Í N D I C E

INTRODUCCIÓN. 3

CAPÍTULO I
Registros de Representación ,
Comprensión y Aprendizaje 13

CAPÍTULO II
Las Funciones Discursivas
de una Lengua. 63

CAPÍTULO III
Lenguaje Natural
y Lenguaje Formal 93

CAPÍTULO IV
Figuras Geométricas
y Discurso Matemático 117

CAPÍTULO V
El Razonamiento 143

CAPÍTULO VI
La Comprensión de Textos 219

SEMIOSIS Y PENSAMIENTO HUMANO

Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales

Raymond Duval

Agradezco a todos los alumnos y profesores que me han recibido en sus clases y permitido descubrir la complejidad de los aprendizajes intelectuales.

Agradezco también a todos los que, en el marco de los IREM, me animaron a la redacción de esta obra, en particular, a Geneviève Didierjean, Marie-Agnès Egret, Dominique Guin, François Pluvinage, Marie-Paule Rommevaux.

Igualmente agradezco al Profesor Grize con quien los encuentros siempre fueron una preciosa estimulación.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las matemáticas constituye, evidentemente, un campo de estudio privilegiado para el análisis de actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas, e incluso, la comprensión de textos. La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes: variados sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraica y lógica que toman el status de lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar las relaciones y las operaciones, figuras geométricas, representaciones en perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. ¿Es esencial esta utilización de varios sistemas semióticos de representación y de expresión, o al contrario, no es más que un medio cómodo pero secundario para el ejercicio y para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales?

Esta pregunta sobrepasa ampliamente el dominio de las matemáticas y de su aprendizaje. En realidad, apunta hacia la naturaleza misma del funcionamiento cognitivo del pensamiento humano: ¿este funcionamiento cognitivo en sus actividades de aprehensión conceptual, de razonamiento o de comprensión de enunciados, es o no independiente de la existencia de una pluralidad de registros semióticos de representación? El aprendizaje de las matemáticas constituye el dominio en el que esta pregunta queda planteada de manera más manifiesta y más aguda.

Pero percibir el problema que subyace a esta pregunta y la posición que tiene en los aprendizajes escolares de base, en matemáticas como en francés, no es fácil. En efecto, hay argumentos muy potentes que parecen imponer la respuesta incluso antes que haya habido tiempo para plantear la pregunta. Detengámonos en dos de ellos.

El primero es que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Desde esta perspectiva, es esencial no confundir jamás los objetos matemáticos, es decir, los números, las funciones, las rectas, etc., con sus representaciones, es decir, las escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de las figuras... pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes. Y esta posibilidad es tan importante, que los autores de los manuales no han vacilado en hacer de esta distinción el tema recurrente en los textos dirigidos a los alumnos de octavo: es el objeto representado lo que importa y no sus diversas representaciones semióticas posibles (Deledicq et al, 1979). Toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida en la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones "inertes" que no sugieren ningún tratamiento productor. En virtud de su pluralidad potencial, las diversas representaciones semióticas de los objetos matemáticos serían pues secundarias y extrínsecas a la aprehensión conceptual de los objetos.

El segundo argumento es más global y más psicológico. Se basa en la existencia de representaciones mentales, es decir, de todo aquel conjunto de imágenes y de concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado. Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Las representaciones semióticas estarían

pues enteramente subordinadas a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación.

Si se llama **semiosis**[1] la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y **noesis**[2] los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia, parecería entonces evidente admitir que la *noesis* es independiente de la *semiosis* o, por lo menos, que la comanda. Muchos de los trabajos psicológicos y didácticos se basan implícitamente en esta evidencia.

Sin embargo, ésta no es más que una hipótesis que no toma en consideración fenómenos importantes.

En primer lugar, en matemáticas, las representaciones semióticas no sólo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma. En efecto, la posibilidad de efectuar tratamientos sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Es suficiente con considerar el caso del cálculo numérico para convencerse de ello. Los procedimientos, y su costo, dependen del sistema de escritura escogido: escritura binaria, escritura decimal, escritura fraccionaria. Los tratamientos matemáticos no pueden efectuarse independientemente de un sistema semiótico de representación. Y esta función de tratamiento sólo puede ser cumplida por las representaciones semióticas y no por las representaciones mentales. La utilización de representaciones semióticas es primordial para la actividad matemática y parece serle intrínseca.

De manera más global, se puede constatar que el progreso de los conocimientos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que más o menos coexisten con el primero de ellos, el de la lengua natural. Así, la formación del pensamiento científico es inseparable del desarrollo de simbolismos específicos para representar los objetos y sus relaciones (Granger, 1979, p. 21-47). Las Matemáticas son el dominio en el cual este fenómeno es más antiguo, más espectacular y, quizá también, más indispensable. La matematización de otras disciplinas se caracteriza quizá menos por la introducción de métodos de medida y de tratamientos puramente cuantitativos, que por el recurso a sistemas semióticos diferentes al del lenguaje natural (gráficas, lenguajes formales, tablas, figuras...). Esto es particularmente claro en el dominio de las ciencias llamadas "humanas". En fin, más generalmente, los individuos están ahora inmersos en un medio cultural que diversifica los modos de representación y que multiplica el recurso a esta diversidad de modos. Limitándose sólo al dominio de la enseñanza, basta con abrir y comparar los

---

[1] σημειου: signo, marca distintiva. σημειωσις: acción de marcar de un signo. J. Kristeva emplea éste término para designar las producciones ligadas a las prácticas significantes. Lo mismo U. Eco (1988)

[2] νοησις: intelección. Platón emplea este término para evocar las cosas propias para despertar *el acto de concebir por el pensamiento.* Este término no debe confundirse con διαυοια, traducida como pensamiento (*République,* VII 524 d5, 523 d9-e9, 523 b1). Aristóteles lo emplea igualmente para designar el acto de comprensión conceptual: "la intelección de los indivisibles (de las nociones simples y primeras) se relaciona con todo lo que excluye el riesgo de error" (*Περι ψνχης* III, 427b17, 430a26). Esto ha sido transcrito como **noèse** por Husserl (1950) para designar los pensamientos y las vivencias intencionales. Aquí hemos evitado a propósito el término de "comprensión" porque puede recubrir o bien una de las dos formas de aprehensión *(σημειωσις, νοησις)* o bien su fusión. También evitaremos el de "abstracción" porque toda semiosis puede ser considerada como una abstracción de la misma manera que la noesis. Para ciertos aspectos, podría aceptarse el término "conceptualización". Pero su acepción dominante está más ligada a la formación y a la adquisición de un concepto que a su movilización en un paso del pensamiento.

manuales de los años 1930 con otros de los años 1950, 1970, 1990, para constatar la amplitud y extensión irreversible del recurso a esta diversidad de sistemas semióticos, tanto en los manuales de Historia, de Geografía, de Francés como en los manuales de Matemáticas.

En una palabra, desde un punto de vista genético, las representaciones mentales y las representaciones semióticas no pueden oponerse como dominios totalmente diferentes. El desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas de la misma manera que las imágenes mentales son una interiorización de los perceptos (Vigotski, 1985; Piaget, 1968a, b; Denis, 1989). A esto es necesario añadir el hecho de que la pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales (Benveniste, 1974; Bresson, 1987). Como lo veremos, las representaciones mentales nunca pueden ser consideradas independientemente de las representaciones semióticas.

Dadas la necesidad de las representaciones semióticas para algunas funciones cognitivas fundamentales y la implicación recíproca de las representaciones mentales y de las representaciones semióticas, parece también legítimo avanzar la hipótesis contraria: no hay noesis sin *semiosis*; es la *semiosis* la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la *noesis.*

La pregunta sobre la naturaleza del lazo que une el funcionamiento cognitivo y la utilización de varios sistemas semióticos de representación, toca pues un verdadero problema. Su puesta en juego es importante tanto desde un punto de vista teórico como para la práctica de la enseñanza. Según la hipótesis que se adopte implícita o explícitamente, no se construye el mismo género de modelo para el funcionamiento cognitivo del pensamiento humano, no se privilegian los mismos factores de variación para el estudio de los aprendizajes, y no se proponen, en absoluto, las misma tareas en la enseñanza para desarrollar la adquisición de conocimientos, al menos en matemáticas y en francés.

El análisis de los problemas del aprendizaje de las matemáticas y de los obstáculos a los cuales los alumnos se enfrentan regularmente, conduce a reconocer detrás de la segunda hipótesis una ley fundamental del funcionamiento cognitivo del pensamiento: no hay *noesis* sin *semiosis*, es decir, sin el recurso a una pluralidad al menos potencial de sistemas semióticos, recurso que implica su coordinación por parte del sujeto mismo.

En efecto, en los diferentes niveles de enseñanza de las matemáticas, se puede observar la persistencia de un encapsulamiento de las representaciones que no provienen del mismo sistema semiótico. El paso de un sistema de representación a otro o la movilización simultánea de varios sistemas de representación en el curso de un mismo recorrido, fenómenos tan familiares y tan frecuentes en la actividad matemática, para nada son evidentes o espontáneos para la mayoría de los alumnos. Estos, las mas de las veces, no reconocen el mismo objeto a través de las representaciones que pueden darse en sistemas semióticos diferentes: la escritura algebraica de una relación y su representación geométrica sobre una recta o en el plano, el enunciado de una fórmula en lenguaje cotidiano y la escritura de esta fórmula en forma literal, etc.. Y, de manera más significativa, persiste un tal encapsulamiento incluso después de que en la enseñanza se hayan utilizado ampliamente estos diferentes sistemas semióticos de representación.

Este encapsulamiento, al cual generalmente se presta poca atención, resulta del fenómeno de no-congruencia entre las representaciones de un mismo objeto que provienen de sistemas semióticos diferentes. Generalmente, el paso de una representación a otra se hace espontáneamente cuando ellas son congruentes, es decir, cuando se cumplen las siguientes tres condiciones: correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, igual orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones, y convertir una unidad significante en la

representación de salida en una sola unidad significante en la representación de llegada. Pero cuando uno de estos tres criterios no se verifica, las representaciones no son congruentes entre sí y el paso de la una a la otra no tiene nada de inmediato. Igualmente se puede producir que dos representaciones sean congruentes en un sentido de conversión y no congruentes para la conversión inversa. Por ejemplo, la expresión "$xy \geq 0$" y la representación gráfica cartesiana de dos cuadrantes determinados respectivamente por los semi-ejes y y x positivos, x y y negativos, son congruentes si se pasa de la escritura algebraica al gráfico, pero no lo son en el paso inverso.

La distribución de los éxitos y de los fracasos observados en los cuestionarios de evaluación, permite verificar que la congruencia o la no-congruencia corresponden a factores muy fuertes de éxito o de fracaso en todas las preguntas que implican un cambio de sistema semiótico de representación. Toda tarea en la cual la conversión de las representaciones es congruente, da lugar a una taza mas o menos reducida de éxito, según el grado de no-congruencia.

La coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes no tiene nada de espontáneo. Su puesta en juego no resulta automáticamente de los aprendizajes clásicos demasiado directamente centrados en los contenidos de la enseñanza. Un trabajo de aprendizaje específico centrado en la diversidad de los sistemas de representación, en la utilización de sus posibilidades propias, en su comparación por la puesta en correspondencia y en sus "traducciones" mutuas, parece ser lo necesario para favorecer tal coordinación. Ahora bien, cuando se propone un tal tipo de trabajo, se constata una completa modificación en las iniciativas y en los recorridos de los alumnos para efectuar los tratamientos matemáticos, para controlarlos y para que la ejecución sea rápida, así como se nota el interés puesto en la tarea. Allí no hay simplemente éxito sino modificación de la cualidad de las producciones. Este salto cualitativo en el desarrollo de las "competencias" y de las "performances" aparece ligado a la coordinación de los sistemas semióticos en los alumnos.

Esta coordinación no se revela necesaria y únicamente en las matemáticas, sino también en el dominio de la lengua natural, al menos en lo que tiene que ver con el dominio que se manifiesta no a través de todas las reglas de la gramática, sino por la capacidad de escribir textos coherentes, organizados, argumentados, por la capacidad para comprender los textos leídos o para extraer la información pertinente cuando se solicita una respuesta a una pregunta específica. En efecto, cuando a los alumnos de octavo, de noveno o de décimo, se les solicita una producción discursiva, se obtienen textos radicalmente diferentes según el registro de representación semiótico que les sirva de apoyo o de *background* para el tema del texto a redactar: puede ser otro texto, o un gráfico proposicional que representa la organización de un razonamiento, o un esquema para una explicación, o una imagen para una descripción, o "bestialmente" la simple yuxtaposición de algunas palabras que debieran funcionar como palabras-clave, tal como se habrá podido ver con algunos temas de examen.

La importancia y la persistencia del encapsulamiento de las representaciones de sistemas semióticos diferentes a lo largo de todo el trayecto escolar de los alumnos desde la primaria hasta el final de secundaria, e incluso hasta la universidad, así como el salto cualitativo ligado a la coordinación de los registros en los alumnos, conduce a pensar que el lazo entre la *semiosis* y la *noesis* es mucho más estrecho y más profundo que lo que generalmente se admite. La comprensión conceptual, la diferenciación y el dominio de las diferentes formas de razonamiento, las interpretaciones -hermenéutica y heurística- de los enunciados, están íntimamente ligados a la movilización y a la articulación cuasi-inmediatas de algunos registros de representación semiótica. La conversión de las representaciones depende de esta coordinación. La conversión es una actividad cognitiva primordial, menos visible que el tratamiento propiamente dicho, es decir, que la transformación de las representaciones en el mismo sistema semiótico en que son dadas, pero sin

embargo esencial. Y esencial porque todo recorrido intelectual, ya se trate de un razonamiento, de una explicación, de una descripción, de un cálculo, de la resolución de un problema, implica la mayoría de las veces que las representaciones semióticas sean convertidas para poder ser tratadas. La segunda hipótesis se impone pues contra la primera, la cual, en primer momento, parece más evidente.

En esta obra vamos a desarrollar un análisis de este fuerte vínculo entre semiosis y noesis en el funcionamiento cognitivo del pensamiento, así como un análisis de las consecuencias de este vínculo en los aprendizajes de matemáticas y de francés. De manera contraria a una tendencia que se ha hecho predominante, el análisis desarrollado no apuntará en primer lugar hacia las estructuras de los diferentes sistemas semióticos de representación, sino hacia las funciones que ellos permiten cumplir. En esto seguimos un principio sobre el cual Piaget siempre insistió: *"el análisis funcional constituye el cuadro previo a todo análisis estructural"* (Piaget, 1967, p. 169). Expondremos las investigaciones que han permitido desarrollar y justificar tal análisis, e igualmente mostraremos su fecundidad teórica.

El primer capítulo está dedicado a los problemas que suscita el hecho de que sea la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la *noesis.* En primer lugar se hará el análisis de las relaciones entre representación semiótica y representación mental en el desarrollo y en el ejercicio de actividades cognitivas. Será un análisis funcional que permitirá dilucidar la naturaleza de estas relaciones mostrando las funciones cognitivas que cada uno de estos dos tipos de representación permiten o no cumplir. Se verá que las representaciones semióticas no sólo cumplen las mismas funciones que las representaciones mentales, sino que también cumplen otras que escapan a las representaciones mentales. El problema esencial de la *semiosis* es, naturalmente, el de la diversidad de los sistemas de representación y el de los fenómenos de no-congruencia que resultan por la conversión de las representaciones. En caso de no-congruencia, la conversión de las representaciones es sólo efectuable y comprensible por los sujetos para los cuales la coordinación de los registros de representaciones está puesta en juego, por lo menos en parte. Veremos por qué esta coordinación no puede ser la consecuencia de la aprehensión conceptual. Por el contrario, es una condición esencial.

El segundo capítulo está dedicado a la lengua natural, o más precisamente, a las diferentes funciones discursivas que un sistema semiótico debe permitir cumplir para ser una lengua. La lengua natural, naturalmente, tiene un status aparte entre el conjunto de los sistemas semióticos posibles. Benveniste la considera como "la organización semiótica por excelencia" (1974, p. 62-63). Pero aquí es importante distinguir el plano propiamente lingüístico con su diversidad de reglas sintácticas, su riqueza de formas lexicales, su complejidad de redes semánticas, que fundamentan un sistema semiótico aparte, y el plano discursivo "donde se libera el dominio de la lengua como sistema de signos y donde se entra en otro universo", el de los conocimientos que se quieren transmitir sobre las "cosas mas allá de la lengua" (Benveniste, 1966, p. 130; 1974, p. 225). *Las funciones discursivas no pueden separarse de las funciones cognitivas.* Es en el plano discursivo, que depende de una intencionalidad de enunciación (Benveniste, 1974, p. 64-65, 225), y no en el plano lingüístico, regido por las reglas, que la lengua natural aparece como un registro de representación. La potencia de la lengua natural radica en el hecho de que es el sistema semiótico que permite cumplir en un mismo acto intencional todas las grandes funciones discursivas. Veremos que hay cuatro funciones discursivas que no deben confundirse con funciones más generales, como la de comunicación, que igualmente cumplen todos los otros sistemas semióticos. Estas cuatro funciones discursivas inseparables de las funciones cognitivas son: la función referencial de designación de objetos, la función apofántica de enunciados completos, la función de expansión discursiva de un enunciado completo y la función metalingüística de reflexividad discursiva. Para

cada una de estas funciones discursivas existen operaciones específicas, cuya primera descripción sistemática fue propuesta por J.B. Grize (1983). Cada operación conduce a una gama particular de formas lingüísticas. Esto quiere decir que toda segmentación del discurso en unidades del discurso no se hace prioritariamente con sólo criterios lingüísticos, sino que depende de manera decisiva de criterios cognitivos.

El tercer capítulo utiliza los análisis de las diferentes funciones discursivas de una lengua y de las operaciones que les corresponden, para estudiar los problemas planteados por lo que se ha llamado "los lenguajes formales". El paso de un enunciado en lengua natural a un enunciado en lenguaje formal, por ejemplo el cálculo de los predicados de primer orden (constituidos por funciones proposicionales, cuantificadores, variables y operadores proposicionales llamadas aún funciones de verdad), suscita dificultades considerables de no-congruencia y ha conducido a oponer las lenguas naturales y las lenguas formales. Estas dificultades han sido puestas en evidencia, con interpretaciones teóricas muy diferentes, por Russell, Wittgenstein y la escuela de Oxford. A pesar de la cantidad de trabajos que éstos autores han inspirado, no se puede decir aún que las dificultades estén completamente dilucidadas. En todo caso, la interpretación de las definiciones que comportan una doble cuantificación, la negación de este tipo de enunciados, la conversión de un enunciado de una lengua natural a una lengua formal así como la conversión inversa, constituyen dificultades tales para los alumnos en la enseñanza de las matemáticas, que el análisis de la articulación entre lengua natural y lengua formal se impone mas allá de toda exigencia teórica. De nuevo, es un análisis funcional el que se revela fecundo.

El cuarto capítulo aborda los problemas de la articulación entre la lengua natural y un sistema de representación semiótico que no cumple ninguna función discursiva y en el cual los mecanismos de interpretación perceptiva parecen devenir predominantes si no suficientes, el de las figuras geométricas. Su papel en la construcción de conocimientos matemáticos ha suscitado, en el plano epistemológico, opiniones contradictorias, y su utilización en la enseñanza se revela compleja y delicada, sobretodo cuando aparece la exigencia de demostración. De hecho, aún no se dispone verdaderamente de criterios seguros para establecer la línea de separación que distingue la aprehensión perceptiva de formas representadas y la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos representados. Tampoco se dispone de medios de análisis para poner en evidencia los tratamientos específicamente figurales que dan a las figuras un papel heurístico ni para explicar la variabilidad de este papel de una situación a otra. La primera tarea consiste pues en definir un conjunto de unidades figurales elementales de suerte tal que toda figura geométrica, incluso las más simples, pueda ser analizada como una configuración de unidades figurales elementales. La segunda tarea consiste en definir los diferentes tipos de modificación a los cuales una configuración es susceptible en función de sus diferentes descomposiciones en unidades elementales posibles. Así pues, pueden aislarse los factores de visibilidad que fundamentan la discriminación de las diferentes unidades figurales que forman la figura geométrica. Se dispone así de un instrumento de análisis cuya utilización más fecunda se encuentra en el estudio del papel heurístico de las figuras. Esto permite considerar una nueva aproximación a la enseñanza de la geometría en el colegio. Hay experiencias que han sido prometedoras en este sentido.

Los dos últimos capítulos tratan sobre dos actividades fundamentales consideradas temibles tanto en la enseñanza de las matemáticas como en la enseñanza del francés: el razonamiento y la comprensión de textos. ¿En qué el fuerte vínculo entre el funcionamiento cognitivo del pensamiento y la diversidad de registros de representación permite describir mejor los procesos que subyacen a estas dos actividades y revelar las condiciones de su aprendizaje a profundidad?

El razonamiento es el objeto del quinto capítulo. Es el capítulo más amplio de toda la obra en razón de la complejidad y la importancia del tema. En efecto, esta actividad

multiforme, puesto que cubre cuestiones tan alejadas entre sí como la demostración y la argumentación, comprende aspectos psicológicos, lógicos y epistemológicos que los diferentes estudios han tendido no sólo a separar sino a oponer, y por tanto, a aislar. De esto resulta pues, que a diferencia de lo que se puede observar en el tema de comprensión de textos, para el de razonamiento se observan pocos progresos sustanciales en las investigaciones. Por otro lado, las dificultades relativas a esta actividad toman en matemáticas un giro particularmente agudo con la comprensión o la producción de demostraciones: parece que el desarrollo del razonamiento no sigue la aprehensión conceptual de los objetos, o al menos, que un trabajo directamente centrado en esta aprehensión no desarrolla los medios de razonamiento.

Sólo un análisis funcional y un análisis estructural permitirán describir los procesos cognitivos subyacentes al razonamiento y a sus diferentes recorridos. La doble distinción entre valor epistémico y valor de verdad de una proposición, de una parte, y entre status y contenido de una proposición, de otra, constituye la clave de un análisis funcional. Esta doble distinción permite mostrar particularmente:

- en qué difiere la actividad de razonamiento de toda otra actividad discursiva (narración, descripción, explicación...),
- en qué difiere el funcionamiento del razonamiento deductivo del de la argumentación, a pesar del empleo de las mismas expresiones lingüísticas para las presentaciones y de ser organizaciones discursivas tan cercanas,
- cómo puede descubrirse la validez de un razonamiento y por qué la conciencia de validez provoca la certeza de la verdad.

Todos los análisis conducen a plantear el problema del aprendizaje sobre unas bases distintas a aquellas sobre las cuales se lo ha considerado hasta el presente, tanto en las investigaciones psicológicas como en aquellas sobre la enseñanza de las matemáticas. Así, se han podido obtener rápidamente resultados importantes en clase de octavo, en el cual se dan los aprendizajes de las primeras demostraciones de geometría.

La comprensión de textos es el tema del sexto capítulo. Luego de los primeros trabajos de Schank, de Kintsch, y del desarrollo de la psicolingüística, la comprensión de textos es un dominio de investigación en plena expansión y en el cual aún permanecen abiertas muchas preguntas. Nuestro propósito no es el de dar cuenta de la abundante literatura que existe sobre este tema. Ello demandaría más que el marco de un capítulo y ya fue hecho en otra parte (Duval, 1986, Fayol, 1989). Partiremos de lo que parece ser un dato fundamental que resulta de un análisis comparativo de los diferentes modelos de comprensión de textos que hasta el presente han sido propuestos sea en el dominio de la Inteligencia Artificial sea en el de la psicología cognitiva: no hay comprensión de texto sin una segmentación del texto en unidades y sin una recontextualización de las unidades segmentadas según una organización ya dada o por inducir. Todo el problema es el de determinar los modos de esta segmentación, pues hay varios tipos, los modos de la recontextualización, así como sus interacciones.

Independientemente de estas cuestiones teóricas, hay exigencias didácticas de un aprendizaje de la comprensión de textos que resultan más urgentes, dadas las importantes dificultades constatadas en muchos de los alumnos a lo largo de los cursos escolares y la relativa impotencia de los profesores frente a esta situación. De manera muy curiosa, la comprensión de textos parece casi caer por su propio peso una vez se la distancia de textos de tipo narrativo. Hay además, desde un punto de vista didáctico así como desde un estricto punto de vista metodológico, la cuestión de la

evaluación controlable y fiable de la comprensión de un texto. Porque aquí toda medida está sobre la base de los datos ligados a la comprensión y al juicio de producciones discursivas! Si la *noesis* es inseparable de la *semiosis*, el recurso a varios registros debe igualmente revelarse fecundo para la adquisición y el dominio, por parte de los alumnos, de los diferentes modos de segmentación y de recontextualización.

En esta perspectiva, la determinación de los registros a movilizar y de algunas reglas de conversión para controlar la correspondencia, constituye el primer problema a resolver. La aplicación de esta aproximación no se limita a la comprensión de enunciados de problemas de matematización, al final de la primaria y en el colegio, sino que se extiende al análisis y a la comprensión de casi todos los géneros de textos.

La conceptualización, el razonamiento, la aprehensión de figuras, la resolución de problemas e incluso la comprensión de textos, son actividades cognitivas fundamentales cuyo estudio compete a campos tan diferentes como los de la psicología, las ciencias de la educación, la didáctica e incluso la Inteligencia Artificial. Las cuestiones relativas a su desarrollo, a su aprendizaje o a su modelización, son esenciales. Por tanto no es inútil situar muy brevemente, en dos puntos, el tipo de análisis y de investigación desarrollada aquí: el de las variables tomadas en cuenta y la cuestión más global del "sentido".

La determinación de las variables independientes a tener en cuenta en las investigaciones, constituye el lazo de interacción interpretativa entre los análisis teóricos, de una parte, y la organización de las experimentaciones o la conducción de las observaciones, de otra. Retomando una distinción utilizada en el estudio de los sistemas para clasificar sus propiedades, se pueden colocar las variables independientes en dos grandes clases: las variables intrínsecas, es decir los factores que comandan el funcionamiento de un sistema cualquiera que sea el entorno en que se encuentre, y la variables extrínsecas, osea los factores del entorno que influyen sobre el funcionamiento de ese sistema. En el estudio del funcionamiento cognitivo del pensamiento, se encuentran estas dos grandes clases de variables. Las variables extrínsecas, es decir aquellas relativas al efecto del entorno, son las que actualmente atrapan más la atención en los trabajos didácticos y los de las ciencias de la educación. Estas variables, de otra parte, pueden ser de naturaleza diferente: variables relativas a las condiciones técnicas de la ejecución de las tareas propuestas (entorno lápiz-papel, entorno informático o entorno "audiovisual"), variables relativas a las condiciones relacionales de la ejecución de las tareas propuestas (tipo de contrato, tipo de organización del trabajo en clase, naturaleza de la evaluación y tipo de *feed-back* de esta evaluación, etc.), variables relativas a las condiciones sociales y culturales de los alumnos. Los análisis y las experiencias que presentaremos conducen más bien a poner de relieve las variables intrínsecas al funcionamiento cognitivo del pensamiento. Su consideración evidentemente no puede ser dejada de lado en los estudios concernientes al aprendizaje ni en aquellos relativos a la organización de la enseñanza. Aún falta que estas variables estén claramente separadas e identificadas.

El segundo punto es la cuestión del "sentido", la cual no podría ignorarse si lo que se trata de estudiar es el funcionamiento cognitivo del pensamiento humano. De otro lado, los profesores se han hecho muy sensibles al afirmar que con frecuencia tropiezan con la constatación de la "pérdida de sentido" de los alumnos en las actividades matemáticas o en la producción de textos! Naturalmente, no se trata de dejarse caer en la trampa por la polisemia del término "sentido", ni por la complejidad de los fenómenos que recubre esta constatación. La cuestión del sentido y de la significación es una cuestión esencial una vez que se quiere integrar, en el estudio del funcionamiento de las actividades cognitivas fundamentales, el papel de su orientación y de su control consciente por el sujeto mismo, y no se restringe al papel de los procesos automatizados y no-conscientes. Recordemos simplemente aquí que esta cuestión sólo puede tratarse en el marco de

un análisis funcional, como Piaget e igualmente Husserl lo han puesto en evidencia: el punto de vista de la función es el punto de vista central cuando se trata de estudiar *la constitución de los objetos por la consciencia* (Husserl, 1950, § 86, p.294-295).

CAPITULO I
REGISTROS DE REPRESENTACIÓN, COMPRENSIÓN Y APRENDIZAJE

La mirada del poeta proyecta en lo visible
formas de objetos desconocidos,
y su palabra da a las nadas inasibles
un lugar y un nombre.

Le songe d´une Nuit d´été, V, 1.

No es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. Luego de Descartes y de Kant, la representación ha sido el centro de toda reflexión que se preocupe por las cuestiones que tienen que ver con la posibilidad y la constitución de un conocimiento cierto. Y esto, porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación. No es sorprendente pues, que igualmente se haya impuesto la noción de representación en los estudios psicológicos sobre la adquisición de los conocimientos o sobre sus tratamientos. Ahora bien, esta noción de representación se ha presentado en tres ocasiones distintas, cada una con una determinación totalmente diferente del fenómeno designado.

La primera vez, hacia los años 1924-1926, como representación **mental** en el estudio de Piaget sobre *La representación del mundo en el niño*, relativo a las **creencias** y las explicaciones de los niños pequeños sobre los fenómenos naturales y físicos. El método empleado para el estudio de las representaciones mentales fue esencialmente la entrevista, en las que lo que puede parecer un error es considerado indicador de una visión distinta de las cosas o de otra lógica. En *El nacimiento de la inteligencia en el niño* (1937), Piaget recurre a la noción de representación como **"evocación de los objetos ausentes"** para caracterizar la novedad del último de los estadios de la inteligencia sensomotriz (p. 305-306). De otro lado, se puede decir que la teoría piagetiana del desarrollo de la inteligencia se articula en torno a la oposición entre el plano de la acción y el de la representación. Como testimonio de esta declaración, entre miles, veamos lo que dice en 1965 en la conferencia *Educación e Instrucción:*

> Hace falta tiempo para interiorizar las acciones en pensamiento pues es mucho más difícil representarse el desencadenamiento de una acción y de sus resultados en términos de pensamiento, que limitarse a su ejecución material... La interiorización de las acciones supone también su reconstrucción sobre un nuevo plano; esta reconstrucción puede pasar por las mismas fases, pero con un desfase mayor que la reconstrucción anterior de la acción misma... (Piaget, 1969, p. 52)

La segunda vez, a partir de 1955-1960, como representación **interna o computacional** con las teorías que privilegian el **tratamiento**, por un sistema, de las informaciones recibidas de modo tal que produzcan una respuesta adaptada. Uno de los iniciadores parece haber sido Broadbent (1958). En esta perspectiva, se plantean dos preguntas fundamentales.

1. ¿Bajo qué forma las informaciones provenientes del exterior pueden entrar en el sistema, es decir, cuál descripción hecha con la ayuda de símbolos, susceptibles de ser utilizados por el sistema, permite captar las informaciones dadas por el exterior?
2. ¿Cualquiera que sean las reglas que van a permitir la transformación de las informaciones al interior del sistema, esta transformación de entrada puede ser de tipo cálculo?

La noción de representación se hace entonces esencial en tanto que **forma** bajo la cual una información puede ser descrita y tomada en cuenta en un sistema de tratamiento. Así pues, esto no tiene nada que ver con una "creencia", con una "evocación de objetos ausentes" que remitan a la consciencia vívida de un sujeto. Por el contrario, se trata de una **"codificación de la información"**. Por tanto, aquí el método empleado debe ser totalmente otro; es el de los tiempos de reacción.

> Los estudios cronométricos precisos han mostrado que incluso una experiencia aparentemente tan elemental como la aprehensión visual de una sola letra, requiere un conjunto de códigos internos muy diferentes, los cuales pueden ser aislados experimentalmente. *Por código entiendo la forma como una información está representada...* Según este punto de vista, existen varias codificaciones diferenciables para la entrada de una sola información. Estas codificaciones están suficientemente separadas para que su desarrollo temporal pueda ser manipulado experimentalmente (Posner, 1978, p. 27,56)

En psicología cognitiva hay mucho interés por la primera de las dos preguntas. Clark, bajo la influencia de Chomsky, parece ser uno de los primeros en haber avanzado la idea de que esta representación interna tendría una naturaleza proposicional (Clark, 1974). En *Mental Representation, A dual Coding Approach*, Paivio dice que "la proposición es el concepto representacional más abstracto y más teórico. Es también el más ampliamente utilizado en todos los modelos computacionales de la cognición." (1986, p.30). La psicolingüística y las investigaciones sobre la memoria semántica son los dominios que han contribuido ampliamente a generalizar esta aproximación de la representación como fenómeno de naturaleza proposicional y puramente computacional.

Las modelizaciones efectuadas en inteligencia artificial privilegian la segunda pregunta, es decir, el tratamiento de la información (Newell & Simon, 1972; Clark & Chase, 1972; Anderson, 1976; Pylyshyn, 1973, 1983; Fodor, 1975, 1986). Pero si allí la noción de representación interna es fundamental, su forma puede cambiar según el nivel de tratamiento considerado.

Y la tercera vez, desde hace unos diez años, como representación **semiótica** en el marco de los trabajos sobre la adquisición de los conocimientos matemáticos y sobre los considerables problemas que su aprendizaje suscita. La especificidad de las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica o los gráficos cartesianos, y en que pueden ser convertidas en representaciones "equivalentes" en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar **significaciones** diferentes para el sujeto que las utiliza. La noción de representación semiótica presupone, pues, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro. Esta operación ha de ser descrita en primer lugar como un "cambio de forma". Trazar la curva correspondiente a una ecuación de segundo grado, o pasar del enunciado de una relación a la escritura literal de esta relación, habrá de considerarse como el "**cambio de la forma en que un**

conocimiento está representado". Así, algunos trabajos de psicología cognitiva y otros de didáctica, han subrayado la importancia de las representaciones semióticas y han puesto en evidencia uno u otro de los tres puntos siguientes:

1. la importancia de la forma con relación al contenido representado, en el caso de los símbolos en matemática: "no significant mathematical activity is possible without material forms for its expression" (Kaput, 1987, p. 159).

2. La diversidad de las formas de una representación para un mismo contenido representado. Para ilustrar este punto, Denis cita a Glass y Holyoak:

   En el dominio lingüístico, se ha hecho banal poner el acento en la *diversidad de las formas* susceptibles de encontrar *un mismo contenido nocional.* En materia de representaciones de objetos hay un ejemplo interesante, presentado por Glass y Holyoak... El dibujo presentado puede ser codificado *bajo la forma de una descripción verbal* como por ejemplo: "dibujo de una taza sin asa, sobre un plato plano". Este mismo dibujo puede *igualmente ser representado con un manejo mas o menos complejo de ecuaciones...* (Denis, 1989, p. 29).

   La tesis de R. Douady sobre los juegos de marcos, es quizá el trabajo en el cual este aspecto ha sido más sistemáticamente utilizado en aras de organizar situaciones de aprendizaje (Douady, 1984).

3. El interés de un cambio de forma de la representación por razones de economía de tratamiento. Esta economía de tratamiento puede ser una economía de memoria como Condillac lo mostró, por primera vez, en *El lenguaje de los cálculos.* Puede ser también una economía de orden heurístico, como por ejemplo el recurso a una figura para resolver un problema de geometría.

Si todos estos recientes trabajos han introducido la representación como representación semiótica, paradójicamente dejan en la sombra el papel de las representaciones semióticas en la actividad cognitiva. Este desconocimiento se manifiesta de dos maneras.

La primera, la más trivial, consiste en decir que las representaciones semióticas cumplen la función de comunicación, *olvidando que igualmente cumplen las funciones tan primordiales de tratamiento de la información y de objetivación* o toma de consciencia.

La segunda, más sutil, consiste en ver en las representaciones semióticas un soporte para las representaciones mentales y en estimar que se pasa espontáneamente de la forma que representa al contenido representado. En esta perspectiva, el contenido sería fácilmente separado de su forma semiótica y el cambio de forma sería una operación intrínsecamente secundaria, activa por sí. Dicho de otra manera, *si el contenido es separable de su forma, es decir, si hay noesis sin semiosis, entonces la operación de conversión no puede ser más que una operación cognitivamente neutra, y de un valor nulo o mínimo.* Por otra parte, hay muy pocos trabajos, exceptuando el de Clark, que se han consagrado a esta operación; incluso la descuidan los trabajos que tratan explícitamente las relaciones entre lenguaje e imagen.

Ahora bien, la proposición consecuente de esta implicación está masivamente desmentida por todas las observaciones que se han podido hacer en el aprendizaje de las matemáticas: se ha probado que cambiar la forma de una representación es, para muchos alumnos en los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil e incluso en ocasiones imposible. *Todo sucede como si la comprensión de un contenido lograda por la gran mayoría de los alumnos, quedara limitada a la*

forma de representación utilizada. Esta constatación fue hecha por Schoenfeld al término de un año de enseñanza de geometría. Él habla de "compartimentalización inadecuada", evidentemente nefasta para la utilización de los conocimientos adquiridos: "students may make virtually no connections betwen reference domains ans symbols systems that we would expect them to think of as being nearly identical... the interplay occurs far more rarely than one would like" (Shoenfeld, 1986, p. 239, 242). Esta constatación puede hacerse para todos los otros dominios de las matemáticas. En otros términos, se comprueba que la operación de conversión no es ni trivial ni cognitivamente neutra. Entonces pues, no se puede hacer como si el contenido representado fuera separable de la forma que lo representa, como si la *noesis* fuera independiente de la *semiosis.* La amplitud de las dificultades que la operación de conversión suscita, plantea no sólo la pregunta general sobre el papel de la *semiosis* en el funcionamiento del pensamiento, sino también la de las condiciones de una diferenciación entre representante y representado, en las representaciones semióticas.

El fenómeno importante para comprender el papel de la *semiosis* en el funcionamiento del pensamiento y en el desarrollo de los conocimientos, no es el empleo de tal o cual tipo de signos sino la variedad de los tipos de signos que pueden ser utilizados. La *semiosis* es inseparable de una diversidad inicial de tipos de signos disponibles. Pierce fue el primero en reconocer la importancia de este fenómeno haciendo la distinción entre tres tipos de signos: los iconos, los símbolos y los índices (1931, p. 156-173). Esta primera clasificación, elaborada en el marco de una reflexión sobre la lógica, contribuyó a fundamentar la semiótica. Pero deja en la sombra lo relativo a la fecundidad y a la complejidad de esta variedad: las relaciones posibles entre los diferentes sistemas semióticos y la posibilidad de convertir una representación formada en un sistema en una representación en otro sistema. Estas cuestiones relativas a las relaciones entre los sistemas semióticos y a los problemas de conversión de las representaciones de un sistema a otro, sólo mucho más tarde fueron explícitamente consideradas a través de la modelización del lenguaje propuesto por Chomsky (1971), y sobretodo a través de la reflexión post-saussuriana de Benveniste (1974, p. 43-66).

La reflexión de Benveniste estuvo dirigida por la preocupación de mostrar, contra los límites de la clasificación de Pierce, que la lengua natural es "la organización semiótica por excelencia" (1931, p. 61). La clasificación propuesta por Pierce, en efecto, era muy general para poder asignar a la lengua natural un puesto verdaderamente específico y para permitir sacar a la luz sus características propias. Benveniste pues, buscó menos introducir una nueva clasificación que precisar la noción de "sistema semiológico" y mostrar la importancia de la cuestión sobre las relaciones entre los diferentes sistemas semióticos (1974, p. 45, 51-54, 60-62). Para Benveniste, la semiosis implica no sólo una variedad de sistemas semióticos sino igualmente la posibilidad de ponerlos en correspondencia. Sin embargo, su análisis se limita a la comparación de algunos sistemas semióticos con la lengua natural, a través de producciones culturales independientes unas de otras: lengua y música, lengua y arte pictórico,... Él no estuvo interesado ni en el papel de la diversidad de los sistemas semióticos en el funcionamiento del pensamiento, ni en la complejidad de la conversión de las representaciones de un sistema a otro. Estas preguntan llegan a ser centrales cuando se consideran los sistemas semióticos en relación con las representaciones o, más exactamente, con las duplas (conocimiento, representación) que esos sistemas permiten formar.

Considerados desde este punto de vista, los sistemas semióticos, en efecto, deben permitir cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación. En primer lugar, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como *una representación de alguna cosa* en un sistema determinado. Luego, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Por

último, convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado. No todos los sistemas semióticos permiten estas tres actividades cognitivas fundamentales, por ejemplo el lenguaje morse o la codificación de tránsito. Pero el lenguaje natural, las lenguas simbólicas, los gráficos, las figuras geométricas, etc. sí las permiten. Hablaremos entonces de **registros de representación semiótica.** Estos registros constituyen los grados de libertad de los que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor. La cuestión de la relación entre *semiosis* y *noesis* concierne únicamente a los sistemas que permiten las tres actividades de representación y no a todos los sistemas semióticos.

El análisis del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos encontrados en los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, enfrenta *tres fenómenos que están estrechamente ligados.*

El primero es el de la **diversificación de los registros de representación semiótica.** Ya Piaget, quien asoció muy estrechamente el nacimiento de la representación al desarrollo de la función semiótica, tuvo cuidado en señalar que el lenguaje natural no era el único sistema semiótico al que le correspondía esta función (Piaget, 1968b, p. 6-9, 70, 292-293). Y uno de los límites encontrados por la inteligencia artificial fue la dificultad de "sobrepasar la rigidez funcional que acarrea la especialización del modo de representación" (Leiser, 1987, p.1869). La oposición clásica entre lenguaje e imagen es una primera aproximación a esta diversificación, pero elimina la complejidad, la variedad y la complementariedad. El lenguaje natural y las lenguas simbólicas no pueden considerarse como formando un único y mismo registro. Así como tampoco los esquemas, las figuras geométricas, los gráficos cartesianos o las tablas. Estos son sistemas de representación muy diferentes entre sí; cada uno plantea preguntas específicas sobre el aprendizaje.

El segundo fenómeno es el de la **diferenciación entre representante y representado** o, al menos, entre forma y contenido de una representación semiótica. Esta diferenciación generalmente está asociada a la comprensión de lo que una representación representa y por tanto a la posibilidad de asociar otras representaciones y de integrarlas en los procedimientos de tratamiento. Ahora bien, una tal diferenciación jamás se adquiere de golpe, cualquiera que sea el registro de representación y cualquiera que sea el estadio de desarrollo.

El tercer fenómeno es el de la **coordinación entre los diferentes registros** de representación semiótica disponibles: el conocimiento de las reglas de correspondencia entre dos sistemas semióticos diferentes no es suficiente para que puedan ser movilizados y utilizados conjuntamente. El obstáculo mayor para la realización espontánea de esta coordinación es la importancia de los fenómenos de no-congruencia entre las representaciones producidas en los diferentes sistemas.

Un estudio de los aprendizajes intelectuales fundamentales debe tener en cuenta estos tres fenómenos relativos a la *semiosis* y a la operación de conversión que le es verdaderamente intrínseca. En los sujetos, una representación puede funcionar verdaderamente como representación, es decir, darle acceso al objeto representado, sólo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso... y que puedan convertir "espontáneamente" de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo. Cuando estas dos condiciones no se cumplen, la representación y el objeto representado se confunden, y no se pueden reconocer dos representaciones diferentes de un mismo objeto como representaciones del mismo objeto.

Generalmente no se distinguen las actividades de tratamiento y de conversión de las representaciones, no obstante ser tan diferentes. En la descripción de los procedimientos, de los

recorridos o de las estrategias de respuesta, esas actividades son reducidas a su tratamiento común, el de transformación de la representaciones dadas. Sin embargo, es esencial separarlas muy bien. Un tratamiento es una transformación que se efectúa al interior de un mismo registro, aquel en que son utilizadas las reglas de funcionamiento: un tratamiento, pues, no moviliza más que un sólo registro de representación. La conversión es, al contrario, una transformación que hace pasar de un registro a otro; requiere pues su coordinación por parte del sujeto que la efectúa. El estudio de esta actividad de conversión debe entonces permitir comprender la naturaleza del estrecho lazo entre *semiosis* y *noesis.*

Es sólo cuando se separan las actividades de tratamiento y de conversión que se puede ver la persistencia de las dificultades relativas a la actividad de conversión y la importancia del fenómeno de encapsulamiento de los registros. La cuestión de la coordinación de los registros y la de los factores susceptibles de favorecer esta coordinación, se presenta entonces como dos preguntas centrales para los aprendizajes intelectuales. ¿Ésta coordinación es simplemente la consecuencia de los aprendizajes conceptuales, es decir, es lo "dado por añadidura" en una enseñanza centrada en los "contenidos" de la materia enseñada y por tanto sobre lo que es representado, o por el contrario, exige un aprendizaje específico y no susceptible a ser cortocircuito de la *semiosis*? ¿Cuáles son los principios y las condiciones a respetar para organizar situaciones de aprendizaje que favorezcan la coordinación de los registros de representación?

Antes de abordar estas cuestiones en las secciones III, IV y V de este capítulo, es necesario volver sobre las relaciones entre representaciones mentales y representaciones semióticas y sobre la cuestión de las funciones que cada uno de estos tipos de representación permiten cumplir en el dominio de la cognición. Este será el tema de las dos primeras secciones.

REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS Y APRENDIZAJE

En psicología, la noción de representación es tan esencial como la de comportamiento para estudiar la adquisición de conocimientos, los funcionamientos que permiten su tratamiento o su aprendizaje. Introducida en psicología en tres momentos, y cada vez desde una aproximación diferente, la primera pregunta que se plantea es menos la de una definición general que la de una clasificación de los diferentes fenómenos considerados como "representaciones". ¿Qué tienen en común fenómenos tan diferentes como creencias, codificación de la información, expresiones lingüísticas, imágenes mentales o figuras trazadas sobre un soporte físico, para que a todos se les clasifique bajo el término de "representación"? Pero también, ¿qué tienen ellos de tan diferente para que se pueda oponerlos? Una comprensión de las relaciones existentes entre representaciones mentales, representaciones computacionales y representaciones semióticas, jugando todas un papel en la cognición, pasa por la posibilidad de una clasificación de estos diferentes tipos de representación.

Clasificación de los diferentes tipos de representación

Para caracterizar las representaciones, los autores de Ny, 1985; Paivo, 1986; Larkin & Simon, 1987, p. 66) recurren generalmente a una de las dos oposiciones clásicas siguientes: la oposición interno/externo y la oposición consciente/no-consciente. Ahora bien, de manera sorprendente, se las considera casi siempre como dos formulaciones equivalentes de una misma partición de los fenómenos cognitivos, cuando éste no es el caso.

La oposición **consciente/no-consciente** es la oposición entre lo que aparece a un sujeto y él observa, de una parte, y lo que a él se le escapa y no puede observar, de otra. En este sentido, la

consciencia se caracteriza por la mirada de "alguna cosa" que toma *ipso facto* el status de objeto para el sujeto que efectúa esta mirada. El pasaje de lo no-consciente a la conciencia, corresponde a un proceso de objetivación para el sujeto que toma consciencia. La objetivación corresponde al descubrimiento por el sujeto mismo de aquello que hasta entonces no sospechaba, incluso si otros se lo hubieran explicado. Las representaciones conscientes son aquellas que presentan este carácter intencional[3] y que cumplen una función de objetivación.

Este carácter intencional de las representaciones conscientes es esencial desde el punto de vista cognitivo, pues permite tener en cuenta el papel fundamental de la significación en la determinación de los objetos que pueden ser observados por un sujeto. En efecto, es siempre a través de una significación que se hace la aprehensión perceptiva o conceptual de un objeto. La aprehensión de los colores o de las figuras geométricas son ejemplos típicos muy elementales.

Cuando la determinación de un objeto presupone la aprehensión de una multiplicidad de datos, cuya cantidad y variedad exceden la capacidad de aprehensión simultánea, *la aprehensión de esta multiplicidad como una unidad simple sólo puede hacerse bajo el modo de significación.* O cuando un objeto aparece como una unidad simple, la discriminación de uno u otro de sus elementos constitutivos sólo puede hacerse si ese elemento a su turno se hace objeto susceptible de ser observado, es decir, de que tome una significación propia. Significación y status de "objeto susceptible de ser visto o aprehendido por alguien", son los dos aspectos recíprocos de toda representación consciente. La significación es la condición necesaria de la objetivación para el sujeto, es decir, de la posibilidad de tomar consciencia.

