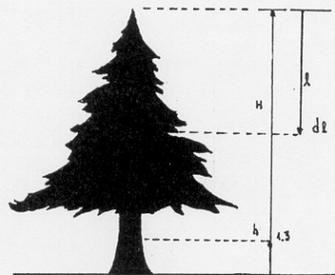


UACH

MODELOS **==**
== FUSTALES

L. Coffre



1983

1. INTRODUCCION

En Chile, la especie Pinus radiata D. Don (pino insigne) ha sido introducida con gran éxito llegando a ocupar en la actualidad extensas superficies de plantaciones. Esta especie, oriunda de Norteamérica, ha encontrado condiciones favorables para su crecimiento transformándose en el cultivo forestal de mayor importancia en el país.

La notable velocidad de crecimiento de la especie y las características tecnológicas de su madera han significado para la Industria Forestal Nacional una fuente de materia prima del mayor interés especialmente por las ventajas comparativas que representa en términos de usos alternativos de la madera y como mercado de exportación en franco desarrollo.

Analizada la situación de esta manera, las Industrias Forestales que se abastecen de pino insigne se han visto enfrentadas a la necesidad de estudiar las futuras producciones de los bosques mediante métodos de evaluación que cumplan las características de sencillez y flexibilidad, a niveles exigentes de detalle y precisión de la información.

La cuantificación de los productos maderables que un bosque puede proporcionar, generalmente se expresa en términos del volumen total. Por tal motivo, la determinación de éste parámetro es una de las informaciones más importantes en la descripción de los rodales.

Dado los variados objetivos del manejo forestal, derivados de un mercado maderero para la madera rolliza siempre más amplio y diversificado, se hace imprescindible la descripción de los rodales en cuanto a su productividad potencial, clasificada de acuerdo a calidades y dimensiones.

Existen numerosas y satisfactorias formas de estimar el volumen de los árboles; pero no resulta igualmente fácil determinar el volumen de secciones del fuste. Esta problemática se ha enfrentado, en algunos casos, desarrollando varias funciones para diferentes tipos de material rollizo, y estimando otros tipos por interpolación de las funciones construídas.

El método requiere un gran esfuerzo operativo y la información que se obtiene es muy rígida, por cuanto sólo permite estimar volúmenes rollizos hasta diferentes diámetros límites fustales.

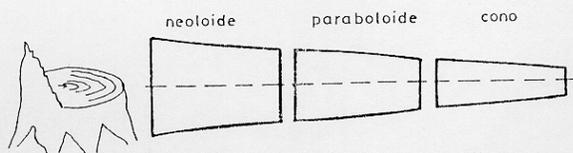
El método de las funciones de ahusamiento proporciona mayores ventajas y resultados satisfactorios. Estas son expresiones que representan la variación diamétrica a lo largo del fuste en relación a una o más variables que caracterizan la forma de los mismos. La mayoría de las funciones de ahusamiento permiten estimar diámetros a partir de alturas relativas. Las mismas funciones permiten, bajo determinados tratamientos aritméticos y de procesamiento, determinar el volumen, evaluar diferentes sistemas de seccionamiento de árboles o determinar y clasificar la producción en madera rolliza de características dadas.

El presente estudio tiene por objetivo encontrar funciones de ahusamiento para bosques de Pino insigne existentes en la Provincia de Arauco.

2. ANTECEDENTES APORTADOS POR LA LITERATURA

Los árboles de una determinada especie desarrollan un fuste más o menos típico que se asemeja a ciertos sólidos geométricos, Bruce y Schumacher (1936), dividen el fuste en tres partes: La parte inferior se asemeja a un neoloide, la parte central a un paraboloides y la parte superior a un cono, esto se ilustra en la figura N° 1.

FIGURA N° 1
FUSTE DIVIDIDO EN TRES PARTES



La aproximación de la forma de los fustes de los árboles a ciertos sólidos geométricos, facilita la estimación de su volumen. Existen muchos métodos de estimación del volumen basado en esto. Durante los últimos años ha habido una preocupación constante por las características o calidad de la madera que se está cubriendo. En el pasado se limitaban a descripciones que dependían de la experiencia del cubricador. Posteriormente, se han desarrollado técnicas objetivas que permiten la estimación del volumen dadas ciertas calidades y dimensiones. Uno de los métodos más empleados fué el basado en las Tablas de Conicidad Brustall y Duff (1957, 1959) y Duff y Brustall (1955). Otro método empleado se basa en el desarrollo de Funciones de Ahusamiento. Esta alternativa se ha hecho cada vez más frecuente, gracias a las facilidades que brindan las técnicas de análisis estadístico debido al uso cada vez más expedito del procesamiento electrónico de datos.

Grosenbaugh (1966) define las Funciones de Ahusamiento o Modelos Fustales, como expresión analítica del diámetro del fuste en función de la altura de medición. Los coeficientes de estas funciones varían de árbol en árbol.

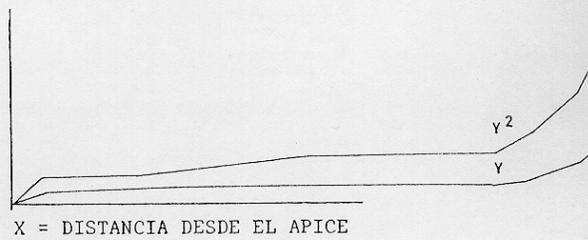
La línea correspondiente a una función de ahusamiento puede representarse con en la figura N° 2

FIGURA N° 2

MODELOS FUSTALES

$$y = f(x)$$

RADIO (Y) O RADIO AL CUADRADO (Y²)



Algunos ejemplos de modelos fustales son los siguientes:

$$Y = a X + b X^2 \dots \dots \dots + g X^n$$

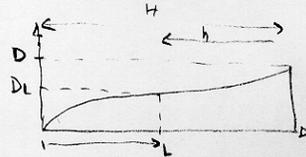
$$Y^2 = a X + b X^2 \dots \dots \dots + g X^n$$

Y = Diámetro fustal, expresado generalmente como proporción de un diámetro de referencia.

X = Altura de medición del diámetro, expresado como proporción de la altura total del árbol.

Una de las primeras Funciones de Ahusamiento que se empleó con éxito fué la propuesta por Bhare en el año 1927. Esta ecuación expresa la forma del fuste con resultados satisfactorios para algunas especies, siempre y cuando su aplicación excluya la parte baja del fuste. La ecuación es la siguiente:

$$\frac{D_1}{D} = \frac{l}{al + b}$$



con:

D_1 = Diámetro superior

D = DAP

l = Distancia desde el ápice al diámetro superior, expresada en porcentaje con respecto a la altura total del árbol.

$$l = \frac{H-h}{H}$$

a, b = Constantes de la función.

Posteriormente se han desarrollado modelos más complejos, apoyadas por las posibilidades de cálculo que brinda la computación.

Peters (1971), elaboró un método de construcción de tablas de volumen para Araucaria Araucana (Mol) C. Koch, basado en Funciones de Ahusamiento empleando una función polinomial de quinto grado.

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 + a_5X^5$$

con:

$$Y = \frac{D_{0.1h} \cdot ih}{2 D_{0.1h}}$$

$$X = \frac{hl}{h}$$

$D_{0.1h}$ = Diámetro a un i-ésimo de la altura

$D_{0.1h}$ = Diámetro a un décimo de la altura

hl = Altura desde el ápice hasta la altura l

h = Altura total.

