UNIVERSIDAD DE CHILE

Facultad de Ciencias Forestales
Escuela de Ciencias Forestales
Ingeniería Forestal
Ingeniería de la Madera

Asignatura : Algebra y Trigonometría.
Profesores : **Dante Haro B.**
Ricardo Delzón E.
Ayudante : Gustavo Castro P.
Actividad : Ayudantía Binomio Newton
Semestre : Otoño 2008

AYUDANTIA
BINOMIO DE NEWTON

I) Problemas Resueltos.

1. En el desarrollo de $\left(3x^2+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{20}$, determinar:

   i) El cuarto término.
   ii) El coeficiente de x^{10}.
   iii) El término independiente de *x*.

   Solución:

   i) $\left(3x^2+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{20}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}(3x^2)^{20-k}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^k\cdot x^{40-\frac{5}{2}k}$

   Se tiene, $T_{k+1}=\binom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^k\cdot x^{40-\frac{5}{2}k}$ representa un término cualquiera del desarrollo.

   Luego, el cuarto término, T_4 se obtiene para $k=3$. Luego $T_4=\binom{20}{3}3^{17}\cdot 2^3\cdot x^{\frac{65}{2}}$.

   ii) El coeficiente de x^{10} es $\binom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^k$ para un valor de k, tal que $40-\frac{5}{2}k=10\Rightarrow k=12$.

   $\therefore$ El coeficiente de x^{10} es $\binom{20}{12}3^{8}\cdot 2^{12}$.

   iii) El término independiente de *x* es $\binom{20}{k}3^{20-k}\cdot 2^k$ para un valor de *k* tal que $40-\frac{5}{2}k=0\Rightarrow k=16$. $\therefore$ El término independiente de x es $\binom{20}{16}3^{4}\cdot 2^{16}$.

2. En el desarrollo de $\left(x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^4}\right)^{n}$, encontrar el término independiente de *x*, si se sabe que el coeficiente del tercer término es mayor que el coeficiente del segundo término en 44 unidades.

Solución:

$$\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^{3/2})^{n-k}\cdot(x^{-4})^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{\frac{3}{2}n-\frac{11}{2}k}$$

Coeficiente tercer término: $\binom{n}{2}$; Coeficiente seg.término: $\binom{n}{1}$

$$\Rightarrow\binom{n}{2}=\binom{n}{1}+44\Leftrightarrow\frac{n^2-n}{2}=n+44\Leftrightarrow n^2-3n-88=0\Rightarrow n=11\ \vee\ n=-8$$

Como $n\in IN\Rightarrow n=11$. Luego $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n=\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^{11}=\sum_{k=o}^{11}\binom{11}{k}\cdot x^{\frac{33}{2}-\frac{11}{2}k}$

El término independiente de *x* es $\binom{11}{k}$ donde k es tal que $\frac{33}{2}-\frac{11}{2}k=0\Leftrightarrow k=3$.

Finalmente el término independiente de *x* es $\frac{11!}{3!\cdot 8!}=\frac{8!\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 8!}=165$.

3. Determinar el valor de *n* para que los quintos términos de $\left(a+\frac{1}{a^3}\right)^{4n}$ y $\left(a^2+\frac{1}{a^4}\right)^{4n}$ sean iguales.

Solución:

$$\left(a+\frac{1}{a^3}\right)^{4n}=\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}\cdot a^{4n-k}\cdot\left(a^{-3}\right)^k=\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}\cdot a^{4n-4k}$$

$$\left(a^2+\frac{1}{a^4}\right)^{4n}=\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}\cdot\left(a^2\right)^{4n-k}\cdot\left(a^{-4}\right)^k=\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}\cdot a^{8n-6k}$$

El quinto término de $\left(a+\frac{1}{a^3}\right)^{4n}$ es $\binom{4n}{4}\cdot a^{4n-16}$

El quinto término de $\left(a^2+\frac{1}{a^4}\right)^{4n}$ es $\binom{4n}{4}\cdot a^{8n-24}$

Luego $\binom{4n}{4}\cdot a^{4n-16} = \binom{4n}{4}\cdot a^{8n-24} \Leftrightarrow a^{4n-16} = a^{8n-24} \Rightarrow n = 2$.

4. Demostrar que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \quad n \in IN$

Solución:

Teorema de Binomio: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot a^k$. Si $a = b = 1$:

$$\Rightarrow (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \quad \therefore 2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.\ \text{QED.}$$

5. En el desarrollo de $\left(ax + \frac{1}{bx^2}\right)^n$, determinar la condición que debe cumplir *n* para que exista el término independiente de *x*.