La oposición **externo/interno** es la oposición entre lo que de un individuo, de un organismo o de un sistema es directamente visible y observable y lo que, al contrario, no lo es. Esta oposición permite dividir el dominio de las representaciones mediante dos precisiones suplementarias. La primera es que *todas las representaciones llamadas "externas" son representaciones producidas como tales por un sujeto o por un sistema:* no son síntomas, como por ejemplo la expresión de las emociones que se percibe en la cara. La segunda es que *la producción de una representación externa sólo puede efectuarse a través de la aplicación de un sistema semiótico.* Las representaciones externas son, por naturaleza, representaciones semióticas. Estas representaciones están por tanto estrechamente ligadas a un estado de desarrollo y de dominio de un sistema semiótico. Son accesibles a todos los sujetos que han aprendido el sistema semiótico utilizado. Las representaciones internas son las representaciones que pertenecen a un sujeto y que no son comunicadas a otro por la producción de una representación externa.

Las representaciones externas cumplen pues una función de comunicación. Pero igualmente cumplen otras dos funciones cognitivas: la función de objetivación, como todas las representaciones conscientes, y la función de tratamiento.

La función de objetivación (para sí) es casi siempre asimilada a la de expresión (para otro), a pesar de que es independiente. Pues no es la misma cosa, para un sujeto, decir a otro lo que él ya ha tenido la ocasión de hacer consciente, o tratar de decirse a él mismo aquello sobre lo cual aún no llega a tomar consciencia. En el primer caso, él debe tener en cuenta las restricciones semióticas y las exigencias sociales de la expresión producida; en el otro caso, esto no sólo no es necesario sino

[3] Retomamos la terminología husserliana para caracterizar ese momento del acto constitutivo de la intencionalidad que es inseparable de la aparición de alguna cosa a la conciencia (*Investigaciones Lógicas,* V). Tiene la ventaja de resaltar que la estructura intencional de la consciencia es anterior a toda distinción entre lo que sería súbito, lo que sería espontáneo y lo que sería deliberado. En este sentido, la intencionalidad es anterior a la reflexión e independiente de ella.

que puede ser un handicap. La producción de una representación externa con frecuencia puede responder sólo a una de estas dos funciones.

Las representaciones externas son esenciales para la función de tratamiento. Las actividades de tratamiento están directamente ligadas a la utilización de un sistema semiótico. El cálculo es el ejemplo más trivial. El cálculo numérico es estrictamente dependiente del sistema de representación o de escritura de los números que se adopte. Así, no son los mismos tratamientos los que permiten efectuar la adición de dos números según que se adopte una escritura decimal o una escritura fraccionaria: 0,25 + 0,25 = 0,5 o ¼ + ¼ = ½ . Condillac en *El Lenguaje de los Cálculos* ya había puesto en evidencia la subordinación de todo tratamiento al uso de un sistema semiótico de representación y a las posibilidades que ese sistema ofrece. Él mostró la necesidad de un registro simbólico de representación de números para los cálculos, subrayando la imposibilidad de efectuar un cálculo en el registro de la lengua natural. Pues en este registro, en términos de costo de memoria, las capacidades de tratamiento están casi que inmediatamente saturadas.

Se ve entonces, que estas dos oposiciones no pueden asimilarse la una a la otra. Una representación interna puede ser consciente o no-consciente, mientras que una representación consciente puede ser exteriorizada o no. El cruce de estas dos oposiciones permite distinguir tres grandes tipos de representaciones.

Tabla 1

Tipos y funciones de representaciones

	INTERNA	EXTERNA
CONSCIENTE	**mental** *función de objetivación*	**Semiótica** *función de objetivación* *función de expresión* *función de tratamiento intencional*
NO-CONSCIENTE	**computacional** *función de tratamiento automático o cuasiinstantáneo*	

Las representaciones **semióticas** son a la vez representaciones conscientes y externas. En efecto, permiten una *"mirada del objeto"* a través de la *percepción de estímulos* (puntos, trazos, caracteres, sonidos...) *que tienen el valor de "significantes*". Hay allí una gran variedad de representaciones semióticas posibles: figuras, esquemas, gráficos, expresiones simbólicas, expresiones lingüísticas, etc. Generalmente se las clasifica en dos grandes grupos según conserven o no algunas de las propiedades pertenecientes al objeto que representan: las representaciones analógicas (las imágenes, por ejemplo, cuyos elementos conservan las relaciones de vecindad[4] existente entre los elementos

[4] La semejanza entre una representación y su modelo no se determina al nivel de los elementos sino de las relaciones entre los elementos. Por ejemplo, se puede representar muy bien una cara con sólo elementos de cuadros; resulta tan inmediatamente reconocible como tal, como si hubiera sido representada con la ayuda de puntos, de trazos rectos o curvos, de círculos o de óvalos!

del modelo) y las representaciones no-analógicas, como las lenguas, que no conservan ninguna relación del modelo pero que pueden representar operaciones o transformaciones de éste (Bresson, 1987, p. 941-943). El interés principal de esta distinción, fundamentada en un criterio discutible de "semejanza", es el de llamar la atención sobre la diversidad y la heterogeneidad de los registros de representación. Los distintos registros de representación se diferencian no sólo por la naturaleza de sus significantes, sino también por el sistema de reglas que autoriza su asociación y por el número de dimensiones en que puede efectuarse esta asociación. Estas dos últimas diferenciaciones son más importantes que la primera pues fundamentan lo que da toda la flexibilidad y fuerza a una diversidad de registros: no sólo la posibilidad de efectuar tratamientos equivalentes con costos menores si se efectúa un cambio de registro apropiado, sino también la complementariedad de los tratamientos que permite sobrepasar los límites inherentes a cada registro en la realización de una actividad compleja.

Las representaciones **mentales** son todas aquellas que permiten una mirada del objeto en ausencia total de significante perceptible. Generalmente son identificadas con las "imágenes mentales" en tanto que entidades psicológicas que han tenido una relación con la percepción. Pero las representaciones mentales cubren un dominio más amplio que el de las imágenes. Es necesario incorporar en ellas no sólo los conceptos, las nociones, las "ideas", sino también las creencias y las fantasías, es decir, todas las proyecciones más difusas y más globales que reflejan los conocimientos, y los valores que un individuo comparte con su medio, con un grupo particular o con sus propios deseos.

Uno de los grandes problemas de la psicología tiene que ver con la naturaleza de las relaciones entre representaciones mentales y representaciones semióticas. Generalmente se reduce el empleo de las representaciones semióticas a la función de expresión y se le subordina al funcionamiento de las representaciones mentales. Es así como se llega a postular una continuidad, una correspondencia o una cuasi-equivalencia entre estos dos tipos de representación. Se admite entonces que las representaciones semióticas serían expresiones fiables de las representaciones mentales (Larkin & Simon, 1987, p. 97-98, 66). Las representaciones mentales se prestarían a los mismos tratamientos que las representaciones semiológicas, de la misma manera que las imágenes mentales presentan condiciones de exploración y de discernibilidad de los detalles de los objetos representados como la exploración perceptiva de los objetos reales (Denis, 1989, p. 80-86; Rosslyn, 1980).

En realidad, el problema de la relación entre estos dos tipos de representación es mucho más complejo. La hipótesis de una correspondencia directa entre las representaciones mentales y las representaciones semióticas y, a fortiori, de una subordinación de las segundas a las primeras, es poco fundamentada.

En primer lugar, puede haber una gran diferencia entre las representaciones mentales de un sujeto y las representaciones semióticas que él produce para expresar sus representaciones mentales. Esto corresponde a la independencia de las funciones de objetivación y de expresión que cumplen todas las representaciones conscientes, es decir, las representaciones semióticas como las representaciones mentales. La objetivación, que corresponde a la formación de representaciones mentales nuevas, se acompaña de una producción de representaciones semióticas que con frecuencia puede ser insuficiente, inaceptable o incomprensible desde el punto de vista de la expresión. A la inversa, la producción de representaciones semióticas puede ser satisfactoria desde el punto de vista de la expresión y no corresponder a ninguna objetivación para el sujeto que las reproduce; es más por imitación que por objetivación que las produce.

La segunda razón es la diferencia esencial que separa las representaciones semióticas de las representaciones mentales: *las primeras presentan un grado de libertad, necesario a todo tratamiento de la información, que las segundas no presentan.* En efecto, las representaciones semióticas pueden ser, indiferentemente, el objeto de dos miradas diferentes: pueden ser aprehendidas sea sólo bajo el aspecto de representante sea únicamente bajo el aspecto de lo que es representado. El sujeto cognitivo puede libremente pasar de un aspecto al otro (Sokolowski, 1988,

p. 209). Las representaciones mentales, al contrario, se limitan a una sola mirada, la de eso que es representado. Esta diferencia es esencial en razón de la consecuencia que acarrea: las representaciones mentales sólo se prestan a tratamientos vía el rodeo de la movilización de un registro semiótico y de la práctica "mental" de ese registro. Naturalmente siempre se puede tener el "sentimiento" que se efectúan tratamientos al nivel de las representaciones mentales sin movilizar explícitamente representaciones semióticas. Esta ilusión introspectiva tiende al desconocimiento de un hecho genético y cultural fundamental: el desarrollo de las representaciones mentales está ligado a la adquisición y a la interiorización de sistemas y de representaciones semióticas, comenzando por las del lenguaje ordinario (Vigotski, 1962, p. 46-47, 132, 145-149)[5].

Por último, en razón de la diversidad de los sistemas semióticos, las representaciones semióticas permiten tener una variedad de representaciones para un mismo objeto; esta variedad se revela como decisiva a la vez desde el punto de vista de la función de tratamiento y desde el punto de vista de la conceptualización, como lo veremos más adelante.

Así pues, no puede haber correspondencia directa entre estos dos tipos de representaciones, sino más bien una interacción cuya complejidad aún escapa a los métodos de investigación y a las teorías de que se dispone.

Las representaciones **computacionales** son todas aquellas cuyos significantes, de naturaleza homogénea, no requieren de la mirada al objeto y permiten una transformación algorítmica de una serie de significantes en otra. Estas representaciones expresan la información externa en un sistema de manera tal que la hacen direccionable, recuperable y combinable al interior de ese sistema. En lo que concierne al sujeto humano, estas representaciones internas no son representaciones conscientes. Veremos más adelante la necesidad y la especificidad de tales representaciones para explicar cómo el aprendizaje puede desarrollar, en los individuos, sus capacidades cognitivas de tratamiento. Es a este tipo de representación a la que se refiere, tanto en el dominio de la inteligencia artificial como en el de la psicología cognitiva, cuando se habla de "representaciones internas" (Desclés *et al.*, 1990, p. 295). La escritura binaria en "0" y "1", así como la representación proposicional por parejas {predicado, argumentos} son las representaciones semióticas corrientemente utilizadas para representar estas representaciones internas no conscientes. Los psicólogos han trabajado, por ejemplo, con la hipótesis de que toda información que proviene de imágenes o de frases estaría codificada en términos de proposiciones elementales, es decir, bajo la forma de duplas predicado-argumentos. Sería pues a este nivel de las representaciones internas, análogo al de las estructuras profundas en los modelos de la lingüística transformacional, que se harían todas las actividades de comparación, evaluación, comprensión y recuperación concernientes a las palabras, las frases, las imágenes y, más generalmente, todo lo que implica un reconocimiento de formas así como la integración de una multiplicidad de datos en una simple captación que identifica un objeto (Clark & Chase, 1972, p. 473-476; Anderson, 1976, p. 26-75).

Aunque nadie niega la existencia de muchas especies de representación, con mucha frecuencia es olvidada su importancia para la descripción y para la explicación de los procesos cognitivos. Habitualmente se siguen dos vías para reducir o para eliminar las diferencias que separan estos tres

---

[5] "El hecho de hablar sobre su pensamiento, de hablarlo a otros, o de callarlo y decirlo sólo a sí mismo, debe tener una importancia primordial en la estructura y el funcionamiento del pensamiento en general, y de la lógica del niño en particular" (Piaget, 1930, p. 63). Esta observación de Piaget es interesante por varios aspectos. En primer lugar, distingue bien la función de comunicación y la función de objetivación. De otro lado, muestra la unión íntima entre *semiosis* y *noesis:* es necesario considerar que el término "lenguaje" puede designar aquí todo sistema semiótico, siendo evidentemente el lenguaje natural el primero de esos sistemas.

tipos de representación. Pero cada vez, es la especificidad y la importancia de las representaciones semióticas lo que resulta ser más desconocido.

La primera vía consiste en quedarse con los rasgos comunes a las diferentes especies de representación. Así, una propiedad común a dos tipos de representación (las mentales y las semióticas) es la de la evocación del modelo representado en su ausencia. Es esta, por ejemplo, la que Piaget privilegió para explicar la formación del símbolo en el niño, ¡y la que le permitió identificar la formación de las imágenes mentales con la de los significantes! (Piaget, 1968b, p. 8, 30, 291-293; 1968a, p. 306-309)[6]. Sin embargo, una tal aproximación no es satisfactoria. Y esto, porque la evocación de un objeto en su ausencia es una característica que sólo concierne a las representaciones conscientes: no es una característica pertinente para las representaciones computacionales. Además, esta aproximación viene a eliminar de golpe todos los problemas de adquisición y de aprendizaje atinentes a la diferencia de naturaleza que separa la producción de imágenes mentales y la de representaciones semióticas. La producción de imágenes mentales depende de procesos físicos o psicológicos análogos a los que están en juego en la percepción. La producción de representaciones semióticas, al contrario, está sometida al respeto de reglas "sintácticas" de formación y de tratamiento de unidades significantes.

La segunda vía consiste en privilegiar un tipo de representación tratando de subordinarle las otras dos. Así, la psicología cognitiva privilegia las representaciones no-conscientes, es decir, las representaciones computacionales. En efecto, su interés es doble.

De una parte, las representaciones computacionales pueden ser asociadas a operaciones elementales del tipo de aquellas que pueden ser efectuadas por una máquina de Turing (Jhonson-Laird, 1983, p. 6-12, 397-398). La combinación de estas operaciones elementales permite explicar la complejidad propia a cada comportamiento y a cada resultado observables (Chase, 1978, p. 36). El costo del tratamiento aumenta con el número de operaciones combinadas y la reiteración de cada operación combinada. El recurso a la observación de los tiempos de reacción en tareas simples, es decir en tareas para las cuales el éxito no es ningún problema, permite identificar estas diferentes operaciones.

De otra parte, tales representaciones, que están necesariamente ligadas a un código, con un soporte físico u orgánico, son transferibles a otro código o a un lenguaje más complejo. Las representaciones computacionales presentan entonces la ventaja de ser transformables por un proceso de compilación (Desclés *et al.,* 1990, p. 294-296). También aparecen como las representaciones fundamentales. En relación con éstas representaciones computacionales, las representaciones conscientes parecerían deber ser consideradas sólo como representaciones terminales, pues resultarían de un conjunto de tratamientos elementales efectuados en paralelo, o en serie, y compiladas. Además, la separación entre las representaciones computacionales y las representaciones semióticas, y muy especialmente aquellas que dependen de un lenguaje o de un código, aparece mínima respecto a lo que tienen en común: operaciones de combinación y de sustitución efectuadas sobre los significantes y definidas por reglas (Pylyshyn, 1986, p. 26-30, 39-40. 55-57; Pylyshyn, 1973). ¿Cómo, en estas condiciones, reconocer una especificidad irreductible

---

[6] Recordemos que la formación de los significados es vinculada por Piaget a la de los esquemas, mientras que la de las imágenes resultaría de una interiorización de las conductas de imitación. Significantes y significados dependerían respectivamente de la función de acomodación y de la de asimilación, es decir, de dos funciones constitutivas de toda adaptación de un organismo a su medio.

de las representaciones semióticas en relación con las representaciones computacionales en el funcionamiento cognitivo del pensamiento?

Representaciones semióticas, tratamientos intencionales y aprendizaje

A pesar del parentesco aparente, las representaciones computacionales y las representaciones semióticas no tienen la misma naturaleza. Unas son representaciones internas a un sistema e independientes de toda visión del objeto. Otras son representaciones conscientes, inseparables de la visión de alguna cosa que toma *ipso facto* el status de objeto. Esta diferencia de naturaleza se expresa en la existencia de *dos tipos de tratamiento,* cuya complementariedad es indispensable para dar cuenta del funcionamiento y del desarrollo cognitivo del pensamiento humano: los tratamientos cuasi-instantáneos y los tratamientos intencionales.

Los **tratamientos cuasi-instantáneos** son aquellos que son efectuados incluso antes de haber sido observados y que producen las informaciones y las significaciones de las cuales un sujeto tiene inmediatamente consciencia[7]. Siendo efectuados por fuera del campo de atención, producen los datos necesarios para una visión del objeto. Su particularidad es poder ser efectuados simultáneamente y también ser insensibles a la cantidad de elementos a integrar: experimentalmente, los tiempos de reacción no se prolongan con el aumento del número de unidades informacionales a tener en cuenta (Scheneider & Shiffrin, 1977, p. 2-8, 51-52, 159-160). Intuitivamente, los tratamientos cuasi-instantáneos corresponden a la familiaridad o a la experiencia que resulta de una larga práctica o de una competencia adquirida en un dominio. El carácter inmediato o evidente de una aprehensión, perceptiva o conceptual, implica la puesta en acto de un conjunto de tratamientos cuasi-instantáneos. Para la lectura, es suficiente comparar la percepción que un alumno de 1° puede tener de una frase escrita a la de un profesor o a la de un muchacho de 10° u 11°: no son los mismos datos informacionales los que se perciben en conjunto (sílabas, palabras, sintagmas, proposiciones...) y no son los mismos objetos los que se ven en conjunto (representaciones asociadas a las palabras, a las combinaciones de palabras...).

---

[7] Aunque retomamos aquí el conjunto de rasgos característicos por los cuales Schneider y Schiffrin definieron estos tratamientos, no retomamos su terminología de “tratamientos automáticos” y “tratamientos controlados”. El término “automático” (s. XVIII) puede prestarse a confusión. Hay procedimientos que se pueden desarrollar “automáticamente”, como un algoritmo de cálculo frecuentemente efectuado, y que sin embargo son ejecutados con toda consciencia, es decir, intencionalmente. Además, el término “automático” presenta el inconveniente de ser asociado al término más reciente de “automatización” (s. XIX), el cual sugiere un modo de aprendizaje por repetición. Ahora bien, la distinción que introducimos aquí es entre los tratamientos no conscientes que proporcionan una organización objetiva inmediata para el sujeto, y los tratamientos que él decide y que él puede controlar. Esta distinción se hace en comparación con *la existencia o no de un plazo para el sujeto.* El primer tipo de tratamiento toma un lapso de tiempo, pero este lapso es subliminal para la consciencia del sujeto. Es por eso que nos hemos quedado con la expresión “cuasi-instantáneo”. Los “datos inmediatos de la consciencia”, resultan de tratamientos cuasi-instantáneos. El segundo tipo de tratamiento requiere de intervalos de tiempo que son vividos por el sujeto como sucesiones de fases, como momentos de atención, de pausa, como desarrollos fastidiosos, etc. Muchos tratamientos llamados “automáticos” en realidad son tratamientos intencionales, incluso si no toman más que algunos segundos. Entre los tratamientos cuasi-instantáneos y los tratamientos intencionales, incluso los más rápidos, hay un salto cualitativo en la escala de duración. Lo que cambia la naturaleza de los fenómenos que se han descrito.

Los **tratamientos intencionales** son aquellos que *para ser efectuados toman al menos el tiempo de un control consciente y que se dirigen exclusivamente a los datos previamente observados, en una visión incluso furtiva del objeto.* Ellos pues, sólo se dirigen sobre los datos que tienen el status de objeto para el sujeto que los efectúa. Estos tratamientos sólo pueden dirigirse a lo que el sujeto "ve" u observa de manera cuasi-instantánea. Su particularidad es que sólo pueden ser efectuados uno después del otro y que son muy sensibles al número de elementos a integrar: experimentalmente, el tiempo de reacción aumenta muy velozmente con el número de unidades informacionales a tomar en cuenta (Schneider & Shiffrin, 1977). La capacidad de tratamiento intencional es a la vez restringida y no extensible en todos los sujetos, cualesquiera que sean sus niveles de conocimiento.

Toda actividad cognitiva humana se basa en la complementariedad de estos dos tipos de tratamientos. Dada la no extensibilidad de la capacidad de tratamiento intencional, la diferencia de los resultados [performances] cognitivos entre los sujetos depende de la diversidad y de la arquitectura de los tratamientos cuasi-instantáneos de que ellos disponen. *El conjunto de los tratamientos cuasi-instantáneos de que dispone un sujeto, determina el nivel y el horizonte epistémicos para la aplicación de los tratamientos intencionales.* Mientras más posibilidades de tratamientos cuasi-instantáneos posea un sujeto, es mayor el número de elementos inmediatamente integrados y fusionados en una sola unidad informacional ("*chunk*") y por tanto el nivel epistémico de los objetos a los que puede aspirar es superior. No habría posibilidad de construcción jerárquica de los conocimientos sin el incremento de los tratamientos cuasi-instantáneos. La función de estos tratamientos es, en efecto, suministrar a la "percepción inmediata" de la consciencia unidades informacionales más y más ricas, para que aquella pueda aspirar a objetos más complejos o más generales. La adquisición de nuevos tratamientos cuasi-inmediatos aparece pues como la condición de todo progreso cualitativo en el aprendizaje. *Ahora bien, esta adquisición pasa necesariamente por una fase de tratamientos intencionales.* Esto se puede observar, por ejemplo, para las adquisiciones numéricas elementales bien sea en lo que concierne la aprehensión del "*subitizing"* de todas las cantidades pequeñas (de 3 a 6) o bien en lo que concierne a las operaciones aritméticas con los enteros (Fischer, 1992, p. 133-134, 139-142). Los niños pasan progresivamente de una actividad intencional (conteo, realización de un algoritmo) con representaciones semióticas (verbales u otras) a las aprehensiones inmediatas que resultan de las representaciones computacionales. Y esto no sucede de manera regular y homogénea para todos los números y para las cuatro operaciones.

No es esencial para nuestro propósito engarzarnos aquí en una discusión de los modelos que se proponen explicar cómo es que el aprendizaje puede transformar los tratamientos intencionales, procedurales o declarativos, en tratamientos cuasi-instantáneos. Nos quedaremos sólo con el carácter fundamental e irreductible de los tratamientos intencionales efectuados sobre las representaciones semióticas en el aprendizaje humano. En lo sucesivo centraremos todos nuestros análisis en las representaciones semióticas que constituyen el dominio en el seno del cual se efectúan todos los aprendizajes ligados a una enseñanza.

LAS ACTIVIDADES COGNITIVAS FUNDAMENTALES DE LA REPRESENTACIÓN LIGADAS A LA SEMIOSIS

Hay tres actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis. La primera es, evidentemente, la **formación** de representaciones en un registro semiótico particular, ora para "expresar" una representación mental, ora para "evocar" un objeto real. Esta formación implica siempre una selección en el conjunto de los caracteres y de las determinaciones que constituyen lo

se "quiere" representar. Las otras dos actividades están directamente ligadas a *la propiedad fundamental de las representaciones semióticas: su transformabilidad en otras representaciones que conservan sea todo el contenido de la representación inicial, sea sólo una parte de ese contenido.* Ahora bien, esta transformación no corresponde a la misma actividad cognitiva según que la transformación se haga al interior del mismo registro o, al contrario, que consista en un cambio de registro. Hablaremos de **"tratamiento"** cuando la transformación produce otra representación en el mismo registro. Y hablaremos de **"conversión"** cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial. Un hermoso ejemplo de conversión, de una gran eficacia técnica, es la transformación analógica/numérica de la información sonora: la frecuencia y la amplitud de las ondas pueden ser transformadas en una serie de varios bloques formados de 0 y de 1, y pueden ser reconstituidas de nuevo por la conversión inversa. Veremos que la conversión puede ser de una gran fecundidad epistémica. Formación, tratamiento y conversión son las actividades cognitivas fundamentales de la semiosis.

Estas diferentes actividades están reagrupadas y confundidas en lo que generalmente se llaman tareas de producción y tareas de comprensión. La producción de una respuesta, sea un texto o un esquema, movilizan simultáneamente la formación de representaciones semióticas y su tratamiento. La comprensión de una cuestión, sea un texto o una imagen, movilizan o bien actividades de conversión y de formación o bien las tres actividades cognitivas. Naturalmente podrían tenerse, a un nivel más global, tareas de producción y tareas de comprensión de las cuales los resultados sean directamente observables y fácilmente interpretables en un modelo de comunicación. Pero hay reglas de funcionamiento propias a cada una de estas tres actividades; reglas que dependen de los sistemas semióticos y que son independientes de las restricciones que una situación particular de comunicación puede imponer a la producción o a la comprensión de representaciones semióticas.

Formación de representaciones semióticas y conformidad a las restricciones de un sistema semiótico

La formación de una representación semiótica es el recurso a un(os) signo(s) para actualizar la mirada de un objeto o para sustituir la visión de ese objeto. Excepto los casos de idiosincrasia, los signos utilizados pertenecen a un sistema semiótico ya constituido y ya utilizado por otros: la lengua materna, un código icónico de representación gráfica o artística, una lengua formal, etc. Los actos más elementales de formación son, según los registros, la designación nominal de objetos, la reproducción de su contorno percibido, la codificación de relaciones o de algunas propiedades de un movimiento. Naturalmente, estos actos elementales son interesantes sólo en la medida en que las representaciones así formadas están, implícita o explícitamente, articuladas en representaciones de orden superior: frase, imagen, esquema, tabla... Esta articulación en representaciones de orden superior depende de las posibilidades de estructuración propia a cada sistema semiótico. Por tanto, es importante que la formación de representaciones semióticas respete las reglas propias al sistema empleado no sólo por razones de comunicabilidad, sino también para hacer posible la utilización de los medios de tratamiento que ofrece ese sistema semiótico empleado. Así, más que de reglas de producción, preferimos hablar de **reglas de conformidad.** Una representación semiótica no debe salir del dominio definido por las reglas que constituyen un sistema semiótico.

Las reglas de conformidad son aquellas que definen un sistema de representación y, en consecuencia, los tipos de unidades constitutivas de todas las representaciones posibles en un registro. Estas se refieren esencialmente a:

- la determinación (estrictamente limitada, o al contrario, abierta) de unidades elementales (funcionalmente homogéneas o heterogéneas...): símbolos, vocabulario...
- las combinaciones admisibles de unidades elementales para formar unidades de nivel superior: reglas de formación de un sistema formal, gramática de las lenguas naturales...

- las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa: reglas canónicas propias a un género literario o a un tipo de producción en un registro.

Las reglas de conformidad permiten identificar un conjunto de elementos físicos o de trazos (sonidos, posiciones opuestas de un circuito, caracteres, rayas...) como una representación de alguna cosa en un sistema semiótico: es un enunciado en alemán, es un cálculo, es una fórmula de física, es una figura de geometría, es una caricatura, es el esquema de un circuito eléctrico... *Las reglas, pues, permiten el reconocimiento de las representaciones como representaciones en un registro determinado.* Cumplen también una función de identificación de sentido para el que se encuentra frente a una representación, que no es el mismo que la produjo. Pero eso no implica que el conocimiento de las reglas sea suficiente para la comprensión o la exploración de las representaciones dadas. Desde un punto de vista didáctico y epistemológico, igualmente se puede decir que las reglas intervienen más en el control de la aceptabilidad de una representación producida, respecto al registro en que está formada, que en su formación.

La formación de las representaciones semióticas es, en efecto, más compleja que la aplicación de las reglas de conformidad. La formación implica la *selección de una cierto número de caracteres de un contenido* percibido, imaginado o ya representado en función de las posibilidades de representación propias al *registro hecho*. Para darse cuenta de esto, basta con considerar una de las actividades tipo de formación de representaciones en el registro de la lengua natural: la descripción. Esta formación puede hacerse en tres situaciones totalmente diferentes según los datos a partir de los cuales la descripción debe efectuarse. La selección a efectuar no corresponde a las mismas tareas cognitivas según que los datos deban ser extraídos de una exploración perceptiva de un objeto, de un recuerdo, de una evocación imaginaria, o que estén ya fijadas por una representación en otro registro (imagen, esquema...).

Tratamiento de las representaciones semióticas y expansión informacional

Un **tratamiento** es la transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal), respecto a una cuestión, a un problema o a una necesidad, que proporcionan el criterio de interrupción en la serie de las transformaciones efectuadas. Un tratamiento es una **transformación de representación interna a un registro** de representación o a un sistema. El *cálculo* es un tratamiento interno al registro de una escritura simbólica de cifras o de letras: sustituye, en el mismo registro de escritura de los números, expresiones nuevas por expresiones dadas. Sin embargo, el término "cálculo" en matemáticas, es tomado en una acepción más amplia: se llama cálculo a todo proceso de transformación de escritura de los números, combinando actividad de tratamiento y actividad de conversión. La *paráfrasis* es una transformación interna al registro del discurso en la lengua natural: "reformula" un enunciado dado en otro, sea para reemplazarlo o para explicarlo. La *anamórfosis* puede también ser considerada como una transformación interna a un registro, el de las figuras, aunque allí no haya conservación de la situación representada. Frege fue el primero en analizar el funcionamiento de la transformación interna a un registro de representación distinguiendo, de acuerdo a su interés, el sentido y la referencia (Frege, 1971). De manera más general se puede decir que el tratamiento de una representación semiótica corresponde a su expansión informacional. Esto es particularmente claro en el caso del lenguaje. La potencia creativa de todo lenguaje se apoya en una *expansión discursiva*, de la cual la paráfrasis constituye la forma más pobre.

Las reglas de expansión de una representación son, por definición, reglas cuya aplicación da una representación del mismo registro que la representación de partida. Estas reglas son totalmente

distintas de las reglas de conformidad. Las primeras reglas de expansión informacional explícitamente realzadas, lo han sido en el marco de la lógica, bajo la apelación de *reglas de derivación* (regla de agregación y regla de sustitución). Las *reglas de producción*, reglas de naturaleza inferencial definidas en el marco de la Inteligencia Artificial, se han inspirado en ellas (Newell & Simon, 1972). Más recientemente, han sido señaladas las *reglas de coherencia temática* para la expansión discursiva en el registro de las lenguas naturales (Charolles, 1978, p. 14-20). Falta además añadir las *reglas asociativas de contigüidad y de similitud* , que comandan lo que de manera global se llama "asociación de ideas": presentan la particularidad de ser comunes a la vez a la expansión discursiva en las lenguas naturales y a la movilización de las representaciones mentales (Saussure, 1973, p. 171).

Esta enumeración, evidentemente, sólo tiene un valor indicativo. Lejos está de ser exhaustiva. Sin embargo, es suficiente para llamar la atención sobre un punto importante. Algunas reglas de tratamiento no son del todo específicas de un registro de representación. es el caso, por ejemplo, de las reglas de derivación: son comunes a todos los razonamientos de tipo deductivo. Ahora bien, estos razonamientos pueden ser efectuados tanto en el registro de una lengua formal (los *Principia Mathematica*) como en el de la lengua natural (las demostraciones en geometría). Las reglas de derivación son independientes de un registro particular. Sin embargo, esta independencia no significa su neutralidad respecto a los registros de representación en los cuales se les hace funcionar. Así, *no pueden hacerse funcionar las reglas de derivación en el registro de la lengua natural sin que al mismo tiempo funcionen las reglas predominantes de coherencia temática y de asociación por similitud o contigüidad*, las cuales son inherentes a la práctica común de la lengua natural. Y hacerlas funcionar en el registro de una lengua formal, extraña a estas reglas, puede acarrear un ocultamiento del aporte del razonamiento en el desarrollo de los conocimientos. Esto plantea problemas específicos para el aprendizaje de las diferentes formas de razonamiento, sobre los cuales volveremos con detalle en los capítulos III y V.

Conversión de las representaciones y cambio de registro

La **conversión** es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro. Las operaciones que habitualmente se han designado con los términos "traducción", "ilustración", "transposición", "interpretación", "codificación", etc., son operaciones que hacen corresponder una representación dada en un registro con otra representación en otro registro. La conversión es pues una **transformación externa relativa al registro de la representación de partida**. La ilustración es la puesta en correspondencia de una palabra, una frase o un enunciado, con una figura o con uno de sus elementos. El pasaje inverso, de imagen a texto, puede ser una descripción o una interpretación. El planteamiento en ecuación de los datos del enunciado de un problema, es la conversión de las diferentes expresiones lingüísticas de las relaciones en otras expresiones de esas relaciones en el registro de una escritura simbólica. Este último ejemplo muestra que el contenido de la representación obtenida puede cubrir sólo muy parcialmente el de la representación de partida: la puesta en correspondencia que permite la conversión, frecuentemente se efectúa al precio de una selección en el contenido de la representación de partida y también al precio de una reorganización de sus elementos.

Sin embargo, la conversión requiere que se perciba la diferencia entre lo que Frege llamaba el sentido y la referencia de los símbolos o de los signos, o entre el contenido de una representación y lo que ésta representa. Sin la percepción de esta diferencia, la actividad de conversión deviene imposible o incomprensible. Esto puede observarse muy fácilmente en una situación muy simple: el

cálculo numérico. Tomemos el tipo de ejemplo que con mayor frecuencia se presenta para mostrar que los alumnos llegan a 10° y no saben calcular: se trata del fracaso no en la actividad de tratamiento sino en la de conversión. Aunque los alumnos sepan efectuar la adición de dos números en su escritura decimal o en su escritura fraccionaria, a algunos alumnos ni se les ocurre pensar la posibilidad de convertir la escritura decimal de un número en su escritura fraccionaria (o a la inversa), o igualmente fracasan cuando esto es completamente necesario para el desarrollo de un cálculo. En realidad, la escritura decimal, la escritura fraccionaria, la escritura con exponentes, constituyen tres registros diferentes de representación de números. En efecto, en la escritura de un número es necesario distinguir **la significación operatoria vinculada al significante** y **el número representado.** Así, la significación operatoria no es la misma para 0,25, para ¼ y para 25.10^{-2} puesto que no son los mismos procedimientos de tratamiento los que permiten efectuar las tres adiciones siguientes:

$$0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5$$

$$¼ + ¼ = ½$$

$$25.10^{-2} + 25.10^{-2} = 50.10^{-2}$$

Cada uno de estos tres significantes "0,25", "1/4" y "25 x 10^{-2}" tiene una significación operatoria diferente, pero sin embargo representa el mismo número. Si la significación operatoria vinculada al significante y que comanda el procedimiento de tratamiento no está diferenciada del objeto número representado, entonces la sustitución por conversión de 0,25 a ¼ no es concebible! El problema sobre el cual volveremos es el de saber cómo hacer para efectuar esta diferenciación. Más específicamente, el problema es el de saber si un aprendizaje encaminado a la adquisición de actividades de conversión es de la misma naturaleza que un aprendizaje encaminado a la adquisición de actividades de tratamiento.

Podría esperarse que si hay conjuntos de reglas tan bien explicitadas para los cambios de registro, tal problema no exista para las actividades cognitivas de formación de las representaciones semióticas y de expansión de las representaciones formadas. En realidad, este no es el caso. Con frecuencia no hay reglas. Basta con considerar el pasaje de enunciados en lengua natural a expresiones correspondientes en lenguaje formal, o a una escritura simbólica, así como el pasaje inverso. O también el pasaje de imágenes a textos y de textos a imágenes. *Incluso aún cuando las reglas de conversión puedan estar bien definidas, las dificultades y las ambigüedades no desaparecen por ello.* Es el caso, por ejemplo, del pasaje entre la escritura simbólica (algebraica) de las relaciones y los gráficos cartesianos. La regla que asocia un punto del plano señalado con una dupla de números, permite construir según un procedimiento muy simple las representaciones gráficas de las relaciones anotadas algebraicamente

$$y = x \quad y < x \quad y^2 + x^2 = 1$$

Pero se trata allí de una regla local que sólo puede inducir una actividad de puntaje. Y de otro lado, para efectuar el pasaje inverso, la utilización de esta regla sólo puede hacerse por la vía de procedimientos de cálculo muy pesados. De todas maneras, la sola utilización de esta regla conduce a una ejecución ciega: la mayoría de los alumnos de 10° no discriminan la forma de escritura que corresponde a una recta que pasa por el origen y la de una recta que no pasa por el origen, ni incluso la forma de escritura que corresponde a una recta de pendiente positiva y la correspondiente a una recta de pendiente negativa (Duval, 1988c, p. 243-246). Para efectuar esta discriminación, hace falta, en efecto, recurrir a una interpretación global que requiere de haber resaltado los diferentes valores posibles de las variables visuales pertinentes en el registro gráfico, y haberlos puesto en relación con los símbolos correspondientes en la escritura algebraica (Duval, 1988c, p. 239-240).

Dicho de otra manera, *las reglas de conversión no son las mismas según el sentido en el que se efectúa el cambio de registro.* Es la misma situación que se da para los pasajes entre los discursos en lengua natural y las figuras en geometría. Volveremos sobre esto en el capítulo IV. Esto quiere decir que cada vez que se extraen las reglas de conversión, la aplicación de estas reglas tiene un sentido único.

La distinción de estas tres actividades ligadas a la *semiosis* es esencial tanto para el análisis cognitivo de las tareas como para el de las condiciones de un aprendizaje conceptual. Es importante separarlas bien y no mezclar las reglas que aseguran el funcionamiento. Máxime cuando estos tres tipos de actividad intervienen, explícita o implícitamente, en las **macro-tareas de producción o de comprensión** habitualmente requeridas en el marco de la enseñanza. El problema que se plantea concierne entonces, de una parte, las condiciones de aprendizaje propias a cada una y, de otra, su orden de importancia para acceder a alguna habilidad en las macro-tareas de producción o de comprensión.

La enseñanza privilegia el aprendizaje de las reglas que conciernen la formación de las representaciones semióticas y las que conciernen su tratamiento. Y esto principalmente para el registro de los discursos en lengua natural, para los registros numéricos y para el registro de la escritura simbólica. Basta con considerar el lugar dado a la gramática en la enseñanza del francés, y al aprendizaje de los algoritmos del cálculo numérico o algebraico en la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, todos los registros semióticos no dan lugar a este tipo de aprendizaje. No hay, por ejemplo, ningún aprendizaje de las reglas de tratamiento propias al registro de las figuras geométricas. Las tareas de construcción de figuras requieren únicamente la coordinación entre el registro discursivo (más particularmente un empleo especializado de la lengua natural) y las reglas de formación que con frecuencia son confundidas con los medios técnicos utilizados para la realización de las figuras. Pero, sobretodo, el lugar dado a la conversión de las representaciones de un registro a otro es mínimo si no nulo. Y esto por varias razones. La primera, que ya hemos señalado, es, en la mayoría de los casos, la inexistencia de reglas de conversión o su alcance extremadamente reducido. La segunda es que con frecuencia se efectúa un cambio de registro con fines de simplicidad y economía de tratamiento: una vez se efectúa la conversión, se queda sólo con el registro en el cual se trabaja (el del discurso, de la escritura algebraica o de los números). La tercera es la creencia en la inmediatez y la simplicidad de un cambio de registro y pensar que detenerse en este tipo de actividad cognitiva sería quedarse atrasado en relación con una enseñanza de las matemáticas y/o del francés considerada seria.

Ahora bien, numerosas observaciones en clase, el análisis de los resultados de encuestas y evaluaciones, así como experiencias de aprendizaje, muestran que *la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos.* No sólo el cambio de registros ocasiona obstáculos que son independientes de la complejidad del campo conceptual en el que se trabaja; también la ausencia de coordinación entre los diferentes registros produce con mucha frecuencia un handicap para los aprendizajes conceptuales. A la inversa, un aprendizaje específicamente centrado en el cambio y en la coordinación de los diferentes registros de representación, produce efectos espectaculares sobre las macro-tareas de producción y de comprensión. Así, si se pide una producción discursiva a los alumnos, se obtienen textos radicalmente diferentes según que ellos hayan tenido la ocasión o no de descubrir en otro registro la organización de lo que ellos deben expresar: un trabajo previo en el registro de las gráficas proposicionales da a los alumnos la posibilidad de una facilidad y de un dominio de redacción de los textos de demostración (Egret, 1989; Duval, 1991b). Igualmente, un cambio explícito de registro aparece como un medio potente y necesario para la comprensión de textos (Duval, 1986, 1990c). Veremos que la conversión de las representaciones es, para el aprendizaje, una actividad tan fundamental como las actividades de formación o de tratamiento. Ésto, porque sólo la conversión puede favorecer la coordinación de los registros de representaciones.

PROBLEMAS ESPECÍFICOS A LOS CAMBIOS DE REGISTRO

No sobra recordar aquí la variedad e importancia de los cambios de registros para recalcar la frecuencia con la cual la actividad cognitiva de conversión puede ser necesaria, al menos en algunas

disciplinas. Basta con abrir no importa cuál manual de matemáticas para constatar, en cualquier página, los incesantes vaivenes entre frases en lengua natural, fórmulas literales, expresiones en lenguaje formal, figuras geométricas o gráficos cartesianos. Puede hacerse una constatación análoga en obras de otras disciplinas. El formato de los manuales de historia y de geografía, por ejemplo, tiende a hacerse en varias columnas de manera tal que estén a la vista textos (documentos y comentarios), fotos, mapas, esquemas, tablas estadísticas o de curvas, etc. Incluso algunos manuales de francés tienden a desarrollar esta presentación para poner en paralelo modos múltiples de representación. ¡Como si esto bastara para entregar el contenido informacional o conceptual no sólo de manera más atractiva sino también más accesible y más comprensible! En otros términos, se recurre a la actividad cognitiva de conversión de las representaciones como si fuera una actividad natural o adquirida, desde el nivel de la escuela, por todos los alumnos; como si fuera una actividad sobre la cual los aprendizajes de tratamiento y los aprendizajes conceptuales pudieran apoyarse.

Ahora bien, la mayoría de las veces la actividad de conversión es menos inmediata y menos simple de lo que se tiene la tendencia a creer. Para darse cuenta de esto es necesario analizar cómo puede efectuarse la puesta en correspondencia, sobre la cual reposa toda conversión de representación. La puesta en correspondencia de dos representaciones pertenecientes a registros diferentes, puede ser establecida localmente por una correspondencia asociativa entre las unidades significantes elementales constitutivas de cada uno de los dos registros. Tomemos por ejemplo la siguiente expresión y su conversión en escritura algebraica (cf. Tabla 4):

"el conjunto de puntos cuya ordenada es **superior** a la abscisa"

$$y > x$$

Se prevé que para efectuar la conversión es suficiente con una correspondencia término a término entre las unidades significantes respectivas. En este caso, la conversión inversa permite volver a encontrar la expresión inicial del registro de partida. Sea ahora la expresión:

"el conjunto de puntos que tenga una abscisa **positiva...**"

$$x > 0$$

Falta en la escritura algebraica una unidad significante que corresponda a "positivo". Es necesario entonces recurrir a la paráfrasis " > 0 ", combinación de dos unidades significantes para mitigar esta carencia. La diferencia a sobrepasar para efectuar la conversión se hace entonces más amplia con la expresión siguiente:

"el conjunto de puntos cuya abscisa y ordenada tengan **el mismo signo**"

$$xy > 0$$

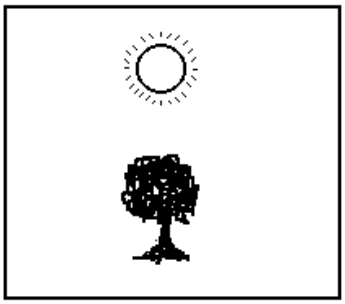
Aquí no hay correspondencia término a término entre las unidades significantes respectivas de las dos expresiones: es necesaria una reorganización de la expresión dada del registro de partida para obtener la expresión correspondiente en el registro de llegada. Además, la paráfrasis " > 0 " expresa tanto "de mismo signo" como "positivo". La conversión inversa no permite encontrar la expresión inicial: "$xy > 0$ " se expresa naturalmente como "el producto de la abscisa y de la ordenada es superior a 0 (es positivo)", y no como "el conjunto de los puntos cuya abscisa y ordenada tienen el mismo signo". En el primer ejemplo hablaremos de "**congruencia**" de las representaciones, siguiendo a Clark quien fue el primero en introducir esta noción en psicología (Clark, 1969; Clark & Chase, 1972). En el segundo y tercer ejemplo, hablaremos de **no-congruencia** de las

representaciones. Numerosas observaciones, tanto en el marco de experiencias de laboratorio como en el de trabajo en clase, muestran que si la conversión de las representaciones es cuasi-inmediata en caso de congruencia, éste no es el caso cuando no hay congruencia entre la representación inicial y la representación convertida. En caso de no-congruencia no sólo aumenta el tiempo de tratamiento, sino que la conversión puede revelarse imposible de efectuar, o incluso de comprender, si no ha habido un aprendizaje previo concerniente a las especificidades semióticas de formación y de tratamiento de la representación, propias a cada uno de los registros presentes. Pero es sobre estas nociones de congruencia y de no-congruencia que es necesario detenerse en primer lugar. ¿Cómo determinar la congruencia, o la no-congruencia, entre dos representaciones que provienen de registros semióticos diferentes y que se supone tienen un contenido común?

Los criterios de congruencia entre representaciones

Para determinar si dos representaciones son congruentes o no, es necesario comenzar por segmentarlas en sus respectivas unidades significantes, de manera tal que puedan ser puestas en correspondencia. Al término de esta segmentación comparativa, entonces se puede ver si las unidades significantes son, en cada uno de los dos registros, unidades significantes simples o combinaciones de unidades simples. Esta comparación puede hacerse directamente o por intermedio de una tercera representación que de alguna manera "codifique" las representaciones a comparar.

Tomemos por ejemplo el análisis de congruencia entre imagen y frase propuesto por Clark & Chase (1972). Sea la imagen siguiente:



Esta imagen tiene cuatro unidades: las dos formas dibujadas y sus respectivas posiciones sobre el eje vertical. La determinación perceptiva de la posición de un objeto se hace en relación con otro: en la dimensión vertical, y en ausencia de línea de horizonte, es el objeto más bajo el que sirve de anclaje para la aprehensión perceptiva de la imagen.

La descripción lingüística de esta imagen implica dos cosas. De una parte, el sujeto de la frase puede referirse tanto al objeto más alto como al objeto más bajo de la imagen. De otra parte, la expresión de la posición depende del objeto tomado como referencia: "encima de..." o "debajo de...". Se obtienen pues cuatro frases que pueden describir esta imagen, de las cuales solamente dos son ciertas. Llamando A y B al sol y al árbol respectivamente, y simbolizando las locuciones "encima de..." y "debajo de..." con "$\wedge$" y "$\vee$", se puede hacer una codificación de estas frases (Clark & Chase, 1972, p. 477-8). Así, A $\wedge$ B es una representación simbólica que codifica la frase "el sol está encima del árbol", así como codifica la imagen descrita. En su trabajo, Clark & Chase consideran esta serie de símbolos como la codificación de las representaciones semánticas internas de la frase y de la imagen. Nosotros aquí nos quedaremos sólo con el análisis de congruencia que permiten estas representaciones simbólicas.

En la tabla que se presenta abajo están las cuatro frases posibles para describir esta imagen. Si se admite que la imagen descrita es siempre codificada de la misma manera (A $\wedge$ B), entonces se constata que sólo la frase 1 es congruente con la imagen; una y otra representan la información de la misma manera. Este análisis de congruencia puede ahora ponerse a prueba experimentalmente. Basta con proponer la comparación de cada una de las diferentes frases con la imagen, y preguntar si la frase es una descripción que se ajusta a la imagen. En los tiempos de respuesta, se ve una diferencia entre la frase congruente y las otras tres. Hay un aumento fuerte en el costo del tratamiento cuando las representaciones no son congruentes. Este resultado se confirma ampliamente si se introducen las cuatro frases negativas que corresponden a las cuatro frases afirmativas.

Tabla 2

Tiempos de reacción en una tarea de comparación frase/imagen

Para las cuatro descripciones negativas de la imagen, que suscitan una respuesta inversa, hemos obtenido, respectivamente, los siguientes tiempos de reacción: 2354ms., 2499ms., 2614 ms., 2678 ms. (Clark & Chase, 1972, p. 492)

Frases que describen la imagen	Codificación de la frase	Comparación entre la codificación de la imagen (A $\wedge$ B) y la codificación de la frase que describe la imagen	Respuesta	Tiempos de respuesta
A está encima de B	A $\wedge$ B	mismo orden, mismos tratamientos semánticos	V	1783 ms.
A está debajo de B	A $\vee$ B	mismo orden, tratamientos opuestos	F	2077 ms.
B está encima de A	B $\wedge$ A	orden inverso, mismos tratamientos semánticos	F	2130 ms.
B está debajo de A	B $\vee$ A	orden inverso, tratamientos opuestos	V	2139 ms.