Dada la flexibilidad y éxito del método, Peters recomienda considerar este modelo en futuros estudios. Siguiendo esta misma línea Lobos (1975) desarrolló Ecuaciones de Ahusamiento para Pino Insigne. Lobos calculó todos los factores naturales de forma y los relacionó con los cuocientes natural de forma, y obtuvo así una función estimadora del cuociente. El modelo empleado corresponde a un polinomio de segundo o tercer grado en que la variable dependiente es el cuociente natural de forma y la variable independiente, el factor natural de forma, el DAP y la altura.

Demaerschalk (1973), muestra como se pueden derivar ecuaciones de ahusamiento a partir de las ecuaciones de volumen más conocidas y poder aprovechar las numerosas ventajas del cómputo del Volumen por las Funciones de Ahusamiento. Después junto a Kozac (1977) presentan un modelo fustal que consta de dos ecuaciones uno para la parte baja y otro para la parte superior. El lugar donde éstas se encuentran corresponde al punto de inflexión. Esta situación se presenta en la figura N° 3. Probaron varias formas de ecuaciones para ambas partes, las que tuvieron un mejor comportamiento fueron:

$$Y = a + b (1-X)^c \quad \text{parte baja}$$

$$Y = a X^b c^{(1-X)} \quad \text{parte alta}$$

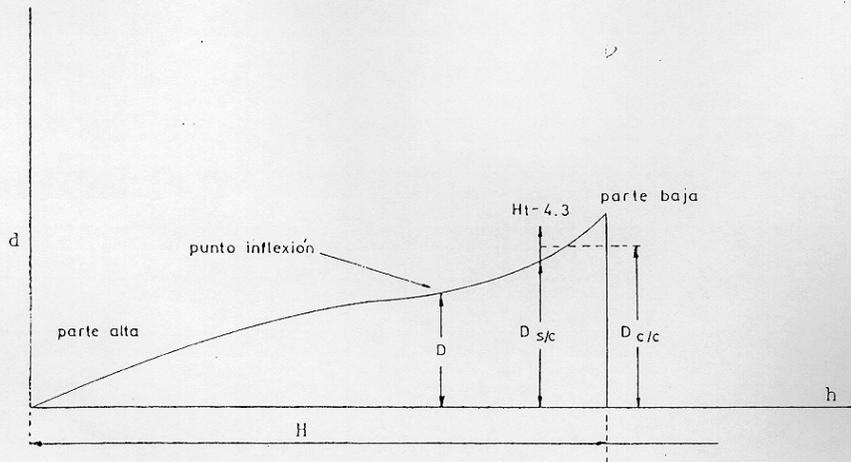
con: $Y = \frac{Dl}{l}$

$$X = \frac{l}{D}$$

a, b, c = Constantes de la ecuación.

FIGURA N° 3

MODELO FUSTAL COMPUESTO POR DOS FUNCIONES



Estas fueron probadas para 32 especies de British Columbia, con resultados positivos.

Honer (1964), desarrolla y describe dos métodos para estimar el volumen cúbico comercial, ambos métodos se basan en funciones de regresión, relacionando la proporción de volumen con la altura relativa o radio relativo, pudiendo ser empleadas para estimar el volumen entre límites específicos. Estas funciones pueden ser usadas de dos maneras:

1. Estimar el volumen de cualquier porción del fuste definida entre dos alturas, mediante un modelo como el siguiente:

$$Y = A_0 + A_1X + A_2X^2$$

donde

$$X = \frac{\text{Altura comercial}}{\text{Altura total}}$$

$$Y = \frac{\text{Volumen hasta la altura límite}}{\text{Volumen total}}$$

2. Estimar el volumen de cualquier porción del fuste definida entre dos diámetros; con un modelo similar

$$X = \frac{\text{Diámetro superior}}{\text{DAP}}$$

$$Y = \frac{\text{Volumen hasta el diámetro superior}}{\text{Volumen total}}$$

A_0, A_1, A_2 = Constantes de la ecuación.

Los resultados obtenidos por el autor fueron buenos, pero el método presenta la limitante de que supone conocido el volumen total.

Bennett y Swindel (1972), ajustaron para Pinus elliotti (Engelm) var. elliotti un modelo de la siguiente forma:

$$Dl = A_1 D \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right] + A_2 (h-1) (h-1.3) + A_3 H (h-1) (h-1.3) + A_4 (h-1) (h-1.3) (h+1.3)$$

Los resultados del modelo fueron, según el autor, bastante satisfactorios. Su empleo, sin embargo, presenta algunas limitantes ya que bajo la altura del pecho las variables independientes se hacen negativas, entregando valores erráticos para los diámetros.

Salas (1978 *) ajustó para Pino insigne una función de altura donde:

$$l = A_0 + A_1 X + \frac{A_2}{e^{-0.08X}}$$

$$\text{con } X = H - \left[\frac{Dl (H-1.3)}{D} \right]$$

Los resultados obtenidos con esta función fueron buenos, y se emplea combinando con tablas de conicidad para el cálculo de volumen.

(*) Salas A., Jaime (Compañía Manufacturera de Papeles y Cartones S.A.) 1978, Funciones de altura. Conversación personal.

Silva (1976), hace un análisis y compara un gran número de funciones de ahusamiento para un grupo de especies. Los mejores modelos fueron todos aquéllos con potencias iguales o superiores a dos. Silva rechazó, por principio, todos aquéllos modelos que consideran dos o más funciones por árbol.

Describe dos técnicas poco usadas para la construcción de funciones de ahusamiento:

- Funciones por sección: Se ajustan funciones para secciones relativas al fuste.

- Funciones de Ahusamiento para árboles individuales: Se ajusta una función para cada árbol y luego se desarrollan funciones para estimar la función correspondiente al árbol con la edad, DAP y altura como variables independientes.

Los mejores resultados se obtuvieron empleando las funciones para árboles individuales. El presente estudio desarrolla y aplica estas dos técnicas de construcción de funciones de ahusamiento.

3. MATERIAL Y METODO

3.1. Muestra

La muestra empleada en la construcción y prueba del modelo fustal, fué colectada en su totalidad en la provincia de Arauco.

El tamaño muestral fué de 1.060 árboles con un DAP medio de 27.4 cm y una altura media de 24.9 m, la distribución de la muestra por clase de diámetro y altura se presenta en el cuadro N° 1.

CUADRO N° 1

Distribución de la muestra por clase de diámetro y altura

Clase de altura (m)	Clase de diámetros (cm)			Totales
	5-20	21-36	36 +	
11-15	98	25	-	123
16-20	117	117	4	238
21-25	19	151	10	180
26-30	5	191	34	230
31-35	-	97	92	189
36-40	-	18	59	77
41 +	-	-	33	23
TOTALES	239	599	222	1.060

El muestreo se realizó empleando un proceso aleatorio dirigido. Los rodales fueron escogidos abarcando todas las condiciones de sitio y edades, dentro de cada rodal se distribuyeron al azar puntos de muestreo y se seleccionó el árbol más cercano al punto. La ubicación geográfica de los rodales muestreados se presentan en Anexo I.

