACION DEL MODELO DE AHUSAMIENTO

4.1 Datos empleados en la construcción del modelo

Los datos utilizados para la construcción del modelo de ahusamiento propuesto en el capítulo anterior, fueron obtenidos del proyecto "Centro de información de recursos naturales y productivos de Chile", IREN-CORFO (1981).

En el citado proyecto, para la VII Región, se distribuyeron al azar, por rango de edad, un total de 110 conglomerados de 3 parcelas cada uno. Como parte de la información que se obtuvo de este muestreo, en cada parcela se tomó el árbol más cercano a su centro y, después de trozarlo, se midieron los radios, con y sin corteza, a lo largo del fuste a intervalos de un metro, partiendo de 0.3 m desde la base del árbol y finalizando cuando el diámetro límite superior en el fuste se encontraba entre 5 y 8 cm. Se registró también la altura total del árbol.

De esta forma se obtuvo una muestra del perfil de los fustes de 330 árboles. Sin embargo, después de analizar la información muestral, hubo que eliminar los datos correspondientes a 70 árboles pues presentaban evidentes irregularidades en su registro. De los 260 árboles restantes, los datos de 200 de ellos son utilizados para la construcción del modelo de ahusamiento y los correspondientes a 60 árboles extraídos al azar, se emplean para validarlo.

Es necesario destacar que este trabajo tuvo que atenerse a datos muestrales existentes y que no fue posible diseñar un muestreo especial para los fines de esta tesis, por razones presupuestarias.

El Cuadro 4.1 muestra la distribución, por DAP y altura total del número de árboles empleados en la construcción y validación del modelo. El DAP de los árboles de la muestra varía entre 3.0 y 54.6 cm y la altura total entre 2.0 y 40.0 m. Teniendo presente la correlación positiva entre DAP y altura total, se observa que la muestra cubre apropiadamente las primeras cuatro clases de diámetro y altura total.

CUADRO 4.1

Distribución de la muestra de árboles por rango de DAP y altura total

Clase de DAP (cm)	Clase de altura total (m)					
	5	15	25	35	45	Total
5	32	5				37
15	25	79	20			124
25		11	42	5	1	59
35			16	15		31
45				6		6
55				3		3
Total	57	95	78	29	1	260

4.2 Criterio para la selección de θ y ε

El Cuadro 3.2 del capítulo anterior presenta el modelo de ahusamiento en función de α, θ y ε. El primero de estos parámetros expresa la posición relativa de la altura de medición del DAP respecto de la altura total del fuste (es decir, $\alpha = 1.3/H$). θ y ε representan los puntos donde la forma del fuste cambia de un neiloide a un paraboloide y de un paraboloide a un cono, respectivamente. Estos puntos también están expresados en términos relativos a la altura total del árbol.

De este modo, la construcción del modelo de ahusamiento se reduce a encontrar los valores de θ y ε que mejor expliquen las variaciones de la forma del fuste, después de introducir estos valores en las relaciones funcionales mostradas en el Cuadro 3.2.

Los valores de θ y ε pueden encontrarse a través de un proceso iterativo, observando los desvíos (simples, absolutos y porcentuales) y el coeficiente de determinación de los valores estimados por el modelo respecto de los valores reales, dada una pareja particular de θ y ε. En un principio las parejas empleadas en este proceso iterativo estuvieron en el rango de altura relativa de 0,10 a 0,40 para θ y de 0,50 a 0,90 para ε, considerando en ambos casos incrementos de 0,10.

Posteriormente, se agregaron siete parejas adicionales ya que la pareja 0,40; 0,90, ubicada en los extremos de los rangos de θ y ε mostraron los mejores resultados en esta primera etapa. Estas parejas adicionales se obtuvieron de combinar valores de θ entre 0,40 y 0,55 con incrementos de 0,05 con ε = 0,90 y ε = 0,95.