Solución:

$$\left(ax+\frac{1}{bx^2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(ax)^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{bx^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^{-k}\cdot x^{n-3k}$$

El término independiente de *x* se obtiene para aquel valor de *k* tal que $n-3k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{n}{3}$.

Como $k = 1,2,3,.........,$ la condición sobre *n* es que *n* debe ser múltiplo de 3.

6. Determinar el coeficiente de x^{19} en el desarrollo de $(1+2x)\cdot(1-x^3)^9$

Solución:

$$(1+2x)(1-x^3)^9 = (1+2x)\sum_{k=0}^{9}(9_k)\cdot 1^{9-k}(-x^3)^k = (1+2x)\sum_{k=0}^{9}(9_k)(-1)^k x^{3k}$$

$$= \sum_{k=0}^{9}(9_k)(-1)^k x^{3k} + \sum_{k=0}^{9}2\binom{9}{k}(-1)^k x^{3k+1}$$

------------------------- -------------------------

$$3k = 19 \Leftrightarrow k = \frac{19}{3} \notin IN \qquad 3k+1 = 19 \Leftrightarrow k = 6$$

Luego, el coeficiente de x^{19} es $2\binom{9}{6}(-1)^6 = 168$

II) Problemas Propuestos

UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias Forestales
Escuela de Ciencias Forestales
Ingeniería Forestal
Ingeniería de la Madera

Asignatura : Algebra y Trigonometría.
Profesores : **Dante Haro B.**
Ricardo Delzón E.
Ayudante : Gustavo Castro P.
Actividad : Ayudantía Binomio Newton
Semestre : Otoño 2008

1. Desarrolle**:**

1.1. $\left(a-b \right)^7$ 1.2. $\left(2x+y^2 \right)^3$

1.3. $\left(5x-y^{1/2} \right)^5$ 1.4. $\left(x^{-1}+2y^{-1} \right)^6$

2. Determine:

2.1. El cuarto término de: $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y} \right)^6$

2.2. El término central de: $\left(\dfrac{3}{a}+a \right)^6$

2.3. Los términos centrales de: $\left(6x^2-\dfrac{1}{3x^3} \right)^{15}$

2.4. El término central en: $\left(x+\dfrac{1}{x} \right)^{2n}$

3. Determine el término independiente de x en el desarrollo de:

3.1. $\left(x^2-\dfrac{1}{x} \right)^9$; b) $\left(x-\dfrac{1}{x^2} \right)^{3n}$

4. Determine:

4.1 El coeficiente de x^{30} en el desarrollo de $\left(x^4-\dfrac{1}{x^3} \right)^{18}$

4.2 El coeficiente de x^{38} en el desarrollo de $\left(x^2-\dfrac{1}{2x} \right)^{25}$

4.3 El coeficiente de x^{17} en el desarrollo de $\left(5x^2+\dfrac{1}{3x} \right)^{34}$

4.4 El coeficiente del término que está en la posición 28 en el desarrollo de :

$$\left(x^3+\frac{1}{x} \right)^{52}$$

gpcastro@fen.uchile.cl

UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias Forestales
Escuela de Ciencias Forestales
Ingeniería Forestal
Ingeniería de la Madera

Asignatura : Algebra y Trigonometría.
Profesores : **Dante Haro B.**
Ricardo Delzón E.
Ayudante : Gustavo Castro P.
Actividad : Ayudantía Binomio Newton
Semestre : Otoño 2008

5. Verifique si se cumplen las siguientes igualdades:

5.1. $\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2} = \binom{n+2}{k}$

5.2 $\binom{n+3}{k} - 3\binom{n+2}{k} + 3\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-3}$

6 En cada caso, encuentre el valor de n que satisface la condición dada.

6.1. $\binom{n}{2} = 55$

6.2. $\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$

6.3. $2\binom{n}{5} = \binom{n}{4} + \binom{n}{6}$

6.4. $\dfrac{\binom{n}{5} - \binom{n}{4}}{\binom{n}{5} + \binom{n}{4}} = \dfrac{1}{2}$

7. Calcular el coeficiente de x^{-2} en el desarrollo de: $x^2(x^2 - \frac{2}{x^2})^{28}$

El término general del desarrollo es: $x^2\binom{28}{k}(x^2)^{28-k}(-2)^k(x^{-2})^k$

Reagrupando la expresión anterior, el término general queda:

$(-2)^k\binom{28}{k}x^{2+56-2k-2k} \quad = \quad (-2)^k\binom{28}{k}x^{58-4k} \quad \textit{y como se busca} \quad x^{-2} \quad \textit{se tiene}:$

$58 - 4k = -2 \;\Rightarrow\; k = 15$

Finalmente, el coeficiente buscado es: $-2^{15}\binom{28}{15}$

gpcastro@fen.uchile.cl