El tamaño muestral fué determinado en base a la experiencia obtenida en estudios similares.

A cada árbol se le midió y registró las siguientes dimensiones:

- DAP
- Altura total
- Diámetro con corteza y doble espesor de corteza en el centro de cada una de 10 secciones iguales, en que se dividió el fuste. Este sistema se aplicó en la medición de los 566 primeros árboles. El resto se midieron considerando secciones fijas de dos metros y las mediciones de los diámetros y espesor de corteza en los extremos de las secciones.

Esta información, junto a otros datos que describen al árbol, se registró en el formulario PP-02 (Anexo II). La información fue perfoverificada en tarjetas de 96 columnas, para su posterior manejo electrónico.

3.2. Equipo usado

Los equipos de terreno empleados, fueron:

- Forcípula de brazos paralelos con graduación milimétrica para las mediciones de diámetros.
- Calibrador de corteza para la medición del doble espesor de corteza.
- Huincha de distancia para la medición de la altura total y altura hasta los puntos de medición de diámetros fustales.

Para los análisis y cálculos se empleó el computador I.B.M. sistema 3, modelo 10, y un paquete de subrutinas estadísticas de la I.B.M., ambos de propiedad de la Universidad Austral de Chile.

3.3. Métodos de construcción planteados

3.3.1. Funciones polinomiales generales

El primer método probado correspondió al ajuste de funciones polinomiales, en base a una muestra de árboles. La variación diamétrica a lo largo del fuste es representada por una función que tiene la siguiente expresión:

$$Y = A_0 + A_1X + A_2X^2 + \dots + A_n X^n$$

Donde X e Y corresponden a las siguientes expresiones:

$$Y = \frac{Dl}{D} \qquad Y = \left[\frac{Dl}{D} \right]^2$$

$$X = \left[\frac{h - l}{h} \right] \qquad X = \left[\frac{h - l}{h - 1.3} \right]$$

Por razones de facilidad en el manejo aritmético de los modelos resultantes, se analizaron polinomios de hasta 5º grado solamente.

3.3.2. Funciones por sección

En este caso, los modelos fueron ajustados para toda la muestra, pero en este método se obtiene una función para cada sección o parte del fuste. El modelo planteado correspondió a:

$$\frac{Dl}{D} = F \left[\left[\frac{h - l}{h - 1.3} \right] D, h \right]$$

con l = altura de la sección considerada.

La obtención de estas funciones se realizó mediante análisis de regresión múltiple, en una modalidad paso a paso que utiliza una secuencia de décimas de significación para decidir las variables a incluir en la regresión. El método de construcción consiste en formar las ecuaciones empezando con la variable más correlacionada con la variable dependiente e ir agregando sucesivamente las que sean más efectivas en presencia de las ya incluidas. La efectividad de una variable se juzga por su coeficiente de correlación parcial con la variable dependiente o por su contribución a la suma de cuadrados debidos a la regresión.

El resultado del análisis se obtuvo una serie de funciones estimadoras que, en conjunto, integran el modelo fustal.

3.3.3. Funciones de ahusamiento para árboles individuales

Este método consiste en ajustar a cada árbol un mismo modelo, obteniendo para cada árbol coeficientes distintos. Enseguida se ajustan funciones estimadoras de estos coeficientes en función de la edad (E), el diámetro a 1.30 m (D) y la altura (h) del árbol.

Los modelos planteados son de dos tipos: libres y condicionados. Ellos poseen las siguientes configuraciones:

Modelos libres:

$$\frac{Dl}{D} = a_0 + a_1 \left[\frac{h-1}{h} \right] + a_2 \left[\frac{h-1}{h} \right]^2 \quad (3)$$

$$\frac{Dl}{D} = a_0 + a_1 \left[\frac{h-1}{h} \right] + a_2 \left[\frac{h-1}{h} \right]^2 + a_3 \left[\frac{h-1}{h} \right]^3 \quad (4)$$

$$\left[\frac{Dl}{D} \right]^2 = a_0 + a_1 \left[\frac{h-1}{h} \right] + a_2 \left[\frac{h-1}{h} \right]^2 \quad (5)$$

$$\left[\frac{Dl}{D} \right]^2 = a_0 + a_1 \left[\frac{h-1}{h} \right] + a_2 \left[\frac{h-1}{h} \right]^2 + a_3 \left[\frac{h-1}{h} \right]^3 \quad (6)$$

Modelos condicionados:

En estos modelos el término constante no existe, o es igual a cero. La función parte desde el origen del sistema de coordenadas.

$$\frac{Dl}{D} = a_1 \left[\frac{h-1}{h} \right] + a_2 \left[\frac{h-1}{h} \right]^2 \quad (7)$$

$$\frac{Dl}{D} = a_1 \left[\frac{h-1}{h} \right] + a_2 \left[\frac{h-1}{h} \right]^2 + a_3 \left[\frac{h-1}{h} \right]^3 \quad (8)$$

$$\left[\frac{Dl}{D} \right]^2 = a_1 \left[\frac{h-1}{h} \right] + a_2 \left[\frac{h-1}{h} \right]^2 \quad (9)$$

$$\left[\frac{Dl}{D} \right]^2 = a_1 \left[\frac{h-1}{h} \right] + a_2 \left[\frac{h-1}{h} \right]^2 + a_3 \left[\frac{h-1}{h} \right]^3 \quad (10)$$

$$\frac{Dl}{D} = a_1 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right] + a_2 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right]^2 \quad (11)$$

$$\frac{Dl}{D} = a_1 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right] + a_2 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right]^2 + a_3 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right]^3 \quad (12)$$

$$\left[\frac{Dl}{D} \right]^2 = a_1 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right] + a_2 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right]^2 \quad (13)$$

La obtención del modelo fustal tras este método, comprende una serie de etapas que se describen a continuación:

1a. Obtención del archivo fuente

Depuración y conformación del archivo fuente, que contiene la información de los árboles muestra medidos en terreno.

2a. Ajuste del modelo por árbol:

Se ajusta una función de ahusamiento para cada árbol. Se obtiene así para cada árbol un grupo de coeficientes de regresión y las variables del árbol (E, D, H), lo que en conjunto integra el Archivo de Coeficientes de Regresión. Este archivo contiene un registro por árbol.

3a. Estudio de las relaciones entre los coeficientes del modelo y los parámetros de los árboles:

A continuación se construyen modelos que permiten estimar, para cualquier árbol los coeficientes de la función de ahusamiento. Para ello, es necesario identificar el coeficientes que es mejor estimado por las variables del árbol E, D y H. Enseguida se identifica cuál de los coeficientes restantes es mejor estimado por las variables del árbol y el coeficiente identificado anteriormente. Dependiendo del grado del modelo es el número de veces que se hace necesario repetir este proceso, agregando cada vez un nuevo coeficiente a las variables independientes. Estos se realizan empleando el análisis de regresión múltiple paso a paso.

4a. Obtención y formación del modelo fustal.

Con las relaciones entre coeficientes y los parámetros E, D y H de los árboles identificados, se obtienen las funciones estimadoras de cada coeficiente del modelo.

El modelo fustal queda formado por tantas funciones estimadoras de los coeficientes como coeficientes tenga el modelo.