Después de aplicar este procedimiento iterativo, se puede apreciar que los valores de θ y ε que minimizan los desvíos absolutos y porcentuales y que muestran el mejor coeficiente de determinación, varían al considerar los árboles individualmente. Esta variación de las mejores parejas (θ, ε), no está relacionada con las variables de estado del árbol controladas en este estudio. En atención a ello, se elige la pareja (θ, ε) como aquella que minimizando el desvío absoluto promedio del total de la muestra (con una precisión de 0.1 cm), tenga el menor sesgo, expresado a través del desvío simple. Los resultados muestran que para esta pareja se consiguen los mejores coeficientes de determinación, considerando los 200 árboles utilizados en la construcción.

Para otorgarle validez estadística al modelo construido de esta forma, se le somete al test no paramétrico de Mann-Whitney, cuyo resultado se muestra en la etapa de validación del modelo.

4.3 Selección de θ y ε

En esta sección se presentan los resultados obtenidos con las 27 parejas de θ y ε probadas, a partir de las cuales se selecciona la más apropiada.

El Cuadro 4.2 muestra los resultados obtenidos con cada pareja para todo el conjunto de árboles empleados en la construcción del modelo.

Es posible observar que existe una tendencia de disminución de los desvíos del modelo con valores de θ entre 0,40 y 0,50 y de ε entre 0,80 y 0,95.

Para las combinaciones de θ y ε posibles dentro de estos rangos, los desvíos tanto absolutos, como simples y porcentuales, son similares. Sin embargo la pareja (0,45 y 0,95), presenta los mejores resultados puesto que muestra un desvío absoluto de 0,82 cm con un desvío simple de -0,07 cm, a diferencia de la pareja (0,45 y 0,90) que teniendo un desvío absoluto ligeramente menor (0,81 cm), tiene un desvío simple mayor.

Esto significa que para la pareja elegida los desvíos tanto positivos como negativos tienden a igualarse en promedio y que el modelo no presenta sesgo sistemático.

CUADRO 4.2

Desvíos promedio y coeficiente de determinación del modelo para diferentes combinaciones de θ y ε

Pareja θ	Pareja ε	% de árboles de la muestra con R^2 sobre 0,90	DESVIOS Simples (cm)	DESVIOS Absolutos (cm)	DESVIOS Porcentuales
0,10	0,50	61,0	0,64	1,15	9,27
0,10	0,60	70,5	0,33	1,03	8,35
0,10	0,70	85,0	0,00	0,95	7,70
0,10	0,80	83,0	-0,33	0,95	7,66
0,10	0,90	70,0	-0,65	1,07	8,73
0,20	0,50	59,5	0,74	1,17	9,45
0,20	0,60	71,0	0,42	1,03	8,39
0,20	0,70	84,0	0,08	0,93	7,61
0,20	0,80	85,5	-0,26	0,91	7,44
0,20	0,90	74,5	-0,58	1,02	8,41
0,30	0,50	57,5	1,01	1,30	10,34
0,30	0,60	68,0	0,66	1,08	8,76
0,30	0,70	83,5	0,29	0,92	7,56
0,30	0,80	88,5	-0,07	0,85	7,02
0,30	0,90	84,0	-0,42	0,92	7,68
0,40	0,50	43,0	1,57	1,75	13,48
0,40	0,60	54,5	1,13	1,36	10,61
0,40	0,70	73,5	0,69	1,05	8,35
0,40	0,80	87,0	0,28	0,85	6,88
0,40	0,90	90,0	-0,11	0,82	6,79
0,40	0,95	88,5	-0,28	0,86	7,28
0,45	0,90	88,5	0,12	0,81	6,57
0,45	0,95	90,5	-0,07	0,82	6,79
0,50	0,90	86,5	0,40	0,88	6,83
0,50	0,95	89,0	0,20	0,83	6,65
0,55	0,90	84,5	0,76	1,06	7,95
0,55	0,95	81,0	0,53	0,94	7,16

Por otra parte, esta pareja tiene la más alta frecuencia de árboles con correlación superior a 0,90, medido a través del coeficiente de determinación del modelo para cada individuo y un error porcentual promedio, en la estimación del diámetro de 6,79%.

Estos resultados indican que de acuerdo al conjunto de ecuaciones y restricciones que conforman el modelo propuesto, el punto de cambio de un neiloide a un paraboloide se encuentra al 45% de la altura total del árbol y que el cambio desde un paraboloide a un cono se produce en el 95% de esta altura.

