

UNIVERSIDAD DE CHILE

Facultad de Ciencias Forestales

Escuela de Ciencias Forestales

Ingeniería Forestal

Ingeniería de la Madera

Asignatura

Profesores

Ayudante

Actividad

Semestre

: Álgebra y Trigonometría.

: **Dante Haro B.**

Ricardo Delzón E.

: Gustavo Castro P.

: Ayudantía de Funciones-2

: Otoño 2008

AYUDANTIA DE FUNCIONES SEGUNDA PARTE

1) Sea $f(x)$ una función real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & x < 1 \\ (5 - x) / 4 & x \geq 1 \end{cases}$$

Determine si $f(x)$ es inyectiva.

SOLUCION

i) Sean x_1 y $x_2 < 1$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2 - x_1 = 2 - x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

ii) Sean x_1 y $x_2 \geq 1$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow (5 - x_1) / 4 = (5 - x_2) / 4 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

iii) Sean $x_1 < 1$ y $x_2 \geq 1$

$x_1 < 1$	$x_2 \geq 1$
$-x_1 > -1$	$-x_2 \leq -1$
$2 - x_1 > 2 - 1$	$5 - x_2 \leq 5 - 1$
$2 - x_1 > 1$	$(5 - x_2) / 4 \leq 4 / 4$
$f(x_1) > 1$	$f(x_2) \leq 1$

Por lo tanto $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$

Por i), ii), y iii) $f(x)$ es inyectiva.

UNIVERSIDAD DE CHILE

Facultad de Ciencias Forestales

Escuela de Ciencias Forestales

Ingeniería Forestal

Ingeniería de la Madera

Asignatura : Álgebra y Trigonometría.
Profesores : **Dante Haro B.**
Ricardo Delzón E.
Ayudante : Gustavo Castro P.
Actividad : Ayudantía de Funciones-2
Semestre : Otoño 2008

2) Sea f una función real definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{2} & \text{si } x < 2 \\ 3-x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- a) Determinar si $f(x)$ es biyectiva. Si no lo es, redefinirla, de modo que lo sea.
b) Hallar $f^{-1}(x)$

SOLUCIÓN

a) Inyectividad

i) sea $x_1, x_2 < 2$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \frac{4-x_1}{2} &= \frac{4-x_2}{2} \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

ii) Sea $x_1, x_2 \geq 2$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \\ 3-x_1 &= 3-x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

iii) $x_1 < 2, x_2 \geq 2$

$$\begin{array}{ll} x_1 < 2 \quad \bullet -1 & x_2 \geq 2 \quad \bullet -1 \\ -x_1 > -2 \quad +4 & -x_2 \leq -2 \quad +3 \\ 4-x_1 > +2 \quad \bullet \frac{1}{2} \text{ —} & 3-x_2 \leq 1 \\ & 2 \\ \frac{4-x_1}{2} > 1 & f(x_2) \leq 1 \\ f(x_1) > 1 & \end{array}$$

Como $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \rightarrow$ luego f es inyectiva

Epiyectividad. _

Si $x_1 < 2 \Rightarrow f(x_1) > 1$

Si $x_2 \geq 2 \Rightarrow f(x_2) \geq 1$

Todos los elementos de $\mathbb{R}$ son imagen de algún elemento de $\mathbb{R}$.

$\therefore$ es biyectiva $\Rightarrow f(x)$ tiene inversa.

UNIVERSIDAD DE CHILE

Facultad de Ciencias Forestales

Escuela de Ciencias Forestales

Ingeniería Forestal

Ingeniería de la Madera

Asignatura

Profesores

Ayudante

Actividad

Semestre

: Álgebra y Trigonometría.

: **Dante Haro B.**

Ricardo Delzón E.

: Gustavo Castro P.

: Ayudantía de Funciones-2

: Otoño 2008

b)

$$i) x < 2 \Rightarrow f(x) > 1$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = I(x)$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\frac{4 - f^{-1}(x)}{2} = x$$

$$-f^{-1}(x) = 2x - 4 \quad | \cdot -1$$

$$f^{-1}(x) = 4 - 2x$$

$$ii) x \geq 2 \Rightarrow f(x_2) \geq 1$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = I(x)$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$3 - f^{-1}(x) = x$$

$$-f^{-1}(x) = x - 3 \quad | \cdot -1$$

$$f^{-1}(x) = 3 - x$$

$$\text{Luego } f^{-1}(x) = \begin{cases} 4 - 2x & x > 1 \\ 3 - x & x \leq 1 \end{cases}$$

UNIVERSIDAD DE CHILE

Facultad de Ciencias Forestales

Escuela de Ciencias Forestales

Ingeniería Forestal

Ingeniería de la Madera

Asignatura

Profesores

Ayudante

Actividad

Semestre

: Álgebra y Trigonometría.

: **Dante Haro B.**

Ricardo Delzón E.

: Gustavo Castro P.

: Ayudantía de Funciones-2

: Otoño 2008

3) Determinar la Inversa de la siguiente Función $f(x) = \frac{3x-1}{2-x}$

SOLUCIÓN

i. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

ii. $\text{Rec}(f)$

$$y = \frac{3x-1}{2-x} \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y+3}$$

$$\text{Rec}(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$$

iii. Inyectividad

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\frac{3x_1-1}{2-x_1} = \frac{3x_2-1}{2-x_2}$$

$$5x_1 = 5x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Luego f es inyectiva

iv. Epiyectividad

Una función es epiyectiva, cuando el recorrido cubre todo el conjunto de llegada; es decir, todo elemento del conjunto de llegada (recorrido) es a lo menos un elemento del conjunto de partida (dominio).

En el caso específico de la función que estamos analizando, podemos apreciar que la imagen $y=3$, no posee pre imagen en "x" por tanto la función no es epiyectiva, pero para que sea epiyectiva debemos redefinirla de la siguiente manera:

f no es epiyectiva dado que el

$$\text{cod}f \neq \text{rec}f$$

$$\mathbb{R} \neq \mathbb{R} - \{-3\}$$

Redefino la función y se obtiene que:

$$\text{cod}f = \text{rec}f$$

$$\mathbb{R} - \{-3\} = \mathbb{R} - \{-3\}$$

Luego f es epiyectiva

UNIVERSIDAD DE CHILE

Facultad de Ciencias Forestales

Escuela de Ciencias Forestales

Ingeniería Forestal

Ingeniería de la Madera

Asignatura	: Álgebra y Trigonometría.
Profesores	: Dante Haro B. Ricardo Delzón E.
Ayudante	: Gustavo Castro P.
Actividad	: Ayudantía de Funciones-2
Semestre	: Otoño 2008

Luego dado que la función es inyectiva y epiyectiva a la vez, se puede determinar su inversa

v. Inversa de la función:

$$f^{-1} = f \circ f^{-1}(x) = Id$$

$$f(f^{-1}(x)) = Id$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\frac{3f^{-1}(x) - 1}{2 - f^{-1}(x)} = x$$

$$3f^{-1}(x) - 1 = 2x - f^{-1}(x)x$$

$$3f^{-1}(x) + f^{-1}(x)x = 2x + 1$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{x + 3}$$