4. PARAMETROS Y PRUEBAS ESTADISTICAS EMPLEADAS PARA LA ELECCION DEL MODELO

La elección del modelo fustal se basó en:

- Error de estimación de la regresión.
- Valor del coeficiente de correlación múltiple.
- Test de hipótesis nula de los coeficientes de la ecuación.
- Significación de la "F" calculada
- Error cuadrático medio (E.C.M.)
- Sesgo probable (S.P.)

Las cuatro primeras herramientas estadísticas se asocian ordinariamente con el análisis de regresión múltiple, las dos restantes fueron definidas dadas las características de los modelos fustales empleando el método de los modelos para árboles individuales. De esta forma, se tiene una base de comparación común para los tres métodos de construcción planteados.

Los parámetros error cuadrático medio (E.C.M.) y sesgo probable (S.P.) se definen con las siguientes expresiones:

$$\text{E.C.M.} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (ve_i - v_{ri})^2}{n}}$$

$$\text{S.P.} = \frac{\sum_{i=1}^n (ve_i - v_{ri})}{n}$$

Donde:

- v_{ri} = Valor real de la i -ésima observación
- ve_i = Valor estimado de la i -ésima observación
- n = Número de observaciones

La aplicación de estas herramientas conduce a la elección del modelo fustal, que representa mejor la variación diamétrica a lo largo del fuste.

5. ANÁLISIS PARA JUZGAR LA BONDAD DEL AJUSTE DEL MODELO FUSTAL

El modelo fustal seleccionado mediante el empleo de las herramientas estadísticas descritas en el punto anterior, es sometido a un análisis de residuos que permite detectar la ausencia o presencia de sesgo asociado con una o más de las variables que caracterizan la forma del árbol.

El análisis de los residuos consiste en relacionar las diferencias entre los valores reales y valores estimados, con respecto a uno de los parámetros que caracterizan la forma del árbol.

El modelo fustal libre de sesgo, es sometido a la prueba de exactitud Freese (1960), la que requiere plantearse una varianza hipotética de acuerdo a la exactitud requerida (error admisible y probabilidad de éxito).

El test es aplicado en una primera etapa empleando el modelo para la estimación de diámetros, y en una segunda etapa para la estimación del volumen.

El manejo de las funciones de ahusamiento permite la estimación de diámetros a lo largo del fuste, volúmenes de secciones definidas a lo largo del fuste, además de otros parámetros del fuste. Los diámetros se obtienen por resolución directa de la función de ahusamiento. Los volúmenes se obtienen por integración analítica de las funciones.

Los diámetros estimados son comparados con aquéllos medidos en los árboles que integran la muestra. Los volúmenes estimados son comparados con los obtenidos de la cubicación de los árboles muestra, empleando el método de "Smalian" que considera el promedio de las áreas extremas de la sección.

5.1. Elección de la submuestra para identificar el modelo empleando el método funciones de ahusamiento para árboles individuales

Debido al tamaño de la muestra y al elevado número de modelos planteados para el método de "Funciones de Ahusamiento para árboles individuales", se seleccionó al azar una submuestra de alrededor de 80 árboles para identificar el modelo superior.

5.2. Muestra para las pruebas y análisis de los modelos fustales seleccionados

Los árboles empleados con este fin no participaron en la elección y construcción del modelo fustal. Estos son 163 árboles que cubren los diversos rangos de Edad, DAP y altura. Estos, fueron tomados de diversos lugares de la Provincia de Arauco.

6. RESULTADOS

6.1. Modelos Polinomiales Generales

Como función de ahusamiento construida en base a un modelo polinomial se ha seleccionado la siguiente función:

$$Y = -0.02749 + 0.34948 X + 1.09158 X^2 - 1.05507 X^3 + 0.52241X^4$$

Donde:

$$Y = \frac{D1}{D}$$

$$X = \left[\frac{h - 1}{h - 1 \cdot 3} \right]$$

Se ha podido comprobar que al incluir término de grado más alto no se logran mejoramientos significativos de la estimación.

Algunos parámetros estadísticos para esta función de regresión, son los siguientes:

$$n = 556$$

$$r = 0.977$$

$$SY.X = 9.2\%$$

$$\% \text{ de la suma de cuadrados reducida} = 95.5 \%$$

$$F \text{ para el análisis de varianza} = 29768.0$$

Valores "t" para los coeficientes de regresión:

	<u>Coeficiente</u>	<u>Valor "t" calculado</u>
a ₁	(0.34948)	4.339
a ₂	(1.09158)	8.056
a ₃	(1.05507)	8.708
a ₄	(0.52241)	9.571

El modelo evidencia una alta correlación y un bajo error de estimación. El análisis de residuos, realizados en base a una parte de la muestra, detectó sesgos en la estimación de los diámetros de ambos extremos del fuste.

El cuadro N° 2 presenta los valores de los parámetros, error cuadrático medio (E.C.M.) y sesgo probable (S.P.) para las secciones extremas, empleando el modelo polinomial general.