El análisis de este ejemplo nos permite precisar **tres criterios de congruencia.**

El primero es la **posibilidad de una correspondencia "semántica" de los elementos significantes:** a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental. Se considera como unidad significante elemental toda unidad que depende del "léxico" de un registro. El primer ejemplo de conversión de una expresión referencial en una escritura algebraica, dado anteriormente, ilustra bien esta situación. El segundo criterio es la **univocidad "semántica" terminal:** a cada unidad significante elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una única unidad significante elemental en el registro de la representación de llegada. Así, para la relación espacial de verticalidad tenemos en el registro icónico un sólo valor significante, mientras que en el registro de la lengua natural tenemos dos unidades significantes elementales posibles. Si el caso es describir la imagen, la frase es una representación terminal y no hay univocidad semántica terminal. El tercer criterio es relativo a la organización de las unidades significantes. Las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a aprehender las unidades en correspondencia semántica según el mismo orden en las dos representaciones. Este criterio de correspondencia en el **orden en el arreglo de las unidades que componen cada una de las dos representaciones** es pertinente sólo cuando éstas tienen el mismo número de dimensiones. Es

excepcional el caso del ejemplo de Clark et de Chase: la imagen es reducida a una sola dimensión, el orden en el arreglo de las unidades de la imagen pueden ser comparadas al de las unidades de la frase. Este criterio es importante sobretodo cuando el caso es comparar frases y fórmulas literales.

Estos tres criterios permiten determinar la congruencia entre dos representaciones semióticamente diferentes y que, al menos parcialmente, representan el mismo contenido. Dos representaciones son congruentes cuando hay correspondencia semántica entre sus unidades significantes, univocidad semántica terminal y el mismo orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones. Naturalmente, puede no haber correspondencia por ninguno de los tres criterios, por dos o solamente por uno. La no-congruencia entre dos representaciones, por tanto, puede ser más o menos grande. La dificultad de la conversión de una representación depende del grado de no-congruencia entre la representación de salida y la representación de llegada.

La resolución de problemas aditivos propuestos a finales de la escolaridad primaria, sobre los cuales los trabajos de Vergnaud (1976) han mostrado la complejidad cognitiva, son un bello ejemplo de tarea de conversión: se trata de pasar de un enunciado a la escritura de la ecuación aritmética que da la solución. El orden de las dificultades regularmente observadas entre las diferentes categorías de problemas, corresponde muy exactamente a lo que permite prever un análisis de congruencia y de no-congruencia (R. Damm, 1992, p. 51-53). Hay tres factores que comandan la dificultad de la conversión enunciado $\rightarrow$ escritura de la ecuación aritmética, cuando la dificultad está en la elección de la operación a plantear entre los dos números dados en el enunciado:

- Hay identidad, o no identidad, entre la operación semánticamente sugerida por los verbos portadores de la información numérica en el enunciado y la operación aritmética a plantear:

  " gana 3..." $\rightarrow$ "+" y "pierde 3..." $\rightarrow$ "-".

  El caso de identidad resulta de una congruencia semántica entre los verbos del enunciado y el sentido de la operación a efectuar. Así

  (*gana*) 3 + (*gana*) 6 = (gana)...

  Pero no siempre hay congruencia semántica como en:

  (*pierde*) 3 + (y no - !) (*pierde*) 6 = (pierde)...

- Los verbos portadores de la información numérica no son verbos antónimos o son, al contrario, verbos antónimos (ganar/perder, subir/descender...). Cuando los verbos portadores de la información numérica son antónimos, no hay univocidad semántica terminal. Así en

  (*pierde*) 3 + (*gana*) 6 = (?).. o (*pierde*) 6 + (*gana*) 3 = (?)...

  es necesario escoger el verbo portador de la información numérica para la solución, a diferencia de lo que pasa en

  (pierde) 6 - (pierde) 3 = (pierde)...

- El orden de presentación de los datos numéricos en el enunciado puede conservarse o, al contrario, es necesario invertirlo partiendo del dato final. Por ejemplo, cuando el enunciado da las informaciones en el siguiente orden: "(1º...), (2ª, ha ganado 3), (en total gana **8**)", es necesario convertirlo en:

  (gana) **8** (?) (gana) 3 = ...

  Cuando no hay inversión, el orden del arreglo y de la aprehensión de las unidades significantes pertinentes es la misma en el enunciado y en la ecuación aritmética, dando inmediatamente la solución.

Los análisis publicados de los resultados de diferentes investigaciones sobre los problemas aditivos muestran que:

- cuando los enunciados son estrictamente congruentes con las igualdades aritméticas (identidad, no de verbos antónimos, sino de inversión) los problemas son rápidamente resueltos por casi todos los alumnos,
- cuando aumenta la no-congruencia, la tasa de éxito raramente alcanza a un cuarto de la población de final de 5°, y hasta en clase de 8º se puede observar un porcentaje no despreciable de fracaso,
- cuando la no-congruencia no es muy grande, el porcentaje de éxito depende de los balances respectivos de cada uno de los tres factores de no congruencia (R. Damm, 1992, p. 52).

Esta noción de congruencia entre dos representaciones debe ser cuidadosamente diferenciada de las de "equivalencia funcional" y de "equivalencia computacional" elaboradas para evaluar la economía cognitiva de representaciones semióticamente diferentes (Larkin & Simon, 1987, p. 67). Dos representaciones que pertenecen a dos registros diferentes se dicen "funcionalmente equivalentes" si toda la información de una puede ser inferida a partir de la otra. Ahora bien, como hemos visto, la actividad de conversión no puede ser asimilada a una inferencia, incluso cuando hay no-congruencia. Y esto porque no hay reglas de conversión y sí hay de tratamiento. Dos representaciones se dicen "computacionalmente equivalentes" si, siendo informacionalmente equivalentes, toda inferencia que pueda ser fácil y rápidamente efectuada en una, puede hacerse igualmente en la otra. La noción de equivalencia computacional recubre un fenómeno de congruencia, no por la actividad cognitiva de conversión de representaciones de un registro a otro, sino por la actividad de tratamiento: hay correspondencia entre las diferentes operaciones de tratamiento que pueden ser efectuadas en dos registros semióticos distintos, sobre representaciones iniciales convertibles entre sí. Naturalmente, un cambio de registro resulta interesante y fecundo cuando los tratamientos en dos registros diferentes no son computacionalmente equivalentes, es decir, no son congruentes. El interés en un cambio de registro está en que, justamente, se pueden efectuar tratamientos totalmente diferentes en un registro distinto a aquel en el que fueron dadas las representaciones iniciales. Así, el poder heurístico de las figuras en geometría se explica por el hecho de que los tratamientos figurales que ellas permiten efectuar, no son computacionalmente equivalentes a los razonamientos deductivos que establece un teorema en el registro de una escritura simbólica o en el de la lengua natural.

Estas dos nociones no permiten, pues, tomar en consideración toda la actividad cognitiva de conversión de las representaciones, y desconocen la importancia de los casos de congruencia y de no-congruencia tanto a nivel de la actividad de conversión como en el de la actividad de tratamiento.

No-congruencia y encapsulamiento de los registros de representación

El ejemplo a partir del cual hemos introducido la noción de congruencia puede parecer muy simple de cara a la diversidad de las representaciones que los alumnos deben convertir permanentemente en el marco de un aprendizaje de las matemáticas. Y sobretodo puede hacer parecer como si fueran mínimos los efectos debidos a la no-congruencia: ¡una simple prolongación en el tiempo de respuesta, que sólo tendría significación a escala, no perceptible, de algunas décimas de segundos! Sin embargo, en las clases, la no-congruencia de las representaciones tiene efectos de otro orden: con mucha frecuencia conduce a fracasos en la actividad cognitiva de conversión. Y estos fracasos perduran a pesar de los aprendizajes que hayan requerido de tratamientos en los diferentes registros concernidos.

En 1970, es decir, en el período triunfal de la Reforma de las "Matemáticas Modernas" en el que la idea sobre la independencia de la actividad matemática de toda cuestión de lenguaje se erigió en principio, nosotros elaboramos un cuestionario centrado en la conversión de expresiones del lenguaje natural en su notación literal, y en la conversión inversa. Las frases y las expresiones referenciales concernientes a operaciones con enteros y con conjuntos, debían ser traducidas en una escritura simbólica. Y, a la inversa, las expresiones simbólicas debían ser descritas y no deletreadas. Se trataba, pues, de una tarea de producción, y no de simple verificación como en el ejemplo de Clark & Chase. El cuestionario se pasó en varias clases de octavo de tres Liceos. Uno de los resultados sorprendentes de este cuestionario, fue la gran diferencia en respuestas acertadas para preguntas aparentemente parecidas, como se puede ver en la tabla que sigue:

Tabla 3

Tarea de conversión entre expresiones referenciales y escritura simbólica

La consigna precisaba que, en cada ítem, letras diferentes representaban enteros diferentes (Duval, 1971). Se pueden señalar dos tipos de contrastes en esta tabla. El primero concierne a la diferencia en aciertos cuando se cambia el sentido de la conversión, II $\rightarrow$ l ó l $\rightarrow$ II. El segundo concierne a las diferencias entre las preguntas 1 y 4 de una parte, y las preguntas 3 y 5 de otra. Estas diferencias explican el carácter congruente o no-congruente de la conversión a efectuar.

L	ll	l $\rightarrow$ II	II $\rightarrow$ l
1. La suma de dos productos de dos enteros, siendo diferentes todos los enteros	a . b + c . d	90%	90%
2. El producto de un entero por la suma de otros dos	a (b + c)	*71%*	*74%*
3. La suma de los productos de un entero con otros dos enteros	a . b + a . c	**48%**	87%
4. La intersección de los complementarios de dos conjuntos	CA $\cap$ CB	91%	81%
5. La reunión de las intersecciones de un conjunto con otros dos conjuntos	(A $\cap$ B) $\cup$ (A $\cap$ C)	**41%**	81%

Excepto la segunda expresión, la conversión ll $\rightarrow$ l, descripción de una expresión simbólica por una expresión en lengua natural, es masivamente exitosa. Esto se explica por el hecho de que todas las unidades de las expresiones iniciales, excepto la segunda, están simétricamente organizadas al rededor de un signo central de operación. En el mismo cuestionario pudimos constatar grandes fracasos en la conversión de expresiones que no presentaban tal organización simétrica de símbolos. Era como si los alumnos tratando de aprehender la organización de las expresiones simbólicas a partir de un símbolo, la separaran en dos partes. Pero aquí queremos llamar la atención sobre la conversión l $\rightarrow$ ll, es decir, la traducción de una expresión en lenguaje ordinario a su notación literal. Es particularmente impresionante el contraste entre los resultados obtenidos en las preguntas 1 y 3, así como entre las preguntas similares 4 y 5. Este contraste se explica por un fenómeno de no-congruencia. En efecto se observa que, en la expresión en lenguaje ordinario de la línea 1, la cantidad de los diferentes símbolos de número a escribir está claramente indicada: “dos ... de dos..., todos diferentes”. Además, esta expresión comienza designando la última operación para el cálculo, aquella cuyo símbolo aparece como un centro de simetría para la escritura de la expresión literal; luego indica los dos símbolos para las operaciones a distribuir a lado y lado de ese símbolo central, y por último se designan los objetos sobre los cuales recaen las operaciones. Esta expresión en lenguaje

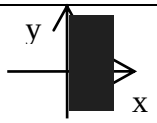
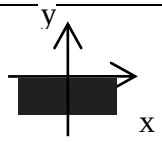
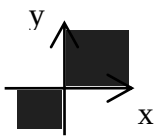
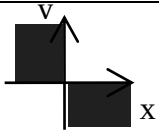
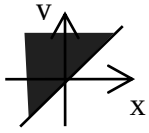
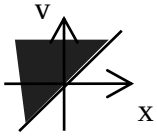
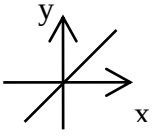
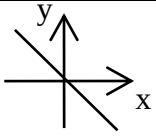
ordinario es totalmente congruente con la expresión simbólica correspondiente, en la medida en que la última operación para el cálculo corresponde a un símbolo que aparece como centro de simetría para la distribución de los otros símbolos! Tienen también correspondencia semántica entre las unidades significantes, univocidad terminal y el mismo orden de aprehensión. Ahora bien, éste no es el caso para la expresión en lenguaje ordinario de la línea 3: la designación “un entero” ha de traducirse como las dos ocurrencias de la misma letra. Nos encontramos exactamente los mismos fenómenos y, por tanto, las mismas diferencias en las dos conversiones 4 y 5. Las dificultades creadas por la no-congruencia para la conversión de las representaciones no radican solamente en el hecho de que uno de los registros sea el de la lengua natural. Surgen, de la misma manera, en la conversión entre la escritura algebraica de relaciones y su representación gráfica, como puede verse en la tabla de abajo que presenta los resultados más recientes y con alumnos de un nivel escolar más avanzado.

Tabla 4

Tarea de conversión entre escritura algebraica de relaciones y gráficas cartesianas

Resultados obtenidos con 105 alumnos de décimo (Duval, 1988c, p. 247-249)

La tarea de conversión lll → ll consistía en escoger entre varias expresiones ($y = x$, $y > x$, $x > 0$, $y = -x$, $xy \leq 0$...) la que correspondiera al gráfico sombreado.

l	ll	lll	l → lll sombrear	lll → ll escoger la expresión
1. ... el conjunto de puntos que tienen una abscisa positiva	$x > 0$		67%	51%
2. ..... que tienen una ordenada negativa	$y < 0$		67%	61%
3. .... cuya abscisa y ordenada son del mismo signo	$xy \geq 0$		**56%**	**25%**
4.	$xy \leq 0$			**23%**
5. .... cuya ordenada es superior a la abscisa (*estando trazada la recta y = x*)	$y > x$		**38%**	**38%**
6. .... cuya ordenada es superior a la abscisa (*sin estar trazada la recta y = x*)	$y > x$		19%	25%
7. ..... cuya ordenada es igual a la abscisa	$y = x$		**60%**	75%
8. ..... cuya ordenada es opuesta a la abscisa	$y = -x$		**34%**	58%

Los fenómenos de no-congruencia aparecen por las diferencias en las tasas de aciertos. Las diferencias registradas en las dos conversiones de la línea 3 son particularmente interesantes. El pasaje lll → ll, que se reduce a una simple tarea de reconocimiento, claramente es menos exitoso que el pasaje l → lll. La diferencia se explica fácilmente por un fenómeno de no-congruencia.

Para el pasaje l → lll hay correspondencia semántica entre las unidades significantes de la expresión lingüística de la relación y su representación gráfica; igualmente, hay univocidad semántica terminal y el orden en que se consideran las unidades significantes es neutro. Como cada semi-campo del gráfico tiene un nombre ("abscisa", "ordenada") y su valor se expresa por un signo ("positivo", "negativo"), a partir de cada término de la expresión lingüística dada se puede encontrar la manera pertinente para la conversión de las unidades semióticas elementales del gráfico.

Al contrario, para el pasaje lll → ll no hay correspondencia semántica entre las unidades significantes de la expresión algebraica y el gráfico, puesto que ninguna unidad semiótica del registro algebraico permite traducir la observación "mismo signo para x y para y". Es necesario recurrir a la globalización descriptiva de dos perífrasis[8]:

" (-) . (-) > 0 " y " (+) . (+) > 0 "

Las diferencias entre las líneas 7 y 8, en lo que tiene que ver con la conversión l → lll, ameritan también que nos detengamos en ellas. Para comprenderlas, es necesario vincularlas con las de la línea 4: el 34% de los alumnos escogieron la expresión y = -x como expresión correspondiente a la representación gráfica de la línea 4. ¡Y encontramos una proporción análoga de alumnos que sombrearon los cuadrantes opuestos en lugar de trazar una recta de pendiente negativa para representar la expresión "... es opuesta a la abscisa"! *Estas respuestas dominantes reflejan un tratamiento que funciona como si la correspondencia entre las unidades de la expresión lingüística ("abscisa", "positiva"...) y las unidades visuales de la representación gráfica (semi-zona horizontal, a la derecha de dos semi-zonas verticales...) proporcionaran una regla de conversión siempre aplicable.* Naturalmente, esto conduce a la conversión, en el registro de la escritura algebraica, en "y, -x", es decir, "en signos opuestos". Se comprende entonces la sinonimia que se establece, así sea implícitamente, entre las expresiones "tener signo opuesto a ..." y "ser el opuesto de...".

Por último, las dificultades que se tienen por la no-congruencia de la conversión, pueden además ser agravadas por el desconocimiento de uno de los dos registros de representación. Particularmente, este es el caso para los diferentes registros bi-dimensionales como los gráficos cartesianos, las figuras geométricas o incluso las tablas; es decir, para todos los registros para los cuales se admite muy fácilmente que es suficiente con "ver" las curvas, los dibujos o la organización de los números en cuatro casillas "que los muestran".

Puede parecer paradójico hablar de desconocimiento de un registro de representación como el de los gráficos cartesianos cuando los alumnos muy rápidamente saben construir una recta o una curva en un plano marcado, en virtud de la regla de conversión ya mencionada (un punto del plano marcado ↔ una dupla de números).

En efecto, cuando la conversión se efectúa en el sentido escritura algebraica de una ecuación → gráfico, no parece surgir ninguna dificultad específica. Pero todo cambia cuando es necesario hacer la conversión inversa, incluso después de la enseñanza de las funciones lineales (Duval, 1988c, p.

---

[8] La noción de globalización descriptiva se define en el capítulo V (p. 245)

244-246)[9]. *En realidad, las unidades significantes del gráfico (recta, curva...) no están de ninguna manera determinados por la relación con los puntos marcados en no importa qué fondo milimetrado*. Esas unidades están determinadas por algunos valores visuales de la recta (o de la curva...), que están separados del fondo constituido por los dos ejes orientados. Las unidades significantes de un gráfico corresponden a los valores de diferentes variables visuales (Duval, 1988c, p. 240-242). El alumno que no discrimina estas variables, es como si fuera ciego para la conversión inversa a aquella que es clásicamente enseñada. Esto quiere decir que él tiene pocas oportunidades para hacer una "lectura correcta" de los gráficos.

Encontramos el mismo desconocimiento, aumentado a veces por una confusión, para las figuras geométricas. Se quisiera asimilar las unidades semióticas elementales de una figura a los elementos que representan los objetos matemáticos que comandan el orden de construcción de esta figura. Esto conduce a privilegiar en la enseñanza tareas de construcción de figura, como si así resultaran importantes transferencias positivas para otras actividades matemáticas. A pesar del hecho de que aún no ha habido ninguna observación que confirme seriamente tal esperanza, esta asimilación viene a censurar los tratamientos propiamente figurales que confieren a las figuras su papel heurístico e intuitivo. Estos tratamientos, extremadamente variados, se basan en unidades figurales que no son las representaciones elementales que se distinguen en una tarea de construcción (Duval, 1988b, p. 62-63). Volveremos sobre esto en el capítulo IV.

Incluso las tabla 2 x 2, utilizadas en estadística, no constituyen, para muchos estudiantes, una representación cuya aprehensión sea evidente (Zaki, 1992, p. 227-228. 254-255).

Más generalmente para los registros bidimensionales, y más particularmente para aquellos en los cuales las unidades significantes no están semióticamente separadas, se puede afirmar, de una parte, que es necesario un aprendizaje de los tratamientos que les son propios y, de otra, que el criterio de univocidad semántica es más difícil de verificar para la actividad cognitiva de conversión.

Los ejemplos relativos a las dificultades que se tienen por la no-congruencia de las representaciones, son múltiples y variados. Pero nuestro propósito no es tanto establecer su existencia, que está fuera de duda, como situar su importancia en relación con el aprendizaje de las matemáticas y con el análisis que generalmente se hace en términos de complejidad conceptual.

Las dificultades debidas a la no-congruencia son independientes de la complejidad conceptual del contenido de las representaciones a convertir, puesto que dadas dos representaciones del mismo contenido, una puede ser congruente con una tercera representación sin que la segunda lo sea. Además, las dificultades debidas a la no-congruencia se expresan más frecuentemente por fracasos en las tareas que requieren una conversión de representaciones. Debido a que en el caso de congruencia la conversión es trivial para la mayoría de los alumnos y a que los casos de conversión entre representaciones congruentes son quizás tan frecuentes como los de conversión entre representaciones no-congruentes, se podría pues creer que las dificultades debidas a la no-congruencia son un fenómeno secundario. En realidad, tal visión es engañosa puesto que *los fracasos debidos a la no-congruencia revelan un encapsulamiento de los registros de*

[9] Los resultados presentados en el artículo citado, fueron obtenidos en tareas de reconocimiento basadas en la conversión entre ecuaciones de rectas y gráficos, para los casos más elementales. A comienzos de 1989, por iniciativa de profesores de un Liceo, esas tareas fueron propuestas a todos los alumnos de octavo de ese Liceo (11 grupos, 362 alumnos). Se registraron las mismas tasas y las mismas diferencias en los aciertos que nosotros habíamos encontrado en otros grupos en los años precedentes y en otras condiciones. Los resultados de esta encuesta efectuada por los profesores mismos están publicados en *Ouvert* nº60, Septiembre 1990, p. 35-44, bajo el título "Cambio de Registro".

representación. Este encapsulamiento persiste incluso después de que una enseñanza, aparentemente haya movilizado diferentes registros de representación. Ahora bien, como veremos, la coordinación de los diferentes registros de representación es una condición necesaria para la comprensión.

ESTRUCTURA MULTI-REGISTRO DE LA REPRESENTACIÓN Y ACTIVIDAD CONCEPTUAL

La diversificación de los registros de representación semiótica es la constante del desarrollo de los conocimientos, tanto desde el punto de vista individual como científico o cultural. Su importancia para el funcionamiento del pensamiento generalmente es explicado por las diferencias de costo o de limitación para la función de tratamiento, y por las diferencias en las posibilidades de presentación para la función de comunicación que existen entre los registros.

En efecto, un registro puede permitir efectuar ciertos tratamientos de una manera mucho más económica y más potente que en otro registro. Para el cálculo, numérico o algebraico, la escritura decimal de los números y las notaciones literales constituyen un registro sorprendente más económico y más potente que el lenguaje natural (Condillac, 1981). Igualmente, para la resolución de problemas físicos o geométricos, el recurso a registros analógicos (figuras, esquemas, diagramas...) puede revelarse más simple y más potente que el recurso a los registros del lenguaje (texto descriptivo, lista de fórmulas o de relaciones...); esto debido a que las figuras y los esquemas permiten representar la totalidad de las relaciones entre los elementos que constituyen un objeto o una situación (Bresson, 1987, p. 940-943; Larkin & Simon, 1987). De manera más general, el cambio de registro constituye una variable que se revela fundamental en la didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje pues ofrece procedimientos de interpretación. Por ejemplo, las operaciones con racionales pueden ser más fácilmente introducidas y practicadas con figuras que se destacan de un fondo cuadriculado, que con la escritura de fracciones (Douady, 1984, p. 36, 58). Las operaciones del cálculo proposicional pueden aparecer como una posible descripción simbólica de esquemas de los diferentes estados de una circuito eléctrico (Fuchs & Reeb, p. 36-41).

Esta "utilidad" de la variedad de los registros de representación, es un dato fundamental y trivial que nadie contradice. Al contrario, la determinación del nivel de profundidad en que esta variedad interviene en el funcionamiento del pensamiento humano, plantea un serio problema: ¿ésta variedad es exterior y subordinada a la actividad conceptual propiamente dicha, o están íntimamente ligadas? *En otros términos, ¿la actividad conceptual implica la actividad semiótica, o es independiente?* No se trata de un problema general o filosófico, como el de la relación pensamiento y lenguaje. Las respuestas que se den, implícita o explícitamente, comandan la orientación y las opciones didácticas para el aprendizaje de las matemáticas como para la comprensión de textos en lengua natural. De otra parte, se quiera o no, las importantes y constantes dificultades en el cambio de registros que se observan en todos los niveles de la enseñanza, obligan a plantear este problema.

La respuesta con más frecuencia adoptada considera que la actividad conceptual no depende de la actividad semiótica. Hay tres razones que parecen justificarla. La primera se basa en el hecho mismo de la diversidad de los registros de representación: la diversidad da la posibilidad de cambiar de registro para formar la representación de un objeto o para transformarla, y por tanto de "escoger" aquella que sea la más económica y más potente. La segunda es que el funcionamiento del pensamiento parece movilizar cada vez sólo un registro de representación; es al menos lo que parece mostrar la observación introspectiva así como las producciones finales de la actividad matemática y, en francés, las prácticas de lectura de texto y de escritura. La consideración de varios registros de representación sólo aparece justificada en las situaciones en que se comprueba como

necesario un cambio de registro por razones de economía de tratamiento. La tercera razón alude a la estructura misma de la representación: conforme a la relación que uno lo representante a lo representado (fig.1), la comprensión de una representación en un registro determinado, parece implicar directamente la comprensión del contenido conceptual representado, sobretodo cuando el registro de representación es la lengua natural.

Sin embargo, y en contra de estas razones, persiste el fenómeno de encapsulamiento de los registros y su estrecha relación con las dificultades de comprensión conceptual que se manifiestan principalmente por el fracaso de la conversión en caso de no-congruencia y por la ausencia de transferencia de los conocimientos mas allá de las situaciones estándar de aprendizaje. Estos fenómenos llevan a considerar otra respuesta: ***la actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación.*** Es necesario que un sujeto haya llegado al estadio de la coordinación de representaciones semióticamente heterogéneas, para que pueda discriminar el representante y lo representado, o la representación y el contenido conceptual que esta representación expresa o ilustra.

El problema de la relación entre actividad semiótica y actividad conceptual puede entonces ser considerado desde dos puntos de vista diferentes.

El primero se basa únicamente en el hecho de que un cambio de registro puede revelarse como económico o fecundo desde el punto de vista del tratamiento de las representaciones. Entonces se puede mantener la independencia y la prioridad de la actividad conceptual sobre la actividad semiótica. Este punto de vista, que privilegia la función de expresión, tiene un modelo esencialmente lingüístico. Es el modelo usado más ampliamente.

El segundo punto de vista toma en consideración el hecho de que el cambio de registro presupone una coordinación de registros. La actividad conceptual entonces no puede ser aislada de la actividad semiótica porque *la comprensión conceptual aparece ligada al descubrimiento de una invarianza entre representaciones semióticas heterogéneas.* Esto cambia completamente la modelización que se puede hacer de la representación así como la aproximación a las condiciones de un aprendizaje conceptual y a la comprensión de las producciones semióticas (textos, figuras geométricas, lengua formal, razonamiento...). Los modelos operatorios que privilegian la función de tratamiento, permiten ver mejor la necesidad de no atenerse al modelo lingüístico de la representación. Pero es en relación con la función de objetivación, y no con las de expresión o la de tratamiento, que la estructura de la representación debe en últimas ser analizada para comprender su papel en el funcionamiento cognitivo del pensamiento.

El modelo lingüístico de la representación, centrado en la función de expresión

Generalmente se define la representación de la misma manera como se define el signo lingüístico, es decir, como una relación entre alguna cosa (forma, trazo, objeto...) visual o auditivamente aprehendida y la evocación de otra cosa que está ausente o cuya realidad es simplemente "mental": "lo propio de la representación es... evocar lo que desborda el dominio perceptivo y motor. Quien dice representación, dice en consecuencia, reunión de un "significante" que permite la evocación y de un "significado" provisto por el pensamiento" (Piaget, 1968b, p. 286; p. 68; 1968a, p. 305).

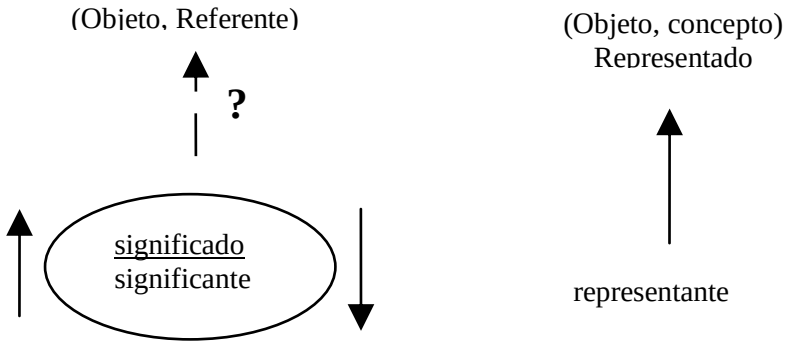


Figura 1. Modelo de la representación centrada en la función de expresión.

A la izquierda, estructura del signo lingüístico (Saussure, 1973, p. 158, 99), y a la derecha, estructura de la representación. En los dos casos tenemos una relación entre dos términos: representante y representado, significante y significado. Pero hay dos diferencias importantes que obligan a matizar la asimilación frecuentemente hecha entre relación de representación y relación de significación. La primera concierne a la naturaleza del término no dado sensiblemente. Lo representado es un objeto real que puede ser percibido: el representante evoca entonces "objetos ausentes". El significado, al contrario, sólo puede tener una existencia mental (concepto, fantasía...): en este caso se distingue cuidadosamente, de una parte, el significado del signo y, de otra, el objeto real que puede eventualmente ser nombrado por el signo. Entonces, la primera diferencia que separa el significado y lo representado es que *el significado no puede ser caracterizado en términos de ausencia o de presencia.* Esta primera diferencia excluye toda dependencia de la significación de los signos y de las palabras en relación con la intuición de los objetos que ellos designan, es decir, en relación con una experiencia previa a su presencia. Lo que no es el caso para todas las representaciones. La segunda diferencia alude a la barra que separa el significante y el significado. Esta barra señala que puede haber un funcionamiento de los signos lingüísticos que depende esencialmente, y a veces exclusivamente, del significante (Lacan, 1966, p. 497, 502). Mas adelante veremos que entre las cuatro formas posibles de expansión discursiva *sólo una reposa en una utilización de los signos en que solo el significante es tomado en cuenta y el significado se encuentra neutralizado* (cap. ll, p. 129-130).

Cuando se trata de un registro distinto al de la lengua natural, enseguida se ven los límites y las ambigüedades de este modelo de representación. Estos se refieren a su indiferenciación entre una estructura diádica de representación (flecha "representación") que generalmente caracteriza a los símbolos y las notaciones matemáticas, y una estructura triádica (las dos flechas entre significante y significado, y la flecha punteada "referencia") que caracteriza al signo lingüístico y a las figuras (formas representadas). La estructura diádica sólo conserva la relación de referencia entre un significante, o un representante, y el objeto designado o representado. La estructura triádica, al contrario, subordina la relación de referencia a la de la significación entre el significado y el significante.

signo lingüístico, o toda unidad definida en un sistema que tiene sus propias leyes de organización

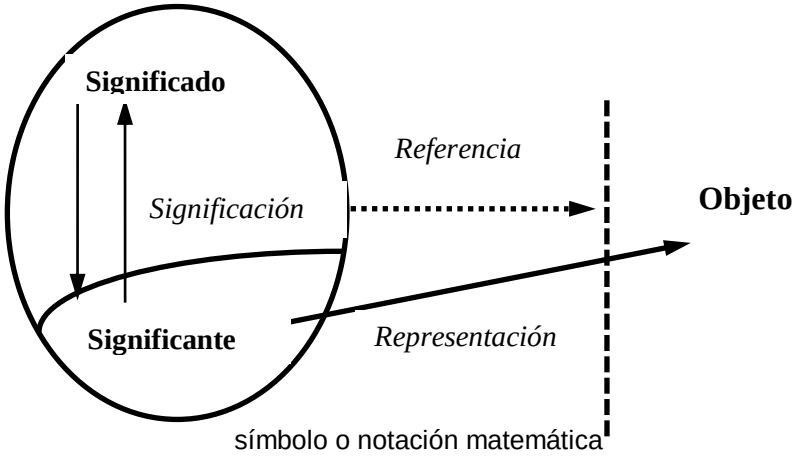


Figura 2. Estructura triádica y diádica de la significancia.

En este esquema los diferentes elementos constitutivos de la significancia de los signos están en negrilla, y las relaciones entre estos elementos están en cursiva. El esquema permite ver la oposición entre dos tipos de signos. Para los signos que tienen una estructura triádica, como los signos lingüísticos, la relación de referencia presenta dos características. De una parte, la relación con un objeto depende de una relación de significación determinada por el sistema de la lengua (Saussure, 1973, p. 159, 163). De otra, la relación con el objeto es una posibilidad que sólo está asegurada en el plano del discurso, el cual no es constitutivo de la significancia del signo (Benveniste, 1966, p. 129-131; 1974, p. 64-66). Los signos de estructura diádica, tales como alguna notaciones matemáticas (notaciones de funciones, de vectores, de operadores...), no tienen significación y están constituidos por una referencia instituida.
La escritura de los números (escritura decimal, escritura fraccionaria) remite a una estructura triádica y no diádica, porque proviene de un sistema de designación. La escritura de un número **representa** un número y **tiene una significación operatoria** ligada a los tratamientos que permiten efectuar las operaciones.
Los tratamientos no son los mismos para la escritura decimal y para la escritura fraccionaria. Aunque 0,25 y ¼ representan **el mismo número**, ellos **no tienen la misma significación operatoria.** La significación operatoria depende del sistema de escritura. Para calcular 0,25+0,25 y para calcular 1/4+1/4 no hay las misma reglas de tratamiento. La conversión de 0,25 en ¼ no proviene de un cálculo sino del juego de la diferencia entre significación y referencia descrito por Frege (1971) en su célebre artículo de 1892.

Además de esta ambigüedad, una definición de la representación por analogía con el signo lingüístico presenta dos limitaciones mayores.

Esa definición deja de lado un dato fundamental de la función semiótica en el hombre: ésta está ligada a la existencia de varios sistemas de representación y a su coordinación. Como cada sistema de representación tiene propiedades específicas que limitan intrínsecamente sus posibilidades de representación, se hace necesario entonces diferentes sistemas. El hecho de que "todos los signos no pueden funcionar idénticamente ni provenir de un sistema único", refleja este dato fundamental (Benveniste, 1974, p. 45). Incluso si "la lengua es la organización semiótica por excelencia", no puede pues ser privilegiada para definir la estructura de representación (Benveniste, 1974, p. 62-63).

Además, una tal definición conduce a considerar las representaciones por fuera de las transformaciones, es decir, de los tratamientos o de las conversiones, que fundamentan la potencia y el interés cognitivos. Resumiendo, una tal definición viene a considerar las representaciones únicamente en relación con una sola función, la de expresión, y a ignorar que las representaciones cumplen igualmente funciones de objetivación y de tratamiento, funciones esenciales para toda actividad cognitiva.

Un modelo operatorio de la representación centrado en la función de tratamiento

No puede haber definición aceptable de representación que no tome en consideración a la vez la necesaria pluralidad de los sistemas semióticos de representación, y el hecho de que estos sistemas cumplen funciones de tratamiento y de objetivación. F. Bresson fue uno de los primeros en haber propuesto una descripción de la diversidad semiótica inherente a la representación, a pesar de que esto lo hizo sólo en relación con la función de expresión:

> Para hablar de *representación* es necesario que ésta esté entre dos sistemas de objetos (reales o mentales): uno que es representante del otro, el representado. Esta relación es, en general, no simétrica. Además, es necesario que exista(n) otra(s) relación(es) entre los comportamientos, acciones u operaciones efectuadas, o más generalmente, efectuables, sobre lo representado. Se trata, pues, de un sistema complejo que no se deja reducir a una dupla de objetos en el que uno sería considerado como el representante del otro... (Bresson, 1987, p. 935)

Esta descripción del "sistema complejo" que forma una representación, puede ser convertida en el siguiente esquema:

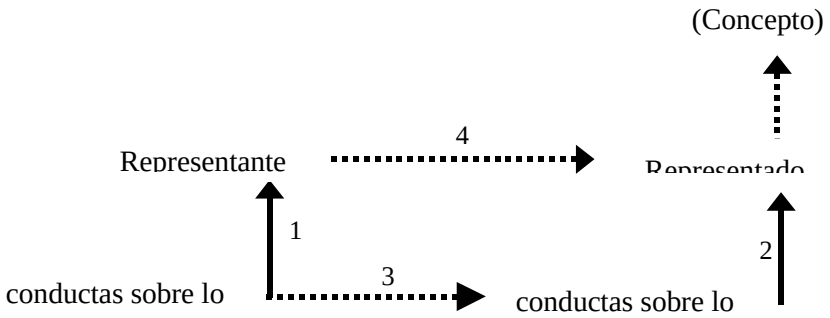


Figura 3. Modelo de la representación centrado en la función de tratamiento por simulación.

Lo interesante de este modelo es que no restringe la representación a la simple relación 4, como en la definición por analogía con el signo lingüístico, sino que integra las acciones y los tratamientos a los cuales una representación puede dar lugar (flechas 1 y 2). De esta manera, la relación entre dos sistemas de acción (flecha 3) se hace predominante en relación con la simple relación 4. Pero tal descripción plantea inmediatamente una dificultad: como es posible una acción directa sobre lo representado, ¿para qué sirve entonces una acción sobre lo que representa? En realidad, es un tipo muy particular de representación el que está descrito ahí, el de la maqueta; y es en relación con su modo particular de tratamiento que se hace la simulación (Bresson, 1987, p. 936). La maqueta es lo que representa al objeto real: puede someterse a acciones que permiten estudiar los efectos que acciones análogas pueden producir en el objeto real en condiciones reales. Todo el problema está en saber si tal análisis puede ser válido para definir las representaciones semióticas.

Es importante en primer lugar recordar que las representaciones de tipo maqueta no son representaciones semióticas: las operaciones susceptibles de transformarlas son acciones físicas que siguen leyes físicas, y no acciones sobre los signos regidas por reglas. Además, en este tipo de representación, lo que representa y lo representado tienen las mismas características fenomenológicas fundamentales: son objetos físicos situados en un espacio de tres dimensiones. De ahí la posibilidad de actuar tanto sobre lo que representa como sobre lo representado. Por tanto, son dos las diferencias fundamentales que separan las representaciones de tipo maqueta y las representaciones semióticas: de un lado, las semióticas no pueden ser transformadas por acciones físicas; del otro, en éstas lo que representa y lo representado no pueden ser objetos que pertenecen al mismo espacio. En otros términos: las representaciones semióticas, a diferencia de las representaciones tipo maqueta, permiten operaciones que cumplen funciones de objetivación, de tratamiento o de expresión, y no un modo particular de tratamiento.

Entre las tres funciones de las representaciones semióticas, la función de objetivación es la esencial para analizar la relación entre la diversidad de los registros y el funcionamiento cognitivo del pensamiento. Esto debido a que la conceptualización, la comprensión, la conversión, son formas de objetivación o de actividades estrechamente ligadas a esta función de objetivación. ¿Cómo describir la estructura de las representaciones semióticas en relación con esta función?

Un modelo cognitivo de la representación centrado en la función de objetivación

El propósito del modelo precedente es describir la estructura de la representación como una correspondencia entre dos sistemas de acciones sobre dos objetos independientes entre sí, la maqueta y el objeto real que ella representa. La actividad cognitiva de conversión de las representaciones semióticas sugiere una correspondencia análoga, no entre el sistema de representación y el sistema formado por el objeto real representado y su entorno, sino entre dos registros de representación. Como las representaciones de un registro no pueden ser consideradas como representaciones de representaciones de otro registro, la relación no simétrica característica del modelo operatorio (fig.3: flecha 4) debe ser reemplazado por dos relaciones de convertibilidad (fig.4: flechas 3 y 4). Se ven entonces aparecer dos posibles relaciones entre lo que representa y lo representado:

- una relación a partir de cada representante. Es una relación superficial que es suficiente par la función de expresión o para la de tratamiento (flechas punteadas)
- una relación a partir de la relación de convertibilidad de los representantes. Esta relación, propia al sujeto de conocimiento (flecha C), es necesaria para la función de objetivación.

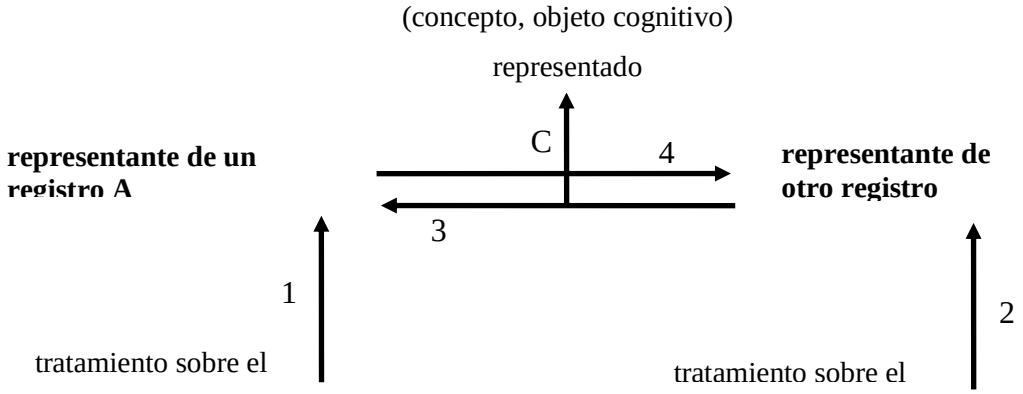


Figura 4. Modelo de la representación centrado en la función de objetivación.

Las flechas 1 y 2 corresponden a las transformaciones internas a un registro. Las flechas 3 y 4 corresponden a las transformaciones externas, es decir, a las conversiones por cambio de registro. La flecha C corresponde a lo que llamaremos comprensión integrativa de una representación: supone una coordinación de dos registros. Las flechas punteadas corresponden a la clásica distinción entre representante y representado. Naturalmente, este esquema considera el caso más simple de la coordinación entre dos registros; en algunos dominios, como el álgebra lineal, puede requerirse una coordinación entre tres registros por lo menos. Igualmente se puede ver una de las posibilidades importantes de la estructura de la representación: *lo que representa en un registro puede ser considerado como lo representado en otro registro, como es el caso en la relación entre texto e imagen.* Por último, no hay flechas entre los tratamientos propios a cada registro. Sin que se excluya el caso de congruencia o de "equivalencia computacional", lo interesante de los cambios de registro tiende al hecho de que cada registro tiene tratamientos que le son propios.

Este modelo permite poner en evidencia la existencia de dos planos en el análisis de toda producción de conocimiento, planos que con frecuencia son confundidos. De una parte, está el plano de los **conocimientos construidos** a través de la formación y el tratamiento de representaciones semióticas; y de la otra, el del **funcionamiento cognitivo que permite esta construcción.** La construcción de conocimientos producidos, no más en el marco elemental de la ejecución de tareas (respuesta a preguntas, resolución de problemas, resúmenes...), puede expresarse quedándose en un sólo registro de representación. Pero el funcionamiento cognitivo que permite

formar, movilizar o reconocer las representaciones pertinentes, y que permite así conducir y controlar la actividad hasta su término, implica más registros, al menos en los sujetos humanos. **Tal funcionamiento cognitivo implica que lo representado sea diferenciado del representante.**

En efecto, la percepción o la reproducción de una representación semiótica no significa que de *ipso facto* haya diferenciación entre representante y lo representado, es decir, que hay la posibilidad de considerar esta representación bien sea sólo desde la perspectiva del representante, bien sea sólo desde la perspectiva de lo representado. Un sujeto puede percibir o reproducir representaciones sin acceder a aquel grado de libertad del que hablamos antes. *Ahora bien, este grado de libertad es esencial para que haya comprensión conceptual o posibilidad de tratamiento formal de las representaciones semióticas de un objeto.* Cuando lo representado es un objeto que puede ser mostrado por fuera de toda representación, como es el caso para todo lo que proviene de una experiencia perceptiva en la que el objeto puede ser visto, señalado, tocado y manipulado, parece muy fácil hacer la discriminación entre representante y representado. Pero la situación cambia cuando no hay acceso intuitivo directo al objeto mismo. Entonces, ¿cómo favorecer esta diferenciación y hacer así acceder a ese grado de libertad frente a las representaciones semióticas?

Para no confundir un objeto y su representación, cuando la intuición directa del objeto mismo no es posible, es necesario disponer de varias representaciones semióticamente heterogéneas de ese objeto, y coordinarlas. Sobre este punto Bresson aporta argumentos decisivos, quedándose sólo en el plano de la naturaleza del representante: la naturaleza del registro semiótico impone una selección entre elementos significativos o informacionales del contenido conceptual representado. Eso quiere decir que *toda representación es cognitivamente parcial en relación con lo que ella representa y que las representaciones de registros diferentes no presentan los mismos aspectos de un mismo contenido conceptual.* Así, las figuras, y de manera más general todas las representaciones analógicas, no pueden representar más que estados, configuraciones o productos de operaciones, y no acciones o transformaciones (Bresson, 1987, p. 943). Para representar operaciones es necesario un registro que tenga las propiedades de un lenguaje, lengua natural o álgebra (Bresson, p. 939). La conversión, implícita o explícita, de las representaciones es, pues, necesaria para acceder al contenido representado mas allá de las limitaciones del representante, o al contrario, para limitarse al sólo representante (punto de vista formal) y explorar las posibilidades de transformación dadas por las reglas de tratamiento del registro del que el representante proviene. Se ve así que la diferenciación entre el representante y lo representado para las representaciones semióticas de un registro dado, está estrechamente ligado a la coordinación con otro registro de representación. Hablaremos de comprensión integrativa para designar la comprensión de las representaciones semióticas que procede de una coordinación de registros (flecha C de la fig.4).

Un sujeto que ha desarrollado suficientemente la coordinación de los registros, muy bien puede atenerse a las representaciones de un sólo registro. Desde su punto de vista, la relación directa entre representante y representado (flechas punteadas de la fig.3) es suficiente. Pero en realidad, él dispone potencialmente de representaciones que provienen de otros registros y que de manera latente permanecen asociadas a las que él utiliza. Esta coordinación le da, frente a las representaciones semióticas que utiliza, ese grado de libertad que permite tener estrategias heurísticas, llevar a buen fin tratamientos hechos y controlar la pertinencia. Las producciones pueden entonces limitarse a un sólo registro de representación, pero el funcionamiento cognitivo que las comanda se sitúa en un campo más amplio y más diversificado de representaciones.

Las dos respuestas que pueden darse a la pregunta sobre la relación entre la actividad semiótica de representación multi-registro y la actividad conceptual, no se sitúan pues al mismo nivel de descripción. La primera, centrada en los costos del tratamiento, se queda en una descripción de superficie. Se refiere al funcionamiento de cada registro tal como conscientemente es sentido en la

actividad matemática, o en francés, en la práctica de lectura y de escritura de textos, al menos para aquellos que la dominan. La segunda respuesta es menos inmediatamente evidente. Se refiere al funcionamiento cognitivo que subyace a la producción de conocimientos; supone una aproximación desarrollista de la actividad cognitiva en aquellas disciplinas en que es fundamental el recurso a una pluralidad de registros. Supone, además, que no sea sólo con criterios de aciertos (obtención de la respuesta "buena") que se valoren las adquisiciones, sino que se haga con criterios de "madurez": rapidez del tratamiento, espontaneidad de las conversiones, potencia de las transferencias.

Productividad cognitiva de una estructura multi-registro de representación: las redes semánticas

Hasta ahora todos los análisis que hemos desarrollado han sido presentados en el marco de la actividad matemática y de su aprendizaje: la estructura multi-registro juega allí un papel esencial. De ahí la importancia de la coordinación de los registros de representación semiótica en los sujetos. Y aunque en otros tipos de actividad intelectual la estructura multi-registro de la representación sea menos visible, es igualmente esencial. Para convencerse de esto basta, por ejemplo, mirar el desarrollo de los modelos y de las teorías en psicología cognitiva; ellos están fundamentados en la articulación de al menos dos registros, el de las redes y el de las proposiciones. En primer lugar, una vez aparece en el marco de la gramática generativa (Chomsky, 1956) la puesta en correspondencia de una representación discursiva con una representación por redes, esta comienza a jugar un papel decisivo en el problema de la representación de los conocimientos en la memoria (Quillian, 1969).