Elegida la mejor pareja de puntos de cambio, se entrega la evaluación para cada árbol de la muestra de manera de poder observar el comportamiento del modelo en la estimación de la forma del fuste de cada individuo (Apéndice 1).

Es interesante observar los rangos de variación de los desvíos utilizados para medir la bondad del modelo propuesto. En el Cuadro 4.3, que se presenta a continuación, se puede ver esta variación.

CUADRO 4.3

Valores extremos de los desvíos medios por árbol para $\theta = 0,45$ y $\varepsilon = 0,95$

Valores extremos	Desvíos Promedio		
	Simples (cm)	Absolutos (cm)	Porcentuales (%)
Menor	-3,50	0,04	0,51
Mayor	2,06	3,51	22,42

El análisis de este cuadro se complementa con el Cuadro 4.4 que muestra la frecuencia relativa acumulada en rangos de desviación, lo cual permite conocer la proporción de árboles que presentan desvíos menores al límite indicado.

CUADRO 4.4

Distribución de frecuencia relativa acumulada de los desvíos en clases para $\theta = 0,45$ y $\varepsilon = 0,95$

Desvíos promedio				
Desvío Menor que (cm)	Simples	Absolutos	Desvío Menor que (%)	Porcentuales
	% acumulado			% acumulado
1	84,5	72,5	5	35,5
2	97,5	95,5	10	83,5
3	99,5	99,5	15	96,0
4	100,0	100,0	20	99,5
Total	100,0	100,0	25	100,0

Analizando en primer término los desvíos simples y absolutos, puede verse que la frecuencia acumulada para muestra empleada, es muy similar. Es así como la proporción de árboles con desvíos menores de 2 cm es 97,5 y 95,5% para los desvíos simples y absolutos respectivamente, mientras que el 99,5% de los árboles presenta valores menores de 3 cm.

En cuanto a los desvíos expresados en forma porcentual, es posible apreciar que el 96% del total de los árboles presenta un valor menor a 15% y que el 99,5% está contenido en el rango 0 - 20%.

La aplicación del modelo a árboles individuales con la pareja de puntos de cambio de la forma elegida, incluye además de la estimación de los diámetros, la estimación del volumen del fuste.

Con este propósito, para cada árbol se calcula el "volumen real" total sin corteza. Este volumen se obtiene sumando el volumen de cada una de las secciones del fuste medidas metro a metro en terreno. Se asume un tronco de cono para cada una, ya que la interpolación lineal en este caso es lo suficientemente exacta. Además, se obtiene el volumen estimado por el modelo hasta el nivel de altura correspondiente a la última medición real.

También se calcula el "volumen real" sin corteza hasta un límite de utilización de 10 cm y el correspondiente volumen estimado por el modelo hasta ese diámetro.

Con estos valores por árbol se calculan los desvíos porcentuales para cada individuo y el promedio para la muestra, lo que permite analizar el comportamiento del modelo propuesto en la estimación del volumen del árbol.

La estimación del volumen de cada árbol se realiza empleando las ecuaciones de volumen planteadas en el punto 3.2 sobre la longitud correspondiente en cada caso, es decir la altura del fuste dada por la última medición de terreno o bien, la altura correspondiente al diámetro límite superior de 10 cm.

En el Apéndice 2 se encuentran los resultados tanto de volumen real como del estimado por el modelo para cada árbol, junto a los correspondientes desvíos porcentuales.

La información del Cuadro 4.5, permite apreciar los rangos de variación de las desviaciones simples, absolutas y porcentuales, entre el volumen estimado por el modelo para cada árbol y su valor real.

CUADRO 4.5

Rangos de variación de desvíos por árbol en la estimación de volumen (base: 200 árboles)

Volumen		Mínimo	Máximo	Promedio
Total	Simple m^3	- 0,5186	0,2205	- 0,0036
	Absoluto m^3	0,0000	0,5186	0,0321
	Porcentual %	0,00	33,3	8,5
Hasta 10 cm	Simple m^3	- 0,5067	0,2239	- 0,0012
	Absoluto m^3	0,0000	0,5067	0,0324
	Porcentual %	0,29	44,4	7,7