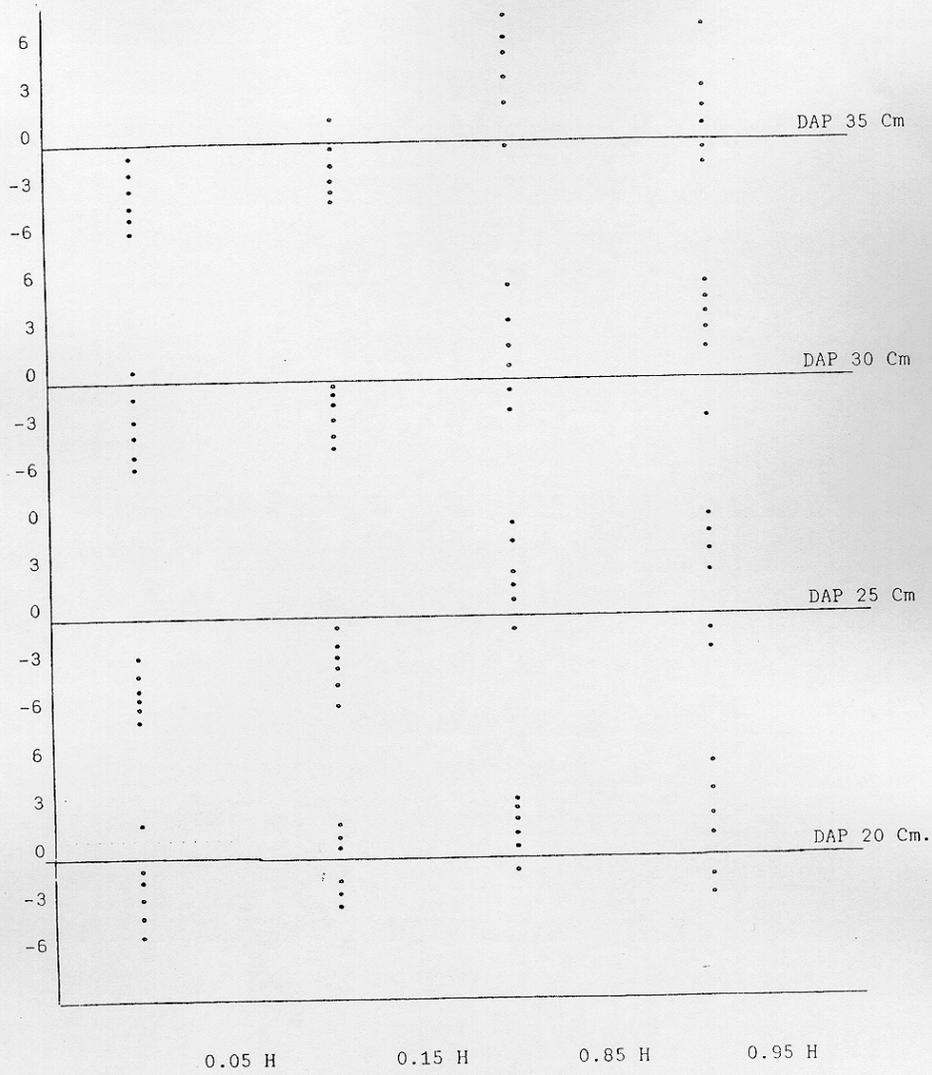
CUADRO N° 2

Error cuadrático medio (E.C.M.) y sesgo probable para las secciones extremas (base: 586 árboles)

Parámetros	Secciones relativas			
	0.05 H	0.15 H	0.85 H	0.95 H
E.C.M. (cm)	2.93	1.84	1.93	1.07
S.P. (cm)	-4.87	- 2.47	1.47	0.98

La figura N° 4 presenta el análisis de residuos para las secciones extremas con respecto al DAP, para seis árboles tomados al azar.

FIGURA N° 4



Análisis gráfico de residuos de secciones extremas frente al DAP empleando el modelo polinomial general.

En el cuadro N° 2 y figura N° 3 se evidencia la falta de ajuste de la función para los extremos del fuste. Los parámetros de la regresión representan la situación media para todo el fuste y muestra.

De lo anterior, se desprende que los modelos polinomiales generales no representan la variación diamétrica encontrada en la muestra. Ello se debe, sin duda a que esta muestra cubre una zona con variaciones de edad, altura, diámetro, estados de manejo y tratamientos silviculturales. Una misma familia de curvas no puede representar la variación diamétrica a lo largo del fuste, de acuerdo a los requerimientos y exigencias del estudio.

6.2. Funciones por sección

Las ecuaciones que forman el modelo fustal se obtuvieron del proceso de parte de la muestra. A continuación se presentan algunos esquemas de las ecuaciones y parámetros del análisis de regresión.

$$\frac{DO.15 H}{D} = F (X 0.15 H,H,D) \quad r = 0.51$$

$$SY \cdot X = 5.49\%$$

$$\frac{DO.55 H}{D} = F (X 0.55 H,H,D) \quad r = 0.51$$

$$SY \cdot X = 7.36\%$$

$$\frac{DO.95 H}{D} = F (X 0.95 H,H,D) \quad r = 0.33$$

$$SY \cdot X = 37.62\%$$

con:

$$n = 556$$

DO.15H= Diámetro a 0.15 de la altura

$$X0.15H= \frac{H - 0.15 H}{H - 1.3}$$

H = Altura

D = DAP

De los parámetros del análisis de regresión se aprecia que al pretender estimar, mediante este procedimiento, el diámetro en secciones superiores del fuste las estimaciones se hacen más inconsistentes.

El análisis de residuos mostró la existencia de sesgo en la función estimadores de diámetros de secciones. Este, es menor que el que afecta a la función encontrada bajo el tratamiento con el método anterior. El cálculo de los parámetros, error cuadrático medio (E.C.M.) y sesgo probable (.S.P.) muestran un comportamiento similar.

La variación diamétrica con esta función es representada por una familia de 10 curvas, a diferencia del método anterior que genera una sola curva o función. En ello se funda la superioridad de este método sobre el anterior.

6.3. Funciones de ahusamiento para árboles individuales

Este método de construcción de funciones de ahusamiento considera a cada árbol una forma de fuste distinta, pues los coeficientes varían de árbol en árbol, por esto se puso especial interés y se presentan en un mayor detalle los análisis efectuados a la función.

6.3.1. Identificación de los mejores modelos

Dado el elevado número de modelos planteados, se empleó la submuestra (80 árboles) para identificar aquéllos modelos que representen mejor la variación a lo largo del fuste.

Los análisis coincidieron en identificar como superiores a aquéllos modelos polinomiales de tercer grado sin término constante y que tenían como variable la expresión:

$$\frac{D_1}{D}$$

Los modelos logarítmicos no presentaron un buen comportamiento.

Los modelos identificados como los mejores, son los siguientes:

$$\frac{Dl}{D} = A_1 \left[\frac{h-1}{H} \right] + A_2 \left[\frac{h-1}{h} \right]^2 + A_3 \left[\frac{h-1}{h} \right]^3 \quad (8)$$

$$\frac{Dl}{D} = A_1 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right] + A_2 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right]^2 + A_3 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right]^3 \quad (12)$$

Debido al reducido diámetro y al consiguiente poco interés de la última sección, se ajustó cada modelo dos veces, una primera vez considerando las diez secciones y una segunda considerando nueve secciones desechando la del extremo superior. Los números o códigos de los modelos considerados son:

$$\frac{Dl}{D} = F \left[\frac{h-1}{h} \right] \quad 10 \text{ secciones} \quad (8a.)$$

$$\frac{Dl}{D} = F \left[\frac{h-1}{h} \right] \quad 9 \text{ secciones} \quad (8b.)$$

$$\frac{Dl}{D} = F \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right] \quad 10 \text{ secciones} \quad (12a.)$$

$$\frac{Dl}{D} = F \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right] \quad 9 \text{ secciones} \quad (12b.)$$

6.3.2. Elección del modelo

Con las ecuaciones de los modelos 8a., 8b., 12a. y 12b. se calculó el error cuadrático medio (E.C.M.) y el indicador del sesgo probable (S.P.), para los diámetros de las 10 secciones. Las estimaciones de los diámetros para la décima sección con los modelos 8b. y 12b. se obtuvieron por extrapolación de las ecuaciones. En el cuadro N° 3 se entregan los valores de dichos parámetros (E.C.M. y S.P.) para los modelos en estudio.

CUADRO N° 3

Error cuadrático medio (E.C.M.) y sesgo probable (S.P.) para los modelos 8a, 8b, 12a y 12b (Base: 80 árboles)

MODELOS	Altura relativa de medición									
	0.05h	0.15h	0.25h	0.35h	0.45h	0.55h	0.65h	0.75h	0.85h	0.95h
MOD.8a.										
E.C.M.en cm	0.402	0.661	0.418	0.353	0.492	0.617	0.476	0.559	0.574	0.985
S.P. en cm	0.116	-.254	0.034	0.113	0.151	-.023	-.132	-.135	-.031	0.506
MOD.8b										
E.C.M.en cm	0.393	0.644	0.400	0.341	0.484	0.611	0.454	0.530	0.965	1.020
S.P. en cm	0.145	-.275	-.002	0.083	0.146	0.001	-.080	-.066	0.033	0.536
MOD.12a										
E.C.M.en cm	0.401	0.660	0.421	0.352	0.493	0.618	0.477	0.556	0.574	0.959
S.P. en cm	0.147	-.256	0.033	0.112	0.151	-.231	-.132	-.135	0.031	0.506
MOD.12b										
E.C.M.en cm	0.397	0.661	0.408	0.340	0.492	0.610	0.455	0.529	0.598	1.020
S.P. en cm	0.114	-.237	-.001	0.085	0.147	0.002	-.079	-.066	0.033	0.536

Del estudio del cuadro N° 3, se aprecia la bondad de los modelos y de la comparación con el cuadro N° 2 la superioridad de este método.