En el marco de la gramática generativa se trataba sólo de representar en árbol la serie de los indicadores sintagmáticos subyacentes a una frase. Esta serie sería una secuencia lineal de paréntesis entre paréntesis obtenidos por la aplicación de reglas de base o reglas de derivación (Chomsky, 1965, p. 34-35, 91-95). La representación en árbol no tendría entonces otro interés distinto al de ser una representación más "límpida" que la escritura de una serie de paréntesis entre paréntesis; y no constituye un registro en el cual puedan ser efectuados tratamientos. En el marco de la representación del conocimiento en la memoria, al contrario, se trata de explicar, por medio de un modelo de organización de la memoria lexical y conceptual, cómo es posible el acceso rápido a los conocimientos necesarios para la comprensión de frases del lenguaje ordinario (Collins & Quillian, 1969; Anderson & Bower, 1973). En esta perspectiva, resulta decisiva la posibilidad de efectuar inferencias en el registro de las redes (Chase, 1978, p. 53), en tanto que permite una economía en la representación de los conocimientos. Se comprende entonces que la productividad inferencial de las redes sólo es posible por su articulación con un registro discursivo de proposiciones: *la convertibilidad entre un "camino" en el registro de red y una proposición en un registro de lengua formal, es lo que permite esta economía para la representación de los conocimientos y la rapidez de su movilización.*

En efecto, toda utilización de las redes semánticas como modelo de organización de los conocimientos, se apoya en los siguientes dos principios:

(1) Todo conjunto de conocimientos que puede ser representado por una lista de *proposiciones de estructura funcional* (dupla argumentos-predicado) puede también serlo por una *red de arcos unidos por nudos [réseau d´arcs reliants des noeuds*].

(2) Es necesario un número mucho mayor de proposiciones para representar un conjunto de conocimientos que no necesita de uniones elementales (arcos) explícitamente dados entre dos nudos. En efecto, cada uno de los conocimientos representados por una unión que resulta del

trayecto de uniones elementales en la red, deben ser expresados por una proposición particular para que la lista sea "funcionalmente equivalente" a la red (Larkin & Simon, 1987).

Una vez explicitados estos dos principios, se ve con claridad que la productividad inferencial de las redes está estrictamente ligada al pasaje del registro de red hacia el registro de proposiciones (de estructura funcional). En el pasaje inverso no hay productividad inferencial. En otros términos, *la productividad inferencial de las redes semánticas está basada en una conversión unilateral;* así pues, depende únicamente de los tratamientos propios al registro de las redes. Por otra parte, basta con comparar la productividad inferencial de una red semántica con aquella puesta en acto en las gráficas proposicionales o los árboles deductivos (cap. V, p. 287) en el razonamiento deductivo, para ver las importantes diferencias cognitivas que las separa. La productividad inferencial de las redes depende de reglas propias al funcionamiento del razonamiento deductivo, en donde ellas objetivan la organización global de los pasos de la deducción, pero sin que de ninguna manera esté ligada a una actividad cognitiva de conversión en otro registro de representación.

Las diferentes teorías de representación proposicional de los conocimientos que después han sido desarrolladas, no hacen más que aprovechar y poner a prueba esta productividad específica a la articulación de los diferentes tipos de representación en redes posibles, con las diferentes formas de representación posibles de la estructura funcional de las proposiciones (Anderson, 1976, p. 27-177). Según los tipos de red de representación proposicional escogidos, van a cambiar los fenómenos de congruencia y de no-congruencia ligados a la conversión de las representaciones de un registro en otro. El valor explicativo de los modelos va a depender de estos fenómenos de congruencia, en la medida en que estos fenómenos un jueguen un papel ya sea en la rapidez de acceso a los conocimientos en memoria o bien en la posibilidad de un acceso múltiple a conocimientos complejos. Nos contentaremos con presentar aquí los elementos de un análisis de congruencia para la conversión entre el registro de redes y el de una notación funcional de las proposiciones (predicado o concepto y argumento).

Una red comporta dos tipos de unidades: los arcos y los nudos. Se pueden diversificar los tipos de redes diferenciando los arcos. Así, los arcos pueden ser orientados (los arcos son flechas) en un sólo sentido (árboles) o en los dos, o pueden ser no orientados (los arcos son simples trazos de unión). Los arcos también pueden ser homogéneos (todos los arcos representando la misma relación) como en un gráfico proposicional de demostración, o ser heterogéneos (los arcos representan relaciones diferentes) como en las redes semánticas. Por último, una red puede ser abierta (árbol) o cerrarse en sí misma (circuito).

Pueden entonces elegirse diferentes reglas de correspondencias con las unidades significantes de un registro de lengua. Así, un nudo puede representar una proposición entera (como en los gráficos de demostración), uno de los términos de una proposición (como en las redes proposicionales de los modelos HAM y ACT, Anderson, 1976, p. 43, 148-161), o incluso un concepto (como en las redes semánticas de Quillian). Estas diferentes alternativas posibles no son equivalentes en cuanto a los tratamientos intra-registro, y pueden modificar la interpretación de la red en el sentido de congruencia, o al contrario, de no-congruencia.

Cuando los nudos corresponden a los conceptos, es posible un recorrido lineal: la proposición corresponde a un camino entre dos nudos vecinos (un arco) o alejados (varios arcos). Cuando los nudos corresponden a uno de los términos de una proposición, tal recorrido lineal no es suficiente para identificar una proposición puesto que ésta corresponde a una sub-red que tiene nudos comunes con las de otras proposiciones. En el primer caso puede haber congruencia; en el segundo no.

Naturalmente, ha de tomarse en consideración otro criterio para analizar completamente esos fenómenos de congruencia o no-congruencia: el de las unidades semióticas significantes que se seleccionan. Los diferentes modelos teóricos desarrollados en psicología cognitiva no seleccionan las mismas unidades semióticas de base para el registro de las redes. En las primeras redes semánticas, las de Quillian, los nudos están diferenciados por niveles, pero los arcos tienen todos el mismo valor. Las siguientes son las reglas de correspondencia de tal modelo:

- un término conceptual corresponde a un nudo,
- las relaciones de hiper e hiponimia con los otros términos conceptuales, corresponden a las diferencias y a las posiciones respectivas de los diferentes niveles entre sí. (Esto viene a situar la red en relación con un eje orientado con indicaciones para representar la jerarquización),
- una proposición corresponde a un arco o a una sucesión de arcos (es decir, a un camino) entre dos nudos.

Como un concepto es la unidad de un conjunto de propiedades, éstas se adjuntan a cada nudo con la regla siguiente para evitar las repeticiones:

- las propiedades comunes a varios conceptos se incorporan al nudo de más alto nivel de generalidad en la red.

Posteriormente, en los otros modelos de redes semánticas, se abandona la diferenciación de los nudos por niveles en provecho de una diferenciación de los arcos en función de las relaciones entre los términos considerados como primitivos: inclusión, propiedad, atributo, valor... Leiser, 1987, p. 1843-1844).

Puede parecer muy limitado el alcance de este ejemplo de productividad cognitiva de la articulación de registros, debido a que concierne sólo a la organización de los conocimientos en la memoria. Pero las redes semánticas no son el único tipo de articulación entre el registro de redes y el de un registro de lengua. En los capítulos V y VI veremos otro tipo de productividad cognitiva para la articulación entre el registro de las redes y el de los discursos en lengua natural. Este tipo de productividad concierne, de una parte, la comprensión y la producción de diferentes formas de razonamiento y, de otra, la comprensión de textos y la producción de respuestas a preguntas de comprensión. Así, por ejemplo, cuando los nudos corresponden a proposiciones y los vínculos entre los nudos están orientados, se pueden obtener diferentes tipos de gráficos proposicionales: algunos quedan abiertos y tienen la forma de árbol, otros se cierran completamente y tienen la forma de circuitos. Estos diferentes tipos de gráficos proposicionales permiten discriminar formas de razonamiento como el razonamiento deductivo y la argumentación, cuyas respectivas expresiones en el registro discursivo son muy semejantes (Duval, 1990a, p. 209-213, 1992).

En el aprendizaje, la importancia de esta discriminación de las diferentes formas de razonamiento por su representación en árbol o en red, aparece cuando se solicita a los alumnos una producción discursiva: *se obtienen textos radicalmente diferentes según las representaciones semióticas que les sirven de apoyo y de referencia.* Esta producción no será la misma si las representaciones son figuras, discursos explicativos o gráficos proposicionales. Así, a partir de los gráficos proposicionales que ellos mismos han construido, los alumnos de colegio producen textos de demostración totalmente diferentes a aquellos que producían anteriormente cuando se referían directamente a una figura geométrica o a un discurso explicativo de la solución de un problema geométrico planteado. Esto se basa en el hecho de que el pasaje de un registro en árbol o en red a un registro discursivo, plantea pocos problemas de congruencia, sobre todo cuando los alumnos mismos han elaborado aquel tipo de representación. Ahora bien, no es este el caso cuando el registro de partida es una figura geométrica o un discurso explicativo. De una parte, como lo

veremos en el capítulo IV, no sólo es muy compleja la articulación entre el registro de las figuras geométricas y el de los discursos, sino que esta complejidad es desconocida en la enseñanza. De otra parte, *la producción de un discurso a partir de otro discurso del cual no es uno mismo el enunciador, requiere el pasaje por representaciones intermediarias no-discursivas* (cap. VI). Para los textos de demostración, los gráficos proposicionales son representaciones no discursivas que pueden servir de representaciones intermediarias.

LAS CONDICIONES DE UNA APRENDIZAJE FUNDADO EN LA COORDINACIÓN DE LOS REGISTROS

La coordinación de los diferentes registros de representación ligados a la objetivación o al tratamiento de los conocimientos, no se da espontáneamente, incluso en el transcurso de una enseñanza que moviliza esta diversidad de registros. Esto puede verificarse fácilmente en los diferentes niveles de enseñanza de las matemáticas. Cuando la adquisición de conocimientos ha estado ligada a la formación y al tratamiento de representaciones efectuadas en un sólo registro, o ha privilegiado un registro particular (la escritura "algebraica", los gráficos, las figuras geométricas, las tablas, el discurso en lengua natural), esta adquisición queda limitada a ese único registro. Pero incluso si han sido movilizados varios registros, simultánea o sucesivamente, esto no acarrea su coordinación. Casi siempre los aprendizajes se quedan mono-registro. Ciertamente, esto no excluye el desarrollo de alguna forma de comprensión en los alumnos, la cual puede ser evaluada fácilmente y a corto término ser satisfactoria. Pero esta **comprensión mono-registro** presenta un handicap mayor: en el momento en que sale del contexto en el cual se realizó el aprendizaje, la mayoría de los alumnos se muestran incapaces de movilizar los conocimientos adquiridos y, que por tanto, "ellos saben". De manera más general, una comprensión mono-registro es una comprensión que no permite ninguna transferencia. Sólo una **comprensión integrativa**, es decir, una comprensión fundada en la coordinación de los registros, da tales posibilidades de transferencia. Entonces, se revela como necesario un aprendizaje específicamente centrado en la *conversión de las representaciones* y efectuado *por fuera de toda tarea de tratamiento* para pasar a una enseñanza que obre sobre un nuevo dominio o sobre una nueva red conceptual.

Evidentemente, sería ingenuo creer que introducir ejercicios de conversión sobre algunos casos típicos sería suficiente para crear las condiciones favorables para una coordinación de los registros de representación en los alumnos. Y esto por dos razones.

La primera se basa en el fenómenos de no-congruencia. Los casos de no-congruencia son siempre casos particulares que no pueden ser subsumidos en un procedimiento de resolución: no se dejan agrupar.

La segunda es que la conversión de las representaciones requiere la identificación de las unidades significantes en el registro de partida y en el de llegada. Ahora bien, frecuentemente **es la discriminación de estas unidades significantes lo que hace falta.** El ejemplo de los gráficos cartesianos introducidos desde la educación básica es, desde este punto de vista, bastante espectacular. Su interpretación (que no se ha de confundir con su "lectura" que se limita a identificar las coordenadas de puntos particulares) requiere la discriminación de 12 valores que provienen de 5 variables visuales pertinentes (Duval, 1988c, p. 240-242). Estos valores constituyen las unidades significantes del registro de los gráficos cartesianos. Y, si se limita sólo a la representación de rectas, es necesario discriminar por lo menos 8 valores que provienen de 3 variables visuales pertinentes. Cuando estos valores de las variables visuales pertinentes no son discriminados, llegan a ser inevitables las clásicas confusiones para la interpretación de las gráficas: por ejemplo, tomar en cuenta valores no pertinentes, y por tanto no significantes, de posición por

encima del eje de las abscisas para comparar dos representaciones de crecimiento o de decrecimiento. Esto plantea un serio problema para la utilización de los gráficos en física o en economía. Pero, y ya sólo en el dominio de las matemáticas, la no-discriminación de estos valores da representaciones cartesianas de rectas totalmente inutilizables por el alumno para probar la forma de las ecuaciones correspondientes, o simplemente para controlar la verosimilitud de su resultado cuando debe escribir la ecuación (Guzman-Retamal, 1990, p. 93-94). La no-discriminación de los diferentes valores visuales pertinentes, conduce no sólo a confusiones en la interpretación de las gráficas, sino también a que la mayoría de los tratamientos efectuados en el registro de la escritura "algebraica" pierdan su "sentido". Más adelante veremos otros ejemplos que conciernen al registro, aparentemente más familiar, de las figuras geométricas.

Se ve pues que las tareas de conversión de representaciones no pueden favorecer la coordinación de los registros de representación. Y esto, porque toda actividad de conversión presupone la discriminación de las unidades significantes a poner en correspondencia en el registro de partida y en el de llegada. La dificultad propia a la actividad de conversión reside esencialmente en esta discriminación. En efecto, de un registro a otro cambia la naturaleza de las unidades significantes a identificar y el modo de discriminación. Hay registros que

- tienen unidades discretas, como las lenguas formales,
- tienen unidades no separables, como las figuras y los gráficos cartesianos,
- presentan varios niveles posibles de determinación funcional de las unidades, como las lenguas naturales.

La discriminación de las unidades significantes propias a cada registro, debe ser el objeto de un aprendizaje específico. Tal discriminación es la condición necesaria para toda actividad de conversión, y por tanto, para el desarrollo de la coordinación de los registros de representación. Y esto, independientemente del carácter directo o indirecto de la conversión, es decir, del hecho de que la conversión se efectúe sin recurrir a una representación intermediaria o de que requiera tal recurso.

Discriminación de unidades significantes y variables cognitivas exploradas "experimentalmente"

Las unidades significantes que componen una representación, es decir, un enunciado, una fórmula o un texto, no aparecen de manera separada e independiente unas de otras, de la misma manera como en los registros las unidades discretas. Esto, simplemente porque **la segmentación de estas representaciones en unidades significantes es esencialmente funcional** y porque estas unidades pueden ser tanto palabras o símbolos como reagrupamientos de palabras o de símbolos. Además, para los registros que tienen unidades no separables, como las figuras o los gráficos cartesianos, se hace totalmente inoperante y ambigua la identificación previa e individual de las unidades significantes.

La discriminación de las unidades significantes en un registro de representación constituye, pues, un problema análogo al de la investigación de los diferentes factores de variación en el análisis de un conjunto de factores que, en la ocurrencia de un fenómeno, intervienen simultáneamente y no pueden ser aprehendidos aisladamente: para disociarlos es necesario recurrir al "método que consiste en hacer variar un sólo factor a la vez, mientras que los demás permanecen sin cambio" (Piaget, 1955, p.43). En otros términos, **la discriminación de las unidades significantes de una representación, y por tanto la posibilidad de una aprehensión de lo que ella representa,**

depende de la aprehensión de un campo de variaciones posibles relativo a la significancia en un registro. La organización de una situación de aprendizaje centrada en el carácter fundamental de la operación de conversión no puede ser más que la organización de un campo de variaciones posibles. Concretamente, es necesario poder *explorar todas las variaciones posibles de una representación en un registro, haciendo la previsión, o la observación, de las variaciones concomitantes de las representaciones en el otro registro.* Como el costo de la tarea cognitiva cambia con el sentido de la conversión, cada uno de los dos registros de representación deben ser el objeto de un trabajo de exploración de las variaciones sistemáticas y de un trabajo de observación de las variaciones concomitantes.

Después de Saussure, se hizo clásico distinguir las unidades significantes de un sistema semiótico recurriendo al principio de oposición, puesto que un signo está definido por su diferencia con otros signos: dos signos se distinguen cuando se oponen por un rasgo (Saussure, 1973, p. 159-169). Este principio saussuriano facilita un método para hacer variar sistemáticamente una representación dada en un registro determinado. El estructuralismo lingüístico que se desarrolló después de Saussure reposa en gran medida en la utilización de éste método. Sin embargo, es importante distinguir muy bien en todas las variaciones posibles al interior de un mismo registro, dos tipos totalmente diferentes en función de la conversión en otro registro. Si se toma una representación R en un registro A y su conversión R´ en un registro B, en efecto se puede observar:

- las variaciones de R en A que no acarrean **ningún cambio para R´ en B,**
- las variaciones de R en A que, al contrario, acarrean **una variación concomitante de R´ en B.**

Las primeras variaciones, únicamente semióticas, son cognitivamente neutras: no cambian el contenido de R. Pero las segundas no lo son. Las llamaremos ***variaciones cognitivas***. Así, la reescritura de "Pedro vigila a Juan quien mira a Bernardo. Pedro llama a Andrés" en "Pedro vigila a Juan y llama a Andrés. Juan mira a Bernardo", es cognitivamente neutra puesto que no cambia el esquema que representa la situación descrita (fig. 5). Pero la permutación de los pronombres ya no es neutra puesto que conduce a modificar el esquema.

La organización de las situaciones de aprendizaje centradas en la coordinación de los registros, requiere que previamente se hayan identificado todas las variaciones cognitivamente pertinentes de un representación en un registro, de manera que una exploración según el "método que consiste en hacer variar un sólo factor a la vez, dejando a los otros sin cambio" pueda ser puesta en acto por los alumnos. Tales situaciones de "experimentación" pueden ser propuestas desde los primeros años de la educación básica secundaria. En efecto, las observaciones muestran que la aptitud para disociar experimentalmente los factores de variación, aparecen desde los 12-13 años (Piaget, 1955, p. 50, 250-252). La adquisición de esta aptitud, de otro lado, es más evidente que la de las operaciones proposicionales, como la implicación, que se ha querido deducir de la aptitud para la exploración "experimental" de un fenómeno proveniente de varios factores no aislables físicamente.

Tal trabajo es relativamente fácil de realizar cuando se trata, por ejemplo, de coordinar las representaciones gráficas cartesianas y la escritura algebraica de las relaciones, al menos para los objetos más simples (rectas, parábolas...). Igualmente, es interesante a nivel teórico puesto que estos dos registros son de naturaleza diferente: las unidades significantes del registro gráfico cartesiano no son separables ya que están integradas en una sola forma percibida, mientras que las de la escritura algebraica son discretas. Tomemos el caso más simple, el de la representación gráfica de las rectas y miremos lo que puede ser una exploración de las variaciones sistemáticas propias de un registro. Las unidades significantes en el registro de los gráficos están determinadas por ocho valores visuales que corresponden a la asociación de tres variables visuales pertinentes para el registro de los gráficos cartesianos: el sentido de inclinación de la recta, la posición de su intersección con el eje de las ordenadas, o su posición en relación con un reparto simétrico de los dos cuadrantes opuestos (Duval, 1988c, p. 239-240). Estos ocho valores cualitativos no son

separables visualmente: así, los valores relativos a la intersección con el eje de las ordenadas y los relativos al ángulo de esta recta con el eje de las abscisas, se fundamentan para cada punto de esta recta en un sólo valor visual, no pertinente en la representación, de altura hacia arriba del eje de las abscisas. Para discriminar todos estos valores visuales, es necesario pues *hacer variar una de las tres variables visuales pertinentes manteniendo constantes los valores de las otras dos.* A cada uno de los valores cualitativos de estas tres variables corresponde una variación en la escritura de la ecuación de la recta gráficamente representada: sea en el sentido de presencia o ausencia de ciertos símbolos, sea en el sentido de una sustitución de dos símbolos antinómicos (- o +), sea en el sentido de un cambio de significación de la expresión simbólica que expresa la pendiente (pendiente mayor o menor que 1) (Duval, 1988c, p. 241). Por último, para cada variación en el registro gráfico, obtenemos una variación concomitante de forma en el registro de la escritura algebraica. Evidentemente, en tal trabajo de exploración y de observación están excluidos toda consideración de los números y todo recurso a cálculos.

Tal trabajo puede parecer más delicado de poner en juego con otros registros, por ejemplo el de las figuras geométricas. Sin embargo, ha sido experimentado para la enseñanza de la homotecia. Se sabe que esta enseñanza requiere la articulación entre el registro de las figuras y el de los números. Ante el fracaso de la gran mayoría de alumnos, en clase de octavo, tanto para interpretar en las relaciones numéricas las relaciones de segmentos sobre una recta graduada, como para efectuar la interpretación inversa, se propuso un trabajo de exploración de figuras homotéticas planas, previo a la enseñanza de la noción de homotecia. La variedad de las configuraciones homotéticas planas posibles es grande, y no todas se ven de la misma manera: algunas se ven inmediatamente en profundidad, otras no pueden ser vistas más que de manera plana e incluso otras pueden ser vistas o en 3D o en 2D.

Para elaborar tareas que favorecieran la discriminación de las unidades significantes en el registro de las figuras, primero fue necesario determinar el conjunto de las configuraciones homotéticas planas posibles que aparecen perceptivamente diferentes, y clasificarlas en función de las variaciones cognitivamente pertinentes o no. Se pudieron discriminar 6 factores de variación figural (Lémonidis, 1990, p. 50-68). Sobre la base de este análisis, se pudo proponer un trabajo de exploración de las variaciones figurales y de observación de las variaciones eventuales en la escritura numérica de las relaciones. Aunque se dedicó poco tiempo a este trabajo, más allá de lo normal desde un punto de vista matemático, sus consecuencias fueron importantes. En primer lugar, hubo un aumento importante en la tasa de éxito para la aplicación del teorema de Tales:

> 95% y 60% de éxito en las preguntas para las cuales había 70% y 35% respectivamente en la prueba inicial. Este mejoramiento se obtuvo a pesar de que no hubo ninguna referencia explícita al Teorema de Tales durante la enseñanza experimental de la homotecia. El mejoramiento en las respuestas para todas las cuestiones de aplicación en las proporciones, fue mayor que el obtenido en una clase en la cual, al contrario, se había puesto el acento sobre el Teorema de Tales. En una tercera clase en la cual no se hizo ninguna referencia explícita a "Tales" y tampoco se realizó ningún trabajo específico sobre las configuraciones homotéticas, no hubo ningún mejoramiento para estas preguntas. (Lémonidis, 1990, p. 99, 101, 109, 240-245)

En segundo lugar, la introducción a la noción de baricentro se reveló ser más rápida y más eficaz (Lémonidis, 1990, p. 279-283, 291). En el capítulo IV veremos la importancia y la posibilidad de una aprendizaje centrado en la discriminación de las unidades significantes en el registro de las figuras. En las figuras, precisamente, tales unidades parecen imposibles de distinguir puesto que se funden en una misma forma percibida, y porque su determinación puede depender de la situación representada.

La discriminación de las unidades significantes en la lengua natural

La lengua natural constituye un registro aparte. Esto, no sólo en razón de su complejidad y del número considerablemente elevado de variaciones que ofrece, sino también en razón de su propiedad genética sobre los otros registros y de su papel único en relación con la función meta-discursiva de comunicación. Esto se traduce, en todos los individuos, en la espontaneidad discursiva que sirve de punto de anclaje de todo aprendizaje ligado a una enseñanza, independientemente del hecho de que esta espontaneidad pueda no respetar todas las reglas de conformidad de la lengua, y que pueda ser inhibida o favorecida por el juego de las interacciones sociales. Se puede pues preguntar si la discriminación de la unidades significantes por comparación experimental de variaciones es pertinente cuando se trata de enunciados de la lengua natural.

La situación propuesta en la experiencia de Clark & Chase (1972) ofrece un primer ejemplo de una tal variación. Basta con cambiar la tarea de conversión "frase → imagen": se presentan los ocho enunciados posibles obtenidos por las tres variaciones lingüísticas posibles (escogencia del término relacional "encima de...", "debajo de...", lugar gramatical de los términos referenciales, presencia o ausencia de una negación), y se pide indicar cada vez la variación concomitante de la imagen. Naturalmente, tal situación es lingüística y cognitivamente tan pobre, que es válido preguntarse si puede ser reproducida con representaciones más complejas; sin lo cual, no tendría ningún interés para la enseñanza.

Apoyándose en las teorías de la gramática transformacional, la psicolingüística ha explorado las variaciones sistemáticas de frases mucho más complejas sintácticamente. Por ejemplo, frases que comportan una construcción relativa con encadenamiento simple o con doble encadenamiento que pueden dar lugar a ocho tipos diferentes, sin tomar en cuenta las variaciones debidas a la introducción de una negación: "Pedro que vigila a Juan quien mira a Bernardo llama a Andrés" (Noizet, p. 151-154). Como los otros registros, la lengua natural se presta a un juego de variaciones sistemáticas, al menos si se tienen aquellos dos tipos de unidad que son, de una parte, las expresiones referenciales y, de otra, las proposiciones. Pero la tarea propuesta aquí, permanece estrictamente en el registro de la lengua: se trata de reexpresar todas las proposiciones de la frase excluyendo todo empleo de pronombres. El número de ensayos necesarios para tener éxito, constituye la variable dependiente.

Sin embargo, no todas las variaciones que son léxica o sintácticamente posibles al interior del registro de la lengua son pertinentes cognitivamente. Y esto por dos razones.

La primera es evidente. Las únicas variaciones cognitivamente pertinentes son las que acarrean una variación en otro registro. En la situación rudimentaria en extremo propuesta por Clark & Chase, la única variación en el registro imagen es la inversión de las posiciones de la estrella y de la cruz según la dimensión vertical: sólo hay dos imágenes posibles. Ahora bien, en el registro de las expresiones en lengua natural, tenemos ocho enunciados posibles. Dicho de otra manera, hay variaciones lingüísticas que son cognitivamente neutras, puesto que no son más que descripciones equivalentes de la misma imagen. Pero hay variaciones que, al contrario, corresponden a un cambio de la situación descrita.

La segunda razón es más sutil. Las variaciones son siempre hechas bajo *una coacción arbitraria del punto de vista de la espontaneidad discursiva de los locutores:* se fija una organización sintáctica para la enunciación, y se permutan los verbos y los objetos de referencia en la frase enunciada. Así, para la frase que presenta una construcción relativa con doble encadenamiento que hemos citado, las ocho variaciones conservan la misma organización sintáctica "x que ... y que ... z ... t". Si uno se queda sólo en el nivel del estudio del sistema de la lengua, una tal coacción puede estar perfectamente justificada. Pero si se considera la lengua como un registro de representación, que es como funciona en la espontaneidad discursiva de los locutores, vemos que *esta coacción*

llega a excluir el aspecto descripción de una situación, aspecto que sin embargo es constitutivo de todo enunciado en la espontaneidad discursiva de un locutor: "le lengage porte référence au monde des objets... dans ses énoncés complets, sous forme de phrases, qui se rapportent à des situations concrètes et spécifiques..." (Benveniste, 1966, p. 128). Así, un locutor que comprende la frase con doble encadenamiento como un enunciado que dice alguna cosa de una situación, podría también describir lo que se dice de esa situación con otros enunciados equivalentes y *que toman la forma de textos:* "Pedro vigila a Juan y llama a Andrés. Juan mira a Bernardo" o "Pedro vigila a Juan quien mira a Bernardo. El llama a Andrés". Estos enunciados, así como la frase con doble encadenamiento, son estrictamente convertibles en la misma representación no discursiva de la situación que se describe.

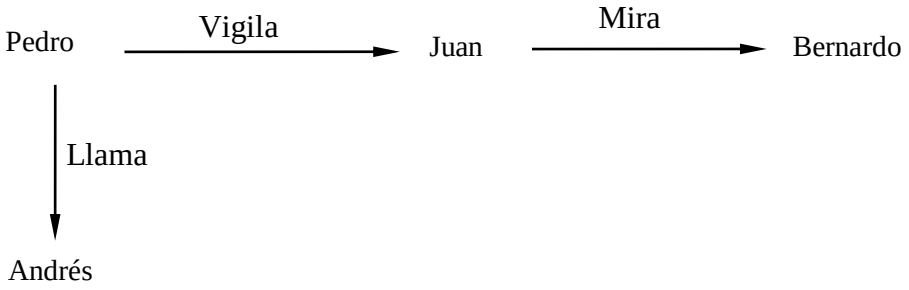


Figura 5. Una representación no discursiva de la situación descrita por la frase con doble encadenamiento: "Pedro que vigila a Juan quien mira a Bernardo llama a Andrés".

Tal representación, evidentemente, es radicalmente diferente a un representación en árbol centrada en la estructura profunda de la frase. Una permutación de los verbos y de los objetos de referencia conserva la representación en árbol, puesto que la organización sintáctica permanece invariante, pero, evidentemente, la representación de la situación descrita por la frase puede cambiar por completo, o no cambiar, con esta permutación.

En lo que concierne a la lengua natural, es pues muy importante distinguir también dos tipos de variaciones. Las que son estrictamente internas al funcionamiento lingüístico: se estudian los grados y las variaciones de organización sintáctica de los enunciados que demandan las conversiones de enunciados en el cuadro de la lengua natural. En este caso, la permutación de los términos referenciales tienen la única función de presentar las variaciones de una misma organización sintáctica. Y las que corresponden a las variaciones cognitivas: se estudian las variaciones de enunciados en relación con los cambios eventuales de la situación descrita por el primer enunciado presentado. Se ve pues la trampa de todas las experimentaciones que tienen sólo las variables lingüísticas como variables independientes, desconociendo el hecho de que algunas van a recubrir variaciones cognitivas y otras no! Ahora bien, en el plano del discurso, la producción de un enunciado o la comprensión de un enunciado presentado promueve tanto un tratamiento cognitivo como un tratamiento puramente lingüístico.

Esta distinción entre variables únicamente semióticas y variables cognitivas (ligadas igualmente a variables semióticas) tiene, además, una consecuencia importante para toda actividad de cambio de registro en la cual la de la lengua natural es explícitamente solicitada.

Debe darse prioridad a las conversiones efectuadas en el sentido "representación no discursiva → expresión en lengua natural". Las tareas descriptivas que hacen un llamado a la espontaneidad discursiva de los sujetos, deben proceder de comparaciones de enunciados que sólo están en el registro de la lengua natural.

Al contrario, la conversión inversa, la que está en el sentido "expresión en lengua natural → representación no discursiva", resulta ser mucho más compleja. En la medida en que la comprensión de un enunciado implica a la vez la toma en consideración de la organización sintáctica y la representación de lo que es expresado, se hace necesario hacer jugar estos dos niveles de organización. Esto, en razón de que son constitutivos del "sentido" de un enunciado completo, y

a fortiori de todo texto, en lengua natural. De otro lado, el análisis de los procesos de comprensión conduce a elaborar representaciones específicas y diferentes para estos dos niveles de organización (Duval, 1991a). La conversión "expresión en lengua natural → representación no discursiva", no puede ser un pasaje directo como la conversión "representación no discursiva → expresión en lengua natural". la primera exige un rodeo por una representación intermediaria, como lo veremos a propósito del pasaje "lengua natural → lengua formal" (cap. III, 155-163). Aquí, el registro de llegada es una descripción de la situación presentada por la representación intermediaria y no por la representación de salida. La complejidad de la **conversión inversa** tiende a hacer pensar que estamos en presencia de *una composición de dos conversiones sucesivas.*

Capítulo II
LAS FUNCIONES DISCURSIVAS DE UNA LENGUA

> συμπλοκην ο λογος γεγονην... περι οντων... εραινει, συμπλεκων τα ρηματα τοις ονομασι...
> "El origen del discurso sale de la relación... Lo que une los verbos a los sustantivos también da indicaciones sobre las cosas".
>
> *El sofista*, 259e, 262d.

La multiplicación de los símbolos científicos, el desarrollo de las "lenguas formales" y la enorme divergencia entre los diferentes empleos de la lengua natural (empleo común en las conversaciones, empleo especializado en cada dominio del conocimiento o incluso empleo literario), han creado una nueva situación para el estudio del lenguaje, tanto en el plano teórico como en el didáctico. Las preguntas sobre la naturaleza de la lengua, sobre su papel en el funcionamiento del pensamiento y sobre su aprendizaje en clase, deben plantearse a partir de la variedad de discursos posibles que refleja la coexistencia de empleos, a veces contradictorios, de la lengua natural tanto como a partir del recurso a los símbolos de las lenguas formales. Esta nueva situación ha hecho emerger tres preguntas que por lo general se estudian independientemente:

- ¿La lengua consiste en algo diferente a los otros sistemas semióticos como los esquemas y las imágenes? Por lo general, la respuesta se ha buscado en el carácter no analógico de las representaciones que permite una lengua (Bresson, 1987)
- ¿En qué se diferencia la lengua natural de las lenguas formales? Luego de Wittgenstein, quien se sitúa en el contexto de una oposición entre la lengua natural y la lógica, se ha hecho clásico buscar la originalidad y la irreductibilidad de las lenguas naturales en la función de comunicación. Por otra parte, la connaturalidad entre el empleo de una lengua natural y las interacciones sociales, es tan evidente que ha llegado a ser el marco de muchos estudios lingüísticos sobre el discurso y estudios psicológicos sobre la adquisición de los conocimientos.
- ¿Por qué la lengua puede dar lugar a empleos tan diferentes como el común en la conversación, el especializado en el enunciado de teoremas matemáticos o el literario en la "escritura"? Esta pregunta ha sido muy poco tratada en el plano teórico pues la idea de un funcionamiento común de la lengua a través de los diferentes empleos, lleva a subvalorar la heterogeneidad de esos empleos. Pero, en el plano didáctico, la pregunta resulta crucial dadas todas las dificultades de lenguaje encontradas tanto en la enseñanza del francés como de las matemáticas.

Para poder dilucidar el papel del lenguaje en el funcionamiento del pensamiento y resolver los problemas de lenguaje encontrados en la enseñanza, estas tres preguntas deben plantearse simultáneamente y ubicarse en el marco más general de la actividad discursiva, el cual sobrepasa "el universo de la lengua" (Benveniste, 1966, p. 131-132).

Lo propio de una lengua es permitir un **discurso**, es decir, una expresión que "haga una referencia al mundo" de manera que pueda ser compartida entre los que quieren comunicarse entre sí (Benveniste, 1966, p. 128-130). La expresión "haga una referencia al mundo" debe entenderse aquí en su sentido más amplio: el discurso es una expresión "vinculada con las cosas más allá de la lengua" (Benveniste, 1974, p. 225). En otros términos, el discurso es el empleo de una lengua para "decir alguna cosa", es decir, para hablar de objetos físicos, ideales o imaginarios, que no son sólo las potencialidades significantes de una lengua. En razón de esto, la práctica de un discurso es inseparable de un cierto funcionamiento cognitivo.

En esta perspectiva, la primera pregunta que se plantea es la de las funciones que debe cumplir el empleo de una lengua, no sólo para que pueda haber discurso sino para que sea posible la variedad de discursos que caracteriza nuestro entorno cultural, a la cual el profesor confronta a sus alumnos. Inmediatamente se ve que subordinar el análisis del discurso en lengua natural sólo a la función de comunicación, no permite responder a esta pregunta. Por lo demás, esto parece tan trivial que nadie ha reclamado en absoluto semejante tesis, aun cuando la práctica conversacional se toma como el empleo típico de las lenguas naturales. Por el contrario, lo que es menos trivial es la distinción de dos planos radicalmente diferentes entre las funciones que se movilizan en el empleo de una lengua: el de las funciones comunes a no importa cuál sistema de representación, analógico o no analógico, y el de las funciones específicas al empleo de una lengua. Las primeras funciones las llamaremos meta-discursivas y a las segundas discursivas.

La separación de estos dos planos y la distinción, en cada uno de ellos, de las diferentes funciones posibles, constituyen la base de un análisis de la variedad de los discursos posibles y del funcionamiento propio a cada uno. La comparación entre los diferentes empleos de una lengua natural, el análisis de los pasajes entre lengua natural y lenguas formales, la discriminación de los factores que pueden modificar el funcionamiento cognitivo y lingüístico de los sujetos en situación de aprendizaje, presuponen esta separación entre funciones meta-discursivas y funciones discursivas.

Las funciones meta-discursivas son las funciones cognitivas comunes a todos los registros de representación lingüísticos, simbólicos o figurativos. Así, no importa cuál es el registro de representación que permite comunicar una información. Hay **tres funciones meta-discursivas**: la comunicación, el tratamiento y la objetivación.

La *comunicación* es una función necesaria para la existencia de una *organización que reagrupe los elementos* (subsistemas, individuos) *que pueden obrar con su propio funcionamiento*. Ya sea bajo el modo de transmisión, de difusión o de intercambio, la información debe poder pasar de un subsistema a otro, o debe poder circular al interior de un espacio social. Naturalmente, las lenguas naturales son el sistema semiótico más apropiado para cumplir esta función entre los individuos en un grupo o en una sociedad: sea bajo la forma de conversación, de interpelación, de declaración, de comunicado, de comentario, de exposición, de conferencia, etc., el discurso es el modo fundamental de interacción social entre los individuos. Pero hay otros sistemas además de las lenguas naturales que pueden cumplir esta función social de comunicación y que en ocasiones pueden sustituirlas. Por tal razón, todos los sistemas semióticos pueden servir de "lenguaje" sin ser lenguas.

La segunda función meta-discursiva, la de *tratamiento*, es necesaria para la *actividad misma del conocimiento*. Toda información recibida debe poder ser transformada de tal modo que puedan extraerse otras informaciones. Así, el discurso no sólo comunica información, sino que también permite transformarlas, así no sea más que permitiendo hacer explícito lo implícito. Es en el registro de la lengua, natural o formal, que el razonamiento se desarrolla y encuentra toda su potencia. Pero los sistemas no lingüísticos pueden elaborarse de manera que permitan cumplir igualmente la

función de tratamiento: la escritura de los números en función de una base, las notaciones simbólicas en álgebra o en análisis, son los primeros ejemplos de la historia.

La tercera función meta-discursiva, la de *objetivación*, es necesaria para el desarrollo del *control que puede tener un sujeto* no sólo sobre sus actividades sino también sobre sus vivencias o sobre las potencialidades de un "mundo" imaginario o personal. Es la posibilidad para el sujeto de tomar conciencia de lo que hasta el momento no era conciente y de lo que aún no había podido tener una conciencia clara en tanto no se había cumplido un trabajo de exteriorización con fines de organización... Esta toma de conciencia se hace a modo de proyección y no a modo de una simple explicitación. Lo que se llama el "trabajo de escritura", la creación literaria, y la palabra en el marco de un análisis, dependen en primer lugar de esta función de objetivación. Pero esta objetivación no está ligada al lenguaje; puede también realizarse a través de sistemas semióticos figurativos como el dibujo, por ejemplo.

Estas tres funciones meta-discursivas son irreductibles entre sí. Así, la función de objetivación es irreductible a una función social de comunicación. Querer comprender un discurso producido con fines de objetivación como si se tratara de un discurso con fines de comunicación, produce no sólo un equívoco y una incomprensión sobre lo que se dice, sino que igualmente destruye la comunicación con la que se expresa (Lacan 1966, p. 296-299; 1975, p. 42-43, 59-61, 87, 126). En la enseñanza del francés como en la de las matemáticas, la confusión de estas tres funciones meta-discursivas, en relación con la producción o la evaluación de los textos de los alumnos, puede tener consecuencias desastrosas tanto en el aprendizaje de la expresión escrita como en el razonamiento.

Las funciones discursivas son las funciones cognitivas que un sistema semiótico debe cumplir para que un discurso sea posible. Por lo general, cuando un sistema semiótico permite cumplir todas las funciones discursivas, se considera como una lengua. Se deben poder cumplir **cuatro funciones discursivas** para que haya un discurso, según la definición de Benveniste, es decir, para que haya una expresión que "hace referencia al mundo" de una manera que pueda ser compartida con los interlocutores. En efecto, para eso es necesario poder:

- *designar* los objetos,
- *decir alguna cosa sobre los objetos que se designan*, bajo la forma de una proposición enunciada,
- *vincular la proposición enunciada* con otras en un todo coherente (descripción, inferencia...) y
- *señalar el valor, el modo o el status* acordado para una expresión por el que la enuncia.

Llamaremos a estas funciones respectivamente: **función referencial** de designación de objetos, **función apofántica** de expresión de enunciados completos**, función de expansión discursiva** de un enunciado completo y **función de reflexividad** discursiva.

Ahora bien, el punto importante es que cada una de estas funciones puede cumplirse con diferentes **operaciones discursivas**. J.B. Grize, en sus trabajos sobre la "lógica natural", fue el primero en haber explicitado sistemáticamente esta noción de operaciones relativas a la producción del discurso, operaciones irreductibles a la aplicación de reglas lingüísticas de orden sintáctico, semántico o pragmático. Para ver el carácter fundamental, no es suficiente considerar el discurso río abajo, es decir, al nivel de los discursos y de los textos ya constituidos, sino que es necesario considerarlos río arriba, es decir, al nivel de su producción por un locutor. Esta producción es la "elaboración, por medio de una lengua, de un micro-universo que el locutor presenta a su interlocutor con la intención de obtener un cierto efecto en él" (Grize, 1983, p. 99-100). Desde este

punto de vista, el léxico y las reglas de una lengua son secundarios. Por lo demás, no dejan de transformarse con el desarrollo cultural, en volumen y diversidad, de los discursos y los textos producidos.

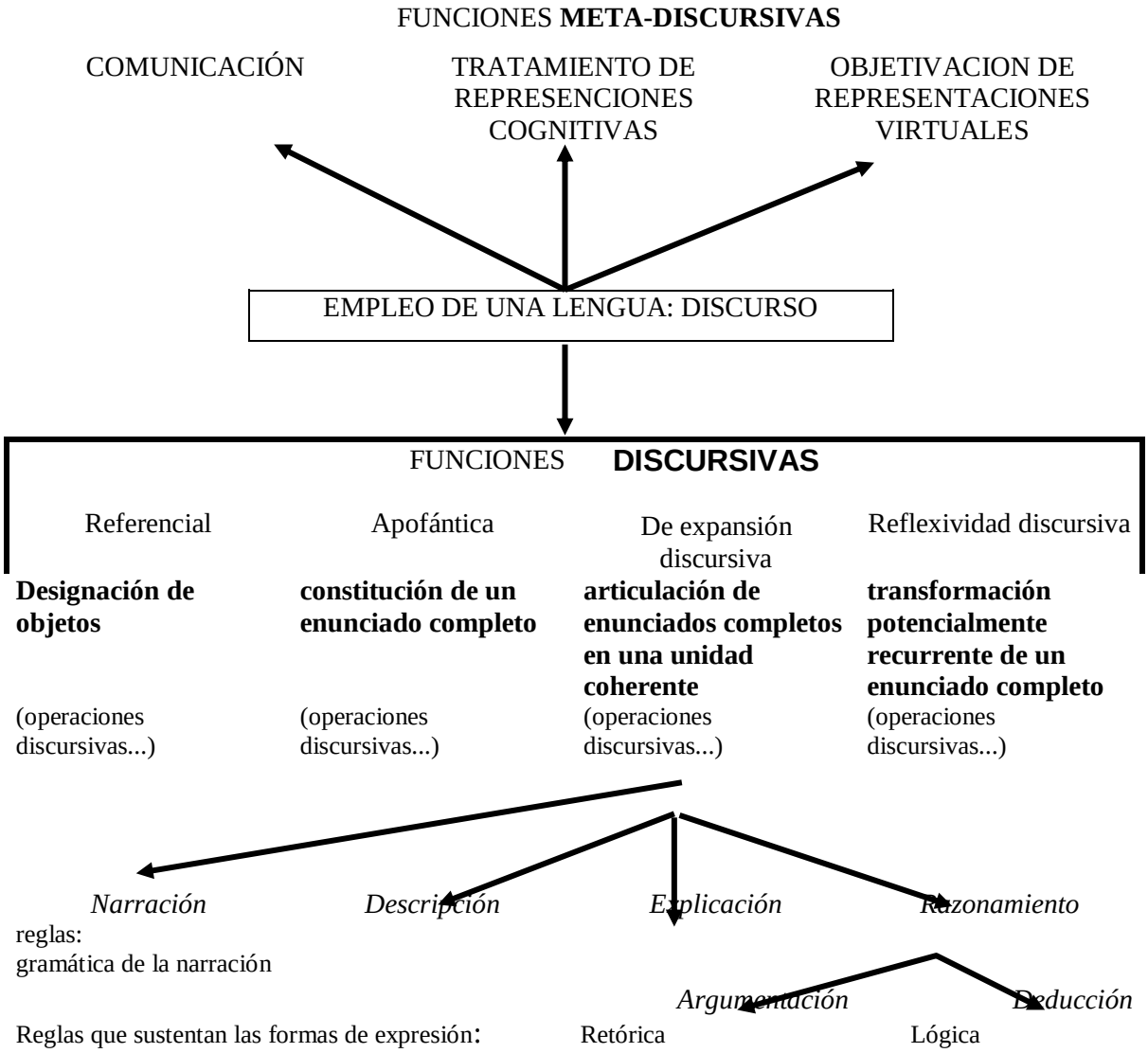


Figura 1: Funciones meta-discursivas y funciones discursivas del empleo de una lengua.
La organización de un discurso depende siempre de las funciones discursivas que cumple y de las operaciones discursivas realizadas. La influencia de las funciones meta-discursivas sobre la organización de un discurso se expresa en la predominancia dada a una u otra de las cuatro funciones discursivas y en la selección de algunas operaciones específicas a esta función.

En la medida en que el universo del discurso no es el de la lengua y en que requiere una análisis "translingüístico", se hace fundamental tomar en consideración las funciones discursivas y sus operaciones específicas. Esto trae una importante consecuencia para la segmentación del discurso en unidades: un discurso no puede analizarse solamente sobre la base de sus formas lingüísticas de expresión sino que es necesario tomar en consideración las funciones discursivas que cumple y las operaciones que moviliza para cumplirlas. En efecto, las **formas de expresión** resultan de

operaciones discursivas, y *todas las operaciones discursivas que se movilizan no se expresan necesariamente a través de marcas lingüísticas.* Las formas de expresión no son más que fenómenos superficiales. Además, el cumplimiento de una sola función discursiva puede movilizar varias operaciones, las unidades de discurso pueden tener fronteras débiles de un enunciado a otro y pueden corresponder a complejos de unidades lingüísticas de diferentes niveles. La delimitación de una unidad de discurso no puede hacerse, pues, sólo con base en criterios lingüísticos.

De otro lado, Benveniste señaló fuertemente la originalidad de las unidades de discurso en relación con las unidades de un sistema lingüístico, cuando hablaba de unidades de sentido que toman un valor efectivo de representación "`intentada". Para Benveniste, este tipo de unidades de sentido se determina en relación con "lo que el locutor quiere decir", y la frase constituye el tipo más elemental (Benveniste, 1974, p. 225; 1966, p. 131). Pero existe otro tipo de unidades de sentido "intentado" que se sitúan más acá o más allá de la frase, quedando determinadas en relación con ella. Las preguntas suscitadas por el desarrollo de las lenguas formales, luego de Frege, Russell, Hilbert y Gödel, las investigaciones más recientes concernientes a las "gramáticas del texto" y los modelos de comprensión del texto, también han permitido identificar las expresiones referenciales, las expresiones de actitudes proposicionales, los pasos del razonamiento, los episodios en un relato, etc. La determinación de este tipo de unidad en un discurso, no puede hacerse sólo con criterios de formas lingüísticas de expresión, sino sobre la base de las operaciones efectuadas por el locutor para organizar su discurso. La determinación de este tipo de unidades depende, pues, de una aproximación funcional.

El análisis del discurso se basa en un análisis funcional. La clasificación de todas las operaciones que permiten cumplir las cuatro funciones discursivas constituye la base indispensable. Este capítulo está dedicado a esta clasificación de las funciones y de las operaciones discursivas. Pero, antes de comenzar el examen, es necesario detenernos en una importante pregunta que proviene de la separación de las funciones meta-discursivas y las funciones discursivas: ¿cuál es el papel de las funciones meta-discursivas en el análisis del discurso y, de manera más particular, cuál es el papel atribuido a la comunicación en el análisis del discurso?

En efecto, parece que es inseparable el empleo de las lenguas naturales de su función social de comunicación. Este vínculo es tan fuerte que Wittgenstein investigó, en esta función, la originalidad de las lenguas naturales en relación con las lenguas simbólicas y la razón de su irreductibilidad a las exigencias puramente lógicas de un empleo de los signos. A su turno, la Pragmática ha fundado sobre la comunicación los principios de un análisis de la organización del discurso y de su funcionamiento. Así, las exigencias de informatividad y de economía que gobiernan al discurso ordinario dependerían directamente de esta función de comunicación (Ducrot, 1972, p. 4-10). Y no parece que pueda haber discurso cuya elaboración no tenga en cuenta las representaciones reales, o supuestas, de su destinatario presente o virtual (Grize, 1982). Esta connaturalidad entre la función de comunicación y el "lenguaje", al menos en su modalidad "hablada" o conversacional, ¿no invalidaría toda separación entre funciones meta-discursivas y funciones discursivas para el análisis del discurso?