Los desvíos promedios son aceptables y de menor magnitud cuando se refieren al volumen hasta un diámetro superios en el fuste de 10 cm. Se puede apreciar en el Cuadro 4.5 que los desvíos absolutos promedios son inferiores a 0,0325 metros cúbicos. La amplitud del rango de variación de los desvíos es, sin embargo, importante. Pero, debe tenerse presente que esta amplitud se genera con los valores extremos, sin imputar la distribución de ellos en el rango. Con el propósito de mostrar esta distribución, el Cuadro 4.6 entrega la distribución de los árboles muestra por rangos de desvíos porcentuales acumulados. De esta forma se tiene la frecuencia relativa acumulada de árboles de la muestra cuyos desvíos porcentuales son menores que el valor especificado en la primera columna.

CUADRO 4.6

Distribución de frecuencia relativa acumulada de los desvíos porcentuales en la estimación del volumen (base: 200 árboles)

$\frac{\lvert V.real - V.estim.\rvert}{Vol.\ real} \times 100$	Estimación modelo	
	Vol. total	Vol. hasta 10 cm
	Porcentaje acumulado de observ.	
5	34,0	34,0
10	64,0	73,0
15	85,0	89,0
20	95,0	95,0
25	98,5	97,0
30	99,5	98,0
35	100,0	99,0
40		100,0

En este cuadro se observa que en el 95% de los casos el desvío porcentual es inferior al 20%. Nótese además que el modelo se comporta mejor en la estimación del volumen hasta el diámetro límite de 10 cm que en la estimación del volumen total.

Finalmente, para los efectos de la selección de θ y ε, se compararon los resultados que genera el modelo con las estimaciones de las tablas de volumen publicadas por el Instituto Forestal. Para los mismos resultados reportados en los Cuadros 4.5 y 4.6, el modelo con la pareja (0,45; 0,95) mostró mejores estimaciones de los volúmenes reales. Así, la amplitud del rango de los desvíos absolutos del modelo presentado en esta tesis, está comprendido dentro del rango de variación de los desvíos obtenidos al aplicar las tablas de volumen mencionadas.

No es de extrañar que el modelo propuesto genere mejores resultados que las tablas de volumen, ya que éstos están comparados sobre la base muestral de la función de ahusamiento. No obstante, la comparación resulta interesante pues otorga una garantía de que el modelo no produce distorsiones apreciables.

En el Cuadro 4.7 se entrega el modelo de ahusamiento, después de seleccionar, mediante el procedimiento descrito en esta sección, los valores que asumen θ y ε, vale decir, 0,45 y 0,95, respectivamente.

CUADRO 4.7

El modelo de ahusamiento en función de α

$\alpha \leq \theta$

$$y = \begin{cases} \exp\left((\alpha - x)/1{,}05\right) & 0 \leq x \leq \theta \\ \exp\left((\alpha - 0{,}45)/1{,}05\right) \sqrt{(1{,}95 - 2x)}/1{,}0246 & \theta \leq x \leq \varepsilon \\ \exp\left((\alpha - 0{,}45)/1{,}05\right) (1 - x)/0{,}2291 & \varepsilon \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\theta \leq \alpha \leq \varepsilon$$

$$y = \begin{cases} \exp((0{,}45 - x)/1{,}05)\ \sqrt{(1{,}95 - 2\alpha)}/1{,}0246 & 0 \leq x \leq \theta \\ \sqrt{(1{,}95 - 2x)/(1{,}95 - 2\alpha)} & \theta \leq x \leq \varepsilon \\ (1 - x)/\sqrt{(1{,}95 - 2\alpha)}\ 0{,}2236 & \varepsilon \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\alpha \geq \varepsilon$$

$$y = \begin{cases} \exp((0{,}45 - x)/1{,}05)\ 0{,}2291/(1 - \alpha) & 0 \leq x \leq \theta \\ 0{,}2236\ \sqrt{(1{,}95 - 2x)}/(1 - \alpha) & \theta \leq x \leq \varepsilon \\ (1 - x)/(1 - \alpha) & \varepsilon \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Nota: simbología en el texto.

No es práctico presentar las ecuaciones de volumen que se obtienen a partir del modelo de ahusamiento ya que, al igual que en el caso de la función de ahusamiento, las ecuaciones se derivan de un simple reemplazo de los valores de θ y ε en las relaciones funcionales del Cuadro 3.3.