La problemática se reduce a elegir y determinar cuál de los cuatro últimos modelos representan mejor la variación diamétrica a lo largo del fuste.



Los resultados que se presentan en el cuadro N° 3, permiten concluir que los modelos 8b. y 12b., que consideran 9 secciones para el ajuste son superiores. Ambos modelos tienen valores de los parámetros casi idénticos. Ante esta situación parece razonable el modelo 8b. por su mayor simplicidad.

El motivo de considerar la simplicidad del modelo como un elemento de juicio, se encuentra al proyectar el futuro uso del modelo fustal, como un elemento de cubicación en un sistema de inventario forestal en el cual cada árbol es cubicado individualmente y no agrupado en clases diamétricas. La ganancia se produce en términos de un menor tiempo de proceso. Este aspecto debe ser considerado siempre y cuando su inclusión no signifique una pérdida de ajuste.

El modelo 8b. seleccionado en una primera etapa, correspondió a la siguiente expresión:

$$\frac{Dl}{D} = A1 \left[\frac{h - l}{h} \right] + A2 \left[\frac{h - l}{h} \right]^2 + A3 \left[\frac{h - l}{h} \right]^3 \quad (8b.)$$

6.3.3. Obtención de la función de ahusamiento

A 556 árboles que forman parte de la muestra, se les ajustó el modelo elegido, obteniendo el conjunto de coeficientes A_1 , A_2 y A_3 para los 556 árboles; como también los parámetros que caracterizan la forma de los árboles: DAP, Altura y Edad. Con el archivo completo y el empleo del análisis de regresión múltiple, paso a paso se obtuvieron las regresiones para estimar los coeficientes de ahusamiento.

La obtención de los modelos estimadores de los coeficientes, fué exhaustiva, pues se probaron 42 variables obtenidas de las combinaciones, exponenciación y transformaciones logarítmicas de los parámetros que caracterizan la forma de los árboles: DAP, Altura y Edad.

6.3.4. Mejoramiento del modelo fustal

El modelo fustal encontrado empleando el modelo 8b., en base a una muestra de 556 árboles, resultó sesgado en la parte baja del fuste produciendo una pequeña sub-estimación en términos del diámetro, pero que en términos del volumen no era despreciable.

Debido a esta relativa limitación del modelo, se decidió ampliar la muestra a 1.060 árboles y utilizar el modelo 12 b., que tiene como variable independiente la expresión $\left[\frac{h-1}{h-1.3} \right]$ que al forzar valores puede dar más consistencia en la parte baja del fuste.

Las ecuaciones estimadoras de los coeficientes, empleando la muestra total sobre el modelo 12b., se presentan a continuación:

$$A1 = 0.3595811 + 3.58815 \times \frac{H}{D} + 0.0755877 \times \frac{E^2}{H} - 2.56737 \times \frac{\sqrt{E}}{H} - 0.53223 \times \frac{H \times \sqrt{E}}{D} - 0.00000219219 \times D^2 \times H$$

$$A1 = F_1 (E, H, D)$$

$$r = 0.635$$

$$Sy.x = 17.55\%$$

Proporción de la suma de cuadrados reducida = 40.4 %

Valor "F" para el análisis de varianza = 85

Valores "t" para los coeficientes de regresión:

	<u>Coefficientes</u>	<u>Valor "t" calculado</u>
a ₁	(3.58815)	7.732
a ₂	(0.0755877)	6.746
a ₃	(2.56737)	4.779
a ₄	(0.53223)	3.205
a ₅	(0.00000219219)	1.9994

$$A^2 = 0.7761614 - 2.49394 \times A1 + 3.84072 \times \frac{H}{D} - 1.52782 \times \frac{H^2}{D^2} + 0.0754085 \times \frac{H \times \sqrt{E}}{D}$$

$$A^2 = F_2 (A1, E, H, D)$$

$$r = 0.964$$

$$Sy.x = 12.59\%$$

Proporción de la suma de cuadrados reducida = 92.9%

Valor "F" para el análisis de varianza = 2.048

Valores "t" para los coeficientes de regresión:

<u>Coefficiente</u>	<u>Valor "t" calculado</u>
a_1 (2.49394)	76.699
a_2 (3.84072)	5.658
a_3 (1.52782)	4.220
a_4 (0.0754085)	3.828

$$A_3 = 1.062428 - 1.08145 \times A_2 - 1.12346 \times A_1 - 0.00532087 \times \frac{E^2}{H}$$

$$A_3 = F_3 (A_2, A_1, E, H)$$

$$r = 0.966$$

$$Sy.x = 4.40\%$$

Proporción de la suma de cuadrados reducida = 93.3%

Valor "F" para el análisis de varianza = 34.045

Valores "t" para los coeficientes de regresión:

<u>Coefficiente</u>	<u>Valor "t" calculado</u>
a_1 (1.08145)	150.065
a_2 (1.12346)	63.751
a_3 (0.00532087)	11.463

En base a estas ecuaciones se obtiene la función de ahumamiento que se representa de la siguiente manera:

$$\frac{D1}{D} = F_1 (E, D, H) \times \left[\frac{H-1}{H-1.3} \right] + F_2 (A_1, E, D, H) \times \left[\frac{H-1}{H-1.3} \right]^2 + F_3 (A_1, A_2, E, H) \times \left[\frac{H-1}{H-1.3} \right]^3$$

6.3.5. Pruebas y cálculos de los errores medios para los diámetros

Todas las pruebas y análisis sucesivos se realizan empleando la muestra de 163 árboles.

6.3.5.1. Análisis de residuos para los diámetros

En una primera etapa se realizó un análisis gráfico de residuos para 25 árboles de la muestra. Se denomina residuo para este fin, a la diferencia entre el valor real y el estimado. Estos residuos se analizaron respecto a los parámetros Edad, DAP y Altura.

El análisis gráfico no detectó la existencia de sesgo para la submuestra con respecto a los parámetros Edad, DAP y Altura.

Toda la muestra fué sometida a un análisis de residuos para lo que se empleó el análisis de regresión. Se ajustaron tres funciones para cada altura relativa, los ajustes tienen como variable dependiente los residuos e independiente uno de los parámetros Edad, DAP o Altura.

La existencia de sesgo se evidencia al existir una correlación significativa entre los residuos y las variables edad, diámetro o altura, para cualquier sección.

En el cuadro N° 4 se presentaron algunas de las regresiones obtenidas para el análisis de residuos.