Principios de un análisis funcional de la variedad de los discursos posibles en lengua

natural

Antes de examinar las interacciones entre funciones meta-discursivas y funciones discursivas, es importante recordar la diversidad heterogénea de los empleos posibles de una lengua natural: empleo común o social, empleo especializado en los diferentes dominios de conocimiento, empleo literario. De tales empleos resulta una variedad de tipos de discursos posibles de los cuales no se puede dar cuenta sólo con la función de comunicación. Un discurso puede producirse únicamente con fines de objetivación, como también puede cumplir simultáneamente dos de las tres funciones. ¿Cómo se expresa esto en la organización del tipo de discurso producido?

Se ha comprobado que la separación entre el plano de las funciones meta-discursivas y el de las funciones discursivas es absolutamente necesaria para desarrollar un modelo de análisis que valga tanto para un tipo particular de discurso como para cualquier otro tipo. Es sólo separando estos dos planos, es decir, manteniendo la independencia de las funciones discursivas en relación con las funciones meta-discursivas, que se puede explicar el funcionamiento propio de los diferentes empleos de las lenguas naturales. En concreto esto quiere decir que *la organización de un discurso depende siempre de las funciones discursivas que cumple y de las operaciones discursivas seleccionadas para cumplir tales funciones.* Habiendo sido primero interdependientes, las funciones discursivas no están vinculadas con las funciones meta-discursivas. Cualquiera que sea la función meta-discursiva a la cual responde su producción, un discurso siempre las pone en acto efectiva o potencialmente. No puede ser más que indirecta la influencia de las funciones meta-discursivas sobre la organización de un discurso. *Esta se expresa a través de la predominancia dada a una u otra de las cuatro funciones discursivas y de la selección de algunas operaciones que le son específicas.*

Así, el discurso matemático privilegia la función meta-discursiva de tratamiento, incluso en su empleo en la lengua natural. Veremos que esto se expresa en un desarrollo sistemático, hasta la excrecencia, de la función discursiva referencial y en la selección de una y sólo una operación discursiva, entre las posibles, para cumplir la función apofántica (p. 107-108). Es esta predominancia de una de las funciones discursivas y esta selección de una operación discursiva, lo que explica el empleo tan diferente que se hace de la lengua natural en matemáticas en relación con el que se hace en el discurso ordinario. Ni el análisis del sistema de la lengua propiamente dicho, ni las situaciones de producción del discurso son suficientes para hacer notar esa diferencia.

Los mismos principios de análisis permiten abordar otro dominio importante de preguntas, relativas a la relación entre lengua natural y lenguajes formales. ¿Cuál es el papel que puede jugar la lengua natural en el espacio creciente de los simbolismos y de las lenguas formales en los conocimientos científicos, espacio que se extiende en detrimento del empleo de la lengua natural? ¿Cómo se efectúa el pasaje entre estos dos tipos de lenguas? Y, naturalmente, la pregunta abordada por Wittgenstein: ¿en qué consiste la especificidad de las lenguas naturales en relación con las lenguas formales?

La primera de estas preguntas fue planteada por Granger (1979) desde una perspectiva epistemológica. Para justificar la conservación irreductible de la lengua natural frente al desarrollo de los simbolismos y de las lenguas formales, Granger propuso distinguir dos funciones: de una parte, la función *locutoria* que cumple la "formulación referencial" y la "formulación proposicional" (p. 45), y de otra, la función *ilocutoria* que cumple la expresión de las articulaciones de las proposiciones, como en una demostración, y corresponde a los actos de enunciación y de comunicación (p. 21-22, 42, 76, 82-83, 170). Así, para Granger, sólo lo que proviene de la función locutoria podría convertirse al registro de los simbolismos y de las lenguas formales. Lo que proviene de la función ilocutoria quedaría, al contrario, como patrimonio de las lenguas naturales.

Esta solución presenta la ventaja de reconocer la necesidad de varias funciones, y no de una sola, para analizar la variedad de los discursos y de los tipos de lengua. Pero se habrá observado que mezcla las funciones meta-discursivas y las funciones discursivas. Así, lo que Granger llama la "función ilocutoria" es una fusión de la función meta-discursiva de comunicación y de la función discursiva de reflexividad. Esto conduce a una consecuencia completamente discutible: admitir que la diferencia entre la lengua natural y las lenguas formales sería esencialmente funcional. Habría funciones que sólo podrían cumplir las lenguas formales y otras que sólo podrían hacerlo las lenguas naturales. Y, en definitiva, la única función que podría cumplir la lengua natural sería la función meta-discursiva de comunicación!

Hemos visto la ambigüedad de toda tesis que identifique el empleo de una lengua natural con la función de comunicación y que postule de manera vaga una oposición funcional entre los tipos de lengua. En efecto, la separación entre funciones meta-discursivas y funciones discursivas lleva a afirmar que lo *propio de una lengua, natural o formal, es poder cumplir las diferentes funciones discursivas*. ¿Dónde pues encontrar la diferencia específica que separa las lenguas naturales de las lenguas formales? Debe ser buscada no al nivel de las funciones discursivas sino al de las operaciones discursivas. Para todas las funciones discursivas, cada tipo de lengua ofrece una gama más o menos amplia de **operaciones discursivas** que contribuyen a la formación de un discurso: *para una misma función, algunas operaciones pueden ser comunes a varios tipos de lenguaje y otras, al contrario, ser específicas a un solo tipo de lenguaje.*

Por tanto, la diferencia entre lengua natural y lengua formal no puede analizarse en términos de repartir funciones cumplidas, sino sólo en términos de modalidad de cumplimiento de cada una de las funciones discursivas. E lenguaje natural y los lenguajes científicos (comprendidas las lenguas formales) no se oponen por el hecho de que el primero cumple funciones discursivas que los otros no cumplirían. En primer lugar se diferencian en las operaciones puestas en juego para cumplir las mismas funciones discursivas: algunas operaciones pueden ser comunes y otras no. Además, limitar el empleo de la lengua natural a la función meta-discursiva de comunicación no es pertinente: su empleo también permite cumplir funciones de tratamiento, y esto, de manera que las lenguas formales no pueden suplantar (capítulo V). Aún más: las lenguas formales y los simbolismos no cumplen únicamente la función de tratamiento; igualmente cumplen la función de objetivación y por ésta vía pueden también cumplir la función de comunicación.

Se ve pues la importancia de una clasificación de las operaciones que permiten cumplir las cuatro funciones discursivas. En esta clasificación mencionaremos, para una misma función, las operaciones posibles con las lenguas naturales y las posibles con las lenguas formales (fig. 2, 3, 4). Los problemas de conversión entre lengua natural y lengua formal dependen de una comparación de las operaciones posibles en cada registro de lengua (capítulo III). Naturalmente, de las cuatro funciones es la función de expansión discursiva la que, en definitiva, es la más importante en razón de que corresponde a la posibilidad de articular varios enunciados completos en la unidad coherente de un relato, de una descripción, de una explicación o de un razonamiento. Paradójicamente, aunque esta es la función que ha sido menos analizada, todos los estudios se sustentan en las reglas constitutivas de cada uno de sus géneros de discursos (fig. 1). También propondremos aquí una clasificación de las operaciones posibles de expansión discursiva, cualquiera que sea el tipo de discurso producido.

LA FUNCIÓN REFERENCIAL DE DESIGNACIÓN DE OBJETOS

La primera función de una lengua es permitir designar objetos. Esta función moviliza un complejo juego de operaciones discursivas. Los numerosos trabajos surgidos a partir de los célebres artículos de Frege (1892) y del Russell (1905) han permitido diferenciar cuatro tipos de operaciones.

Las operaciones de función referencial

1. La operación de *designación pura*. Esta operación consiste en identificar un objeto sea mostrándolo con un gesto, sea asociándole una marca particular o una combinación particular de signos que provienen, por ejemplo, de un sistema de etiquetas. Toda apelación por atribución a un objeto de un signo (letra o número) o de un nombre que le sea "propio", es una operación de designación pura. Utilizados por una operación de designación pura, los signos no tienen significación; se reducen a un empleo referencial. Esta operación es por sí misma suficiente para designar y para permitir identificar un objeto. Sin embargo, la introducción de una apelación requiere con frecuencia recurrir a otras operaciones de designación. Así, la doble apelación efectuada en "Sea *I* la mitad del segmento *AB*..."[10] a través de las letras I y AB, no funcionaría sin una operación de categorización, marcada por el empleo de sustantivos, y sin una operación de determinación, marcada por el empleo de artículos. Por lo general, una operación de designación pura puede bastar para identificar el objeto del cual se habla en el contexto de una comunicación oral, pero no en el de una expresión escrita.
2. La operación de *categorización simple.* Consiste en identificar un objeto con base en una de sus cualidades, es decir, designarlo indicando la clase "típica" a la cual pertenece. El empleo de sustantivos, verbos o adjetivos calificativos proviene de una operación de categorización simple: "Sea I la ***mitad*** del ***segmento*** AB...", "...se busca un ***divisor*** común al ***numerador*** y al ***denominador***...". Sin embargo, esta operación nunca es suficiente por sí misma para permitir identificar un objeto. Debe estar combinada con otra operación, la de determinación.
3. La operación de *determinación.* Consiste en precisar el campo de aplicación de la operación de categorización: "sea I ***la*** mitad del segmento...", "se busca ***un*** divisor común...". Los "presupuestos de existencia y de unicidad" provienen de esta operación de determinación en las lenguas naturales.
4. La operación de *descripción*. Consiste en identificar un objeto cruzando los resultados de varias operaciones de categorización. Esta operación se efectúa en las lenguas naturales a través del empleo de construcciones genitivas o de proposiciones relativas: "sea **I** *el punto* ***de*** *intersección* ***de las*** *alturas* ***de*** *un triángulo*".

Evidentemente, la operación de descripción es análoga a la de categorización, pero le es irreductible en dos aspectos. El primero es que esta operación se cumple en situación de *"penuria nominum"*, es decir, en ausencia de palabras disponibles correspondientes (Eco, 1988, p. 103). *Ninguna lengua, incluso natural, puede tener un nombre para cada objeto o para cada clase de objetos; se trata de*

[10] También se podría tener la formulación equivalente: "Sea I la mitad de {AB}...". En esta formulación el término "segmento" es reemplazado por la notación entre corchetes; a ésta se opone la notación entre paréntesis, que reemplaza el término "recta". Vemos en esto un caso de sustitución de notaciones simbólicas por palabras en el marco de una frase castellana, caso frecuente en geometría. Esto ha sido descrito por Laborde (1982). Pero esta sustitución de símbolos por palabras no implica ningún cambio en las operaciones de designación. La dupla de letras proviene aquí de una operación de designación pura; asimismo, el empleo de los corchetes en lugar del término "segmento" proviene de una operación de categorización. Y, como veremos más adelante, las notaciones { } y ( ) no pertenecen a un léxico independiente: estas notaciones codifican términos cuya definición no puede ser dada sin recurrir a la lengua natural.

poder nombrar no importa qué objeto a pesar de la limitación del léxico de la lengua de que se dispone. La operación de descripción se impone cuando se trata de identificar un objeto que no puede ser nombrado directamente con el léxico de que se dispone (Russell, 1969, p.43). Consiste en la construcción de una denominación por categorizaciones sucesivas con una neutralización parcial de cada categoría movilizada: la descripción designa un solo objeto y no un conglomerado de objetos. En razón de esto, el dominio de una lengua, materna o formal, se debe buscar quizá menos en el entendimiento y conocimiento del vocabulario que en la conciencia de esta *"penuria nominum"* y en la posibilidad de efectuar de manera controlada esta operación de descripción. En todo caso, esta operación se manifiesta como una importante fuente de dificultades en la comprensión de la lengua natural, como se puede verificar en el marco del aprendizaje de las matemáticas. El segundo aspecto es que esta operación introduce *una posibilidad paradójica*: no sólo podemos designar lo que no existe, sino también los objetos imposibles, que como tales, son imposibles de identificar (Russell, 1970, p. 202-204). El centro de todos los debates sobre las relaciones entre sentido y referencia ha sido esta posibilidad paradójica de designar los objetos que no existen, posibilidad que introduce la operación de descripción.

La operación de descripción, como la de categorización simple, requiere ser combinada con la operación de determinación. Salvo ciertos casos, pues, en el registro de las lenguas naturales es necesario combinar al menos dos operaciones para poder designar un objeto.

Los léxicos para las operaciones de designación

Un léxico es un conjunto de elementos (signos, símbolos o palabras) que permiten marcar explícitamente el cumplimiento de una de las cuatro operaciones que contribuyen a cumplir la función referencial. La organización del léxico juega, evidentemente, un papel importante en la potencia de una lengua. No todos los léxicos permiten cumplir las cuatro operaciones de designación. Algunos sólo permiten cumplir la operación de designación pura, otros permiten cumplir la operación de determinación pero no las de categorización y de descripción. *La organización de un léxico depende de la naturaleza de las operaciones de designación que permite.*

Cuando la referencia se hace únicamente a través de la operación de designación pura, el léxico de los signos utilizados tiene poca importancia: puede ser disparatado y sin ninguna estructura. La única restricción que se debe respetar es que el signo utilizado para designar un objeto sea materialmente diferente al utilizado para designar otro. No es lo mismo cuando la referencia se hace por categorización o por determinación. En estos casos, es necesario recurrir a un léxico inicial que pueda ser enriquecido con términos nuevos. Ahora bien, no todos los léxicos tienen ni el mismo modo de organización ni los mismos modos de extensión. Para captar este hecho es importante distinguir dos grandes tipos de léxico: los léxicos sistemáticos y los léxicos asociativos.

Un léxico es **sistemático** cuando está constituido de la siguiente manera: "dados un conjunto de objetos elementales y sus designaciones por medio de símbolos arbitrarios, los objetos complejos se designan por composición de estos últimos" (Granger, 1979, p. 24). Los símbolos que designan los objetos elementales constituyen entonces el léxico inicial. La escritura de los números en función de una base, o escritura posicional, es un ejemplo de léxico sistemático: su léxico inicial comporta tantos signos diferentes como la base números diferentes (dos, diez...). Todos los otros números son entonces designados por combinación de estos signos; las posiciones sucesivas de los signos combinados corresponden a las potencias sucesivas de la base. Un léxico tal permite sólo la operación de designación pura y no las de categorización o de determinación. El método de

nomenclatura química introducida por Lavoisier constituye otro ejemplo de léxico sistemático. Su originalidad se basa en que el léxico creado se desarrolla con la ayuda de la lengua natural. El conjunto de los objetos elementales está constituido por funciones ácido y base acidificable, por grados de oxigenación de la base... Estos objetos elementales están designados con sufijos *ico, oso, ato, uro, ito*. Todas las sustancias compuestas pueden entonces designarse por sufijos y por yuxtaposición de los términos así obtenidos (Granger, 1979, p. 29-30). Los léxicos sistemáticos también son llamados, de acuerdo con Leibniz, simbolismos "característicos".

Los léxicos sistemáticos presentan una importante restricción: no permiten designar más que *objetos que pertenecen a un dominio particular*. Pueden incluso manifestarse insuficientes para designar todos los objetos de un dominio particular. La escritura posicional es un ejemplo típico: sólo permite designar números enteros. Para designar otros números (los relativos, los decimales y los racionales), con excepción de los reales, es necesario añadir notaciones particulares a este simbolismo "característico": un trazo horizontal para los negativos, coma o punto para los decimales, barra de fracción para los racionales. Estas notaciones, que además están asociadas con símbolos de operación, no constituyen un léxico sistemático. Estos son símbolos incompletos o sincategorimáticos (Granger, p. 51). No designan por sí mismos, pero modifican la significación y la referencia de los términos de la escritura posicional, a los cuales están asociados: "16", "-16", "1,6", "√16" son expresiones en las cuales lo que se conserva de la escritura posicional ("16"), cambia cada vez de significación y de referencia. Esta modificación puede representar un costo importante durante el aprendizaje: el paso del cálculo con enteros al cálculo con decimales constituye un famoso ejemplo. El aprendizaje de la manipulación de las cifras en el cálculo decimal tropieza con una fuerte "transferencia negativa" que resulta de la automatización de la manipulación de las mismas cifras en el cálculo con enteros. El costo de tal transferencia negativa se ha podido medir en el laboratorio. Cuando una respuesta ha sido asociada a unos caracteres (letras o cifras), la automatización de otra respuesta asociada a esos mismos caracteres demanda un número considerablemente más elevado de presentaciones que el aprendizaje de la primera asociación (Shiffrin & Schneider, 1977, p. 132-133).

El léxico así obtenido por ampliación de un léxico sistemático inicial, con la ayuda de notaciones asociadas a símbolos de operación, puede seguir funcionando como un léxico sistemático. Pero se manifiesta radicalmente inepto para designar números reales, algebraicos o trascendentes. Además, le está excluida la posibilidad de elaborar otro más potente. Hay ahí un límite de las posibilidades de representación semiótica que es supremamente importante en el plano conceptual. *Es imposible construir un léxico sistemático que permita designar directamente los números reales.* Sin embargo, eso no significa que los números reales escapen a toda posibilidad de designación. Quedan dos operaciones susceptibles de ser utilizadas para designar los números reales: o bien el recurso a la designación pura (π, e), o bien la descripción a través de la escritura de series, de fracciones continuas, o de encadenamientos... Observemos que las expresiones que corresponden a tal designación por descripción están siempre señaladas por la añadidura de puntos que significan la reiteración indefinida de la operación o del procedimiento que permite la descripción, "0, 33...".

Un léxico es **asociativo** cuando su léxico de partida no remite a un conjunto de objetos teóricamente elementales, sino a la diversidad de objetos y de fenómenos del medio físico y del entorno sociocultural. Entonces, los objetos y los fenómenos son designados la mayoría de las veces en función de un carácter particular que los "tipifica", sin definirlos verdaderamente, de manera que la palabra que los designa despierta la imagen:

> ... lo que el latín nomina **navis**, el francés llama **vaisseau, bâtiment**; en latín el carácter particular es *lo que nada, flota (natación)*; en francés o es bien la idea de un gran *vaso*, o bien la de la *construcción*... He

> aquí por qué, en tanto que palabras, los términos que sirven para formarlas son en sí poco esenciales. Un **soldado** no es un *hombre de guerra* sino un hombre *a sueldo, pagado* (Darmesteter, 1895, p. 127).

La formación de términos nuevos para todos los objetos que, en ese léxico inicial, no tienen nombre para designarlos, se hace en primer lugar a través del empleo de palabras que ya existen pero con una transferencia parcial de su sentido y un desplazamiento de la referencia. Este **procedimiento de extensión semántica** de los términos del léxico, introduce, pues, una variación en el empleo de palabras ya existentes. La variación puede hacerse de diferentes maneras, las cuales por lo general se catalogan y describen bajo el término "tropo" o de "figura": metonimia, metáfora ("hoja" para designar una hoja de árbol o una hoja de papel), sinécdoque ("escuela" para designar los locales o la institución), etc. (Darmesteter, 1895, p. 127-133). En todos los casos, el procedimiento de extensión semántica remite a combinar lo que hemos llamado la operación de designación pura con una operación de categorización.

Los léxicos asociativos son, evidentemente, los propios de las lenguas naturales: no están restringidos a ningún dominio particular de objetos. En el caso de los léxicos asociativos, sin lugar a dudas no se puede definir un léxico de partida. Esto en razón de que cualquiera que sea el léxico de partida fijado, éste aparecerá como el resultado de un proceso de transformación y de enriquecimiento de sentido de un estado anterior en el desarrollo del léxico. Por el contrario, se puede hablar de un léxico asociativo de partida en relación con un individuo dado: el léxico de partida es el léxico espontáneamente utilizado en el medio parlante al cual pertenece un individuo. Todos los alumnos de un escuela no disponen del mismo léxico de partida por la práctica de su lengua materna.

El contraste entre los léxicos sistemáticos y los léxicos asociativos aparece en el plano de sus léxicos de partida respectivos. El léxico de partida de un simbolismo "característico" o de una lengua formal es casi nulo. Las reglas de formación permiten designar, por composición de los símbolos del léxico de base, tantos objetos complejos como se quiera. El léxico de partida de una lengua natural, por el contrario, es considerable y la posibilidad de su extensión con la introducción de palabras nuevas es al la vez menor y más compleja. Además, toda transformación del empleo de una palabra ya existente en un léxico asociativo, con frecuencia debe ser parafraseado a través de una explicación o explicitado con una definición. Este no es el caso en los léxicos sistemáticos.

Formas asociadas a la función referencial

En las lenguas naturales, las formas de expresión susceptibles de marcar el cumplimiento de la función de referencia a los objetos del discurso, son múltiples y variadas. Uno no se puede contentar con criterios morfo-sintácticos para distinguirlas y analizarlas; es necesario tomar en consideración las operaciones con las cuales se marca lingüísticamente la efectuación. Acabamos de ver que la referencia a los objetos se efectúa discursivamente de dos maneras: ya sea por el empleo de un signo de identificación que procede de la operación de designación pura (símbolo, letra o número de codificación, número de matrícula, nombre propio...), o bien por el empleo de una combinación de signos que provienen de dos operaciones (categorización o descripción, y determinación). Esta segunda manera da, en la lengua natural, expresiones tan diferentes como "sustantivos actualizados" ("*La recta", "un círculo"*...), "descripciones definidas" (*"El rey de Francia", "el punto de corte de dos bisectrices de un triángulo"*), proposiciones relativas, etc. Esto quiere decir que la referencia a los objetos raramente se hace a través del empleo de un solo elemento del léxico, sino que se hace a través de expresiones que asocian varios elementos del léxico: esto vale tanto para las lenguas formales como para las naturales. Así, un sustantivo no puede por sí solo referir un objeto; no puede tener más que acepciones lexicales múltiples.

Sin embargo, no es suficiente que una forma de expresión tenga semejanza morfosintáctica con una de las formas de expresión precedentes para que cumpla una función referencial. También debe estar siendo empleada en una unidad de expresión de nivel superior, sea una frase o una proposición. Más precisamente, debe estar en posición de sujeto en la frase, posición que Quine llamó "posición referencial" (1978, p. 207). Si no está en esa posición, puede dejar de ser referencial (Ducrot, 1972, p. 225). Veremos en el capítulo III que en las lenguas formales las formas de expresión que cumplen la función referencial no se diferencian de las que cumplen la función apofántica; mejor dicho, son las proposiciones las que se utilizan como expresiones referenciales.

Tabla 1

Las operaciones de la función referencial y algunos ejemplos de formas de expresión que les están asociadas en dos registros de lenguaje

Operaciones de función referencial	**Operaciones elementales de la "lógica natural" según Grize**	**Formas de expresión correspondientes a las operaciones en las lenguas naturales**	**Formas de expresión correspondientes a las operaciones en las lenguas formales**
Designación pura		Deícticos, nombres propios	Símbolos de constante
Categorización	Las operaciones de anclaje: π η y las operaciones de objetos: γ θ ι ω	Sustantivos, adjetivos calificativos, verbos	Símbolos de predicado (o de función proposicional)
Descripción		Construcciones genitivas, proposiciones relativas	Conjunción o disyunción de proposiciones formadas por saturación de funciones proposicionales
Determinación		Artículos, adjetivos y pronombres indefinidos	Símbolos de cuantificación

Para facilitar una comparación con el modelo propuesto por J.B. Grize (1983), hemos considerado en nuestra clasificación (tablas 1 y 2) todas las operaciones "lógico-discursivas" tomadas en consideración en su modelo. Recordemos que este modelo procura dar cuenta del funcionamiento propio de los discursos argumentativos en lengua natural. La clasificación de las operaciones según las funciones discursivas que cumplen, tiene un propósito diferente: trata de elaborar instrumentos para comparar registros de lengua y para analizar los pasajes de una a otra lengua.

En esta tabla podemos ver las **correspondencias funcionales** entre las unidades propias al registro de las lenguas naturales y las unidades propias al registro de las lenguas formales. Pero el pasaje de un registro a otro está lejos de ser tan simple como lo sugiere esta tabla de correspondencias. Y esto, por una razón importante.

Hay una diferencia considerable, de tamaño y de variedad, entre el conjunto de las unidades susceptibles de cumplir una función referencial en lengua natural y el conjunto de unidades susceptibles de cumplirla en las lenguas formales. Esta diferencia se basa en la **ausencia de léxico sistemático**, y *a fortiori* asociativo, **en las lenguas formales**, como las que ponen en funcionamiento el cálculo de los predicados y la lógica de las proposiciones. Las operaciones de categorización y de descripción no son posibles directamente. Para distinguir dos proposiciones o dos predicados diferentes, no hay otra posibilidad que el empleo de símbolos (letras de diversos alfabetos) diferentes. Mientras que el recurso a la escritura posicional permite siempre identificar un número particular, es decir, distinguirlo de todos los demás, el empleo de símbolos con la operación de designación pura no permite identificar un predicado particular o una proposición particular. La correspondencia funcional entre los términos de un léxico asociativo y las letras de predicados, no permite hacerse ilusiones: no puede dar lugar más que a una conversión tipo codificación de formas de unidad, y no a una conversión tipo traducción. El núcleo único del léxico sistemático tiene que ver con los tres símbolos relativos a la operación de determinación (los dos símbolos de

cuantificación y el de la negación) y los símbolos de conectivos proposicionales. *Esta ausencia de un léxico que permita nombrar los objetos, constituye una de las características específicas de las lenguas formales.* Esto provoca una no-congruencia muy fuerte entre las expresiones en lengua natural y las que se considera que las traducen en lengua formal. Los obstáculos que se deben sobrepasar en un aprendizaje de la lógica, o incluso en una utilización rudimentaria de los cuantificadores, se basan en principio en esta no-congruencia. Volveremos con más detalle a estos problemas, que serán el tema del siguiente capítulo.

Empleo común y empleo especializado de la lengua natural

La diferencia entre dos empleos antagonistas de la lengua natural, uno común y otro especializado (como el llamado "lógico-matemático"), puede ponerse en evidencia desde ya sólo con el análisis de la función referencial. Contrario a lo que se afirma con frecuencia, esta diferencia no se explica por el empleo de los términos de la lengua natural en un sentido diferente al que se le da en el discurso ordinario; esto, en razón de que es inherente al léxico asociativo de las lenguas naturales que las palabras tengan sentidos diferentes según los contextos de empleo. El sentido "técnico" no es más que uno de los componentes de la plurivocidad de las palabras, la cual debe ser constantemente administrada en toda práctica común de una lengua natural. La diferencia entre los dos empleos de la lengua natural debe buscarse en primer lugar en la manera de efectuar las operaciones con función referencial. En efecto, una de las características de un empleo especializado de la lengua natural es la importancia que toma la operación de descripción. Esta importancia no se refleja sólo en la frecuencia de expresiones referenciales dependiente de esta operación; aparece sobretodo con el ***carácter recurrente*** *que toma esta* ***operación de descripción*** *en su empleo especializado y, más particularmente, en su empleo "lógico-matemático".*

En el empleo común, la operación de descripción raramente sobrepasa una simple construcción de complemento del sustantivo, es decir, una dupla sustantivo-preposición: "(los recuerdos *de los* sueños)", "(el principio *de la* cordura)"... (Grevisse, 1986, § 340-350).

Por el contrario, en el empleo especializado encontramos encadenamientos de complementos del sustantivo: "(el punto *de* (cruce *de* (dos bisectrices *de* un triángulo)))...", "(el apilamiento *de* (esferas construido *por* (superposición en tresbolillo *de* (capas *de* (apilamientos maximales planos)))))...". Es decir, la forma de expresiones referenciales es por completo más compleja en el empleo especializado de la lengua natural que en el empleo común, oral o literario.

Esta diferencia puede medirse en los textos con la ayuda de dos índices que hemos llamado **índice de "densidad léxico-semántica"** e **índice de "complejidad sintagmática"** (Duval, 1981, p. 11-16).

Partiendo del hecho de que la proporción de sustantivos aumenta de manera considerable en un texto en el que se utiliza recurrentemente la operación referencial de descripción, en relación con un texto en que no es así, podemos definir la relación:

$$\frac{S}{S+V}.$$

en la que S representa el número de sustantivos y V el número de verbos. En los textos que no comportan empleo recurrente de la descripción, el valor máximo que puede alcanzar esta relación es 1/2. Con frecuencia, el valor de esta relación es incluso más baja si el texto no comporta ninguna construcción simple de complemento de sustantivo. Por el contrario, en los textos en cuya redacción se usa recurrentemente la descripción, el valor de esta relación varía entre 2/3 y 3/4. En textos

escolares de matemáticas hemos encontrado algunos que tienen un valor de 0,7, así como enunciados de teoremas que sobrepasan el 0,8! De manera muy distinta, en las que no tienen ninguna pretensión técnica, los valores de esta relación de densidad léxico-semántica varían entre 0,3 y 0,4. Veamos, por ejemplo, dos breves párrafos de secciones de textos en los cuales hemos efectuado estas medidas (Duval, 1981, p. 30-32):

La composición de una simetría de eje d seguida de una simetría de eje δ paralela a d, es una translación. Esta translación es la que forma un punto cualquiera de d en su simetría en relación con δ.

Texto de matemáticas, Octavo grado.

En la sección de donde tomamos este párrafo encontramos un valor de 0,77.

> Mientras más procuro escucharme y estar atento a mi experiencia interna y mientras más procuro extender esta actitud de escucha a otro, más siento respeto por las complejidades del proceso vital.
>
> Rogers, *El desarrollo de la persona*

En la sección de donde tomamos este párrafo encontramos un valor de 0,39. En los textos de Proust encontramos un valor intermedio de 0,55.

Este índice de densidad léxico-semántica puede complementarse con un **índice de complejidad sintagmática**. La forma más simple de una operación de descripción que pueda caracterizarse por la dupla sustantivo-preposición, se puede definir con base en la proporción de palabras que pertenecen a una forma, simple o compleja, de construcción referencial:

$$\frac{\text{Duplas (sustantivo-preposición) x 2}}{\text{Número de palabras}}$$

Sabiendo que la proporción de sustantivos en un texto (evidentemente, salvo los que recurren al procedimiento estilístico de enumeración) puede variar entre 1/10 y 1/3 de las palabras del texto, *un valor de 1/4 indica una saturación del texto de encadenamientos de complementos del sustantivo*. En un texto que sólo comporte construcciones simples de complemento del sustantivo, el valor de esta relación no sobrepasa 0,06 o 0,07. El valor del índice de complejidad sintagmática en el primer ejemplo anterior es 0,25 y en el segundo es 0,06. Por el contrario, en los textos de Proust este índice ya no es intermedio sino que se acerca al del texto de Rogers: 0,06.

Considerar estos dos índices permite diferenciar un empleo especializado y un empleo común de la lengua natural. El primer índice no permite por sí solo distinguir el texto de Proust del manual de matemáticas ya que ambos el valor del índice de densidad léxico-semántica sobrepasa 1/2. Por el contrario, el índice de complejidad sintagmática establece bien la diferencia: muy débil en el texto de Proust y próximo a los valores máximos en el texto de matemáticas (0,06 *vs* 0,25). Evidentemente, se deben tomar en consideración otros índices para hacer una descripción completa de estos textos. Pero estos otros índices no se refieren ya a la función referencial. Por otro lado, los dos índices son suficientes para medir la diferencia que separa el empleo especializado y el empleo común de la lengua natural.

Esta diferencia no puede considerarse como un fenómeno secundario o despreciable en el aprendizaje tanto de la lengua materna como de las matemáticas. Los resultados de la evaluación nacional en Matemáticas y en Francés (septiembre/89) hicieron notar una oposición entre dos poblaciones de alumnos de 6° y de 5°: unos comprenden los "enunciados cuya constitución es compleja (expansiones, encadenamientos)" pero "en general no tienen un buen conocimiento de la estructura de la frase" y los otros conocen mejor la estructura de la frase pero se les dificulta captar la información suministrada por expansión de un grupo nominal (Tomassone, 1990, p. 119, 124-

125). Es evidente que para la segunda población no será accesible un empleo especializado de la lengua natural, es decir, un recurso sistemático a la expansión del grupo nominal por la función discursiva de designación de objetos, sin un aprendizaje específico de esta práctica recurrencial para designar objetos.

LA FUNCIÓN APOFÁNTICA DE EXPRESIÓN DE ENUNCIADOS COMPLETOS

La posibilidad de designar objetos no es suficiente para permitir una actividad discursiva. Una lengua, o un sistema de signos, que sólo pudiera cumplir esta función se reduciría a un código. Una lengua también debe permitir poder decir cualquier cosa sobre los objetos que designa. Dicho de otra manera, una lengua debe permitir cumplir lo que hemos llamado función "apofántica" inspirados en Aristóteles quien fue el primero, en el *Peri Hermeneia*[11], en poner de relieve explícitamente la originalidad de esta función en relación con la función referencial.

Las expresiones que cumplen esta función son llamadas a veces, y quizá desafortunadamente, "enunciados completos". Esta cualificación sugiere que la diferencia entre los enunciados completos y las expresiones referenciales tendería al carácter completo, o suficiente, del sentido de los primeros en relación con el de los segundos. Pero los criterios de completitud del sentido son vagos. Así, se ha invocado como criterio de completitud la referencia a un "hecho del mundo", sea este mundo real o ideal (Granger, 1979, p. 79). Pero entonces, ¿en qué difiere un "hecho del mundo" al cual se considera que un enunciado completo remite, de un objeto designado por una expresión referencial? ¿Esto querrá decir que la diferencia entre una frase y una simple expresión referencial dependería en definitiva de la naturaleza de los objetos y de los hechos expresados? ¿Habría entonces objetos cuya expresión daría lugar a enunciados completos y otros que no podrían hacerlo?

En realidad, no es en la completitud del contenido expresado ("un hecho del mundo") donde es necesario buscar lo que diferencia el sentido de un enunciado completo y el de una expresión referencial, sino en el acto de expresión mismo. Un enunciado tiene un "sentido completo" porque el acto de expresión que lo produce es completo. *Un acto de expresión es un* ***acto completo del discurso*** *cuando la expresión producida toma un valor determinado en el universo cognitivo, representacional o relacional de los interlocutores.* Dicho de otra manera, la especificidad del sentido de un "enunciado completo" en relación con una expresión referencial, debe buscarse en su valor. Este valor puede ser un **valor lógico** de verdad o de falsedad, un **valor epistémico** de certeza, de necesidad, de verosimilitud, de posibilidad o de absurdidad, un **valor social** de pregunta que obliga a una respuesta, de orden para ejecutarse, de deseo, de promesa , etc. (Ducrot, 1972, p. 4). Un enunciado completo puede tener:

- únicamente un valor social, "venga pronto!", "llame más tarde",
- un valor epistémico y un valor social, por ejemplo, cuando se hace una promesa cuya realización parece poco verosímil o absurda,
- un valor epistémico y un valor lógico si el acto de discurso se sitúa en un contexto teórico, "la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que 180º".

[11] *Peri Hermeneia*, cap. 5. La distinción entre las funciones referencial y apofántica ya había sido bosquejada por Platón en *El sofista* 261c-264c, 237a-e, 260c.

Esto depende del contexto del acto de discurso y del universo cognitivo, representacional y relacional de los interlocutores.

Cuando se pasa de una expresión referencial a un enunciado completo se cambia pues de nivel y de criterio en la constitución del "sentido" de una expresión. El "sentido" de un enunciado completo está específicamente en el (o los) valor(es) que toma y no en el carácter completo o suficiente de las informaciones que daría sobre un objeto o sobre una situación del mundo. La expresión "enunciado completo" es entonces desafortunada en cuanto tiende a oscurecer la diferencia que hay entre una proposición, o una frase, y un texto. Incluso en el caso en que un texto tenga una sola frase, los criterios de completitud no son de la misma naturaleza si se mira como frase a si se mira como texto. Los criterios de completitud de una proposición, o de una frase, se sitúan en el valor social, epistémico, o lógico que el acto de expresión confiere a la expresión. Los de un texto se sitúan en "la autonomía y el cierre" de su contenido, es decir, en la terminación de un relato, en la suficiencia de una explicación, etc. (Ducrot & Todorov, 1972, p.3, 75-376). Entonces preferimos hablar de "unidad apofántica" mejor que de enunciado completo.

Pero que el sentido de una unidad apofántica esté en su valor social o epistémico no implica que el contenido y su referencia a los objetos, o a los hechos del mundo, estén excluidas de su sentido. Estos aspectos se mantienen en la medida en que la unidad comprenda expresiones referenciales. Esto en razón de que, como se verá mas adelante, estas son expresiones que sólo pueden ser parte de una unidad apofántica.

Las operaciones con función apofántica

Son dos las operaciones que permiten cumplir esta función. La primera consiste en vincular la expresión de una propiedad, de una relación o de una acción, con una expresión que designe los objetos. Generalmente se designa esta operación con el término "predicación" - del término latín *praedicare* que traduce el término κατηγορειν usado por Aristóteles para designar la atribución - (Benveniste, 1966, p. 128; Granger, 1979, p. 83-84). Esta operación implica pues el recurso a expresiones referenciales. El enunciado formado a través de esta operación puede tomar o bien un valor epistémico y un valor lógico o bien uno de los dos. La segunda operación consiste en lo que a partir de Austin se ha llamado "acto ilocutorio", es decir, el acto que, a través de la producción del enunciado, confiere a este enunciado un valor social de acto que compromete al locutor o al destinatario. Así, es el acto ilocutorio lo que da a una expresión que proviene de una operación de predicación su valor de aserción (enunciado verdadero) o de declaración, o de pregunta o de orden, etc. (Ducrot, 1980, p. 33-40).

Estas dos operaciones pueden efectuarse independientemente la una de la otra o conjuntamente. En cada uno de estos casos obtenemos formas discursivas diferentes de unidades apofánticas, como podemos ver en la tabla que sigue.

Tabla 2

Las operaciones de la función apofántica y las formas asociadas

Operaciones de la función apofántica	**Operaciones elementales de la "lógica natural"**	**Formas de expresión en lengua natural** *Estructura rématica: verbo*	**Formas de expresión en lenguas formales** *Estructura funcional Predicado-argumento(s)*
predicación	Polioperación de determinación δ	proposición	
predicación e ilocución **(valores de la unidad apofántica)**	Polioperación de determinación δ Configuraciones τ (polioperaciones de encargo σ, y modulación μ)	Frase simple, Frase compuesta (declaración, pregunta, orden...)	Proposición ("atómica" o fórmula con conectores binarios...) (aserción)
Ilocución **(valores de la unidad apofántica)**		Frase verbal o nominal, una sola palabra (orden, apelación)	

Se observará que en las lenguas formales las operaciones de predicación y de ilocución no pueden separarse. Para las operaciones correspondientes en el modelo de J.B. Grize ver (1983, p. 116, 123-124).

Formas asociadas a la función apofántica

Las operaciones que cumplen una función apofántica y que implican la operación de predicación clásicamente se llaman "**proposiciones**", pero con matices importantes que se pueden ver en la tabla 2.

Para que una proposición sea un enunciado completo en las lenguas naturales, no basta con que provenga de una operación de predicación sino que también es necesario que

lo haga de un acto ilocutorio. Es en relación con la fusión entre la operación de determinación y el acto ilocutorio particular (declaración), que la proposición se ha definido como un "juicio" o como una "frase simple" (Arnauld, 1970, p. 157). Pero en las frases compuestas, la proposición puede aparecer independientemente de un acto ilocutorio bajo la forma de "proposiciones subordinadas". E igualmente, se puede tener un enunciado que provenga únicamente de acto ilocutorio sin que haya ninguna operación de predicación: "Lámame mañana". A partir de estas circunstancias es que en las lenguas formales resulta imposible asimilar proposición y frase. Por el contrario, en las lenguas formales la proposición proviene de una operación de determinación inseparable de un acto ilocutorio particular, el de aserción. Es con base en esto que la definición lógica de la "proposición" se da como sujeto de predicados "verdaderos" o "falsos". En las lenguas formales, y a diferencia de las lenguas naturales, no puede haber más que una forma de expresión, mas o menos compleja, asociada a la función apofántica.

Las formas que dependen del acto ilocutorio son más variadas y más heterogéneas que las que dependen del acto de predicación. Aquellas, en el enunciado, también ponen en juego tanto la entonación, una codificación retórica de la lengua, como las marcas lingüísticas de la enunciación. No nos detendremos en esto. La variación de las formas de expresión más importante para nuestro propósito no es la que está asociada al acto ilocutorio, sino la que lo está a la operación de predicación. Las proposiciones y las frases que provienen de una operación de predicación son unidades que pueden tener dos estructuras internas muy diferentes: la estructura remática y la estructura funcional. El primer tipo de estructura interna es característico del registro de las lenguas naturales y el segundo lo es de las lenguas formales.

La forma de una unidad apofántica de estructura remática (ρημα, verbo) se identifica por la combinación de un verbo, con o sin expansión, y de una expresión que cumple una función referencial. Esta expresión ocupa la posición gramatical de sujeto del verbo. El vínculo sujeto-predicado, que privilegia el verbo "ser", desde hace tiempos ha sido considerado como el modelo tipo de estructura remática (Arnauld, 1970, p. 150-151, 154). En este modelo de origen aristotélico, el verbo "ser" cumple esencialmente la función de cópula, es decir, de afirmación del vínculo entre un sujeto y un predicado. Entonces, toda frase debe interpretarse según el modelo:

"X (sustantivo) es Y (atributo)"

> aunque toda proposición encierre necesariamente estas tres cosas, a veces puede tener dos palabras o incluso sólo una... Pues los hombres queriendo abreviar su discurso han hecho una infinidad de palabras que significan cada una la afirmación... tales son todos los verbos excepto los que se llaman sustantivos... *Dios* ***existe***, es decir, *Dios* ***está*** *existiendo; Dios* ***ama*** *los hombres*, es decir, *Dios* ***está*** *amando a los hombres...*
>
> Aranuld, 1970, p. 157

Tal modelo tiende pues a reducir la diversidad de los verbos y verdaderamente no puede tomar en cuenta las proposiciones que se articulan alrededor de verbos de acción.

Para tomar en consideración la diversidad semántica de los verbos y no sólo su papel lógico, se han propuesto otros modelos. Entre estos, el de la gramática del caso. En este modelo, un verbo instancia una relación entre los objetos. Esta relación se caracteriza por la configuración de los papeles que le asigna a los objetos entre sí: agente, instrumento, destinatario... (Fillmore, 1968, p. 24-25). El verbo "dar", por ejemplo, expresa una acción que se caracteriza por una configuración de tres papeles: el agente, el beneficiario y el objeto de la acción. Otros verbos de acción pueden exigir un papel de instrumento y no exigir beneficiario, etc. Así se determinan diferentes configuraciones

semánticas posibles que pueden ser clasificadas en casos (Fillmore, 1968, p. 31-32). *La estructura profunda de la frase sería la de la configuración particular instanciada por el verbo empleado.* La organización sintáctica de las lenguas naturales, que es una estructura superficial, raramente es congruente (*"matched"*) con esta configuración semántica (Fillmore, 1968, p. 25). En efecto, en su organización sintáctica de la frase, las lenguas naturales no necesariamente marcan todos los papeles de las configuraciones semánticas instanciadas. Esta no-congruencia posible entre las configuraciones semánticas instanciadas por los verbos y la organización sintáctica superficial, ha llevado a rechazar la noción gramatical de sujeto como una noción superficial no pertinente para modelizar la proposición (Fillmore, 1968, p. 5-6, 17). *Pero el verbo,* que también pertenece a la estructura superficial, queda en este modelo como *el elemento clave que permite reconocer una unidad que cumple una función apofántica*: en efecto, es a partir del verbo que se identifica la configuración particular de las diferentes relaciones de caso, y como cada relación no aparece más que una vez en una unidad, es también el verbo lo que permite identificar la extensión y los límites del enunciado (Fillmore, 1968, p. 21, 51). *En un modelo de gramática del caso, la identificación y el análisis de las unidades apofánticas están centradas en la presencia de un verbo.* Como en el modelo aristotélico clásico, la proposición tiene una estructura rematica.

Resulta interesante recordar aquí que uno de los dos primeros modelos cognitivistas de la comprensión del lenguaje natural, el de la "dependencia conceptual" de Schanck (1972), se presenta como un desarrollo de los análisis de la gramática de los casos y postula, por tanto, una estructura rematica de la proposición.

Lo interesante de las unidades apofánticas de estructura rematica es que pueden cumplir funciones meta-discursivas de comunicación o de objetivación. Esto corresponde al hecho de que las lenguas naturales son en primer lugar "lenguas habladas" (Grize, 1973, p. 33) y que son el sistema de representación más íntimamente vinculado a la conciencia (Piaget, 1967a, p. 79; Vigotski, 1962, p. 130-135, 149). Esto no excluye que también puedan cumplir una función meta-discursiva de tratamiento. Pero veremos que es en el dominio del razonamiento donde las lenguas naturales revelan ser un registro necesario e irreemplazable (cap. V).

La forma de una unidad de **estructura funcional** se identifica por la combinación de un término de propiedad con un lugar libre, o de un término de relación con varios lugares libres (generalmente marcados por variables mudas), con términos que llenan estos lugares libres. Los términos que llenan los lugares libres se llaman argumentos. Estos términos pueden ser o bien constantes o bien el vínculo de un cuantificador y una variable definida en un dominio de extensión previamente fijado. Es esta combinación función proposicional - argumento (predicado - variable vinculada) la que toma un "valor" de verdad (Frege, 1971, p. 84-85; 1962, p. 5-8; Russell, 1970, p. 188-191). Así, la distinción entre verbo y nombre sustantivo, que es esencial en una estructura rematica, llega aquí a no ser pertinente y está suprimida en una estructura funcional de la proposición.

*Lo interesante de las unidades apofánticas de estructura funcional es que permiten una expansión discursiva de tipo **cálculo**,* es decir, cumplir una función meta-discursiva de tratamiento, y solamente ésta. En efecto, las unidades elementales, formadas con un solo predicado, pueden estar combinadas en unidades apofánticas más complejas a través de conectores (implicación, conjunción,...) que las articulan en una sola proposición. El valor de verdad de una proposición compleja así formada depende entonces de las proposiciones elementales que ella articula. Los conectores, de los cuales cada uno fija una relación dependencia, tienen funciones de verdad. Entonces, las reglas de tratamiento pueden definirse como las que permiten pasar de una proposición compleja a otra transformando el conector. La forma de una unidad de estructura funcional compleja puede así comportar tres o cuatro tipos diferentes de signos: uno para el predicado, uno para la variable asociada, uno para la cuantificación y uno para la articulación de los

predicados. Así, puede llegar a ser compleja la identificación de un enunciado en las lenguas formales. Esta identificación requiere, en primer lugar, la identificación de la ocurrencia de conectores según un orden de prioridad; y luego, la identificación de los agrupamientos en duplas predicado - variable vinculada con un cuantificador.

Se ve pues claramente la diferencia radical que separa las unidades apofánticas de estructura remática y las de estructura funcional. Las primeras tienen, o pueden tener, entre sus constituyentes unidades que cumplen una función referencial mientras que las segundas no tienen ninguna unidad de este tipo. Dicho de otra manera, *las estructuras apofánticas de estructura remática articulan dos niveles de "sentido":*

- uno categorial, que permite identificar y designar los objetos,
- otro axiológico, que permite expresar propiedades, relaciones, acciones o sentimientos relativos a los objetos.

Esta diferencia radical genera un problema mayor relativo a la posibilidad de una conversión de un enunciado en lengua natural en una proposición de una lengua formal: ¿esta dualidad de "sentido" puede conservarse en esta conversión, que con frecuencia se llama de manera impropia "formalización"? Este no es sólo un problema de orden lingüístico y lógico, sino también un problema que concierne la naturaleza de las representaciones internas en la modelización de las actividades cognitivas.