4.4 Validación del modelo de ahusamiento

Validar un modelo matemático consiste en determinar un nivel de confianza para las inferencias que se obtengan de su aplicación (Shannon, 1975).

Esto es, validar un modelo es probar su utilidad operacional, dándole al usuario seguridad que la información que obtenga de los datos generados por el modelo es correcta para un nivel de probabilidad dado.

Básicamente, la validación considera dos aspectos:

a) determinar si el modelo se comporta en forma lógica, es decir, si el modelo no entrega resultados absurdos; y

b) probar si las inferencias obtenidas del modelo son estadísticamente válidas.

Observar cuidadosamente estos dos aspectos es importante debido a que una vez construído un modelo, se puede realizar una gran cantidad de inferencias que parezcan reales. Sin embargo, es posible que el modelo no esté construído con una base suficientemente sólida, o bien, que él no represente la realidad. Si no se realiza una validación cuidadosa pueden aceptarse resultados y decisiones erróneas.

Para determinar si el modelo se comporta en forma lógica se puede observar su comportamiento al ser llevado a valores extremos en su rango de aplicación y revisar integralmente los supuestos bajo los cuales fue construído para cuidar la concordancia entre el modelo y el sistema real.

Finalmente, debe realizarse un test estadístico para probar que los datos generados por el modelo son indistinguibles de valores reales.

Es importante considerar que esta prueba estadística debe realizarse con una muestra independiente de la utilizada en la construcción del modelo. De otra forma, lo que se estaría haciendo es analizar la capacidad del modelo de "replicar" su base muestral, lo que obviamente es diferente de validar el modelo.

En este caso se emplea una muestra de 60 árboles, extraídos al azar de la muestra total de 260 árboles empleados en este estudio.

De esta forma se cubren los aspectos que permiten utilizar el modelo con cierta seguridad que las inferencias que se hagan a partir de él son correctas.

En relación al punto a) se puede decir que el modelo es lógico por formulación. La simple observación de un fuste de pino insigne revela que su forma es similar a la de los cuerpos geométricos empleados en describirlo. Además, se ha sometido el modelo de ahusamiento a restricciones que aseguran continuidad en los puntos de cambio de las funciones elegidas (neiloide, paraboloide y cono) y se lo ha forzado a pasar por el DAP y por el punto en que el diámetro se anula por corresponder al de la altura total del árbol.

Nótese que no todos los modelos de ahusamiento son lógicos por formulación. Aquellos basados en análisis de regresión no siempre están sustentados en evidencias empíricas ni restringidos a pasar por puntos críticos.

Para probar que las inferencias obtenidas del modelo son estadísticamente válidas, se comparan los volúmenes reales de 60 árboles con aquellos volúmenes estimados por el modelo. La prueba consistirá en determinar si existen diferencias significativas entre estos volúmenes, o dicho de otra forma, si los volúmenes reales y estimados han sido extraídos de una misma población.

Con este propósito se utiliza el test no paramétrico de Mann-Whitney. Básicamente, el procedimiento empleado por esta prueba es el siguiente:

- considera la muestra de volúmenes reales (N1 = 60) y la muestra de volúmenes estimados (N2 = 60).

- ordena las observaciones combinadas de ambas muestras de menor a mayor, asignándoles números en forma correlativa.

- suma el número asociado a cada observación para la muestra de volúmenes reales y para la muestra de volúmenes estimados.

- calcula la probabilidad de que las dos muestras provengan de una misma población.

En este caso dicha probabilidad es de 0,8563, por lo cual la hipótesis nula de igualdad de medianas se acepta, para un nivel de probabilidad de 0,95.

5. APLICACIONES Y CONCLUSIONES

El modelo de ahusamiento reportado en este estudio, permite obtener una descripción cuantitativa del perfil del fuste de árboles de pino insigne en la VII Región del país.

El modelo puede ser empleado para estimar el volumen total del fuste, el volumen de trozos entre dos puntos cualesquiera a lo largo del tronco y el diámetro de cualquier sección transversal del fuste, lo cual, a su vez, hace posible adaptarlo a una amplia variedad de aplicaciones.