CUADRO N° 4

Regresiones del ajuste de los residuos del tipo $Y=A_0 + A_1 X$
 donde Y = residuos (de una sección), X = parámetros (edad, diámetro, altura), A_0, A_1 = Constantes de regresión

Sección	Parámetro	Coeficientes de regresión		Valor "t" de A1	Coeficiente de correl. "r"
		A_0	A_1		
1	Altura	-.17732	0.00086	0.133	0.18
5	Altura	0.10196	-.00494	-.472	0.063
10	Altura	-.41814	-.00349	-.288	0.030
1	DAP	-.41959	0.00995	1.621	0.212
5	DAP	-.44208	0.01049	1.336	0.176
10	DAP	0.35452	-.01462	-1.460	0.191
1	Edad	-.17253	-.01281	-.875	0.116
5	Edad	-.16892	0.00027	0.033	0.004
10	Edad	0.68942	-.05434	2.708	0.122

Del Cuadro N° 4 se desprende la ausencia de sesgo en la estimación del diámetro con respecto a los parámetros Edad, DAP y Altura.

6.3.5.2. Errores medios para los diámetros

Es necesario cuantificar los errores y el sesgo probable que se comete al emplear la función de ahusamiento para estimar los diámetros a lo largo del fusete, para lo cual se calcularon los parámetros error cuadrático medio (E.C.M.) y sesgo probable (S.P.) para toda la muestra, estos se presentan en el Cuadro N° 5 junto al error de estimación, el que se define para este estudio como el cociente entre el error cuadrático medio en cm. y el valor medio del diámetro en centímetros por cien, éste expresado en porcentaje.

$$\text{Error de estimación (\%)} = \frac{\text{E.C.M. (cm)}}{\text{Valor medio del D (cm)}} \times 100$$

D = Diámetro.

CUADRO N° 5

Error cuadrático medio (E.C.M.) , sesgo probable (S.P.) y error de estimación (%), a décimos de la altura cometidos al estimar diámetros empleando la función de ahusamiento

Secciones o alturas relativas	Sesgo Probable en cm	Error cuadrático medio en cm	Error de estimación en porcentaje
1° 0.05 H	-.316	0.857	3.18
2° 0.15 H	-.649	1.030	4.47
3° 0.25 H	-.061	0.594	2.81
4° 0.35 H	0.020	0.631	3.21
5° 0.45 H	0.026	0.686	3.85
6° 0.55 H	0.241	0.692	4.35
7° 0.65 H	0.271	0.636	4.67
8° 0.75 H	0.218	0.839	7.69
9° 0.85 H	0.066	0.613	8.17
10° 0.95 H	0.771	0.867	24.08

Del Cuadro N° 5 se desprende la baja magnitud del error incurrido al estimar diámetros empleando la función de ahusamiento, detectándose una sub-estimación en la parte baja del fuste y una sobre estimación en la parte alta del fuste, la que se acentúa en las secciones extremas superiores del fuste, las que poseen un pequeño diámetro promedio y por ende una menor importancia, no restando representatividad a la función de ahusamiento para todo el fuste.

6.3.5.3. Prueba de bondad de ajuste para los diámetros

La función de ahusamiento fué sometida a un análisis estadístico para probar la bondad de ajuste. Para ello se empleó la prueba de exactitud propuesta por Freese 1960, para un error máximo admisible del 10% y una probabilidad de éxito igual al 95%, los resultados de esta prueba se presentan en el cuadro N° 6, el que manifiesta que las estimaciones para la última sección extrema superior es rechazada por la prueba, pero las nueve anteriores son aceptadas.

CUADRO N° 6

Valores tabulados y calculados para la prueba de exactitud propuesta por Freese en términos del diámetro para un error máximo admisible del 10% y una probabilidad de éxito igual al 95%

Altura	Valor calculado	Valor tabulado
0.05 H	37.21	168.69
0.15 H	75.02	168.69
0.25 H	30.13	168.69
0.35 H	39.86	168.69
0.45 H	54.38	168.69
0.55 H	72.01	168.69
0.65 H	85.52	168.69
0.75 H	101.30	168.69
0.85 H	142.50	168.69
0.95 H	250.38	168.69

El Cuadro N° 6, muestra la aceptación de las nueve secciones inferiores y rechazo de la del extremo superior para la prueba de exactitud propuesta por Freese 1960.

El volumen se concentra en la parte baja del fuste, las masas forestales se describen habitualmente mediante el volumen cúbico con índices de utilización superiores o iguales a 10 cm, el que se encuentra como valor promedio en la 8a. sección de los fustes de la muestra de este estudio.

6.3.6. Pruebas y cálculos de los parámetros medios, para los volúmenes

M.C.S.S./C IU = 10 ; 15; 20 cm

El interés de contar con una función de ahusamiento, es para utilizarla en el cómputo del volumen con índices de utilización variables.

La función de ahusamiento es analizada en términos del volumen M.C.S.S./C para los índices de utilización IU= 10, 15, 20 cm, calculándose los parámetros error cuadrático medio (E.C.M.), sesgo probable (S.P.) y error de estimación (%). En el cuadro N° 7 se presentan los valores de estos parámetros para toda la muestra.

CUADRO N° 7

Error cuadrático medio (E.C.M.), sesgo probable (S.P.) y error de estimación (%) para el volumen M.C.S.S./C. IU = 10, 15, 20 cm.

Volumen M.C.S.S./C	S.P. (m3)	E.C.M. (m3)	Error de estimación (%)
10 cm	-0.0521	0.0271	3.99
15 cm	-0.0577	0.0336	5.09
20 cm	0.0492	0.0431	5.58

Los valores de los parámetros son bajos, los que, sin embargo, no son despreciables y tienen tendencia a aumentar a medida que se incrementa el índice de utilización.

El Cuadro N° 7 muestra la magnitud de los errores medios probables, cometidos al emplear la función de ahusamiento en el cómputo del volumen, pero es necesario probar la bondad del ajuste de la función con respecto al volumen, para ello se emplea la prueba de exactitud propuesta por Freese 1960, para un error máximo admisible del 10% y con una probabilidad de éxito igual al 95%. Estos valores se presentan en el cuadro N° 8.

CUADRO N° 8

Valores tabulados y calculados para la prueba de exactitud propuesta por Freese 1960, en términos del volumen M.C.S.S./C. IU = 10, 15, 20 cm para un error máximo admisible del 10% y una probabilidad de éxito igual a 95%

Volumen M.C.S.S./C IU	Valor calculado	Valor tabulado
10 cm	99.36	168.69
15 cm	113.59	168.69
20 cm	148.10	168.69

Del Cuadro N° 8 se desprende la bondad de la función de ahusamiento para el cómputo del volumen. A medida que aumenta el índice de utilización el valor calculado aumenta y se hace más cercano el valor tabulado, lo que indica menor consistencia de la función cuando el volumen a estimar disminuye, sin embargo, la función satisface los objetivos que dieron origen al estudio.