Es sabido que para resolver el problema de la representación de los conocimientos declarativos en la memoria, las teorías proposicionales han privilegiado la estructura funcional. Es decir, que se trata de pasar del registro de la lengua natural al de una escritura simbólica que traduce los enunciados en proposiciones de estructura funcional. Kintsch fue el primero en proponer procedimientos para efectuar este cambio de registro. Estos procedimientos se basan en una codificación de las palabras según su categoría morfo-sintáctica, sea en términos de relación (o de propiedad), sea en términos de argumentos (Kintsch, 1974, p. 10-11). A partir de este hecho, hay una neutralización de los verbos, puesto que otras palabras además de éstos deben considerarse como términos de relación o de propiedad al mismo título que ellos: los adjetivos, las preposiciones, las conjunciones y los advervios. Queda el caso de los sustantivos. ¿Deberán considerarse como argumentos, es decir, como valores de variables, o deben considerarse como términos de relación o de propiedad? Así, la frase "el viejo hombre sonríe", que sólo comporta una proposición en el registro de la lengua natural, da lugar a representaciones muy diferentes en el registro de la notación proposicional según la solución que se adopte (Anderson, 1976, p. 49):

- dos proposiciones vinculadas por un argumento común:

{viejo, *hombre*}, {sonríe, *hombre*}

- tres proposiciones articuladas en una sola por el conector de la conjunción:

$\exists x$ { (viejo (x)). (hombre (x)). (sonríe (x)) }

En la primera solución, el sustantivo "hombre" es considerado como argumento. En la segunda, es considerado como predicado. Pero, sea que se adopte la primera solución, como Kintsch, o que se adopte la segunda, como Anderson, queda que más allá de una operación de codificación lexical se trata de una operación cognitiva de conversión. En efecto, el recurso a una notación proposicional se hace, en los dos casos, según una segmentación de los enunciados en unidades morfo-sintácticas que provienen sólo del nivel de la lengua. Este recurso ignora aquella otra segmentación, que genera

unidades discursivas, comandada por las diferentes operaciones que, en el discurso, cumplen la función referencial de designación de objetos y la función apofántica de expresión del enunciado. Ahora bien, es esta segmentación la que es esencial a la vez tanto para la articulación de los registros lengua natural y lengua formal, y para la comprensión de los textos en lengua natural (cap. III y VI).

La verdadera pregunta que se plantea desde un punto de vista cognitivo no es la de saber cuál es el modelo proposicional de estructura funcional que puede corresponder mejor al funcionamiento del pensamiento humano, sino más bien *si es un modelo proposicional de estructura remática o, al contrario, de estructura funcional, el que puede aproximarse mejor a este funcionamiento*. Contrariamente a la vía seguida por Schank, los modelos de estructura funcional se han privilegiado en psicología cognitiva, pero sin que conduzcan a resultados suficientemente importantes para resolver los problemas de aprendizaje y adquisición de los conocimientos, o los relativos a tratamientos complejos como la comprensión de textos. Esta es una pregunta que aún permanece abierta.

Desde luego esta pregunta teórica puede ignorarse, o incluso parecer automáticamente resuelta, cuando se queda en el mismo registro de representación o se privilegia, a priori, un registro en relación con otros. Por el contrario, se impone cuando se quiere pasar de una lengua natural a una lengua formal, bien sea para tratar de dar un modelo del funcionamiento de las lenguas naturales (Ducrot, 1972, p. 143-144), o para efectuar en el registro de las lenguas formales tratamientos que en el registro de la lenguas naturales serían demasiado complejos o rápidamente incontrolables. La definición de la continuidad de una función es un ejemplo clásico (ver el capítulo siguiente). La conversión de un enunciado en la lengua natural y su expresión "equivalente" en lengua formal, genera tales problemas que el simple recurso a las reglas de conversión está condenado al fracaso si no hay una comprensión de las formas de expresión de la lengua formal que esté fundamentada en las operaciones discursivas subyacentes. El beneficio de tal comprensión es permitir un mejor dominio del funcionamiento de las formas de expresión en la lengua natural misma, dominio que igualmente se requiere para convertir y comprender un enunciado en lengua formal. Este es un rodeo para el aprendizaje de la lógica, análogo al "rodeo hermenéutico" puesto en evidencia para la interpretación de los textos (Gadamer, 1965, p. 250-254).

LA FUNCIÓN DE EXPANSIÓN DISCURSIVA DE UN ENUNCIADO COMPLETO

Una lengua no sólo debe permitir expresar enunciados completos (unidades apofánticas), sino que también debe permitir vincularlos en la unidad de un recorrido discursivo temáticamente continuo y semánticamente no tautológico: relato, descripción, explicación, comentario, argumentación, deducción, cálculo, etc.

La necesidad de separar esta función discursiva de las precedentes aparece en el marco de las investigaciones cognitivas sobre la comprensión de textos (Duval, 1986, p. 25, 33, 44-48). En efecto, uno de los principales problemas que surge en la comprensión de un discurso es el relacionado con lo que ese discurso explicita y lo que deja implícito. Esta relación a veces puede tomar una forma paradójica: en ocasiones dos frases sucesivas sin conexiones explícitas pueden ser comprendidas de golpe como formando un todo. Así sucede con las dos siguientes frases: "Explotó una pipa de gas. La casa se quemó". La

comprensión de cada una de estas dos frases como la descripción de un hecho diferente, implica que se ha establecido entre ellas una continuidad temática infiriendo una relación de causa - consecuencia entre los dos hechos enunciados (Kintsch, 1978, p. 63). Esta inferencia se apoya en dos tratamientos. El primero es la puesta en correspondencia de dos palabras que pertenecen respectivamente a la primera y la segunda frase ("pipa de gas" y "quemar"), en virtud de su asociación común con la palabra "fuego": esta puesta en correspondencia moviliza la misma red de relaciones semánticas para las dos frases. El segundo tratamiento proviene de la movilización de un conocimiento que puede formularse de diferentes maneras: "la explosión de una pipa de gas provoca la proyección de materias incandescentes", "la explosión de una pipa de gas puede provocar un incendio"... Es esta relación causal entre los dos eventos enunciados por cada una de las dos frases lo que fundamenta la continuidad temática de la descripción. La explicitación de esta relación, muy evidente para ser espontáneamente efectuada, sólo puede tener el status de justificación o de explicación. Pero sin la movilización del conocimiento disparado por las asociaciones comunes a las palabras "pipa de gas" y "quemar", la segunda frase no podría comprenderse como expansión discursiva de la primera. Ante la importancia de las omisiones, las reducciones y los presupuestos del discurso espontáneo en lengua natural, los primeros modelos de comprensión de textos se centraron en el tipo de expansión discursiva en el que el vínculo es un conocimiento evidente que queda implícito. Así, los primeros modelos se construyeron como procedimientos de explicitación de los conocimientos implícitos que hacen las veces de las "bases de los conocimientos" prerrequeridos para comprender la expansión discursiva; estos procedimientos de explicitación se asimilaron a las inferencias de tipo semántico o pragmático (Schank, 1972; Schank & Abelson, 1977; Graesser, 1981).

Tal aproximación a la función de expansión discursiva se basa en una doble restricción. Hace de la inferencia el modelo de toda expansión discursiva y asimila el funcionamiento a la aplicación de reglas implícitas que bastaría explicitar de manera exhaustiva para modelizar la comprensión. Esta concepción desconoce dos cosas. La primera, es que la inferencia no es más que una forma particular de expansión discursiva; no es la inferencia lo que puede dar cuenta de lo que puede tener de diferente la expansión discursiva de una descripción o de un relato con la propia de un razonamiento. La segunda es que los problemas de comprensión de la expansión discursiva no se reducen a una explicitación de los conocimientos implícitos. Los textos que se distancian de un discurso de "práctica oral" (Duval, 1991, p. 172) y en los que las reglas de inferencia están todas dadas explícitamente, con frecuencia resultan ser los que cuya aprehensión y comprensión se manifiestan como más difíciles.

Las operaciones de la función de expansión discursiva

Para determinar las operaciones de expansión discursiva, es necesario partir de la diferencia entre dos modos de progresión del discurso: uno, clásicamente caracterizado como "lógico", y otro descrito como "natural" porque es más espontáneo.

Se puede observar que todo discurso que deliberadamente se restringe sólo a la producción de inferencias, presenta una característica particular: la progresión de las proposiciones, que responden a un orden no modificable, se hace por sustitución del resultado de las nuevas inferencias en las de las proposiciones anteriores. Cuando se ha operado esta sustitución, todo lo anterior puede olvidarse

y no tenerse mas en cuenta en el desarrollo posterior del discurso. Esto quiere decir que una expansión discursiva por inferencia funciona por **sustitución, como en un cálculo** (cap. V, p. 244). La comprensión de un discurso desarrollado según este modo de expansión requiere entonces que *cada vez se perciba la aplicación de la regla utilizada, ya sea que esté indicada explícitamente o que permanezca implícita.*

Evidentemente, no es de esta manera como se hace la progresión del discurso en un relato, en una descripción o incluso en una explicación. En estos diferentes recorridos discursivos las frases se añaden las unas a las otras, porque en éstos, el discurso "determina progresivamente los objetos de que trata"(Grize, 1977, p. 116). Esto quiere decir, que un mismo objeto de discurso (fenómeno, personaje, situación...) puede ser transformado o enriquecido sobre la marcha del discurso (Grize, 1983, p. 217-218). La expansión discursiva se hace aquí por **acumulación** de rasgos e informaciones nuevas, como en la composición de una tabla (Duval, 1986, p. 45-46, 65). La comprensión de un discurso desarrollado según este modo de expansión requiere *una aprehensión sinóptica de todas las frases así como de todas las relaciones que existen entre ellas* (cap. VI, p. 355).

La diferencia entre estos dos modos de expansión discursiva se refleja en la manera como debe considerarse cada unidad apofántica (proposición o frase). En efecto, una unidad apofántica puede considerarse desde el ángulo de su contenido, o desde el ángulo de su status. El **contenido** de una unidad apofántica corresponde a los diferentes aspectos bajo los cuales puede ser identificada: la materialidad de los signos que permiten distinguirla de otra, y por tanto, repetirla, la significación de sus expresiones referenciales y predicativas así como las asociaciones permitidas por la red semántica de la cual provienen, o su eventual valor lógico de verdad. El **status** de una unidad apofántica corresponde al papel que cumple frente a otro enunciado en la organización global de un discurso: premisa, regla, conclusión... Generalmente, este status lo fija el valor epistémico de la unidad apofántica (cap. V. P. 223-224). Este valor epistémico depende del contexto en el cual el discurso se sitúa: puede ser un marco teórico (un corpus de definiciones, de axiomas, de teoremas...), puede ser también un marco social (normas, opiniones, creencias... que comandan los grados de aceptabilidad de un enunciado por un medio o por un grupo).

Cuando la expansión discursiva se hace por sustitución, el paso de un enunciado a otro no depende del contenido de los enunciados, sino del status respectivo de los enunciados: hipótesis dadas, premisas, conclusión intermedia o conclusión buscada, regla se sustitución. Para algunos enunciados, los status son previa y explícitamente fijados al comienzo en función del marco teórico y de las hipótesis que forman los enunciados de partida. Para otros enunciados, el status está determinado por el lugar en que aparecen en el desarrollo del discurso. El funcionamiento de un discurso que progresa por sustitución, se basa enteramente en las diferencias de status entre los enunciados que el discurso organiza. En este tipo de expansión discursiva, el status de un enunciado hace parte pues de lo que comúnmente se llama el "sentido" del enunciado, y esto al mismo título que su contenido.

Por el contrario, cuando la expansión discursiva se hace por acumulación, el paso de un enunciado a otro depende de sus contenidos respectivos: sean expresiones referenciales o sean expresiones predicativas, deben provenir del mismo dominio de objetos o de la misma red semántica. El status de los enunciados casi siempre es olvidado puesto que se supone que todos los enunciados del discurso tienen el mismo valor epistémico y se encuentran relacionados con el mismo sujeto enunciador. Las únicas excepciones son cuando todos los enunciados no son "asumidos" por el sujeto enunciador como en un comentario, o cuando un razonamiento explícito se pone en funcionamiento como en una argumentación. Pero incluso en estos dos casos, la diferencia de status no tiene más que un alcance local en la organización del discurso, y el paso de un

enunciado a otro se fundamenta exclusivamente en las relaciones de contenido y no en las diferencias de status.

Formas asociadas a la función de expansión discursiva

Las formas asociadas a la función de expansión discursiva son las que permiten reconocer en una serie de frases la unidad de un propósito, es decir, un paso de razonamiento, un episodio de un relato, la descripción de un objeto, la justificación de una declaración, y no una sucesión deshilvanada de enunciados "que saltan de un tema a otro". El análisis de las formas de expansión se ha tratado de hacer a través del estudio de la coherencia de los textos; de esta manera, se han puesto de relieve las reglas de coherencia que aseguran la continuidad de un propósito en una sucesión de frases o de proposiciones asertivas. Ahora bien, tales reglas tropiezan con dos tipos de dificultades.

La primer concierne la naturaleza misma de la organización de un texto (cap. VI, p. 332-333). En efecto, para determinar esta organización, la mayoría de las veces son decisivos los criterios cognitivos y no los criterios morfo-sintácticos. Las reglas que permiten pasar de una unidad apofántica a otra y organizarlas en una unidad discursiva coherente de nivel superior (un paso en el razonamiento, un episodio en una narración...), dependen de exigencias propias al recorrido intelectual seguido y de conocimientos particulares al tema tratado. Parece entonces difícil considerar que las reglas de coherencia encontradas en las gramáticas del texto, remitan a un mecanismo general de expansión discursiva, que sería subyacente a recorridos tan diferentes como el de una demostración, un relato, una explicación o una descripción.

El segundo tipo de dificultad es más importante desde el punto de vista cognitivo y didáctico. Las reglas de coherencia y las reglas sintácticas no son reglas de producción discursiva, es decir, reglas de tratamiento que permitan engendrar en un desarrollo discursivo continuo nuevos enunciados a partir de un enunciado dado. Ahora bien, si las lenguas, naturales o formales, pueden funcionar como verdaderos registros de representación, deben comportar tales reglas de tratamiento. ¿Cuáles son éstas?

El asunto sobre la expansión discursiva de un enunciado no debe entonces ligarse con el de la organización de un texto o de un recorrido discursivo específico. Es anterior. Tal asunto concierne las diferentes formas por las cuales una unidad apofántica puede producirse en continuidad discursiva con otra unidad apofántica dada. El principio de una relación de continuidad entre dos unidades apofánticas es muy simple; se basa en la existencia de una similitud entre las dos. En el registro de las lenguas, esta similitud puede determinarse según dos dimensiones: la presencia o ausencia de significantes comunes a las dos unidades, y el rodeo, o no, a través de una tercera unidad apofántica. Así obtenemos las cuatro formas fundamentales posibles de expansión discursiva en el registro de una lengua (tabla 3). Todos los recorridos discursivos utilizan una de estas cuatro formas de expansión. Pero los textos pueden combinar varias formas de expansión, respetando las reglas de coherencia de las gramáticas del texto. Entonces, no se puede pretender un aprendizaje de la producción escrita y de la comprensión de textos sin tomar en consideración un desarrollo de las capacidades de discriminación de estas cuatro formas de expansión discursiva.

En primer lugar, la similitud entre una unidad apofántica inicial y la generada por expansión, se determina en relación con los significantes que constituyen respectivamente a cada una de las dos.

El caso trivial es el de la continuidad por repetición de los mismos signos, de las mismas palabras o de los mismos símbolos de un enunciado a otro. Si se trata de unidades apofánticas en lengua natural, esta repetición, evidentemente, debe basarse en series que correspondan a una

unidad referencial, a una unidad predicativa o a una proposición antecedente. Cuando, así, hay repetición de los mismos significantes de un enunciado a otro, hablaremos de **similitud semiótica**. Pero, evidentemente, el caso interesante es aquel donde no hay repetición. ¿Cómo, entonces, puede haber continuidad entre dos enunciados en ausencia de significantes comunes?

La dualidad sentido/referencia, puesta en evidencia por Frege, constituye un elemento esencial de respuesta a esta pregunta (Frege, 1971, p. 103, 126, 83, 89, 148). Con excepción del caso en provienen sólo de la operación de designación pura, las expresiones referenciales tienen a la vez un sentido (*Sinn*) y una referencia (*Bedeutung, Denoting*). Expresiones diferentes que tienen sentidos diferentes, pueden remitir al mismo objeto:

"la estrella matutina" y "la estrella vespertina"

"32/8", "√16", "4" y "2+2"

En este caso, las expresiones son referencialmente equivalentes. Empleadas respectivamente en enunciados diferentes, tales expresiones establecen *una invarianza referencial entre los dos enunciados*. Así, la invarianza referencial entre dos expresiones diferentes establece una continuidad temática entre las frases que las contienen, mientras que la *diferencia de sentido entre las expresiones referencialmente equivalentes* permite que la segunda frase constituya un progreso discursivo en relación con la primera. Hablaremos en este caso de **similitud semántica**[12].

Frege asoció esta dualidad de las expresiones a la operación de sustitución: dos expresiones referencialmente equivalentes pueden sustituirse una a la otra *salva veritate.* Esta asociación ha sido una fuente de confusiones que ha conducido a relativisar la importancia de la dualidad sentido/referencia para la función de expansión discursiva en un empleo común de las lenguas naturales. La operación de sustitución requiere, en efecto, una invarianza referencial estricta. Ahora bien, en el empleo común de la lengua natural no tenemos una invarianza referencial estricta como en las lenguas "lógico-matemáticas", o como en el empleo especializado de la lengua natural. Más generalmente, para los objetos complejos que trata el discurso ordinario, la referencia puede, de una proposición a otra, o bien deslizarse a una de sus partes constitutivas o bien a otros objetos que les están estrechamente asociados (Grize, 1983, p. 110-111). En consecuencia, sustituir una a otra dos expresiones que tienen la misma referencia y sentidos diferentes, es una operación que no siempre se efectúa *salva veritate* (Ducrot, 1972, p. 222-224 y capítulo 2). Sin embargo, se puede conservar una referencia común, o temática, sin que haya habido ninguna unidad entre los enunciados relacionados. En este caso, la referencia no remite sólo al objeto mismo sino a la red semántica que ese objeto polariza. Es en este tipo de referencia global que se apoya la expansión discursiva por acumulación.

La similitud semiótica y la similitud semántica no siempre bastan para asegurar la continuidad de discurso. Debe tomarse en consideración una segunda dimensión: la necesidad o no de recurrir a un tercer enunciado.

---

[12] Es importante recordar que la distinción fregueana tuvo como propósito explicar la continuidad y la coherencia temáticas de un discurso no tautológico. La cuestión sobre la referencia no es una cuestión interna a un enunciado considerado aisladamente, sino que alude a **la posibilidad de una continuidad discursiva entre dos enunciados.** Además, no se basa en una expresión referencial sino en la relación que existe entre dos expresiones referenciales empleadas en dos enunciados diferentes. **La cuestión sobre la existencia o no de lo que es designado en una expresión referencial, es otra pregunta completamente distinta.** De una parte, no concierne más que el valor de verdad de cada enunciado tomado aisladamente. De otra, alude a una elucidación del criterio de "existencia": ¿accesibilidad independientemente de toda representación semiótica, o invarianza referencial cuando un objeto no es accesible independientemente de una representación semiótica, como es el caso para los objetos matemáticos? (Duval, 1993, p. 37-38).

El caso trivial, evidentemente, es cuando es directo el paso del enunciado inicial al expandido, es decir, cuando no se requiere del rodeo por un tercer enunciado, cuando el solo reconocimiento del léxico de base de la lengua utilizada es suficiente para reconocer una similitud semiótica o una similitud semántica entre los dos enunciados; cuando no se requiere ningún conocimiento de definiciones, de principios, de leyes o de datos específicos a un dominio. Hablaremos entonces de **similitud interna** entre los dos enunciados.

El caso interesante es cuando el paso es indirecto, es decir, cuando se requiere el rodeo, explícito o implícito, por un tercer enunciado. Para que un enunciado pueda establecer una continuidad discursiva entre dos enunciados debe cumplir dos condiciones. De una parte, tener una similitud semiótica o una similitud semántica con cada uno de los dos enunciados que vincula. De otra parte, tener un status teórico o social para quien produce el discurso, o para su destinatario. Hablaremos en este caso de **similitud externa** de los enunciados. La expansión deductiva a través de reglas de sustitución y del *modus ponens*, o por aplicación de teoremas o de definiciones, son de este tipo. Igualmente, las expansiones exigen una inferencia como en el ejemplo de Kintsch analizado antes.

No hay expansión discursiva de un enunciado que no se base en la combinación de una similitud semiótica o semántica y de una similitud interna o externa. Obtenemos así las cuatro formas de expansión discursivas posibles en el registro de una lengua.

Tabla 3

Las cuatro formas de expansión discursiva de una expresión

Mecanismos de expansión	***Similitud interna*** (continuidad sin tercer enunciado)	***Similitud externa*** (continuidad con tercer enunciado)
Similitud semiótica (se recuperan algunos significantes)	Expansión **LEXICAL** (recuperación plurívoca de una misma unidad lexical, bajo un modo fonético-auditivo o gráfico-visual) ***Asociaciones verbales, ocurrencias,*** ***"lenguaje del inconsciente"***	Expansión **FORMAL** (recurso exclusivo a los símbolos: notaciones, escritura algebraica,...) ***Razonamiento deductivo*** (proposición de estructura funcional) ***Cálculo proposicional, cálculo de predicados,...***
Similitud semántica Ley de Frege: significantes diferentes y mismo objeto. (Invarianza referencial estricta o global)	Expansión **NATURAL** (es suficiente con el conocimiento de la lengua corriente) ***Descripción, Narración*** ***Argumentación retórica*** ***Silogismo aristotélico*** (proposición de estructura remática predicativa) ***razonamiento por el absurdo***	Expansión **COGNITIVA** (exige el conocimiento de definiciones, reglas o leyes para un dominio de objetos) ***Explicación*** ***Razonamiento Deductivo*** (proposición de estructura remática condicional) ***razonamiento por el absurdo***

Se puede observar en esta tabla que las formas de expansión discursiva se oponen de dos en dos (las situadas en los recuadros diagonales) y caracterizan tipos de discursos sin que tengan ningún punto común entre ellos.

La **expansión lexical** se basa en el principio de una recuperación **plurívoca de lo que aparece como una misma unidad lexical,** sea bajo un modo fonético-acústico o uno gráfico-visual. Es la

recuperación de un mismo significante, por identificación homofónica u homográfica, lo que asegura la continuidad y la cohesión del discurso de una frase a otra.

Cuatro y cuatro ocho
Ocho y ocho ***son dieciséis***
Y dieciséis y dieciséis cuánto ***son?***
No ***son*** **nada** dieciséis
Y sobretodo no treinta y dos...
Y ellos van
Y uno y uno **no *son* ni uno ni dos**
Uno y uno van igualmente
De dos cosas ***luna***
La otra es el *sol*

Prévert, *Paroles,* p. 174, 105

Esta forma de expansión discursiva es extremadamente importante. Refleja el trabajo asociativo inconsciente que subyace a la producción de las representaciones mentales. Freud fue el primero en identificar esta expansión en tanto mecanismo de expansión discursiva autónomo, en el cual fundamentó un procedimiento de interpretación de las manifestaciones del inconsciente en los sueños, los lapsus, los chistes... (Freud, 1967, 1988; Lacan, 1975). El "lenguaje del inconsciente" se basa por entero y exclusivamente en este mecanismo de expansión lexical.

La **expansión formal** se caracteriza por la **aplicación de reglas de sustitución que se basan exclusivamente en símbolos** que representan variables o proposiciones, independientemente de su significación. Estas reglas permiten obtener una nueva aserción, por sustitución de símbolos en una aserción de partida. El texto de demostración que se presenta enseguida es un ejemplo muy simple de esta forma de expansión discursiva.

Tabla 4

Expansión formal: ejemplo de demostración en el sistema axiomático de Hilbert-Axkermann para el cálculo proposicional (Lukasiewicz, 1963, p. 31)

Escritura polaca: C símbolo de la implicación A símbolo de la disyunción N símbolo de la negación	Escritura clásica: $\Rightarrow$ símbolo de implicación $\vee$ símbolo de disyunción - símbolo de negación	Comentarios
1. CCpqCArpArq	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((r \vee p) \Rightarrow (r \vee q))$	4º axioma del sistema
2. CCpqCA**N**rpA**N**rq	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((\bar{r} \vee p) \Rightarrow (\bar{r} \vee q))$	Sustitución de Nr por r en 1
3. Cpq = Anpq	$(p \Rightarrow q) = (\bar{p} \vee q)$	Definición del sistema
4. Crq = An**r**q	$(r \Rightarrow q) = (\bar{r} \vee q)$	Sustitución de r por p en 3
5. Crp = Anr**p**	$(r \Rightarrow p) = (\bar{r} \vee p)$	Sustitución de p por q en 4
6. CcpqC**Crp**ANrq	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((r \Rightarrow p) \Rightarrow (\bar{r} \vee q))$	Sustitución de Crp por Anrp en 2, en virtud de 5 (utilizado como tercer enunciado)
7. CCpqCCrp**Crq** **(proposición demostrada)**	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \Rightarrow p) \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$	Sustitución de Crq por Anrq en 6 en virtud de 4 (tercer enunciado)

La **expansión cognitiva** se caracteriza por un **empleo especializado de la lengua natural.** El léxico asociativo utilizado se neutraliza gracias a que no expresa más que las significaciones

establecidas por las definiciones, por los enunciados de resultados de demostraciones (por ejemplo, los textos de demostración en geometría, cap. V, fig. 15, 17), o por observaciones, experiencias, etc. El léxico asociativo se encuentra entonces canalizado en una terminología restringida a un dominio de conocimiento. Esta forma de expansión discursiva puede recubrir también descripciones, explicaciones técnicas o teóricas además de las demostraciones. En lo que concierne a las demostraciones, la diferencia con la forma de expansión formal está en el hecho de que las reglas de sustitución que se basan sólo en la forma del símbolo ya no son pertinentes.

La **expansión natural** se caracteriza por el **empleo común de la lengua**. Moviliza simultáneamente la red semántica de una lengua natural y los conocimientos pragmáticos propios al medio sociocultural de los locutores. El ejemplo de Kintsch que analizamos atrás, "una pipa de gas explotó. La casa se quemó", es un ejemplo de expansión natural. Es sobretodo esta forma de expansión la que ha sido estudiada por los gramáticos de los textos que han tratado de analizar las reglas de coherencia del discurso.

Estas cuatro formas de expansión discursivas son formas puras. La mayoría de los textos las combinan. Es sólo en el empleo especializado o en el empleo literario de una lengua que se puede encontrar el recurso exclusivo a una expansión lexical, cognitiva o formal. Entonces, se comprende la importancia de considerar estas formas radicalmente diferentes de expansión discursiva para la enseñanza del francés y de las matemáticas.

LA FUNCIÓN DE REFLEXIVIDAD

Una lengua también debe permitir situar un enunciado en relación con otros enunciados, según el empeño que el locutor ponga en lo que enuncia o incluso en la relación que quiere establecer con el interlocutor. Esto quiere decir que una lengua debe permitir explicitar en el enunciado mismo la manera como el locutor emplea la lengua para decir lo que quiere decir. Este vínculo entre el acto intencional de producción de un enunciado y sus condiciones de interpretación, por lo general es designado como "enunciación". Esta función requiere, pues, la posibilidad de hacer aparecer en un enunciado las marcas de su enunciación (Ducrot & Todorov, 1972, p. 405-406; Ducrot, 1980, p. 33-38; Granger, 1979, p. 172-174). Como indicaciones de esta naturaleza juegan un papel esencial en la comunicación, esta función inicialmente se identificó como función de comunicación y por largo tiempo fue estudiada como tal en el marco de investigaciones sobre la pragmática. Tomando como referencia a Austin, Granger la designó como "el elemento ilocutorio de una lengua" (Granger, 1979, p. 170-172). Pero de hecho, no es sólo en relación con las situaciones de comunicación social que las marcas que explicitan la enunciación son importantes; también lo son en relación con las formas de discurso con finalidades estrictamente científicas. Es por esta razón por la cual nosotros preferimos hablar de esta función como función de reflexividad. Al describirla como una polioperación de "prise en charge par le locuteur", Grize, por lo demás, va en este sentido (Grize, 1983, p. 123-130). Al hablar de una función de "reflexividad" más que de una función "ilocutoria", queremos llamar la atención sobre una diferencia que con mucha frecuencia se ignora: aquella que separa el acto de habla realizado y la explicitación lingüística del acto de habla realizado. Sean, por ejemplo, los siguientes enunciados:

(1) Voy a hacer lo que tu me solicites
(2) *Prometo* hacer lo que tu me solicites
(3) Va a llover
(4) *Creo* que va a llover
(5) *Estoy seguro que* va a llover
(6) Por un punto exterior a una recta dada pasa una y solo una paralela

(7) *Se admitirá que* por un punto exterior a una recta dada pasa una y solo una paralela

Los enunciados (1) y (2) se comprenden como promesas. Sin embargo, no se puede afirmar que el empleo del semi-auxiliar "ir" es en (1) la marca explícita de una promesa, pues su ocurrencia en (3) no es una promesa.

Los enunciados (3) y (6) pueden recibirse como aserciones, pero igualmente como la expresión de una opinión, de una certeza o de una convención, etc. En efecto, ninguna expresión marca su valor ilocutorio o su valor epistémico como sí ocurre, por el contrario, en (2), (4), (5) y (7). Solamente el contexto de ocurrencia es lo que permite decidir el valor epistémico de (3) y de (6).

En los enunciados (1), (3) y (6), el acto de habla no está explícitamente marcado. En este caso se habla, por lo general, de "elemento ilocutorio tomado en su grado cero" o de "distancia cero" o de "desaparición" [*effacement*](Granger, 1979, p. 83; Grize, 1983, p. 130, 124). ¿Es necesario considerar estos enunciados como formas secundarias en relación con aquellos en los que los elementos ilocutorios están explícitamente marcados como en (4), (5) y (7), y minimizar así la diferencia que separa los primeros de los segundos? Esta interpretación podría ser suficiente si el discurso no cumpliera más que una función meta-discursiva de comunicación! Ahora bien, cumple también una función metadiscursiva de tratamiento como con evidencia lo muestran todos los discurso de tipo razonamiento. Estos dos tipos de enunciados remiten a funciones discursivas diferentes.

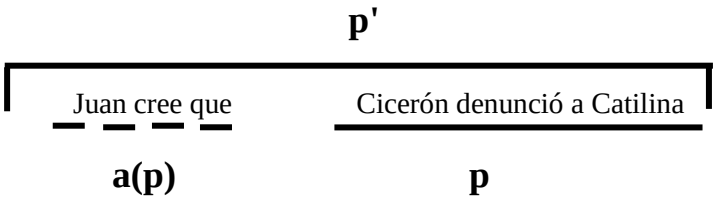
La diferencia entre el carácter implícito de un acto de habla y su marcación explícita es una diferencia esencial. Debido a que un enunciado depende de un acto de predicación o de un acto ilocutorio, tiene un valor social, epistémico o lógico no explicitado. Explicitar uno de los valores de un enunciado, es integrar este enunciado en un nuevo enunciado que declara este valor y que lo fija. Esta explicitación da la posibilidad de modificar el valor del enunciado inicial y por tanto de modificar el sentido de ese enunciado. Así, el valor del enunciado (6) puede estar explicitado por "se admitirá que..." como en el enunciado (7), o por "es evidente que..." o por "es verdad que...". Cada una de estas explicitaciones da un valor epistémico y, en consecuencia, un sentido diferente al enunciado (6). Esta variación es esencial para comprender el funcionamiento del razonamiento de la argumentación. Esta explicitación juega también un papel esencial, aunque diferente, en el razonamiento deductivo (Duval, 1991b, p. 252). Además, esta explicitación de valores cumple una función de reflexividad discursiva en relación con los enunciados producidos. *Es pues importante distinguir dos funciones discursivas diferentes: de un lado, el acto ilocutorio que confiere implícitamente a un enunciado un valor epistémico, y del otro, la explicitación de este valor.*

Operaciones y formas asociadas a la función de reflexividad discursiva

Esencialmente, éstas son proposiciones construidas alrededor de verbos que expresan una "actitud proposicional" (Russell, 1969, p. 186), o verbos cuya enunciación cumple el acto enunciado ("performativos"). Por lo general, tales proposiciones no son completas por sí mismas: apelan a otra proposición que expresa el contenido de la actitud proposicional o del acto ilocutorio.

Una particularidad importante de estas proposiciones es que *ponen en jaque el principio de extensionalidad,* según el cual el valor de verdad de una función depende únicamente del valor de sus argumentos y de que un conjunto con cambie por el cambio de designación de uno de sus elementos (Carnap, 1975, p. 47-48). Esto acarrea por importantes consecuencias. La primera es que

no pueden tener funciones de verdad.[13]. Su valor lógico es totalmente independiente del valor lógico de la proposición que la completa: la verdad del enunciado "Juan cree que a" es independiente del hecho que a sea verdadero o sea falso. La segunda es que son *"referencialmente opacas"* (Quine, 1977, p. 208-218). Su valor lógico puede cambiar por la sustitución de expresiones referenciales equivalentes en la proposición que completa, sustitución que no modifica el valor lógico de esta completación [*complètive*]: "Juan cree que Cicerón denunció a Catilina" puede ser un enunciado verdadero y "Juan cree que Tullius denunció a Catilina" puede ser un enunciado falso, cuando "Cicerón" y "Tullius" designan la misma persona. Llamando "p'" la proposición "Juan cree que Cicerón denunció a Catilina" y "p" la proposición "Cicerón denunció a Catilina", el análisis puede resumirse de la siguiente manera:



- La verdad de **p'** no depende de la verdad de **p**: **a(p)** no es una función de verdad
- Una sustitución referencial equivalente en p ("Tullius" en lugar de "Cicerón") deja la verdad de **p** sin modificación, pero puede cambiar el valor de verdad de **p'**: hay una opacidad referencial en **p'** que resulta de **a(p).**

Esto quiere decir que: *el encaje de una proposición p en una expresión de actitud proposicional a(p) tiene como efecto neutralizar el valor lógico de verdad de esta proposición p.* Y como las expresiones de actitud proposicional explicitan el valor epistémico de una proposición, esto quiere decir además que la explicitación de un valor epistémico de una proposición pasa al primer plano en relación con el valor de verdad que por otro lado le pueda ser atribuida. Naturalmente, si la expresión explicita uno de los dos valores lógicos de verdad, no neutraliza el valor de verdad de la proposición encajada. Una proposición verdadera p, sigue siendo verdadera tanto cuando es encajada en la expresión "es verdad que..." como en su simple aserción "p". Aquí, la explicitación es la del acto ilocutorio de aserción. Frege propuso un símbolo para marcar este acto (Frege, 1967, p. 12).

Esta prioridad del valor epistémico de una proposición sobre su valor lógico de verdad, es un resultado fundamental desde un estricto punto de vista cognitivo. En primer lugar muestra la necesidad de distinguir el valor epistémico de una proposición y su valor lógico de verdad: estos son dos tipos de valor que ingresan en el "sentido" de una proposición pero que no provienen de la misma dimensión. Después, es sólo esta prioridad la que permite comprender la especificidad del razonamiento en relación con todo otro recorrido discursivo e igualmente permite explicar cómo el razonamiento puede ser un recorrido de prueba y de modificación de la convicción (cap. V, p. 219-230).

[13] Sin embargo, Hintikka (1962) hizo el primer ensayo para desarrollar un cálculo de los valores epistémicos, basándose en los valores marcados por los verbos de actitudes proposicionales "yo sé que..." y "yo creo que...". Otros también han realizado estos intentos con otros valores epistémicos (Lenzen, 1980)

CAPÍTULO III
LENGUAJE NATURAL Y LENGUAJE FORMAL

> Al intentar reducir todo a una cadena deductiva desprovista de lagunas... tropecé con el obstáculo de la insuficiencia de la lengua... Tal fue la dificultad de la cual surgió la idea de la presente escritura conceptual.
>
> FREGE, *Begriffschrift.*

La escritura simbólica utilizada en lógica, cuya creación fue preparada por la escritura conceptual de Frege, comporta cuatro tipos de unidades elementales: las letras con función proposicional, los símbolos con función de cuantificadores, las letras con función de variables (ligadas o libres) y los símbolos con función de operadores o de conectivos proposicionales. Ciertamente, todas estas unidades no pertenecen a los mismos dominios de cálculo. El cálculo proposicional es independiente del cálculo de los predicados y sólo requiere símbolos con función de conectivos y letras para las proposiciones. Entonces, la escritura propia al cálculo proposicional podría considerarse suficiente, pero sólo cumple dos funciones discursivas: la función apofántica y la función de expansión discursiva. Para que este registro cumpla también una función referencial, es necesario recurrir además a un sistema de notación del tipo utilizado en el cálculo de predicados. Se obtiene así una escritura que al permitir cumplir tres funciones discursivas, puede ya ser considerada como una lengua. Con estas tres funciones, en efecto, es posible expresar, desarrollar o controlar conocimientos. Además, es a título de tal que la escritura que combina conectivos proposicionales, predicados, variables y cuantificadores es utilizada en matemáticas o incluso en lingüística (Ducrot, 1972, p. 143-144). Esta representa el prototipo de las lenguas formales[14].

Sin embargo, aunque una lengua formal pueda cumplir las mismas funciones discursivas que una lengua natural, su estructura no presenta ninguna semejanza con la de las lenguas naturales.

Como hemos visto, una lengua formal no tiene léxico, sistemático o asociativo, para cumplir la función referencial. No tiene listas de símbolos que nombren predicados primitivos, a partir de los cuales todos los otros predicados podrían ser nombrados por combinación o por asociación. Por tanto, es imposible designar individualmente objetos por categorización, por descripción o incluso por construcción semiótica (como con la escritura posicional para los enteros naturales). Si en matemáticas o en otro dominio de conocimientos quiere emplearse una lengua formal, ésta debe completarse con un simbolismo "característico" o con un léxico sistemático.

Igualmente hemos visto la heterogeneidad entre la estructura remática y la estructura funcional de una proposición. Esta heterogeneidad resulta notoria por el hecho de que, en una lengua formal, la función apofántica parece poder cumplirse simplemente a través del empleo de lo que se han llamado "conectivos proposicionales", los cuales de manera traicionera se han puesto en

---

[14] Se pueden concebir lenguas formales más complejas introduciendo, por ejemplo, operadores como la τ de Hilbert, o un signo que marque la identidad entre las variables (Quine, 1950, p. 238). Pero si esto ofrece nuevas posibilidades en el registro formal porque permite tomar en consideración algunos presupuestos de mejor manera que en la lengua natural (existencia y unicidad), no modifica el problema de la articulación entre los dos registros como el que aparece con el cálculo de los predicados y de las proposiciones.

correspondencia con las conjunciones de la lengua natural, cuando éstas son "funciones de verdad". Los conectivos proposicionales no articulan el contenido de las proposiciones que combinan; sólo designan una de las diferentes particiones del conjunto de parejas de valores de verdad de las proposiciones. Por tanto, deben ser leídos paradigmáticamente, es decir, como una lista de casos aceptados y de casos excluidos, y no sintagmáticamente como palabras en una frase.

Por último, una lengua formal sólo admite la sustitución como modo de expansión discursiva, y no la acumulación como las lenguas naturales.

Se ven entonces los obstáculos inherentes al pasaje de un registro de lengua a otro dados por cada una de las tres funciones discursivas. El obstáculo más serio, evidentemente, es relativo a las funciones referenciales y apofánticas, ya que la función de expansión recubre los tratamientos internos a cada registro. En estas condiciones, ¿cómo convertir la expresión de un enunciado de la lengua natural en una expresión "equivalente" de la lengua formal? Al mirar la autonomía de los tratamientos propios a cada uno de estos dos registros, esta pregunta, evidentemente, puede parecer poco interesante. Pero no ocurre lo mismo cuando uno se ubica en el contexto de la enseñanza de la lógica, o en el de una interpretación de las expresiones y de los tratamientos efectuados en un registro en relación con el otro. En estos dos contextos no se puede escapar a la necesidad de una articulación de dos registros sea para superar el obstáculo de confusiones que enturbian la aproximación a la lengua formal, o bien para dar "sentido" o para controlar el alcance de los tratamientos efectuados en uno de los dos registros.

Los obstáculos inherentes a esta articulación son los que vamos a examinar en este capítulo, principalmente los relacionados con la función referencial. Las dificultades relativas al empleo de los conectivos proposicionales han dado lugar a muchos estudios; nos contentaremos con mostrar por qué su aprendizaje debe hacerse en una articulación con un registro diferente al de la lengua natural.

FORMAS ASOCIADAS A LAS FUNCIONES REFERENCIAL Y APOFÁNTICA EN UNA LENGUA FORMAL

En la ausencia intrínseca de léxico, la única operación posible directamente ligada a la función referencial es la de designación pura, es decir, el empleo arbitrario de caracteres para los predicados. Evidentemente, esta operación no es suficiente. La ausencia de las operaciones de categorización y de descripción en las lenguas formales se suple recurriendo a la operación de predicación, es decir, con el empleo de cuantificadores que ligan las variables de los lugares libres del predicado. Dicho de otra manera, *la función referencial en una lengua formal se cumple haciendo un rodeo por la función apofántica*. Y aquello que la lengua formal sea, o no sea, se enriquece con la adjunción de un léxico sistemático. Esta subordinación de la función referencial a la función apofántica provoca dos tipos de serias dificultades. De un lado, hace no congruente la conversión de un enunciado en lengua natural en un enunciado en lengua formal. De otro, hace más compleja la comprensión de un enunciado en lengua formal puesto que las formas de expresión referencial son iguales a las que están asociadas a la función apofántica!

Las formas de expresión que corresponden a la función apofántica presentan una estructura de función proposicional y son muy pocas. Se puede hacer una enumeración exhaustiva partiendo del elemento con base en el cual se organizan todas las variaciones de forma apofántica: el predicado. Las variaciones importantes son:

- la presencia de un único predicado, o el de varios ligados entre sí por conectivos de manera que constituyan sólo una unidad apofántica,
- el número de lugares libres del predicado,
- la presencia o ausencia de cuantificadores, cuando sólo hay una ocurrencia de un predicado,
- la ocurrencia de los mismos argumentos o de argumentos diferentes, cuando hay dos ocurrencias de predicado en un lugar.

Las combinación de estas diferentes variaciones nos permite tener siete formas apofánticas de base, como se puede ver en la tabla de abajo (fig. 1). Naturalmente, las expresiones con variables libres no son tomadas en cuenta puesto que no pueden ser asociadas a la función apofántica. Las formas de expresión en las cuales un conectivo vincula un predicado con un lugar y un predicado con dos lugares, pueden ser reducidas a las de la reunión de dos predicados en dos lugares. Por último, un cambio de conectivo no modifica el tipo de estructura funcional de la forma de expresión.

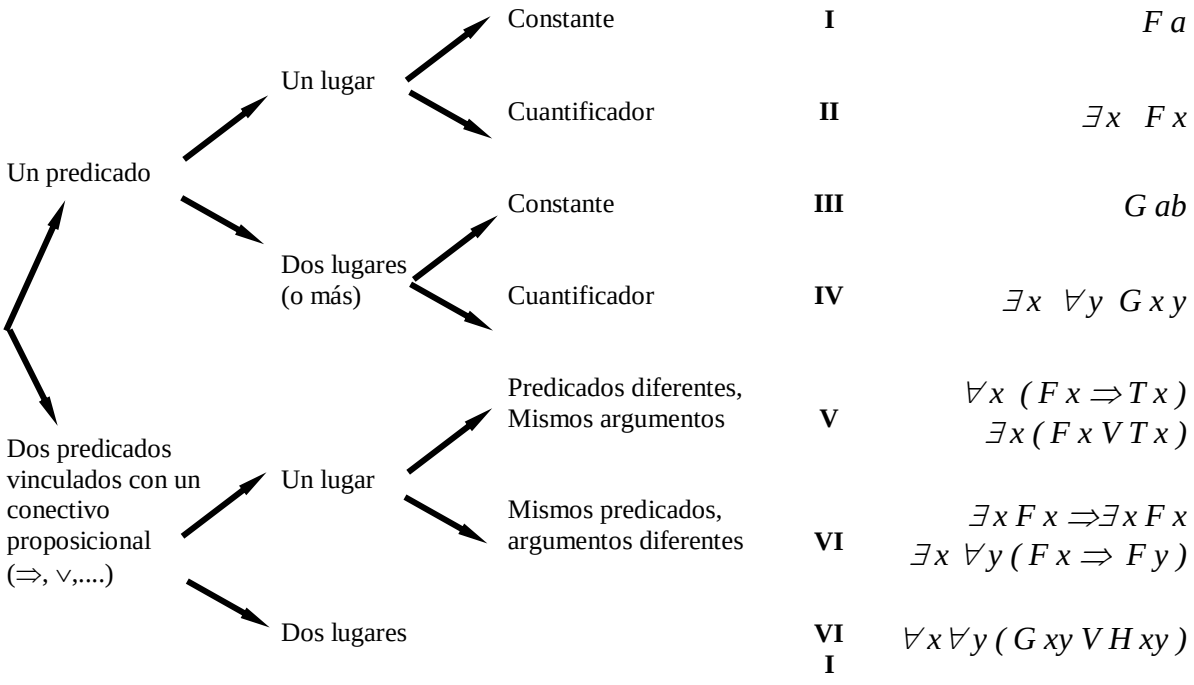


Figura 1. Las formas apofánticas funcionales de base.

Las expresiones referenciales y apofánticas de la lengua natural sólo pueden ser traducidas en lengua formal con la ayuda de una de las siete formas de base, o de una de sus combinaciones. La puesta en correspondencia de estas formas de base con las expresiones de lengua natural genera delicados problemas no sólo en razón de la gran variedad de formas de expresiones referenciales y apofánticas de la lengua natural, sino también en razón de sus diferencias posibles de sentido a pesar de sus similitudes de forma. En efecto, en la lengua natural podemos tener enunciados rem̀aticos cuya organización interna parece similar a la de las formas de base de estructura funcional, como en la lista que sigue:

(1) Luis XIV es calvo.
(2) El rey de Francia es calvo (Russel, 1905, p. 483).

(3) Romeo ama a Julieta.
(4) Hay alguien a quien todo el mundo ama (kleene, 1967, p. 82)
(5) Hay un cuadro que todos los críticos admiran (Quine, 1950, p. 150)
(6) Todos los que trazan un círculo trazan una figura (Quine, 1950. p. 150)

Si queremos convertir estos enunciados en lengua formal podemos hacer dos constataciones:

- Enunciados similares como (1) y (2) o como (4) y (5) no pueden expresarse con formas que provengan de las mismas formas apofánticas de base,
- Para algunos de estos enunciados es posible establecer una correspondencia término a término entre los elementos de la expresión en lengua natural con los de la expresión en lengua formal. Para otros, al contrario, esto no es posible. El pasaje de la expresión en un registro a la expresión correspondiente en el otro registro, requiere de un rodeo por una representación intermediaria.

Estas constataciones muestran la importancia de los obstáculos que hay que sobrepasar para *llegar a una claridad cognitiva de dos registros de lengua*. Quizá estos obstáculos aparecen de manera más obvia en el sentido lengua natural $\rightarrow$ lengua formal. Cuando las formas de los enunciados en lengua natural son próximas, no hay índices claros o estables para determinar con cuáles formas de expresión se pueden hacer en lengua formal. Y si resulta necesario el rodeo por una representación intermediaria, no hay procedimiento para construirla. El pasaje en sentido inverso con frecuencia es considerado más fácil, pero veremos que en la mayoría de los casos esto es ficticio ya que consiste en una mezcla inoperante de dos registros.

¿Verdaderamente se puede poner en relación la variación de las formas apofánticas de base en lengua formal con la variación de las formas referenciales y apofánticas en lengua natural? La posibilidad de una claridad cognitiva de los dos registros de representación depende de la respuesta a esta pregunta. Ahora bien, sin una claridad cognitiva de los dos registros, el aprendizaje de la lógica tiene poca oportunidad de ser exitoso y, en todo caso, se revelará de poco interés para los otros aprendizajes en matemáticas o en castellano.

Para que sea posible poner en relación las formas de expresión en los dos registros, es necesario partir de nuevo del elemento común a todas las formas apofánticas de base en lengua formal, el predicado. Entonces, el primer problema para resolver es el siguiente: ¿con cuál(es) elemento(s) de una unidad apofántica de lengua natural, es decir, cual "parte del discurso" o con cuál categoría de palabras en una frase, puede ser puesto en correspondencia un predicado?