El diámetro a cualquier altura del fuste se obtiene de las ecuaciones del Cuadro 3.2, reemplazando los parámetros (p, q, r, s, t, u), para $\theta = 0,45$ y $\varepsilon = 0,95$, bajo la condición de $\alpha \leq \theta = 0,45$, lo que equivale a una altura total superior a 2,89 m.

Conocido el DAP s/c y la altura total del árbol, d se calcula como:

$$d = \begin{cases} D \exp(0,9524(1,3 - h)/H) & 0 \leq h \leq 0,45\ H \\ D \sqrt{0,7881 - 0,8033\ h/H}\ \exp(1,2381/H) & 0,45\ H \leq h \leq 0,95\ H \\ 2,8431\ D(1 - h/H)\ \exp(1,2381/H) & 0,95\ H \leq h \leq H \end{cases}$$

d = diámetro del fuste (sin corteza) a una altura h (cm).

h = altura medida desde el nivel del suelo (m).

D = diámetro medido a 1,3 m desde el nivel del suelo (cm), sin corteza.

H = altura total del fuste (m).

Por su parte, la altura h en que el fuste alcanza un diámetro dado puede calcularse a partir de las ecuaciones anteriores, con h como variable dependiente. Para árboles mayores a 1,89 m se obtiene:

$$h = \begin{cases} H(1 - 0{,}3517 \exp(-1{,}2381/H)(d/D) \\ \quad \text{si } 0 \leq d \leq 0{,}1422\ D \exp(1{,}2381/H) \\ 1{,}2372\ H(0{,}7881 - \exp(2{,}4762/H)(d/D)^2) \\ \quad \text{si } 0{,}1422\ D \exp(1{,}2381/H) \leq d \leq 0{,}6514\ D \exp(1{,}2381/H) \\ 1{,}3 - 1{,}05\ H\ Ln(d/D) \\ \quad \text{si } 0{,}6514\ D \exp(1{,}2381/H) \leq d \leq D \exp(1{,}2381/H) \end{cases}$$

Las ecuaciones para la estimación tanto de diámetro como de altura en el fuste, para árboles de altura menor a 2,89 m se derivan de la misma forma que las señaladas anteriormente.

Para los efectos de estimar el volumen total del fuste, sin corteza, desde el nivel del suelo hasta el ápice (V_t en m^3), el modelo se reduce a:

$$V_t = K_1\ D^2\ H\ e^{K_2/H}$$

donde K_1 y K_2 son obtenidos de la última ecuación del Cuadro 3.3 (haciendo $h_1 = 0$, $h_2 = H$ y reemplazando los correspondientes valores de p, q, r, s, t, u, $\theta = 0{,}45$ y $\varepsilon = 0{,}95$), de lo cual se tiene $K_1 = 0{,}00003263$ y $K_2 = 2{,}4762$.

De igual forma puede derivarse una expresión para estimar el volumen del fuste entre una altura cualquiera de tocón y un diámetro límite superior en el fuste. Así, puede obtener se la ecuación para estimar el volumen del fuste de un árbol bajo condiciones usuales en Chile, como son altura de tocón 0,30 m y diámetro límite superior en el fuste de 10 cm. Para llegar a su forma final se reemplazan los parámetros correspondientes en la ecuación del Cuadro 3.3 para $h_1 \leq 0{,}45H$, $0{,}45H \leq h_2 \leq 0{,}95H$ y $\alpha \leq 0{,}45$. La ecuación bajo estas condiciones se transforma en:

$$V_{10} = \frac{\pi\ D^2}{40.000} \exp(2{,}4762/H) \Big[(0{,}7881\ h_2 - 0{,}4042\ h_2^2/H + \\ + 0{,}5250\ H\ (\exp(-0{,}5714/H) - 0{,}9438))\Big]$$

donde:

a) V_{10} = volumen del fuste (m^3ssc) entre tocón (0,30 m) y d = 10 cm.

b) $h_2 = 1{,}2372\ H(0{,}7881 - \exp(-2{,}4762/H)(10/D)^2)$

c) $15{,}3516 \exp(-1{,}2381/H) \leq D \leq 70{,}3235 \exp(-1{,}2381/H)$

d) $H \geq 2{,}89$ m

La derivación de cualquier otra función para obtener el volumen del fuste bajo condiciones diferentes a las señaladas se realiza en forma análoga, utilizando las ecuaciones del Cuadro 3.2 y 3.3, de donde se obtuvo la ecuación de volumen hasta el diámetro límite de 10 cm.

