

## Estudio de Casos

### ¿Y con el puro gráfico no basta?

Patricia es una Profesora de Matemática de un Colegio Particular, en el que ha echado raíces después de 20 de trabajo duro. Si bien hay muchas cosas de su trabajo que no le agradan, la tarea de educar ella la realiza con mucho cariño, y pareciera que el resto de las actividades escolares no existieran, cuando ella está enseñando, compartiendo o discutiendo con sus alumnos.

Ella siempre dice que está formando personas íntegras, que antes que profesora de matemáticas es profesora, así a secas, y le llena de orgullo que sus ex alumnos la recuerden, la visiten y la saluden con cariño cuando se la encuentran en el barrio.

Si bien ella no es muy partidaria de la reforma curricular, no la niega pro completo, y siempre que encuentra algo positivo en ella, lo lleva a cabo. Por lo general, siempre está abierta a las nuevas propuestas, y si le hacen sentido intenta implementarlas. Para ella el saber como enseñar es más importante que el qué enseñar, por eso siempre está leyendo e investigando acerca de nuevas metodologías y nuevas herramientas de enseñanza, más que de matemáticas: *“la matemática escolar es la misma desde hace un montón de años, ¿qué de nuevo debo aprender?”*, se le suele escuchar argumentar.

En este año se encuentra tratando uno de los temas que siempre le ha intrigado, desde que era estudiante, que es el de las funciones. A ella siempre le ha parecido un tema complicado, ha utilizado varias maneras, verlas como máquinas transformadoras, como fórmulas algebraicas, como relaciones del producto cartesiano (a la Bourbaki), ha utilizado tablas de doble entrada, ha utilizado software para obtener gráficos, etc. Lo ha probado todo y motiva a los estudiantes a que utilicen el formato que más les acomode personalmente. Su experiencia de todos estos años, le ha mostrado que la determinación del dominio de una función, permite enlazar habilidades algebraicas, numéricas y gráficas.

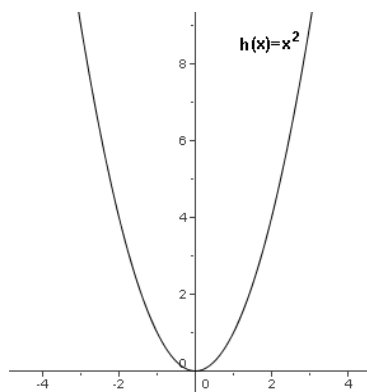
Para el curso de Tercero Medio en que se encuentra en este momento, diseñó su unidad de funciones reales con mucho cuidado, incorporando ejercicios elementales de tal manera que los alumnos comprendan realmente este concepto, lo que hasta ahora le está dando muy buenos resultados.

#### ***Momento 1 (El trabajo previo)***

Antes de comenzar con el estudio de la función raíz cuadrada, ella recordó algunos resultados de la función cuadrática.

Recordó que la función real,  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $h(x) = x^2$ , tiene un gráfico, como el que se muestra abajo.





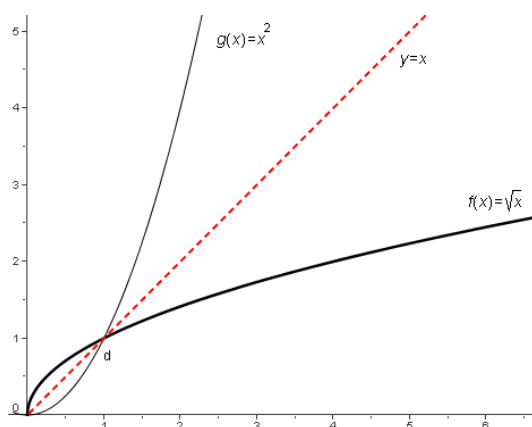
Los estudiantes guiados por las actividades de Patricia descubrieron que esta función no puede tener inversa, pues todo elemento de la imagen, salvo el cero, tiene dos preimágenes. Esto se evidenció cuando construyeron una tabla con algunos valores de  $x$  y los  $y = h(x)$  correspondientes:

$x$	0	1	-1	2	-2	3	3
$y$	0	1	1	4	4	9	9

También descubrieron que, restringiendo el conjunto de salida y el conjunto de llegada, se puede tener una inversa, por ejemplo:  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  definida por  $g(x) = x^2$ , sí tiene inversa.