7. CONCLUSIONES

1. La cuantificación de la forma del fuste requiere de varias mediciones de diámetros y alturas a lo largo del fuste, junto a los parámetros del árbol, pues la forma del fuste varía de árbol en árbol.
2. El método de Funciones de Ahusamiento para árboles individuales es el que representa mejor la forma del fuste, lo que no significa que los otros métodos sean deficientes sino que, dada las características y límites del estudio, es el que se ajusta mejor.
3. La forma del fuste es mejor representada por funciones polinomiales, las que tienen coeficientes distintos para cada árbol.
4. Se produce una ganancia en el ajuste al considerar tan sólo nueve de las diez secciones relativas, debiéndose extrapolar para la décima sección.
5. El cociente altura y DAP (H/D) es la variable para este estudio, más importante en la cuantificación de la forma.
6. El modelo fustal es independiente de la expresión sitio, el que está controlado por los parámetros altura y edad en la determinación de los coeficientes.
7. El modelo fustal presenta numerosas ventajas para la estimación de los parámetros de los árboles y rodales, pero debido a la magnitud y número de sus cálculos debe ser manejado preferentemente mediante procesamiento electrónico. Para ello, es suficiente un computador de 32K de memoria, que soporte lenguaje FORTRAN o BASIC.
8. Los resultados obtenidos se deben en gran parte a la calidad de los bosques que se encuentran en la Provincia de Arauco, en donde los árboles en su mayoría están libres de defectos y deformaciones.
9. El método puede ser aplicado a la misma muestra, para dar origen a modelos fustales con corteza, esperándose una ganancia del ajuste por la uniformidad que representa la inclusión de la corteza.

8 RESUMEN

El estudio trata de la construcción de Modelos Fusatles empleando los métodos: Funciones Polinomiales Generales, Funciones por Sección y Funciones de Ahusamiento para árboles individuales.

La muestra consiste en 1.060 árboles de Pinus radiata (D. don), a los que se le midieron diámetros a lo largo del fuste, DAP (D), altura (H) y edad (E), y provienen de la Provincia de Arauco.

El método que resultó superior, fué el de las Funciones de Ahusamiento para árboles individuales, el que consiste en ajustar para cada árbol un mismo modelo base y luego obtener funciones de estimación de los coeficientes del modelo base en función de los parámetros identificados como los indicadores de la forma (H, D, E) del fuste

El modelo seleccionado correspondió al siguiente polinomio condicionado de tercer grado:

$$\frac{Dl}{D} = A_1 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right] + A_2 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right]^2 + A_3 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right]^3$$

donde:

Dl = diámetro dentro de corteza, en cm., a cualquier altura dada en m.

l = Altura de medición del diámetro sobre el suelo en m.

A_1, A_2, A_3 = Coeficiente de regresión

y las funciones estimadoras de los coeficientes de regresión

$$A_1 = -0.3595811 + 3.58815 \times \frac{H}{D} + 0.0755877 \times \frac{E^2}{H} - 0.53223 \times \frac{H \times \sqrt{E}}{D} - 2.56737 \times \frac{\sqrt{E}}{H} - 0.00000219219 \times D^2 \times H$$

$$A_2 = 0.7761614 - 2.49394 \times A_1 + 3.84072 \times \frac{H}{D} - 1.52782 \times \frac{H^2}{D^2} - 0.0754085 \times \frac{H \times \sqrt{E}}{D}$$

$$A_3 = 1.062428 - 1.08145 \times A_2 - 1.12346 \times A_1 - 0.00532087 \times \frac{E^2}{H}$$

Este modelo representa fielmente la forma del fuste pudiendo ser empleado para estimar parámetros de los árboles y del rodal siempre y cuando los árboles a los que se les aplique, sean de la Provincia de Arauco y no escapen de los límites de la muestra.

9. SUMMARY

The study refers to the construction of trunks models employing the following methods: General functions polinomials, function polinomials, functions by section and taper functions for individuals trees.

The sample consist of 1.060 trees of *Pinus radiata* (D. Don), in which was measured the diameter along the trunk, D.B.H. (D), Height (H) and Age (E). They come from Arauco Province.

The method that gave the highest result was the method of taper function for individuals trees, wich consist in adjusting for each tree the same base model and then to obtain estimating functions of the coefficients of the base model in function of the parameters, identified as the trunk shape indicators (H, D, E).

The selected model correspond to the following third grade conditioned polinomion:

$$\frac{Dl}{D} = A_1 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right] + A_2 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right]^2 + A_3 \left[\frac{h-1}{h-1.3} \right]^3$$

Thus:

Dl = diameter i.b. in cm at and given height, in m.

l = height above the around, in m.

A_1, A_2, A_3 = regression coefficients

and the estimating functions of the regression coefficients:

$$A_1 = -0.3595811 + 3.58815 \times \frac{H}{D} + 0.0755877 \times \frac{E^2}{H} - 0.532233 \times \frac{H \times \sqrt{E}}{D} - 2.56737 \times \frac{\sqrt{E}}{H} - 0.00000219219 \times D^2 \times H$$

$$A_2 = 0.7761614 - 2.49394 \times A_1 + 3.84071 \times \frac{H}{D} - 1.52782 \times \frac{H^2}{D^2} - 0.0754085 \times \frac{H \times \sqrt{E}}{D}$$

$$A_3 = 1.062428 - 1.08145 \times A_2 - 1.12346 \times A_1 - 0.00532087 \times \frac{E^2}{H}$$

This model represents authentically the trunk shape, that can be used to estimate parameters of the trees and stand, whenever the applying trees being used are from Arauco Province, and they are not cut of the sample limits.

10. BIBLIOGRAFIA

1. BENNETT, F.A., SWINDEL, B.F. 1972. Taper curves for slash pipe, USDA Forest Service Research Note SE-179.
2. BRUCE, D., SCHUMACHER, F.X. 1936. Medición forestal. Primera edición en español. Editorial Herrero, S.A. México, D.F. 474 pag.
3. BURSTALL, S.M., DUFF, G. 1957. Combined taper and volume tables for Pinus ponderosa-Rotorua, 1956; Unthinned stands. Forest research institute New Zealand Forest Service. N° 10, 22 pag.
4. _____ 1959. Combined taper and volume tables for Pinus radiata New Zealand, 1957: shelterbelts and for Pseudotsuga taxifolia New Zealand, 1958 all stands. Forest research institute New Zealand Forest Service. N° 19, 63 pag.
5. CARRON, L. 1968. An outline of forest mensuration with special reference to Australia. Combena. Australia National University Press. 224 pag.
6. CHAPMAN, L., MEYER, W.H. 1949. Forest Mensuration. Mc Graw Hill Book Company. 522 pag.

7. DEPARTAMENTO DE MANEJO Y ECONOMIA FORESTAL, 1977. Apuntes de la Cátedra de Mensura Forestal. Mimeografía dos. Facultad de Ingeniería Forestal Universidad Austral de Chile.
8. DEMAERSCHALK, J.P. 1973. Integrated systems for the estimation of tree taper and volumen. Can. J. For. Res. 3,90-94.
9. _____ KOZAK, A. 1977. The whole-bole system: a conditione dualequation system for precise prediction of tree profiles. Can. J. For. Res. 7: N° 3, 488-497.
10. DUFF, G., BURSTALL, S.W. 1955. Combined taper and volume tables for Pinus radiata. New Zealand For. Res. Notes N° 1. 71 pág.
11. FREESE, F. 1960. Testing Accuracy For. Sci., 6; 139-145.
12. _____ 1970. Métodos estadísticos elementales para técnicos forestales. México, Centro Regional de Ayuda Técnica Agencia para el Desarrollo Internacional. 104 pag, (Manual de Agricultura N° 317)
13. GROSENBAUGH, L.R. 1966. Tree form; definition, interpolation, extrapolation. Forestry Chronicle, Vol. 42 N° 4. 444-457.