El modelo de ahusamiento, puede ser también empleado, junto a un modelo optimizador, para determinar la mejor forma de realizar el trozado de árboles de un rodal, con el propósito de maximizar ya sea los retornos económicos o la producción de volumen de madera en trozos de determinadas dimensiones. Esto puede realizarse aprovechando la capacidad del modelo para calcular el número de trozos de determinadas dimensiones, que pueden obtenerse de un árbol.

La construcción del modelo presentado en este estudio no está, sin embargo, libre de limitaciones. La base muestral utilizada para determinar los parámetros del modelo, no fue diseñada para los efectos de construir funciones de ahusamiento, por lo que la calidad de las mediciones no fue la requerida para estos propósitos. Además, la distribución de la muestra por rangos de DAP y altura total, no es la ideal, observándose que en ella predominan árboles de poco desarrollo en diámetro y altura. Habría sido interesante investigar además, la posibilidad de que los parámetros del modelo cambien con ciertos atributos del rodal, tales como, densidad, sitio e intensidad de manejo. No obstante, esto no fue posible, por carecerse de registro de estas variables.

En opinión del autor, no existiría una diferencia muy significativa entre el perfil de árboles de iguales dimensiones en DAP y altura total, situados en distintas condiciones de sitio y competencia, ya que la combinación de DAP y altura total, tendrían incorporados ambos efectos.

Con una base muestral más apropiada a funciones de ahusamiento es posible construir también, modelos que expresen la variación del perfil del fuste con corteza, empleando una metodología idéntica a la descrita en este estudio.

El problema que surge del modelo propuesto es calcular el DAP sin corteza. Esto se soluciona fácilmente, a través de regresiones DAP sin corteza sobre DAP con corteza para los rodales en que se desee aplicar.

No obstante las limitaciones señaladas, el modelo propuesto constituye, en opinión del autor, una herramienta interesante en la realización de inventarios forestales.

6. BIBLIOGRAFIA

1. BRUCE, D. et al. 1968. Development of a system of taper and volume tables for red alder. Forest Science 14(3): 339-51.

2. COFFRE, M. 1981. Modelos fustales para pino insigne (*Pinus radiata* D. Don). Tesis Universidad Austral de Chile, Valdivia. 50 p.

3. DEMAERSCHALK, J.P. and KOZAK, A. 1977. The whole-bole system: a conditioned dual equation system for precise prediction of tree profiles. Can. J. For. Res. 7: 488-497.

4. FRAZER, P.O. 1979. Wheyerhauser Company, Tree taper analysis system and high yield forest planning. Mimeografiada, 8 p., no publicada.

5. GARAY, L. 1979. A tree taper model for the entire stem profile including buttressing. Tropical Forest Utilisation System. Research Report, Contribution 36. Institute of Forestry Products, College of Forest Resources, University of Washington. 64 p.

6. GOULDING, C. and MURRAY, J. 1976. Polynomial taper equations that are compatible with tree volume equations. N.Z. For. Sci. 5(3): 313-22.

7. GROSENBAUGH, L.R. 1966. Tree form: definition, interpolation, extrapolation. For. Chron. 42(4): 443-56.

8. HEGER, L. 1965. A trial of Hohenadl's method of stem form and stem volume estimation. The Forestry Chronicle. Vol. 41, N° 4.

9. HUSCH, B. *et al*. 1972. Forest mensuration. Second edition. The Ronald Press Company, New York.

10. KOZAK, A.; MUNRO, D. and SMITH, J. 1969. Taper functions and their application in forest inventory. For. Chron. 45: 278-83.

11. LOETSCH, F. *et al*. 1973. Forest inventory. Verlagsgesellschaft, Munich. Vol. 2, 469 p.

12. SHANNON, R.E. 1975. System simulation. Prentice-Hall, Inc. 387 p.