Mediante un trabajo lento, muy guiado, con apoyo de software y mediante muchos ejemplos, que Patricia preparó, los estudiantes descubrieron que el gráfico de la función inversa  $g^{-1}$ , resulta de reflejar el brazo derecho de la parábola de arriba, respecto a la diagonal  $\{(x, y) / y = x\}$ . Una de las actividades que dio muy buenos resultados fue: una vez graficado el brazo derecho de la parábola  $y = x^2$ , doblar la hoja de papel sobre la diagonal, y luego calcar la parábola en la otra mitad de la hoja, para así obtener el gráfico de la inversa.

Por lo tanto, el gráfico de la función raíz cuadrada  $f = g^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , (definida por  $f(x) = \sqrt{x}$  si y solo si  $g(\sqrt{x}) = x$ ) es:





La profesora logra que los estudiantes descubran que el menor valor de  $x$ , produce el menor valor de  $f(x)$ . Para asegurar los aprendizajes Posteriormente la profesora trabaja con los alumnos:  $f : D \rightarrow R$  definida por  $f(x) = \sqrt{x+1}$ , y les pide encontrar  $D$  máximo, que permite que  $f$  sea función. Los alumnos responden bastante bien a las exigencias de Patricia, para aquel  $D$  los estudiantes también encuentran el recorrido de  $f$ .

Con todas estas condiciones la profesora piensa que está todo dado para profundizar los conceptos de dominio y recorrido y espera llegar más lejos en la próxima clase.

### ***Momento 2 (La Clase)***

Patricia llega a clases muy entusiasmada por el excelente trabajo que los alumnos habían realizado anteriormente y habiendo definido la función raíz cuadrada, quiere aprovechar la ocasión para desarrollar habilidades algebraicas en los estudiantes, trabajando actividades relacionadas con encontrar dominios de funciones.

Patricia les pide que trabajen en grupo, para encontrar el dominio y recorrido de:

$$f(x) = 2 + \sqrt{x+1} \quad (1)$$

Luego llega el momento en que cada uno de los grupos debe exponer su trabajo para ser analizado en la clase, estrategia metodológica que Patricia está utilizando con éxito desde hace algún tiempo.

El grupo de Fernanda, que siempre se ha caracterizado por ser una alumna muy ordenada y destacada en el trabajo algebraico, se ofrece para ser el primero en exponer.

**Fernanda** [iniciando la presentación]: Bueno compañeros, lo primero que hicimos fue calcular el dominio. Como lo que está en la raíz debe ser positivo entonces:

$$x+1 \geq 0$$

y nos queda que:

$$x \geq -1.$$

Entonces el dominio son todos los reales desde el “menos uno en adelante” (moviendo la mano derecha desde un punto fijo hacia la derecha), lo que escribimos como:

$$[-1, +\infty[$$

Ahora para determinar el recorrido, denotamos  $f(x) = y$ , luego reemplazamos en (1) y despejamos la raíz:

$$y - 2 = \sqrt{x+1}; \quad (2)$$



Después elevamos al cuadrado en ambos lados, y nos quedó:

$$(y - 2)^2 = x + 1$$

Desarrollando el cuadrado del binomio nos da:

$$y^2 - 4y + 4 = x + 1$$

y despejando la “x”, queda:

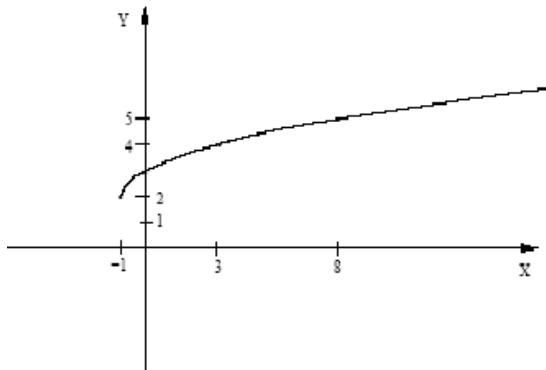
$$x = y^2 - 4y + 3$$

Y, como ustedes pueden ver, no hay restricciones para la “y”, entonces nuestro recorrido sería el conjunto de todos los reales.

Patricia felicita a Fernanda y su grupo, aunque no da ninguna muestra de estar de acuerdo o no, con el trabajo expuesto. Le pide a los otros grupos que muestren su trabajo en el caso que sea distinto al de Fernanda.

Toma la palabra Ana, reconocida por su profesora como muy creativa y que está muy motivada por el trabajo que están haciendo.

**Ana:** Profesora nosotros llegamos a ese mismo dominio pero nos da otro resultado en el recorrido, (tras una venia de la profesora, Ana continúa) Nosotros lo vimos haciendo la gráfica de la función. Para eso nosotros, recordamos el gráfico de la función raíz de  $x$ , luego la trasladamos una unidad hacia la izquierda y obtuvimos la gráfica de raíz de  $x$  más 1. Para finalizar trasladamos la gráfica anterior 2 unidades hacia arriba para obtener la gráfica de  $f$ .



Por lo tanto el recorrido es el conjunto de todos los números mayores o iguales a 2.

Patricia, felicita a Ana y a su grupo, y la invita a comprobar su resultado algebraicamente.

**Ana:** Nosotros intentamos un argumento algebraico para justificar nuestro resultado, haciendo lo que usted nos enseñó en clases anteriores y llegamos a lo mismo que hizo Fernanda. Después de un rato,



nos fijamos que si ponemos  $y = 0$  en esa ecuación (apunta la ecuación (2) que está escrita en la pizarra), nos queda  $-2 = \sqrt{x+1}$ , lo cual no tiene sentido, pues el número de la derecha no es

negativo. Por eso nos quedamos con que el recorrido es  $[2, \infty)$ . Pero no sabemos bien, donde está el error en el argumento algebraico.

**Profesora:** A ver ... (al curso) ¿Qué opinan ustedes? ¿Están de acuerdo con Ana? El recorrido es uno sólo y en alguna parte hay un error.

**Fernanda:** No Profesora, no hay ningún error, nosotros lo hicimos como usted nos dijo, y la solución algebraica no falla nunca.

**Ana:** Pero Fernanda, recuerda que en las clases anteriores vimos que el menor valor de las  $x$  produce el menor valor de las imágenes. Como el menor valor de las  $x$  es  $-1$ , como tu mismo dijiste, el menor valor de las imágenes es  $f(-1) = 2$ . Mira la gráfica que nosotros hicimos y te puedes dar cuenta que tienes un error. Colócale valores a  $x$  y te darás cuenta que si el dominio es del menos 1 en adelante, entonces no puede ser todos los reales el recorrido.

**Profesora:** El argumento de Ana es contundente, el valor  $y = 0$  no es la imagen de nadie. Pensemos en el problema, revisen sus resultados y argumentos y seguimos con la discusión la próxima clase. Entréguenme sus informes para revisarlos.

Patricia se va para su casa, con los informes en la carpeta, está ansiosa por leer los argumentos.

Fernanda camino a su casa piensa “*tal vez lo que hizo la profe, en los ejemplos anteriores no se aplican en todos los casos, tal vez no puedo pasar restando en las funciones como se hace en las ecuaciones, o tal vez no es llegar y elevar al cuadrado. Ana parece que está en lo correcto, es importante hacer la gráfica, y eso que yo tengo mejores notas que ella.....*”