De una parte, los adjetivos y los sustantivos en posición de atributo y, de otra, los verbos que significan una relación, corresponden, respectivamente y de manera congruente, a los predicados en un lugar y a los predicados en dos (o tres) lugares. Se tiene aquí la primera regla de codificación lexical que no genera ninguna dificultad. Parecería entonces coherente considerar a los sustantivos en posición referencial y los que son complemento de un verbo de relación, como argumentos: deberían entonces ser codificados con una letra constante o, en rigor, con un cuantificador que compromete una variable (definida sobre un conjunto de individuos). Por lo demás, esta es la solución adoptada por Kintsch cuando quiso representar los textos en lengua natural con sólo la ayuda de la anotación del cálculo de predicados, para modelizar el proceso de la comprensión de textos (Kintsch, 1972, p. 254-255; 1974, p. 10-11; 1978, p. 58; Kintsch & van Dijk, 1978). Ahora bien, esta solución debe descartarse en la perspectiva de una articulación entre registros, en razón

misma de la ausencia de un léxico asociativo o sistemático en las lenguas formales. En efecto, al no poderse cumplir la función referencial más que a través de un rodeo por la función apofántica, por lo general los sustantivos se ponen en correspondencia con los predicados. Esta segunda regla de codificación lexical se impone cuando se quiere poner en relación enunciados en lengua natural con proposiciones en lengua formal. *Pero esta segunda regla introduce un factor importante de no-congruencia entre las expresiones de los dos registros: un sustantivo acompañado de un determinante, va a ser traducido como una proposición de existencia*.

El pasaje de un registro a otro comienza con la aplicación de estas dos reglas de codificación lexical. La simple aplicación de estas reglas iniciales permiten ya clasificar los enunciados en lengua natural en dos grupos: aquellos cuya conversión sólo requiere la aplicación de la primera regla y aquellos cuya conversión requiere también la aplicación de la segunda regla.

Se puede entonces constatar que la sola aplicación de las dos reglas orienta hacia formas apofánticas de base muy diferentes en lengua formal, los enunciados muy próximos en lengua natural. Vamos a ver, por ejemplo, que la aplicación de estas reglas hace corresponder respectivamente a los enunciados (1) y (2) formas de base I y V de la figura 1. Vamos ahora a analizar esta no-congruencia que resulta de la aplicación de las reglas de codificación lexical, a priori tan simple la primera como la segunda.

ELECCIÓN DE LAS CORRESPONDENCIAS INICIALES ENTRE LENGUA NATURAL Y LENGUA FORMAL

Congruencia de la primera regla

La primera regla es suficiente para convertir enunciados que sólo comportan nombres propios y un solo verbo. Es el caso de los enunciados (1) y (3). El verbo "amar" corresponde a la función proposicional "... ama ...": "Romeo ama a Julieta", "Julieta ama a Romeo"... Transcribiéndolo con la letra de predicado A, y dando a las letras r y j el status de "variables libres mantenidas constantes" (Kleene, 1967, p. 111), obtenemos las siguientes unidades apofánticas (forma de base III):

$$\text{Romeo ama a Julieta} \rightarrow (Arj)$$

$$\text{Julieta ama a Romeo} \rightarrow (Ajr)$$

$$\text{Romeo y Julieta se aman} \rightarrow \{(Arj).\ (Ajr)\}$$

En todos estos casos el cambio de registro es trivial y se puede hablar de congruencia entre el registro de la lengua natural y la escritura formal. No solo hay correspondencia término a término entre los elementos de las dos formas de expresión respectivas, sino que el orden de las constantes corresponde al orden de los nombres. Y aunque constituye un cambio de forma de base, el recurso al conectivo proposicional para convertir el tercer enunciado se da de manera natural en el contexto de los dos enunciados precedentes.

La congruencia de esta primera regla se explica por el hecho de que sólo toma en cuenta, en cada uno de los dos registros, los elementos pertinentes para la operación de predicación. Y esta operación es común a los dos registros (cap. II, tabla 2, p. 114).

La no-congruencia inducida por la segunda regla

Se conoce que la elección de convertir en proposición de existencia los sustantivos "actualizados" por un determinante (Ducrot, 1972, p. 230), o por un complemento determinativo como en una descripción definida o indefinida, se remonta a Russell. El problema entonces es saber si los enunciados cuyas expresiones referenciales no designan ningún objeto existen como falsos o simplemente absurdos, es decir, si tienen un valor de verdad o si sólo tienen un valor epistémico sin tener valor de verdad. Frege sostenía que los enunciados declarativos cuyas expresiones en posición referencial no designan ningún objeto, existen como absurdos. Ahora bien, la trampa de una tesis tal es que conduce a mezclar los enunciados verosímiles pero falsos con los enunciados absurdos. Esto equivale a rechazar el valor epistémico "verosímil", y en consecuencia, a reducir lo posible no realizado a lo imposible. Para evitar estas consecuencias paradójicas, Russell propuso convertir las expresiones referenciales en proposiciones de existencia (Russell, 1905, p. 483-484). Un enunciado atributivo como el enunciado (2) entonces es convertido en una proposición de existencia con un predicado constituido por la coordinación de dos predicados (Russell, 1905, p. 490). Así, transcribiendo la descripción "rey de Francia" con R y "ser calvo" con C, obtenemos la siguiente forma apofántica (forma de base o tipo V de la figura 1) para el enunciado (2):

$$(2')\ \exists x\ \{ R\,x\,.\,C\,x\}$$

Esta transcripción (2') tiene la ventaja de mostrar que el enunciado (2) es simplemente falso. Ahora bien, inmediatamente se pueden observar dos cosas.

En primer lugar, la conversión de un sustantivo en predicado provoca recurrir automáticamente a variables vinculadas por un cuantificador, excluyendo recurrir a constantes. La expresión en posición referencial en el enunciado (2) no se puede traducir con una forma de tipo I (como el enunciado (1) que se transcribe *Ca* (1'), *a* designando a Luis XIV) o de tipo III (como el enunciado (4)), sino sólo con una forma de II o IV. Se ve entonces la diferencia de naturaleza entre la conversión de un sustantivo al cual se hace corresponder una unidad apofántica y la conversión de un verbo o de un adjetivo a los cuales se hace corresponder una letra de predicado.

En segundo lugar, la forma de tipo II ($\exists x\ Rx$) no debe ser traducida en lengua natural con un enunciado de existencia, sino con un sustantivo actualizado o con una descripción definida. De hecho, es igualmente difícil hacer corresponder un enunciado en lengua natural a una expresión de tipo II. *Las lecturas habitualmente practicadas como "existe al menos un rey de Francia", tienen un status particular de expresión mixta sobre el cual volveremos; tales lecturas no pueden más que acentuar y ocultar el fenómeno de no-congruencia.* Este fenómeno ha sido el origen de numerosos debates sobre la pertinencia de tal correspondencia entre sustantivo, o descripción, y predicado. La correspondencia así establecida entre una unidad referencial de lengua natural y una unidad apofántica en lengua formal, provoca una alteración de prioridad entre las dos condiciones requeridas para que una expresión designe un objeto sin ambigüedad: la existencia de este objeto y su unicidad en el universo del discurso, que este universo se restrinja al contexto de enunciación o que recubra un conjunto de objetos posibles.

En un enunciado en lengua natural los sustantivos actualizados implican la existencia y la unicidad del objeto o de los objetos que nombran. Estos dos presupuestos equivalen a una identificación de que la frase enuncia alguna cosa, y que esta identificación se traduce en la posibilidad, en un segundo enunciado, de referir con pronombres (personales, relativos o demostrativos). En este modo de ejercicio de la función referencial, la pregunta sobre la existencia de aquello de lo que se habla sólo juega un papel secundario.

> El nombre funciona no como el nombre de una propiedad, atribuida a tal o tal individuo del mundo, sino como el nombre de una clase en la cual se opera la cuantificación, y que constituye por tanto, una parte

integrante del universo en el que el discurso se sitúa. Resulta natural, entonces, que el empleo de este nombre imponga al destinatario admitir la realidad de esa clase, es decir... admitir que no es una clase vacía (Ducrot, 1972, p. 236).

La pregunta sobre la existencia de aquello sobre lo cual se afirma o niega algo y que no concierne más que el valor de verdad de cada enunciado tomado aisladamente, es por tanto dejada en suspenso de entrada en provecho del desarrollo del discurso. *Por el contrario, el presupuesto de unicidad es el presupuesto esencial para la articulación del discurso.* De una parte, permite designar los objetos y por tanto identificarlos (Ducrot, 1972, p. 240). De otra, permite un juego de devoluciones y de cualificaciones diferentes que asegura la coherencia temática del discurso y su progreso (Charolles, 1978). No sólo el nombre "empleado sustantivamente, para crear el marco del diálogo, instituye siempre un mundo de objetos", sino que fija en ese mundo un objeto (o un grupo de objetos) particular que deviene el tema del discurso. Esta fijación de un objeto se hace por "reducción contextual" o por "reducción de extensión" (Ducrot, 1972, p. 238-239). Llamaremos a esto *unicidad de anclaje.*

Ahora bien, cuando se está en el registro de la lengua formal, sucede de otra manera. Hemos podido ver, en el pasaje del enunciado (2) a la proposición (2') que *sólo se retenía el presupuesto de existencia:*

$\exists x$ ("hay al menos un...")

Por el contrario, la unicidad debe ser el objeto de una proposición explícita, la cual viene a limitar el cuantificador existencial como en:

$\exists x \ \forall y \ (R\, y \Rightarrow x = y)$ ("hay al menos uno y solo uno...")

Dicho de otra manera, *el reagrupamiento a través de una variable muda de un cuantificador existencial y de una letra de predicado, no nombra un objeto. No permite designarlo ni por tanto identificarlo.* Para ver bien este contraste de las condiciones de referencia entre los dos registros, basta con considerar el siguiente enunciado:

(5) Hay un cuadro que todos los críticos admiran.

Pueden hacerse dos interpretaciones. La primera privilegia la unicidad de anclaje: el enunciado se refiere a un cuadro particular que puede ser nombrado por el que enuncia. En este caso, es entendido como una afirmación y suscita la pregunta: "¿cuál?". La segunda interpretación privilegia el presupuesto de existencia: aquello que enuncia (5) no puede designar ningún cuadro particular, excluye sólo la hipótesis que los críticos no estén de acuerdo en uno, incluso, en varios cuadros. En este caso, el enunciado (5) es entendido como una exclamación: "¡hay un cuadro que todos los críticos admiran!". Con excepción de las indicaciones contrarias de contexto (entonación, enunciados anteriores...), la primera interpretación es más espontánea; la segunda exige, por el contrario, marcas suplementarias de entonación que acentúen el giro presentativo ("hay un... que..."). En lengua natural, cuando la unicidad de anclaje no es posible, el presupuesto existencial debe ser explícitamente subrayado con un giro presentativo.

Esta alteración de la prioridad entre las condiciones requeridas por toda referencia, aumenta la no-congruencia vinculada a la subordinación de la función referencial a la función apofántica. Hay otro factor que refuerza aún más esta no-congruencia de la conversión entre enunciado en lengua natural y enunciado en lengua formal: la organización no sintagmática de la serie lineal de los símbolos.

NO-CONGRUENCIA ENTRE LA ORGANIZACIÓN SINTAGMÁTICA DE UNA SERIE DE PALABRAS Y LA ORGANIZACIÓN NO SINTAGMÁTICA DE UNA SERIE DE SÍMBOLOS

La lectura y la comprensión de una expresión se hace no al nivel de la aprehensión sucesiva de la serie discreta de signos que la componen (símbolos o palabras), sino al nivel de sus reagrupamientos en unidades constitutivas de un solo significado dentro de la expresión. En las lenguas naturales los reagrupamientos descansan casi siempre en los símbolos que son consecutivos en la serie lineal de palabras. Estos reagrupamientos consecutivos se llaman "sintagmas" (Saussure, 1973, p. 170). Por el contrario, en las lenguas formales los símbolos que deben ser reagrupados en unidades constitutivas de un solo significado, dentro de las proposiciones, no son consecutivos: están separados por otros símbolos que no pertenecen a su reagrupamiento. *Los reagrupamientos que se deben efectuar, para comprender una expresión en lengua formal, pueden ser por tanto más difíciles de identificar.* Y esto, porque un simple trayecto lineal ya no es suficiente para reconocerlos, como es el caso en las expresiones en lengua natural! Este carácter no sintagmático de la organización de la serie de símbolos es sistemático en las formas de base de tipo IV (formas que contienen un predicado de dos lugares con variables vinculadas) y de tipo V, VI o VII (formas compuestas de al menos dos predicados). Esto provoca una no-congruencia que se manifiesta de dos maneras.

Un entrecruzamiento de reagrupamientos de símbolos

El contraste entre el enunciado (6) y su expresión en lengua formal es típico del primer fenómeno.

(7) "Todos los que trazan un círculo trazan una figura"

El mismo verbo "trazar" aparece dos veces con el mismo sujeto. Parece entonces natural traducirlo con una combinación de dos ocurrencias del mismo predicado en dos lugares, cada vez con las mismas letras de argumento para uno de los dos lugares libres.

Llamemos "*Tyx*" la función proposicional "...trazan...". Como acabamos de verlo, la notación del sustantivo actualizado "un círculo" requiere el empleo de tres tipos de elementos: una letra de predicado C que indica el conjunto de los objetos que tienen la propiedad de ser círculos, el cuantificador ∃ para excluir que ese conjunto es vacío, y una letra de variable repetida para vincular el lugar libre del predicado al cuantificador. Esto da:

$$\exists x\, Cx$$

Se puede seguir el mismo procedimiento para anotar "una figura":

$$\exists x\, Fx$$

Estas dos formas apofánticas, de tipo II, traducen dos sustantivos actualizados y van a ser los argumentos de las dos ocurrencias de *Tyx* respectivamente. Por último, escribamos $\forall y$ para traducir "todos los". El enunciado (6) toma entonces la siguiente forma:

$$(6')\ \forall y\ \{\ \exists x\ (\ Cx\ .\ Tyx\ )\ \Rightarrow\ \exists x\ (\ Fx\ .\ Tyx\ )\ \}$$

Aparece así un fenómeno propio a esta escritura que va en contravía de las reglas de funcionamiento propio de un enunciado en castellano: la ocurrencia de la letra x en la segunda ocurrencia de *Tyx* no se refiere a los mismos objetos que la ocurrencia de la letra x en la primera ocurrencia de *Tyx*! Esto se debe la hecho de que la letra *x* tiene, aquí, un papel de "variable *muda*". Semióticamente, la letra x funciona como un arco que liga los caracteres $\exists$, *C*, *T*, del cual sólo el reagrupamiento puede dar una expresión interpretable en lengua natural: "los que trazan un círculo".

Después del signo de implicación, la variable muda *x* reagrupa los caracteres *∃, F, T*, para formar otro reagrupamiento: "los que trazan una figura".

Naturalmente, en lugar de la letra x se hubiera podido tomar otra letra y evitar esta repetición engañosa. Pero esto no cambia nada el fenómeno esencial. *El registro de la escritura de una lengua formal se caracteriza por el papel de variable muda dado a un cierto tipo de elemento; ni los enunciados en lengua natural ni los enunciados del álgebra elemental admiten la posibilidad de un papel tal para uno de sus elementos constituyentes.* Por último, los contenidos de estos dos reagrupamientos tienen una determinación semántica común, a saber, el conjunto de los individuos al cual los dos sujetos gramaticales hacen referencia, es anotado con la variable muda *y* la cual reagrupa los símbolos que pertenecen a la proposición antecedente y a la proposición consecuente de la implicación.

La organización sintáctica de una expresión en lengua formal conduce entonces a entrecruzar los símbolos que pertenecen a reagrupamientos diferentes. Este entrecruzamiento no es un "encaje". Los encajes en la lengua natural corresponden a la inclusión de un sintagma en el sintagma del cual él es una parte. Por ejemplo, los relativos de los cuales el antecedente es una posición del sujeto gramatical. Este entrecruzamiento hace más difícil la aprehensión de los reagrupamientos. A diferencia de las frases de una lengua natural, la organización de la proposición (6') no puede ser decodificada a través de la simple trayectoria lineal de la serie de símbolos que la constituyen. Se hacen necesarios saltos hacia delante y hacia atrás para identificar los diferentes reagrupamientos de dos tipos de unidades que son los cuantificadores y los predicados. *Es necesario, pues, un recorrido no lineal de lo que se presenta como una serie lineal análoga a la de un enunciado en lengua natural.* La lectura de las formas de base de este tipo no se improvisan a partir de algunas indicaciones o de algunos avisos al comienzo de un curso de lógica. Tal lectura exige un trabajo específico que sólo puede conducirse verdaderamente tomando en consideración los dos registros de lengua.

Dos órdenes independientes de ocurrencia de las unidades puestas en correspondencia, para una misma unidad apofántica, en las expresiones de cada registro

Todos los términos que expresan una relación (verbos o adjetivos empleados con el verbo ser) son representados por predicados con dos lugares (o más). Las variables de estos predicados sólo pueden estar vinculadas a través de una combinación de cuantificadores. En el caso de los predicados con dos lugares, esto da lugar a cuatro series diferentes posibles de símbolos para un mismo predicado, utilizando los dos cuantificadores ∀ y ∃. Estas cuatro series corresponden a un cruce de las posiciones alternas de los cuantificadores y de las variables vinculadas, en el orden de secuenciación de los símbolos. La lectura de una forma tal (de tipo IV), requiere entonces que se tomen en consideración **dos órdenes de ocurrencia de los símbolos**. Esto es tanto más importante cuanto cada serie represente proposiciones muy diferentes. La permutación de los elementos de uno de estos dos órdenes, puede cambiar el valor de verdad de la proposición sobre la cual se efectúa, y cambia automáticamente el sentido.

Sea por ejemplo el enunciado "todo el mundo ama a alguien". Llamando A al predicado con dos lugares "... ama...", y tomando la expresión "todo el mundo" en un sentido distributivo, la proposición correspondiente en lengua formal es (Kleene, 1967, p. 82):

$$\forall x \, \exists y \ (Axy)$$

Evidentemente, esta proposición no debe confundirse, en los planos semántico y lógico, con las otras tres proposiciones que se obtienen por permutación de los cuantificadores, de las variables, o de ambos. Pero tampoco debe serlo, además, en el *plano de la identificación perceptiva*. La permutación da formas que presentan estrictamente la misma sucesión categorial de símbolos (cuantificador - variable - cuantificador - variable y predicado - variable - variable) y el mismo conjunto de símbolos { *∀, ∃, A, x, y*}. *Las semejanzas semióticas de organización prevalecen, pues, sobre las diferencias*.

Para distinguir las formas obtenidas por permutación es necesario no olvidar comparar el orden de ocurrencia de las variables después de los cuantificadores con su orden de ocurrencia después del predicado. Por el contrario, si miramos los enunciados correspondientes en lengua natural, vemos que no hay ningún riesgo de confusión, al menos en lo que concierne a su identificación y, en consecuencia, a su discriminación (tabla 1). No se pasa de un enunciado a otro con el mismo procedimiento. Aquí, la misma variación que en el registro formal se obtiene recurriendo a cuatro procedimientos diferentes: inversión gramatical de los términos sujeto y complemento, transformación pasiva de los verbos, transformación antonímica de los adjetivos y giros representativos. Las diferencias entre los cuatro enunciados en la lengua natural, corresponden a formas muy diferentes entre sí.

Tabla 1
No-congruencia de las formas de base que implican predicados con dos lugares, con los enunciados en lengua natural

Escritura simbólica	Lectura que mezcla los dos registros	Lengua natural
1. ∀**x** ∃y (A**x**y)	Cualquiera que sea x, existe al menos un y tal que x ama a y	Todo el mundo **ama** a alguien
2. ∀**y** ∃x (Ax**y**)	Cualquiera que sea y, existe al menos un x tal que x ama a y	Todo el mundo **es amado por alguien**
3. ∃**y** ∀x (Ax**y**)	Existe al menos un y tal que, para todo x, x ama a y	Hay alguien **a quien** todo el mundo ama (hay alguien que **es amado por** todo el mundo)
4. ∃**x** ∀y (A**x**y)	Existe al menos un x tal que, para todo y, x ama a y	Hay alguien **que** ama a todo el mundo

La permutación de los símbolos de una forma de base tipo IV (fig.1) da cuatro proposiciones diferentes. Estas variaciones son todas pertinentes en el sentido que engendran proposiciones que corresponden a enunciados diferentes en la lengua natural. Además, en el registro de la lengua natural, cada uno de estos enunciados puede obtenerse con una variación sistemática de uno de ellos. El procedimiento de variación en la lengua natural da un conjunto de frases mayor que el número de proposiciones obtenidas por permutación de los símbolos. Con certeza, lo que describe la misma situación tiene evidentemente el mismo valor lógico. Se observará que no hay ninguna correspondencia de orden en la disposición de las unidades combinadas respectivamente en la expresión formal y en la expresión natural. De allí los riesgos de *quiproquo* cuando se pasa de 1 a 2, o cuando se pasa de 3 a 4. Es sólo a través de una exploración de las variaciones sistemáticas en

un registro y a través de la observación de las variaciones concomitantes en el otro, que un aprendizaje de la lógica puede no sólo suprimir todos los riesgos sino también permitir una coordinación de estos dos registros.

Si ahora comparamos las expresiones de los enunciados en los dos registros, podemos observar que:

- los enunciados 1 y 4 expresan relaciones directas, y los enunciados 2 y 3 expresan las conversas respectivas. El pasaje de una relación directa a su conversa está marcado, en lengua formal, con la inversión del orden de ocurrencia de las variables mudas después de los cuantificadores, y, en lengua natural, con una transformación pasiva.
- los enunciados 1 y 4 expresan dos determinaciones diferentes del conjunto de partida y del conjunto de llegada a través del mismo lazo relacional "... ama...". Esto está marcado en lengua formal, con la inversión del orden de los cuantificadores y, en lengua natural, con la inversión de los términos en posición de sujeto gramatical y de complemento, así como con un giro presentativo que explicita el presupuesto existencial (cf. p. 147). Los procedimientos parecen semejantes en los dos registros, pero el efecto de sentido es totalmente diferente como lo podemos constatar enseguida:

Enunciado 1

$\forall$ **x**	$\exists$ y	$\exists$ **x**	$\forall$ y
todo el mundo	alguien	alguien	todo el mundo

¿Qué se observa? Simplemente, que la expresión "todo el mundo" corresponde sólo al símbolo $\forall$, y el pronombre indefinido "alguien" sólo al símbolo $\exists$. La lectura de la expresión en lengua formal obliga a reagrupar el símbolo del cuantificador a una letra de variable de manera que formen una unidad, la misma expresión "todo el mundo" se encuentra hecha con dos sintagmas diferentes en los enunciados 1 y 2: $\forall x$ y $\forall y$. En ocasiones se ha invocado esta ruptura para denunciar las ambigüedades de la lengua natural y para afirmar las ventajas de una lengua formal. Pero hay menos alumnos que corren el riesgo de confundir semánticamente los enunciados 1 y 4 si están expresados en lengua natural que si estuvieran en lengua formal! El riesgo de una confusión semántica, en lengua natural, sólo aparece cuando hay inversión del sujeto sin giro presentativo, como en el caso de los enunciados 1 y 3.

- Los enunciados 1 y 3 en lengua natural presentan una similitud: el pronombre "alguien" aparece como el objeto del verbo "amar". El enunciado 3 se obtiene a través de una simple inversión del orden de 1 introducida por "hay...", pero conserva la misma posición en el orden de ocurrencia de este pronombre. Esta inversión que resulta del simple giro presentativo, tiene por tanto un efecto subrepticio en lo que el pronombre designa. En 1, "alguien" no remite necesariamente al mismo individuo; en 3, por el contrario, sí lo hace. Esta diferencia está marcada en lengua formal con la inversión de las duplas $\forall x$ y $\exists y$. Una similitud análoga puede notarse entre los enunciados 2 y 4, donde el término "alguien" aparece como el agente del verbo amar. Estas similitudes no son fortuitas: en realidad reflejan las dos relaciones de implicaciones que vinculan respectivamente esos enunciados: (4) $\Rightarrow$ (2) y (3) $\Rightarrow$ (1).

Hubiéramos podido tomar también enunciados matemáticos para hacer este análisis: por ejemplo, los enunciados que pueden construirse a partir de la relación $\leq$ sobre los números enteros (Fuchs & Reeb, p. 150). Para estos enunciados, la inversión del orden de las variables mudas se traduce con un inversión de los términos antonímicos "grande" y "pequeño". Planteando (*Pxy*) para la relación $\leq$ se tiene:

$\exists x\ \forall y\ (Pxy)$: hay un entero que es más que pequeño que todos los otros enteros.

$\exists ...\ \forall ...\ (Pxy)$: hay un entero que es más grande que todos los otros enteros.

$\forall ...\ \exists ...\ (Pxy)$: todo entero tiene un entero que es más grande que él.

$\forall ...\ \exists ...\ (Pxy)$: todo entero tiene un entero que más pequeño que él, o que le es igual.

El análisis de estos enunciados pondría en evidencia exactamente los mismos fenómenos que los que se presentan en enunciados cuyo contenido es no matemático.

Las implicaciones didácticas de este análisis concerniente al segundo factor de no-congruencia son evidentes. No puede esperarse que un estudiante, que encuentra estas formas de expresión por separado, pueda discriminarlas perceptiva y semánticamente si no ha tenido la ocasión de compararlas entre sí ni comparar las variaciones concomitantes de formas de expresión en lengua natural. Menos aún se puede esperar que esta discriminación sea inmediata sin tal comparación; el costo de la identificación resulta tal, que no se puede producir una aprehensión más global de los tratamientos en los cuales estas formas de expresión están integradas.

Sin embargo, no es suficiente el solo trabajo de comparación. Cuando uno se encuentra en presencia de fenómenos de no-congruencia tan fuertes como los que acabamos de analizar, el pasaje de un registro al otro no puede hacerse directamente. Es necesario, al menos en un primer momento, pasar por un tercer registro que permita obtener una representación intermediaria. La representación del registro de partida es entonces convertida en una representación en este tercer registro, y la representación así obtenida luego es convertida en una representación del registro de llegada. ¿Cuál tipo de representación es susceptible de establecer un "puente" entre unidades apofánticas propias a cada uno de los dos registros de lengua?

¿CUÁL REPRESENTACIÓN INTERMEDIARIA?

Una representación sólo puede jugar el papel del "puente" entre dos registros de representación si cumple la condición de no pertenecer a ninguno de los dos registros que vincula. Por lo general se han propuesto dos tipos de representaciones intermediarias. De una parte, el tipo de expresión que llamaremos "mixta" (cf. columna del medio de la tabla 1), y de otra, los esquemas.

Las expresiones mixtas obtenidas por mezclas de dos registros

A pesar de la frecuencia de su empleo y de la facilidad con la cual pueden ser producidas, las expresiones mixtas no constituyen una representación intermediaria y, desde un punto de vista semiótico, su empleo sólo puede conducir a impases didácticos.

En primer lugar, las expresiones mixtas mezclan características propias de un registro con otras propias de otro registro. La mezcla consiste en tomar los nombres de los símbolos, o las expresiones que los codifican, y enumerar así la serie de los símbolos, respetando lo mejor posible las reglas sintácticas de la lengua natural. Se obtiene así un enunciado que se parece a un enunciado en lengua natural! Este tipo de lectura habitualmente es utilizado en el sentido lengua formal $\rightarrow$ lengua natural.

Ahora bien, como se puede verificar, la frase obtenida no corresponde ni a la organización no sintagmática de la fórmula, ni a una frase castellana que sea comprensible sin ser retraducida: las

expresiones que deben cumplir la función referencial están enredadas. De una parte, son difíciles de repetir luego de un rápido recorrido, y no suscitan ninguna réplica inmediata como lo haría el enunciado castellano al cual es necesario retraducirlas ("No, ...!", "Si, ...!", "Sí, ...!"). No ofrecen ningún medio para decodificar e interpretar las proposiciones de la lengua formal. De otra parte, no son utilizables en tanto que tales: para efectuar tratamientos es necesario o bien volver al registro de la escritura formalizada en donde se pueden aplicar esquemas válidos, o bien pasar verdaderamente al registro de la lengua natural, la cual sin cesar activa un juego de asociaciones que permite encontrar rápidamente los conocimientos pertinentes sobre lo que está enunciado. Más generalmente, las expresiones mixtas no pertenecen a un registro que tenga a la vez sus reglas de formación y sus reglas de tratamiento. Para darse cuenta de esto basta con considerar el pasaje inverso lengua formal $\rightarrow$ lengua natural.

Para efectuar este pasaje, por lo general se recurre a paráfrasis del enunciado en lengua natural, que tratan de aproximarse a lo que sería una lectura dictada de la expresión formal buscada, introduciendo por ejemplo las expresiones que codifican los cuantificadores. Pero esto sólo puede marchar a condición de parafrasear el enunciado en lengua natural como modo de adaptarlo a las reglas de formación propias del registro de la lengua formal. Lo que supone que se tenga ya un mínimo de familiaridad con esas reglas! A pesar de todo, esto no sería suficiente. Se puede llegar a una proposición bien formada que significa otra cosa distinta al enunciado de partida, sin darse cuenta! Tal procedimiento se basa pues en tanteos, sin que aporte ningún medio de control para evitar la trampa de rupturas semióticas o semánticas entre los dos registros.

Los esquemas

Los predicados con dos lugares corresponden a las relaciones; los esquemas sagitales son el registro clásicamente utilizados para representar las relaciones. Estas representaciones no discursivas pueden servir de "puente" para el pasaje de la lengua natural hacia la lengua formal.

Retomemos el ejemplo de los enunciados 1 y 4 (tabla 1) de los cuales ya hemos comparado las diferencias de las expresiones en los dos registros de lengua.

La situación descrita por cada uno de los dos enunciados en lengua natural puede representarse en un esquema sagital. Basta con poner como regla de conversión que todo individuo designado por la expresión referencial, en posición de sujeto en la frase, es colocado al comienzo de una flecha si el verbo está en voz activa ("... ama ..."), o al final si el verbo está en voz pasiva ("... es amado por ..."). También se pueden realizar esquemas que **ilustren** la situación descrita en la frase en castellano. Fijando por ejemplo el conjunto de individuos del discurso en seis personas, los esquemas de abajo son una ilustración de las situaciones descritas en los enunciados 1 y 4 (fig. 2). Es interesante observar que la construcción del esquema permite objetivar, y en consecuencia, controlar o corregir, la comprensión que cada quien puede tener de estos enunciados. Una vez son realizados los esquemas, pueden ser descritos en el registro de la lengua formal. Los datos del esquema pertinentes para esta descripción son los puntos de partida y los puntos de llegada de las flechas. El examen respectivo de los puntos de partida y de los puntos de llegada es lo que va a comandar la escogencia de los cuantificadores. Así, se deben encontrar dos proposiciones de tipo IV que sean equivalentes a los enunciados en castellano.

Así pues, un esquema sagital **se construye para representar la situación descrita** por el enunciado en castellano, y **este esquema construido se describe** con ayuda de expresiones de la lengua formal. El pasaje de un registro a otro a través de una representación intermediaria equivale entonces, desde un punto de vista de las tareas que se deben efectuar, ***al encadenamiento de dos descripciones independientes entre sí*** en sus datos de referencia y en sus medios semióticos.

Podemos ahora efectuar la comparación con base en las variaciones concomitantes entre las expresiones del registro de partida y las representaciones del registro de llegada.

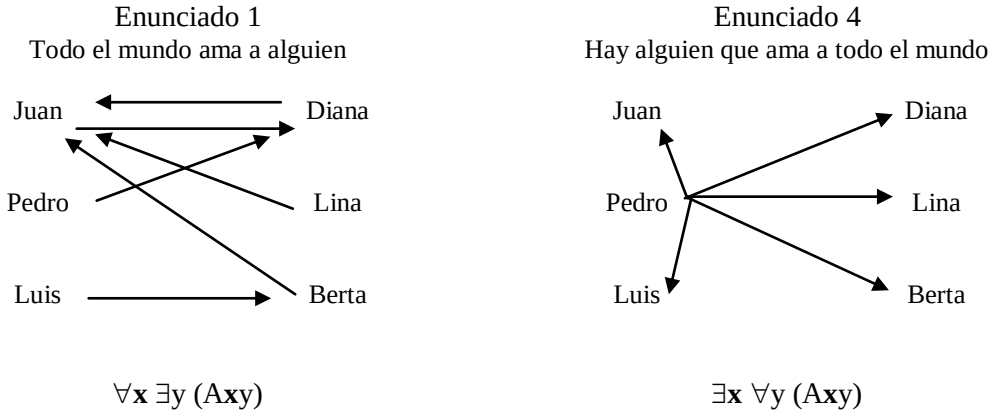


Figura 2. Esquemas sagitales que representan una situación descrita en un enunciado en lengua natural y pueden ser descritos con un expresión en lengua formal.

Naturalmente, hubiéramos podido hacer en esta figura sólo la realización más "pura". Se podrían añadir flechas suplementarias en los esquemas (de Berta a Luis, por ejemplo), sin modificar en nada el papel de puente entre los dos registros. Lo único que en un primer momento es menos evidente, es la "lectura" del esquema a través de su descripción en lengua formal. Quedándose sólo con la realización más pura de los esquemas, se ven de inmediato las modificaciones significativas para el otro registro. Basta con invertir el sentido de las flechas en el esquema de la derecha para ver una representación del enunciado 3: "hay alguien a quien todo el mundo ama" ∃**y** ∀x (Ax**y**). El pasaje de la designación colectiva "todo el mundo" a una enumeración individual constituye una instanciación.

El punto importante es que el rodeo por una representación intermediaria de este tipo *excluye todo análisis del enunciado en castellano en función de los criterios semánticos o sintácticos de otra lengua, incluida la formal.* Además, la producción de la proposición formal correspondiente aparece como una **tarea de descripción de una situación representada esquemáticamente y no ya descrita discursivamente**. En concreto, basta con describir lo pertinente en el esquema sagital. La descripción de una representación no discursiva (esquema de una relación, grafo proposicional, etc.) que haya sido construida por uno mismo, es quizá la tarea por excelencia para apropiarse de un funcionamiento discursivo. Por otra parte, esto se ha observado en relación con la comprensión del funcionamiento del razonamiento deductivo y con su expresión en el registro de la lengua natural (Duval, 1991b, p. 243-251).

El esquema sagital puede considerarse aquí como una verdadera representación intermediaria, ya que también cumple la función de puente para el pasaje inverso (de la lengua formal hacia la lengua natural). En este caso, el esquema sagital ilustra la situación expresada por la proposición

representada según las notaciones del cálculo de los predicados y puede ser descrita con un enunciado en lengua natural. *En otras palabras, el esquema sagital cada vez es introducido como la* ***ilustración*** *de un enunciado en lengua natural o de una proposición lógica***.** Esta función de ilustración en relación con los enunciados o las proposiciones, se traduce de la siguiente manera: hay una multitud de elecciones posibles para realizar los esquemas, a la vez en el número de elementos y en la manera de disponer las flechas. Sólo debe respetarse una restricción: que el esquema sagital verifique el tema de la aserción. Para el enunciado 4 de la figura 2, por ejemplo, es necesario que haya al menos un nombre que sea en el punto de partida de la flecha que va hacia cada uno de los otros nombres. Este status de ilustración está puesto en evidencia por el hecho de que se pueden presentar varios esquemas diferentes para un mismo enunciado. Cada uno de los esquemas realizados aparece entonces como una **instanciación** del enunciado. En investigaciones anteriores, hemos podido observar que superar este status de ilustración constituye un umbral importante en las resultados globales de un cuestionario: hay alumnos que son capaces de dar ejemplos diferentes y hay otros que no (Duval & Pluvinage, 1977, p. 67, 64).

Los esquemas sagitales son representaciones no discursivas útiles para convertir las unidades discursivas que cumplen una función apofántica. No deben confundirse con las redes semánticas de las cuales hemos visto que también permiten convertir proposiciones y frases, pero de manera más rica, puesto que permiten representar las determinaciones semánticas de las unidades que cumplen la función de designación. *La mayor simplicidad de los esquemas sagitales les permite, por el contrario, poner en evidencia todas las determinaciones de anclaje y de cuantificación, que evidentemente están ligadas a la función de designación, pero que, en realidad, están fijadas por la operación de predicación y que por tanto no son separables de la proposición asertada.*

Sin embargo, no olvidemos que los esquemas sagitales son de siniestra recordación, al menos, para los alumnos que entre 1970 y 1976 fueron los cobayos de las "Matemáticas Modernas". Pero en los programas de ese período los esquemas sagitales no fueron utilizados como representación intermediaria entre los enunciados de dos registros de lengua: sólo fueron el material para una clasificación general de las relaciones en función de sus propiedades (reflexividad, simetría, antisimetría, transitividad...). En pocas palabras, se trataba de aprender a categorizar esquemas sagitales diferentes, sin que sirvieran verdaderamente como instrumentos para interpretar y para convertir la expresión lingüística de una situación. Aquí, por el contrario, los esquemas sagitales son considerados únicamente por lo que son realmente: un registro de representación entre otros. *Son totalmente independientes del marco de la lógica de las relaciones y de la lógica de conjuntos*, en el cual se quiso encerrarlos entre 1970 y 1976. Es importante liberarse de la confusión a la que esto dio lugar. El recurso a los esquemas sagitales en el marco de una coordinación de registros, no es un nuevo caballo de Troya para reintroducir una escolástica "lógico-matemática" en la enseñanza.

Tablas y listas

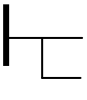
El recurso a una representación intermediaria no discursiva no es sólo para todas las proposiciones que contienen predicados con dos lugares. Igualmente se ha comprobado que es necesario tal recurso, al menos en un primer momento, para los conectivos proposicionales. La introducción de los conectivos no se puede hacer sin la articulación de tres registros: el de la lengua natural, el de las notaciones simbólicas y el de una representación no discursiva que permita articularlos. Para mostrarlo, nos contentaremos con analizar el ejemplo prototipo, tal como aparece en uno de los libros de texto fundadores de la lógica matemática.

Frege en la *Begriffsschrift* (p. 13-14) introduce así la implicación (material) $B \Rightarrow A$:

> Si A y B representan contenido susceptibles de devenir juicios (de las proposiciones asertadas), hay las cuatro posibilidades siguientes:
> (1) A es afirmada y B es afirmada
> (2) A es afirmada y B es negada
> (3) A es negada y B es afirmada

(4) A es negada y B es negada

Ahora



representa el juicio según el cual la *tercera de estas posibilidades no tiene lugar pero las otras tres sí.*

Un simple análisis de esta presentación permite distinguir las tres características siguientes:

En primer lugar, la presentación de la lista de las cuatro posibilidades está hecha bajo una forma que es ya la de las tablas de verdad. Sabemos que las posibilidades de tratamiento vinculadas a esta forma de representación fueron desarrolladas por Wittgenstein.

En segundo lugar, la definición de la implicación (en itálicas en el texto de Frege) es la ***descripción*** *de* ***una de las particiones*** *de las cuatro duplas de esta lista* presentada bajo forma de tabla. Esta descripción puede hacerse de dos manera diferentes. La primera consiste en tomar, como unidades, las duplas, es decir, las filas de la tabla. Se enumera así:

- Las que son aceptadas { (*A y B*) o bien (*A y no B*) o bien (*no A y no B*)}
- Las que son rechazadas (*no A y B*)

Es esta primera forma la que Frege adopta en su definición. La segunda manera consiste en tomar como unidades los términos de las duplas. Se enumera:

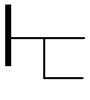
- Los que son aceptados (*A o no B*)
- Los que son rechazados

Esta segunda manera es más compleja. Corresponde a una lectura de la tabla por columnas buscando cuáles son los términos comunes a las duplas aceptadas (lectura por filas). Frege la presenta así en lo que sigue del texto:

1. A debe estar afirmada... Entonces sólo los dos primeros de los cuatro casos mencionados son posibles. No es necesario que exista un lazo causal entre los dos (de A y de B)
2. B debe estar negada.... Entonces sólo el segundo y el cuarto de los cuatro casos son posibles. No es necesario que exista un lazo causan entre los dos.

Es esta segunda manera de leer la partición la que permite hacer la distinción entre condición necesaria (A) y condición suficiente (B).

En tercer lugar, se propone una notación (bi-dimensional) para ***designar****, o nombrar, la* ***partición descrita***. Ulteriormente se imponen las notaciones unidimensionales. En lugar de



ahora se escribe B $\Rightarrow$ A.

Esta designación no debe confundirse con la descripción. Los dos actos discursivos no se sitúan en el mismo nivel. *Sólo la descripción, en términos de disyunciones y de conjunciones, puede estar directamente articulada con la tabla de la cuatro duplas.*

Estas tres características permiten ver que toda traducción en una expresión de la lengua natural ("si... entonces...") es sólo una manera de designar lo que ya es una designación. Ahora bien, esta expresión no es neutra: designa ya en la lengua natural un vínculo dependiente de la proposición consecuente en relación con la proposición antecedente, lo cual privilegia la consideración de los dos valores posibles de la proposición antecedente. Se ve así la ruptura entre la expresión "si ...

entonces ...", *que designa una relación de dependencia* con solo dos casos posibles para el antecedente, y el símbolo de implicación que designa una partición de los cuatro casos posibles *excluyendo toda relación de dependencia* entre los valores de las dos proposiciones. Este símbolo corresponde a la declinación de un caso rechazado y a la aceptación de los otros tres. La expresión "B $\Rightarrow$ A", es entonces la abreviación de una partición de las combinaciones de los valores de las proposiciones consideradas independientemente, y no el vínculo sintagmático de dos proposiciones. Cuando la expresión "B $\Rightarrow$ A" es aprehendida como vínculo sintagmático de dos proposiciones, se induce una relación de dependencia entre las dos proposiciones. Las únicas relaciones examinables son entonces las del antecedente B y no las del consecuente. La expresión "B $\Rightarrow$ A" es entonces entendida como la expresión "si ... entonces ..." que, en la lengua natural, funciona como una equivalencia (Ducrot, 1972, p. 179-183).

Los primeros pasajes entre la expresión de la lengua natural y la designación simbólica de la relación de implicación, requieren el giro por una representación intermediaria no discursiva. No es posible imaginar, por ejemplo, una introducción a la implicación, la equivalencia, la disyunción, que no se proponga como primer objetivo el dominio de tareas de *descripción de listas exhaustivas de casos favorables y desfavorables*, descripciones que deben ser hechas en el registro de la lengua natural y *luego contraidas en una sola proposición*, como las que hemos visto en el texto de Frege. Sin estas tareas de descripción, la proposición "no A y B" no puede ser inmediata y definitivamente percibida como la negación de la proposición "A $\Rightarrow$ B", y la contrapuesta "no B $\Rightarrow$ no A" no puede ser reconocida inmediatamente como una aserción equivalente a la de "A $\Rightarrow$ B". Sin tal trabajo previo que movilice varios registros y que esté centrado en las actividades cognitivas de conversión, hay poca oportunidad para que en la utilización de la implicación, la mayoría de alumnos sobrepasen el estado de una pseudo-sinonimia entre dos designaciones equívocas.

Estas observaciones son importantes desde un punto de vista didáctico. Toda introducción de la lógica que se apoye en lecturas mixtas, en codificaciones locales con la ayuda de expresiones formadas en la lengua natural ("existe al menos un...", "si ... entonces...", "si y solamente si..."), conduce a un impase. Desde el punto de vista de las tareas cognitivas que deben ser efectuadas, la única introducción pertinente es la que esté centrada en la coordinación de los dos registros. Esta coordinación puede realizarse sólo a través de la práctica sistemática de las variaciones posibles de expresión que las reglas de formación permiten en un registro, y de las variaciones concomitantes en el otro registro. Evidentemente, tal práctica requiere que cada uno de los dos registros sean tomados alternativamente como registro de partida.

LOS TRATAMIENTOS POR NEGACIÓN

Cada registro presenta posibilidades de tratamiento que le son propios o que, siéndoles comunes, son considerablemente más económicos en relación con otros registros. De ahí el interés de un cambio de registro. Esto equivale a decir que no hay tratamientos que tengan la misma naturaleza en dos registros diferentes. Sin embargo, hay una excepción para los registros de lengua. La negación es la transformación fundamental que caracteriza a todo sistema de representación que merezca el nombre de lengua. *No hay lengua sin posibilidad de negación.* Una comparación de los tratamientos por negación, tal como pueden efectuarse en cada uno de estos dos registros, es entonces esencial en la perspectiva de una coordinación de registros.

Un análisis comparativo de los tratamientos por negación requiere que se distingan **dos niveles.** El primero está constituido por las operaciones elementales que permiten oponer los enunciados entre sí. El segundo está constituido por la combinación de estas operaciones elementales. Es a este

nivel que verdaderamente se pueden definir las reglas de transformación de un enunciado en otro que o bien conserve el valor de verdad o bien los haga contradictorios. Es sólo a este segundo nivel que se puede hablar de tratamiento discursivo o lógico por negación.

Las operaciones elementales de oposición

Debemos distinguir cinco operaciones elementales de oposición que pueden aplicarse a los elementos constitutivos de una unidad apofántica, enunciado o proposición: dos operaciones conmutativas de uno de los términos del enunciado y tres aplicaciones del operador unario de oposición ("no", o un símbolo de negación) a los cuantificadores, a los términos predicativos o a los verbos.

Tabla 2
Tratamientos por oposición que pueden ser efectuados sobre los elementos constitutivos de una unidad apofántica

Operaciones	Lengua natural	Lengua formal
I. Conmutación extensional	Todos $\rightarrow$ algunos, o $\rightarrow$ un Algunos o un $\rightarrow$ todos	$\forall \rightarrow \exists$ $\exists \rightarrow \forall$
II. Conmutación antonímica	Grande $\rightarrow$ pequeño Negro $\rightarrow$ blanco	
III. Aplicación del operador unario a los términos extensionales	Todos $\rightarrow$ no todos ($\equiv$ algunos) Un $\rightarrow$ no un ($\equiv$ ningún, nada)	$\forall \rightarrow \neg\forall$ $\exists \rightarrow \neg\exists$
IV. Aplicación del operador unario a los términos de propiedad (en posición de atributo)	Recurso a los prefijos a-, in-	$\mathbf{P} \rightarrow \neg\mathbf{P}$
V. Aplicación del operador unario al verbo	Es ... $\rightarrow$ no es ...	

Se observará que aquí hemos considerado la aplicación del operador unario al verbo como una relación de oposición elemental, de la misma manera que la conmutación extensional o antonímica. Si uno se basa sólo en el punto de vista lingüístico, esta operación proviene de una "negación de frase", mientras que las otras provienen de una "negación del elemento constitutivo". Esta distinción entre "negación de frase" y "negación del elemento constitutivo" no es suficiente para dar cuenta de la diversidad y de la complejidad de los tratamientos por negación que intervienen en el cumplimiento de la función discursiva, es decir, de la producción de un nuevo enunciado a partir de un enunciado dado. Así, la

"negación del elemento constitutivo" recubre cuatro tratamientos elementales de oposición.

Lo que se llama un tratamiento por negación corresponde con frecuencia a una

combinación de esos tratamientos elementales de oposición.

Cada una de estas operaciones elementales de oposición puede ser aplicada independientemente de las otras en una unidad apofántica. Esto es fácil de verificar en el registro de la lengua natural.

Partiendo de:

(8) Todos los hostales son agradables

Obtenemos:

(9) Algunos hostales son agradables (por conmutación extensional)

(10) Todos los hostales son asquerosos (por conmutación antonímica)

(11) Todos los hostales no son agradables (por aplicación del operador unario al verbo)

Si hubiéramos partido de "todos los hombres son mortales", habríamos obtenido:

(12) Todos los hombres son inmortales (por aplicación del operador unario al término de propiedad).

Es importante no confundir ni las operaciones de oposición I y III, ya que generalmente se recubren, ni las operaciones II y IV. Se distinguen primero por la ausencia o por la presencia de una marca de "negación". Esta diferencia semiótica no es despreciable desde un punto de vista del análisis cognitivo de los enunciados a los cuales se aplican tales operaciones. La necesidad de distinguirlas se impone cuando se quiere comparar la aplicación separada y la aplicación combinada de estas operaciones en cada uno de los dos registros. En efecto, *los* ***tratamientos por negación****, que modifican necesariamente el valor lógico de verdad de un enunciado y que dan lugar a esquemas válidos de inferencia,* ***por lo general son una aplicación combinada de dos de las cuatro primeras operaciones de oposición.*** La quinta operación, la aplicación del operador unario al verbo, corresponde al uso más espontáneo de la negación en la lengua natural. Pero, propiamente hablando, no constituye un tratamiento por negación ya que, de un lado, puede cumplir tanto una función meta-discursiva como una función discursiva y, de otro, su dominio de aplicación queda indeterminado.

Los tratamientos por negación en el registro de la lengua natural

El cuadro de oposiciones lógicas de Aristóteles es el primer modelo propuesto para los tratamientos por negación en la lengua natural. Explica la diferencia entre las proposiciones contrarias y las proposiciones contradictorias. Podemos constatar dos cosas. La primera es que los tratamientos por negación son una aplicación combinada de dos operaciones de oposición. La segunda es que dejan de lado la aplicación del operador unario al verbo.

Retomemos el enunciado (8). Según los criterios aristotélicos obtenemos dos enunciados negativos lógicamente diferentes:

(13) Ningún hostal es agradable

es decir, el enunciado contrario, por conmutación extensional y por aplicación del operador unario al término extensional obtenido por conmutación ((Todos → Algunos) → Ningún),

(14) Algunos hostales son asquerosos

es decir, el enunciado contradictorio, por conmutación extensional y por conmutación antonímica.

El enunciado subalterno (9), que se obtiene por la simple conmutación extensional y que cierra el sistema de las oposiciones lógicas, no es tratamiento de (8) por negación.

Se observa en estos ejemplos que *la contradicción de un enunciado en lengua natural, es decir, su negación en el sentido lógico, se obtiene sin recurrir al operador unario de oposición V, y sin que haya en el enunciado la menor marca de una negación* ("Ningún", "Nada", "Nadie", como para los contrarios). Naturalmente, esto se basa en el hecho de que la "lexicalización de la polaridad en dos antónimos" no es con frecuencia vinculada desde el punto de vista morfológico (Lyons, 1978, p. 224).

La aplicación del operador unario de oposición "no" al verbo constituye un caso aparte. Es específico de la lengua natural. En primer lugar, es esta aplicación la que caracteriza el empleo común de la lengua natural:

(11) Todos los hostales no son agradables

es el tratamiento por negación más inmediato de (8). Se nota muy rápidamente que es (11) lo que surge más espontáneamente como una réplica para oponerse a alguien que afirmara (8). Este tipo de tratamiento por aplicación del operador unario al verbo es "polémico" y no "descriptivo" (Barbault & Ducrot, 1973, nota p. 102). Por el contrario, la doble conmutación, es decir, la producción de un enunciado contradictorio equivale a la producción de un contraejemplo:

(14') He encontrado algunos hostales asquerosos

Se ve enseguida la debilidad del enunciado (11). Por el hecho de ser producido únicamente por la aplicación del operador unario al verbo, es un enunciado lógicamente indeterminado: también puede sobreentender el enunciado contrario (13) como el enunciado contradictorio (14). *El enunciado (11) no es más que una contra-tesis que es tan necesario justificar o argumentar como la tesis (8) que acaba de contrabalancear:* "no, todos los hostales no son agradables".

Este análisis puede ser indirectamente corroborado mirando lo que produce la combinación de la aplicación del operador unario al verbo con otra operación elemental de oposición. La regla de "obversión" constituye un ejemplo clásico. Consiste en transformar una proposición negativa en proposición positiva a través de la negación del predicado, y recíprocamente (Fey, 1987, p. 49). Así,

(15) Todos los hombres no son inmortales

deviene por aplicación de esta regla:

(16) Todos los hombres son mortales

Se habrá reconocido la aplicación del operador unario simultáneamente al verbo y al término de propiedad. Esta regla lleva a considerar como equivalentes los dos operaciones elementales IV y V (tabla 2). En general, esto es lo que se expresa cuando se habla de "doble negación". En realidad, la aplicación del operador unario al predicado no es equivalente a su aplicación al verbo, y la regla de obversión no es válida en los dos sentidos. En efecto, admitir la regla de obversión conduciría a considerar la oposición antonímica "(es) mortal *versus* (es) inmortal" como estrictamente semejante a la oposición "es mortal *versus* no es mortal" o a "es inmortal *versus* no es inmortal". Ahora bien,

la oposición antonímica (que resulta de la aplicación del operador unario a los términos de propiedad) produce proposiciones contrarias y no proposiciones contradictorias: sus negaciones son compatibles entre sí (lo que significa la no pertinencia de la atribución de uno de los términos de la dupla de antónimos). Por el contrario, la aplicación del operador unario al verbo puede producir proposiciones contradictorias: sus negaciones no son compatibles entre sí en razón del principio del tercero excluido (Fey, 1987, p. 50-58).

Tratamientos por negación en lengua formal

La ausencia de verbo hace a los tratamientos por negación mucho más simples en lengua formal que en lengua natural. *Para negar un enunciado, no hay competencia entre lo que hemos llamado la "contra-tesis" y la contradicción.* Como para la contradicción en lengua natural, la negación de un enunciado se obtiene a través de la combinación de dos operaciones elementales: la conmutación extensional y la aplicación del operador unario al predicado. En razón de la ausencia de un léxico, no hay distinción entre conmutación antonímica y aplicación del operador al predicado. El simple recurso al operador de la negación no es por sí sólo suficiente. La negación de $\forall \boldsymbol{x}\ \exists y\ (A\boldsymbol{x}y)$ es $\exists x\ \forall y\ (\neg Axy)$.

Retomando los ejemplos de la tabla 1, la negación de "Todo el mundo ama a alguien" es el enunciado contradictorio de "Hay alguien que no ama a nadie". Aquí los tratamientos en los dos registros son congruentes; esto vale también para la negación de las formas de base II y IV (fig. 1). La negación de las formas de base tipo V, VI o VII, requiere que se hayan comprendido las reglas semióticas del tratamiento por negación en lo que concierne a los conectivos. Cuando, por ejemplo, el predicado es una implicación, basta con tomar el caso excluido en el paradigma del símbolo de implicación para negar el predicado. La negación de $\forall \boldsymbol{x}\ (Fx \Rightarrow Tx)$ es $\exists x\ (Fx\ .\ \neg Tx)$.

Se recurre a otro tipo de tratamiento por negación para definir las reglas del pasaje que permite "mover los cuantificadores a través de un signo de negación" (Quine, 1950, p. 132):

$$\forall x\ \neg Fx \Leftrightarrow \neg \exists x\ Fx$$

$$\exists x\ \neg Fx \Leftrightarrow \neg\ \forall x\ Fx$$

El pasaje de una proposición a la otra se hace aquí por la aplicación de *tres operaciones elementales de oposición*: conmutación del término extensional, aplicación del operador unario al término extensional y al término de predicado (las operaciones I, II, IV de la tabla 2).

Evidentemente, se pueden concebir otros tratamientos por negación que no producen ni una proposición contradictoria ni una proposición equivalente como en el caso de estas reglas de pasaje. Por ejemplo, la combinación de las aplicaciones del operador unario al término extensional y al término de predicado, o la combinación de la conmutación extensional y la aplicación del operador al término extensional:

$$\forall x\ Fx \quad \rightarrow \quad \neg\ \forall x\ \neg Fx \qquad (\Leftrightarrow \exists x\ Fx)$$

$$\forall x\ Fx \quad \rightarrow \quad \neg \exists x\ Fx \qquad (\Leftrightarrow \forall x\ \neg Fx)$$

Pero estos tratamientos no son de interés para el "cálculo de los predicados", es decir, para el modo de expansión discursiva por sustitución que es el único posible en lengua formal. Por otro lado, se puede constatar que el tratamiento de una proposición a través de cada una de esas dos combinaciones, equivale aquí a la aplicación de una sola operación elemental de oposición. Tal ejemplo muestra claramente la necesidad de separar dos niveles en los tratamientos por negación, el

de las operaciones elementales, *y el de los tratamientos por negación propiamente dichos, es decir, los tratamientos que permiten una expansión discursiva del tipo razonamiento.*

ANÁLISIS DE UN EJEMPLO NO TRIVIAL

Se conoce la complejidad de la definición matemática de la continuidad; los análisis precedentes permiten en gran medida exhibir su estructura y su funcionamiento.

Tomamos la presentación de esta definición que se da en un manual para alumnos de 11º (IREM de Estrasburgo, 1983, p. 29-30). Lo interesante de esta presentación es que no es monorregistro. En efecto, la definición está dada bajo dos formas: una expresión en lengua formal y una expresión mixta. Estas dos formas están acompañadas de representaciones gráficas, sobre las cuales se repiten los términos de designación pura utilizados en las dos formas de expresión. Pero la definición no es dada en el registro de la lengua natural.

La definición de la continuidad de una función *f* en un punto *x0* se presenta así en el registro de la lengua formal:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \ \forall x \in Df\ \ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Es importante no confundir en la lectura de esta definición que comporta tres cuantificadores, lo que depende de la estructura de la proposición y lo que depende de la estructura del predicado. En efecto, tenemos allí una unidad apofántica que corresponde a la forma de base de tipo IV: dos cuantificadores y un predicado (fig. 1, p. 141). Su organización interna es la de un enunciado de tipo 2: el orden de las variables vinculadas es inverso (tabla 1, p. 152):

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists \delta > 0, \qquad \forall x \in Df\ \ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\forall y \quad \exists x \qquad\qquad (Axy)$$

El predicado presenta la estructura de una implicación formal (forma de base de tipo V), puesto que está escrita como una implicación de dos predicados universalmente cuantificados:

$$\forall x \in Df \qquad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\forall x \qquad\qquad (\ Fx \quad \Rightarrow \qquad Tx\ )$$

La definición en lengua formal imbrica, pues, dos formas de base diferentes (una de tipo IV y una de tipo V) que no tienen el mismo status o más exactamente, que no se sitúan al mismo nivel: una concierne la proposición asertada y la otra un elemento constitutivo de esta proposición. Esta definición tiene una estructura simple que se debe reconocer si se la mira a partir de las formas apofánticas de base que la componen. Pero sin este reconocimiento, la definición corre el riesgo de ser impenetrable. Los autores del manual tuvieron la prudencia de no presentarla de en primer plano sino que lo hicieron en una página de "Observaciones" escrita en caracteres más pequeños. La definición que privilegiaron es la de expresión mixta. ¿Es ésta más accesible?

De hecho, tal definición es una lectura de la definición en lengua formal. El enunciado en lengua natural enumera los elementos de la proposición formal en el orden en que aparecen, reproduciéndolos tal cual como, por ejemplo, el predicado

$$(\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon)$$

o acompañándolos con un término que proviene de una operación de categorización como por ejemplo

"(número real $\varepsilon > 0$)"

Esta expresión mixta, que resulta muy próxima al enunciado en lengua formal, no es utilizable. Si se trata de negar la definición, es preferible pasar al registro formal. Pero si se trata de identificar los objetos a los cuales se refiere, resulta mejor pasarse al registro de la lengua natural o al de la representación gráfica. Lo interesante del pasaje a una representación gráfica es que hace aparecer en dimensiones diferentes los dos dominios de referencia de los símbolos ε y δ (IREM, 1983, p. 29-30). La expresión mixta, pues, no constituye aquí un verdadero pasaje al registro de la lengua natural.

Por otro lado, es interesante notar que el ensayo de traducción de la definición en la lengua natural, propuesto a los alumnos de un nivel menos avanzado, privilegia la parte de la fórmula que corresponde al predicado y se escribe como una implicación formal: "... se dice que f(x) tiende hacia $f(x_0)$ cuando x tiende hacia x_0, o que el límite de f en x_0 es $f(x_0)$, o aún que f es contínua en x_0." (IREM, 1982, p. 96). Esta parte del enunciado se construye como una descripción de la representación gráfica cartesiana. La representación cartesiana juega pues aquí un papel de representación intermediaria entre la escritura en lengua formal de una parte, y, de otra, lo que podría ser una expresión en lengua natural que ya no repite la expresión en lengua formal sino que describe también, con sus procedimientos propios, el contenido de esta representación intermediaria.

Para hacer accesible la complejidad cognitiva de la definición matemática de la continuidad, no es suficiente pues que estén presentes tres registros, sino que es necesario que se respeten las condiciones de su coordinación.

CAPÍTULO IV
FIGURAS GEOMÉTRICAS
Y DISCURSO MATEMÁTICO

Tu no puedes saber lo que yo veo,

tu no eres yo

CELINE

La actividad matemática en los cursos de geometría durante la educación básica secundaria, se realiza en dos registros: el de la figuras y el de la lengua natural. Uno, para designar las figuras y sus propiedades; el otro, para enunciar las definiciones, los teoremas, las hipótesis... Pero no se trata simplemente de un cambio de registro, como es el caso entre la representación gráfica y la escritura algebraica de relaciones, para lo cual los tratamientos se efectuan sólo en uno de los dos registros, regularmente, en aquel que resulte más económico o más controlable: pueden hacerse los tratamientos en la escritura simbólica o en la representación gráfica, y luego, el resultado obtenido puede ser reconvertido en una representación del registro de partida. Pero la actividad cognitiva que requiere la geometría es más exigente puesto que los tratamientos efectuados separada y alternativamente en cada uno de los registros no bastan para que ese proceso llegue a algún resultado: es necesario que los tratamientos figurales y discursivos se efectuen simultáneamente y de manera interactiva. La originalidad de los procesos en geometría, en comparación con otras formas de actividad matemática, tiene que ver con que es absolutamente necesaria **la coordinación entre los tratamientos específicos al registro de las figuras y los del discurso teórico en lengua natural** (cap. V).

Estos dos registros, evidentemente, no son exclusivos de la actividad matemática. Los tratamientos figurales parecen proceder de leyes de organización de la percepción visual, y la práctica de un discurso teórico parece ser la prolongación directa de la comprensión inmediata de la lengua utilizada para comunicar. Entonces, resulta ser un fenómeno de **falsa proximidad** el pretendido acercamiento entre los tratamientos que son naturales en cada uno de estos dos registros y aquellos que la actividad matemática solicita. Esto, porque entre todos los tratamientos en esos dos registros que espontáneamente hacen los sujetos, cuando se está en el ámbito de las matemáticas, algunos se utilizan ocasionalmente y otros se rechazan sistemáticamente. Así, por ejemplo, a veces parece convergir una interpretación perceptiva cuasi-automática de las figuras con la interpretación matemática pertinente, pero con frecuencia también están en divergencia. Pero no hay ningún índice perceptivo que permita distinguir, o prever, los casos de convergencia y los de divergencia. De otro lado, la utilización de la lengua natural en las matemáticas proviene de un empleo especializado y no de un empleo común. Y esta diferencia que afecta esencialmente las funciones discursivas de referencia y de expansión discursiva, puede ser muy grande y oculta.

La necesidad de una coordinación entre los tratamientos que provienen de registros figurales y los que provienen de registros discursivos, de un lado, y la falsa proximidad entre los tratamientos matemáticos pertinentes y aquellos espontáneamente practicados en cada uno de los dos registros, del otro, comandan los problemas en el aprendizaje de la geometría. Quien no tome conciencia de

esta diferencia tendrá que reducir los tratamientos matemáticos específicos a los que provienen únicamente de los tratamientos espontáneamente efectuados. Esto es particularmente claro en el registro de las figuras, el cual está por entero comandado por la evidencia inmediata de una constatación perceptiva. Entre las principales fuentes de la dificultad en el aprendizaje de la geometría, no ocupan el primer lugar los conceptos, sino ese parasitismo que produce la vecindad de tratamientos pertinentes y no pertinentes al interior de un mismo registro, así como la ausencia de coordinación entre los tratamientos que provienen de registros diferentes. La mayoría de los alumnos entre 6o. y 9o. están lejos de haber adquirido esta coordinación. A pesar de ser allí donde reside el punto estratégico del aprendizaje de la geometría, las actividades propuestas en el marco de la enseñanza no parecen suficientes para favorecerla.

Hasta la fecha, muy pocos trabajos se han dedicado a un análisis detallado de estos diferentes tratamientos; menos aún a la importancia que tienen. Esto se cumple de manera particular en lo relativo al registro de las figuras. Es necesario tomar en consideración que una aproximación exclusivamente psicológica de la percepción de las figuras, así como una aproximación inmediatamente matemática de la lectura de las figuras, no pueden más que desconocer la diversidad de los tratamientos propios al registro de las figuras geométricas. La condición previa para la descripción precisa de los diferentes tratamientos matemáticos pertinentes en el registro de las figuras geométricas es un análisis semiótico relativo a la determinación de las unidades de base constitutivas de este registro, a las posibilidades de su articulación en figuras y a la modificación de las figuras obtenidas. Esos tratamientos son importantes puesto que es su ejecución, en parte no consciente, lo que permite a las figuras cumplir su función heurística. La descripción de esos tratamientos es igualmente importante para la enseñanza puesto que la mayoría, como lo veremos, no pueden llegar a ser dominadas sin un aprendizaje específico.

LAS UNIDADES CONSTITUTIVAS DE UNA FIGURA GEOMÉTRICA

Para determinar las unidades figurales elementales que constituyen, semióticamente, una figura geométrica, podemos retomar algunas distinciones utilizadas para analizar la conversión de datos numéricos en una representación gráfica (Bertin, 1970, p. 174).

En primer lugar, para que pueda haber figura o gráfico es necesario que haya un contraste sobre un soporte material homogéneo (hoja de papel, pantalla de video…), de manera que alguna cosa identificable se destaque en tal campo perceptivo. El contraste, primer elemento de toda representación visual, forma una “mancha visible”, o más precisamente, “la implantación” de una mancha visible. Esta implantación es susceptible de algunas variaciones visuales que pueden agruparse en dos grandes tipos:

- el tipo de variaciones ligado al número de dimensiones: 0 (un punto), 1 (una línea) o 2 (un área),

- el tipo de variaciones cualitativas: variaciones de forma (línea recta o línea curva; contorno abierto o contorno cerrado de un área), variaciones de tamaño, de orientación (en relación con el plano frontal-paralelo[15]), variaciones de granulación, de color, etc.

Estas distinciones permiten definir los elementos constitutivos de una figura: *toda figura aparece como la combinación de valores para cada una de las variaciones visuales de estos dos tipos,* ***dimensional*** *y* ***cualitativo.*** A partir de allí, es fácil determinar los elementos que van a funcionar como unidades de base representativa, es decir, como unidades figurales elementales.

En efecto, no todas las variables visuales son igualmente pertinentes en todos los registros de figura. Así, en una figura geométrica hay menos variables visuales pertinentes para tomar en

[15] Plano vertical y paralelo al plano que contiene la figura

consideración que en un gráfico. En un gráfico, la granulación, el color, la orientación o el tamaño son variables visuales importantes semióticamente; estas variables pueden representar relaciones de orden, de proporcionalidad, de semejanza o diferencia entre datos numéricos concernientes a una información económica, demográfica o física (Bertin, 1970, p. 174-176). Pero no son pertinentes para una figura geométrica puesto que no son susceptibles de representar intrínsecamente relaciones proyectivas o topológicas. Esto no significa que estas variables visuales no puedan ser utilizadas para mejorar la "lectura" de una figura: el color puede ser importante si se trata, por ejemplo, de figuras que representan objetos en el espacio. Pero, como veremos, el recurso a éstas variables permite sólo allanar ambigüedades de representación debidas a la tercera dimensión, sin que permita representar una relación o un objeto matemático. Esta variable de color no interviene más que como un subrayado. El tamaño y la orientación pueden parecer más discutibles: a veces se toman en consideración en la representación de una figura geométrica; pero esto implica añadir notaciones suplementarias (flechas, ejes, graduaciones...) que no permiten hablar sólo en términos de variables visuales. De otra parte, si el tamaño puede ser una variable visual pertinente, la medida de las longitudes sobre una figura trazada sería un argumento matemáticamente tan válido como la deducción a partir de las propiedades matemáticas dadas discursivamente. De hecho, sólo hay una variable visual cualitativa que puede, de manera intrínseca, determinar una unidad de base representativa para las figuras geométricas: es la variable visual de forma, de la cual hemos indicado antes los diferentes valores posibles.

Toda figura combina dos tipos de variación; el cruce de los valores de esta variable visual cualitativa con la variable de dimensión, nos permite definir **las unidades figurales elementales** para el registro de las representaciones geométricas. Obtenemos así la siguiente clasificación de unidades figurales elementales:

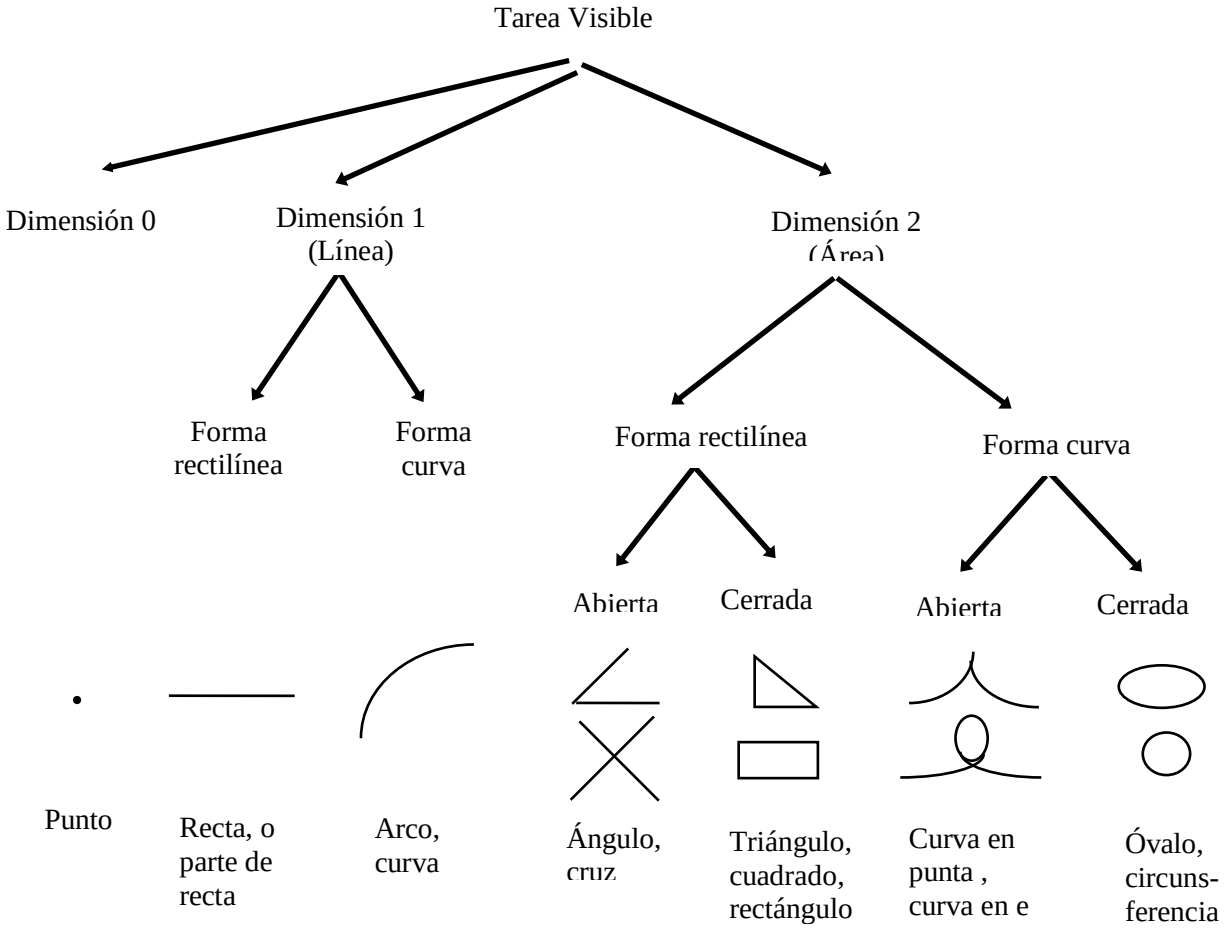


Figura 1. Clasificación de unidades figurales elementales

Salta a la vista el carácter heterogéneo de las unidades figurales: no todas presentan el mismo número de dimensiones. *Un triángulo, un cuadrado, y toda unidad de dimensión 2, aparecen como unidades elementales al mismo título que una línea y que un punto, osea que las unidades de dimensión 1 o 0.* Sin embargo, esta heterogeneidad no provoca ninguna ambigüedad en la aprehensión perceptiva de las unidades figurales. En efecto, hay una predominancia de las unidades de dimensión 2 sobre las unidades de dimensión inferior, que la ley gestaltista de cierre (o de continuidad) explica así: cuando un estímulo posee un contorno simple y cerrado, es separado como formando un todo. Así, un cuadrado es percibido como una figura única y no como la reunión de cuatro segmentos opuestos de dos en dos. Es interesante, además, observar que las unidades figurales definidas por el cruce de las variaciones de dimensión con los valores de forma, corresponden a las primeras formas que los niños pequeños identifican y reproducen (Piaget, p. 69-94; Noelting, 1979, p. 172-173).

Estas unidades figurales son unidades elementales del registro de las figuras geométricas. Si analizamos las figuras geométricas en función de tales unidades, podemos hacer de inmediato las siguientes constataciones:

Una figura geométrica es siempre una configuración de al menos dos unidades figurales elementales. Así, un cuadrado con sus diagonales, una recta y un punto marcado sobre o fuera de ésta, un círculo y su centro (marcado sólo por la punta del compás), son configuraciones de dos

unidades figurales elementales. Incluso una figura aparentemente reducida a una sola unidad figural de dimensión 2 (un cuadrado, por ejemplo), es una figura matemática sólo con la condición de ser considerada como una configuración de unidades figurales de dimensión 1 (los segmentos que forman los lados). Esto, debido a que son las relaciones (paralelismo, simetría, tangente...) entre las unidades figurales elementales las que constituyen el contenido pertinente de una figura geométrica. Generalmente las figuras geométricas comportan numerosas unidades figurales elementales con valores de formas diferentes (círculos, triángulos, cuadriláteros, rectas, puntos).

Las unidades figurales elementales de dimensión 2 (límite cerrado de un área) son estudiadas en geometría como configuraciones de unidades figurales de dimensión 1 (forma "línea"). Basta con contrastar estas unidades figurales con las definiciones de los objetos matemáticos que ellas representan para darse cuenta ***del cambio de dimensión que debe efectuarse cuando se pasa de la representación figural al discurso sobre los objetos representados.*** En el registro de las figuras hay predominancia perceptiva de las unidades de dimensión 2 sobre las de dimensión inferior. En el registro del discurso en lengua natural en que son definidos los objetos representados por la figura, hay predominancia de los objetos representados por las unidades figurales de dimensión 1 o 0. Por tanto, la utilización inmediata de estas representaciones figurales para ilustrar una definición resulta ser ambigua. Tomemos el ejemplo clásico del paralelogramo. Una secuencia de representaciones en la que cada una muestra las dos unidades figurales de dimensión 1 vinculadas, en la definición, por la propiedad de paralelismo o por la de igualdad, es una representación semióticamente más adecuada que una sola representación que impone de golpe la imagen de la unidad de dimensión 2 ("forma rectilínea cerrada"). En este caso, dado que ningún valor de variable visual puede representar directamente una propiedad, las unidades de dimensión 1 vinculadas por esta propiedad deben estar sobrecargadas con una marca que codifique esta propiedad. Esa es la manera para hacer visible la articulación con la definición (Guin, 1989, p. 92-94).

No se trata allí de un fenómeno particular sino de uno más general propio a la articulación del registro de las figuras con el del discurso matemático. De una parte, la utilización de una figura requiere un cambio continuo del número de dimensiones tomadas en consideración para la aprehensión perceptiva de las unidades figurales que son discernibles. De otra parte, el tratamiento de la situación matemática representada por la figura (para la aplicación de definiciones o de teoremas) requiere que se la restrinja a las unidades figurales de dimensión 1 o 0, mientras que la percepción se focaliza automáticamente sobre las unidades figurales de dimensión 2. Veremos más adelante que es en este desfase donde radica la complejidad de la actividad geométrica; sobrepasarlo es decisivo para el aprendizaje.

Un mismo "objeto" matemático puede ser representado por unidades figurales diferentes. Esto es particularmente evidente en el caso del punto, que puede representarse con tres unidades figurales diferentes: la típica de dimensión 0 (por fuera o sobre otra unidad figural) y las menos típicas de dimensión 2 como "esquina" o como "cruz" (vértice o intersección).

Estas primeras constataciones permiten comprender ciertas dificultades en el aprendizaje de la geometría, relativas a la articulación del registro del discurso matemático con el de las figuras geométricas. Las tareas de descripción de una figura que se solicitan con frecuencia en situaciones de comunicación, permiten poner en evidencia esas dificultades. En éstas tareas, la figura geométrica que ha de ser descrita constituye el registro en el cual está fijado el mensaje que ha de ser transmitido. Para transmitirlo, el estudiante en posición de emisor, debe pasar del registro figural al registro discursivo, y el estudiante en posición de receptor, debe efectuar la conversión inversa. El análisis del vocabulario empleado por alumnos de 6º, de 7º y algunos de 8º, muestra que la mayoría se limita en su descripción a la identificación de las unidades figurales elementales. Esto se ve no sólo en el vocabulario empleado ("trazo" o "línea" en lugar de "segmento" o de "diámetro",

"redondo" en lugar de "círculo") o en la consideración que se haga de la variable visual de orientación en relación con el plano fronto-paralelo ("horizontal" y "vertical" en lugar de "perpendicular"), sino también en el reconocimiento de los objetos representados. El punto, por ejemplo, es designado como "punto" cuando es una unidad figural de dimensión 0, es decir, cuando es percibido como una unidad figural separada de otras unidades o superpuesta a estas unidades. Al contrario, no es designado como punto sino como "cruce" o como "corte" cuando su discriminación resulta de la relación de incidencia de otras dos unidades figurales (intersección de dos trazos) (Kubler-Weber, 1984, p. 65-66; 1985, p. 47-49). De manera más general, *los alumnos evitan al máximo transformar una unidad figural de dimensión 2 en una configuración de unidades figurales de dimensión 1 o 0.*

LOS TRATAMIENTOS PROPIOS AL REGISTRO DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

Es común admitir que las figuras forman un importante soporte intuitivo para las actividades en geometría: dejan ver mucho más de lo que los enunciados dicen, permiten explorar, anticipar... Permiten, en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración, aquella conducta que Pierce describió bajo el término de "abducción", consistente en limitar de entrada la clase de hipótesis o de alternativas para ser consideradas: así, de entrada, la figura ha de evitar la exploración de todos los caminos posibles captando la atención sólo sobre aquellos susceptibles de conducir a la solución o sobre los que ya han conducido a ella. Hablar del papel heurístico de las figuras viene a significar que es la conducta de abducción la que guía la deducción. Entonces, el problema radica en saber sobre cuáles tratamientos reposa esta conducta de abducción.

Estos tratamientos deben ser específicos al registro de las figuras, y no pueden ser asimilados pura y simplemente a los tratamientos matemáticos, pues de ser así, sería considerar que la conducta de abducción dependería esencialmente de los conocimientos matemáticos y que las figuras serían en realidad heurísticamente accesorias. Mas radicalmente, asimilar los tratamientos figurales a los tratamientos matemáticos, oculta la cuestión de las "resistencias" que la figura puede oponer a la conducta de abducción o de las "trampas" que puede tenderle. En efecto, no siempre es fácil "ver" sobre una figura las relaciones o las propiedades relativas a las hipótesis dadas y que corresponden con la solución buscada.

Es esencial, desde el punto de vista cognitivo y didáctico, *no confundir la posibilidad de tratamientos figurales con la legitimidad, o la justificación, matemática de estos tratamientos figurales.* La posibilidad de los tratamientos figurales está vinculada con las posibilidades de modificación que surgen de las relaciones de las partes con el todo, por ejemplo, relaciones ópticas (visuales) o posicionales de una figura; modificaciones que pueden ser efectuadas física o mentalmente, y ello independientemente de todo conocimiento matemático (Duval, 1988b, 62-63; 1994). La conducta de abducción está ligada a la interacción entre una pregunta de orden matemático y la efectuación de los tratamientos figurales pertinentes a esa pregunta. Las "resistencias" o las "trampas" de una figura para la conducta de abducción, subyacen a factores propios de la representación figural. Es en función de estos factores que se puede analizar el grado de potencia heurística de una figura y que se puede organizar un aprendizaje centrado en la utilización heurística de la figuras (Padilla, 1992).

Para comprender cómo las figuras pueden permitir la conducta de abducción, habremos de distinguir dos niveles en la aprehensión de las figuras geométricas: un primer nivel en el que se opera el reconocimiento de las diferentes unidades figurales que son discernibles en una figura dada, y un segundo nivel en el que se efectuan las modificaciones posibles de las relaciones de las partes con el todo (ópticas o posicionales) de las unidades figurales reconocidas y de la figura dada. El

primer nivel corresponde a lo que clásicamente se entiende y describe bajo el término “percepción”; se podría, entonces, hablar de aprehensión gestáltica. El segundo nivel corresponde a una aprehensión operatoria de las figuras.

El reconocimiento de las unidades figurales de dimensión 2 en una figura geométrica

Cuando las unidades figurales de dimensión 2 están separadas, su reconocimiento no tiene ninguna dificultad. El tiempo de reconocimiento puede ser más o menos rápido según la orientación que tengan en relación con su orientación visual típica (Pellegrino *et al.*, 1982, p. 339). No es lo mismo cuando esas unidades están integradas en una configuración. Y esto, por dos razones diferentes. En primer lugar, ciertas unidades figurales de dimensión 2 predominan sobre otras unidades también de dimensión 2, de conformidad con la ley gestáltica de cierre. En segundo lugar, *una figura geométrica contiene, con frecuencia, más unidades figurales elementales que las requeridas para construirla*.

La figura dada con el enunciado del problema que se presenta más abajo, permite verificar fácilmente lo que se acaba de decir. La figura comporta 6 unidades figurales de dimensión 1. De otro lado, esas unidades están designadas y enumeradas en el enunciado; son las unidades que se han de tener en cuenta para trazar la figura. Pero esta figura comporta también ocho unidades figurales de dimensión 2 (triángulos y paralelogramos). Estas son las unidades que han de observarse para ver los tratamientos que resuelven el problema. Pero las dos unidades de dimensión 2 pertinentes para la resolución, son las menos inmediatamente visibles!

A'C' y AC son paralelas,
A'B' y AB son paralelas,
B'C' y BC son paralelas,

Probar que A es el punto medio de B'C'

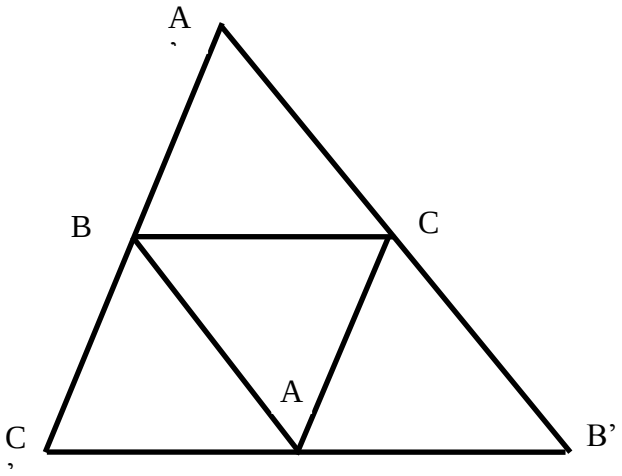


Figura 2. Problema propuesto en una encuesta a estudiantes que finalizan 9º (Dupuis *et al.*, 1978).

En virtud de la ley de cierre, esta figura es vista espontáneamente como *un triángulo pequeño* inscrito en *un triángulo grande*, o como *un mosaico de cuatro triángulos pequeños* independientes. Para reconocer *tres paralelogramos* es necesario, de una parte, neutralizar la organización perceptiva que hace predominar los contornos “triángulo” sobre los contornos “cuadrilátero”, y de otra parte, *ver separadas unidades figurales que de hecho se recubren parcialmente y que por tanto tienen parte de su contorno en común.* Si no se tiene presente en la cabeza el objeto “paralelogramo”, hay pocas probabilidades de que se reconozca, sobre la figura, la unidad figural elemental que lo representa. Obviamente, se puede suponer que la sola lectura del enunciado *debería* conducir a pensar simultáneamente en la palabra y en el objeto “paralelogramo”, lo cual es

la condición para considerar la figura de manera útil. Esto es evidente para un matemático. Pero, esta evidencia no se basa en la coordinación de dos registros; coordinación que está lejos de existir para la gran mayoría de los alumnos en situación de aprendizaje.

La misma situación matemática y la misma pregunta matemática puede presentarse de otra manera:

ABED y BCED son paralelogramos.

Probar que B está en la mitad de AC

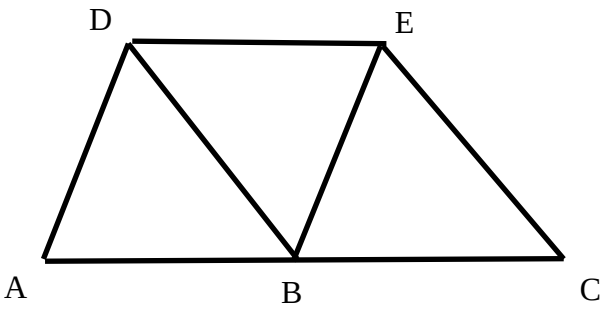


Figura 3. Otra presentación del mismo problema.

La resolución de esta presentación moviliza estrictamente los mismos conocimientos que la presentación dada en la Figura 2. Pero aquí, de un lado, las unidades figurales de dimensión 2 pertinentes son inmediatamente visibles sobre la figura y, de otro lado, el enunciado hace referencia al objeto "paralelogramo". Esto quiere decir dos cosas: uno, hay congruencia entre las unidades figurales directamente visibles y aquellas que "inicializan" los tratamientos que permiten la resolución y, dos, hay congruencia entre las representaciones de los dos registros. *Esto hace el problema mucho más fácil, no desde un punto de vista matemático, sino desde un punto de vista cognitivo!*

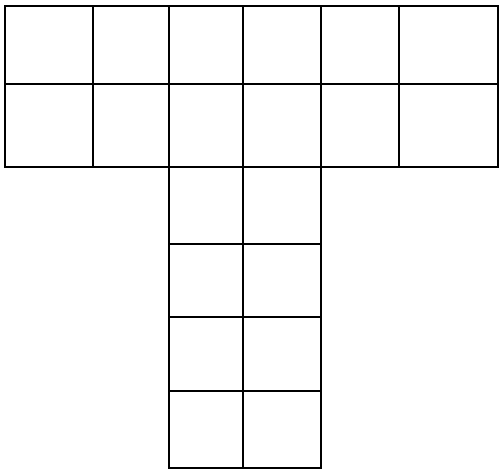
Las dos presentaciones de este problema se dieron a alumnos que finalizaban 9º en 1974 y 1975. Se obtuvieron los mismos resultados en los dos años. Bajo la versión más simple, el problema fue resuelto por un poco más de la mitad de los alumnos; bajo la versión no congruente, el éxito apenas fue de un poco más de la décima parte de la población. Pero el resultado más interesante de estas dos encuestas no es ésta diferencia. Una parte de los alumnos tuvieron ambas versiones ante sus ojos, primero la más simple y en la página siguiente la no congruente. Ahora bien, menos de la mitad de los alumnos que tuvieron éxito en la versión simple pudieron reconocer, en la página siguiente, los dos paralelogramos (Dupuis *et al.*, 1978, p. 75-78). Investigaciones más recientes han confirmado, para otros tipos de situación matemática, la autonomía de los tratamientos figurales en relación con los tratamientos matemáticos. Los tratamientos figurales facilitan o inhiben tanto el reconocimiento de las situaciones representadas como las búsquedas heurísticas (Mesquita, 1989b, 39-46, 92). No puede haber enseñanza de la geometría que no tome en consideración las diferentes aprehensiones a las cuales una figura da lugar (Duval, 1994).

La aprehensión operatoria de las modificaciones posibles de una figura geométrica

Toda figura puede modificarse de varias maneras. Se pueden separar las unidades figurales elementales de dimensión 2 que la componen en otras unidades figurales, homogéneas o heterogéneas, también de dimensión 2; y éstas pueden recombinarse para modificar el contorno global de la figura. Se puede también agrandar o achicar la figura, desplazarla por translación o por rotación, etc. Todas estas modificaciones, que no son de la misma naturaleza, promueven cada una operaciones específicas y constituyen la productividad heurística de las

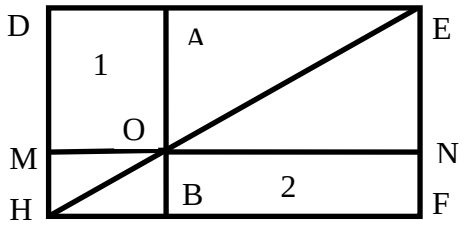
figuras (Duval, 1988, p. 62-63). Examinaremos aquí solamente dos: la reconfiguración que está ligada a las modificaciones mereológicas de las unidades de dimensión 2, y la puesta en perspectiva ligada a las modificaciones ópticas de dimensión 2 o de dimensión 1.

La **reconfiguración** es la operación que consiste en reorganizar una o varias sub-figuras diferentes de una figura dada en otra figura. Una sub-figura puede ser o una unidad figural elemental de dimensión 2 o un reagrupamiento de unidades figurales elementales también de dimensión 2. Naturalmente, se puede aumentar el número de las partes de la figura por un fraccionamiento de sus unidades figurales elementales de dimensión 2. Esta operación concierne la modificación mereológica de una figura. *La reconfiguración es un tratamiento que consiste en la división de una figura en sub-figuras*[16]*, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente.* Es a éste título que esta operación interviene en la productividad heurística de las figuras geométricas. Veamos dos ejemplos elementales.



Esta figura está formada por cinco cuadrados. Se la puede descomponer en cuatro pedazos superponibles?

DEFH es un rectángulo. Sea O un punto cualquiera de la diagonal HE. AB es la paralela a DH que pasa por O, y MN es la paralela a DE que pasa por O. Mostrar la igualdad de las áreas 1 y 2, cualquiera que sea la posición del punto O.



[16] Es importante no confundir **"unidad figural elemental"** y **"sub-figura"**. Las unidades figurales elementales son las formas de base en las cuales todas las figuras pueden ser analizadas. Las sub-figuras son el resultado de una división de la figura que depende de las necesidades de un problema propuesto: pueden consistir en una unidad figural o en una combinación de unidades. Es igualmente importante no confundir la **figura de partida** y la **transformación de esta figura** por la aplicación de tratamientos figurales que provienen de uno de los tres tipos de modificación con fines heurísticos. La figura de partida es la figura que se puede construir tomando en consideración ya sea sólo los datos del enunciado de un problema, o los datos de la formulación de una proposición para ser demostrada. A veces en la presentación de una demostración, es la figura transformada la que está dada como figura que acompaña al texto (cap. V).

Figura 4

Tipos de problemas que permiten el estudio de la operación de reconfiguración en la utilización heurística de las figuras geométricas. Para el análisis del problema de la derecha, ver más adelante pág. 199-200.

El ejercicio de la izquierda solicita explícitamente una operación de reconfiguración. La división de cinco cuadrados en cuatro pequeños cuadrados, es un fraccionamiento de tipo cuadrícula, el cual puede ser dado o no. El hecho de que sea dado, facilita el tratamiento para la reconfiguración. Sin embargo, no todos los alumnos de 6º y de 7º a quienes se les propuso tuvieron éxito. Más de la mitad de los que pudieron resolverlo tomaron entre 3 y 15 minutos para hacerlo (Padilla, 1990, p. 236-238). El ejercicio de la derecha requiere que se comparen varias sub-figuras: las inscritas en los dos grandes triángulos y las no inscritas, formadas por la reunión de los triángulos incluidos respectivamente en HDE y EFH (Mesquita, 1989a, p. 57-59).

La resolución del problema de la encuesta que hemos citado antes (fig. 2) se basa esencialmente en una operación de reconfiguración: sería necesario reconocer paralelogramos reconfigurando de dos en dos los triángulos. Entonces, esta operación puede jugar un importante papel en el reconocimiento simple de unidades figurales elementales de dimensión 2 en una figura cuando están perceptivamente dominadas por unidades figurales que les son heterogéneas. La operación de reconfiguración aparece pues como una operación fundamental para una aprehensión matemática de las figuras.

La **puesta en perspectiva** es la operación que consiste en ver "en profundidad" dos unidades figurales de la misma forma y con la misma orientación, pero cuyos tamaños respectivos pueden variar. Esta operación está en relación con los mecanismos perceptivos que aseguran la constancia del tamaño en la percepción de los objetos del mundo circundante. En efecto, el tamaño de la imagen retiniana de los objetos varía con su distancia: cuando la imagen se hace más pequeña, no vemos el objeto más pequeño sino más lejos. La operación de puesta en perspectiva efectua, para la percepción de los objetos representados en una superficie plana (fotografía, tablero,...), una transformación análoga a aquella efectuada por las imágenes retinianas. Esta operación habilita la dimensión de profundidad, en visión monocular. El funcionamiento de una operación tal, requiere de una unidad figural que pueda servir como señal de un centro organizador no designado (el punto de fuga) porque no pertenece al plano. En la figura de abajo, tenemos dos cuadrados diferentes, uno al lado del otro.

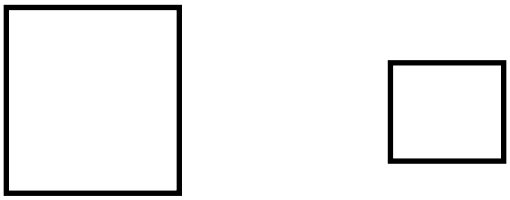


Figura 5. Dos unidades figurales del mismo valor y con la misma orientación.

Si introducimos una señal familiar, por ejemplo, un trazo que sugiera una línea de horizonte, el cuadrado más pequeño se ve más alejado que el otro (Coren *et al.,* 1979, p. 254). Y así, no hay nada que impida ver estos dos cuadrados como dos unidades figurales del mismo tamaño: uno más cerca y otro más lejos.

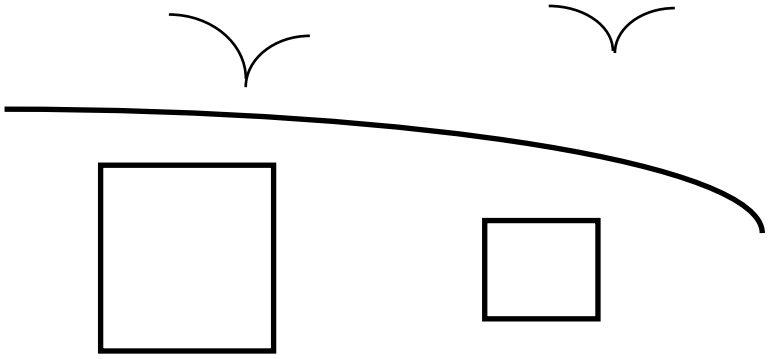


Figura 6. Puesta en perspectiva de dos unidades figurales por contextualización.

La puesta en perspectiva permite, pues, ver superpuestas dos figuras que, cuando se miran como simplemente yuxtapuestas en el plano, son perceptivamente de tamaño diferente y por tanto no susceptibles de ser superpuestas (fig. 5). Una de estas dos unidades figurales puede entonces ser considerada como imagen de la otra. Y juntando los puntos homólogos de manera visible, tenemos una representación en el espacio de una situación homotética plana (Lémonidis, 1990, p. 58, C1F1).

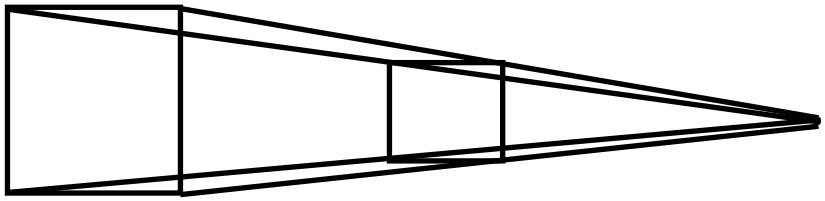


Figura 7. Puesta en perspectiva de dos unidades figurales por unión de los puntos homólogos.

Esta operación, al permitir una percepción en profundidad de una representación plana, constituye la productividad heurística del registro figural en relación con el discurso matemático tan útil para la comprensión de la homotesis. En efecto, el discurso matemático que habla de la homotesis como "conservación de las relaciones de tamaño...", conduce a seleccionar en las configuraciones sólo unidades figurales de dimensión 1 y de dimensión 0. Al contrario, la aprehensión operatoria de las figuras según sus modificaciones ópticas, conduce a ver primero las transformaciones de las unidades figurales de dimensión 2 en el espacio. Esta operación de puesta en perspectiva, o de superposición por puesta en profundidad, constituye un tratamiento figural que guía el análisis matemático de la configuración homotética plana, la cual debe ser leída únicamente en términos de puntos y de relaciones de longitudes de segmentos. Este tratamiento figural permite, igualmente, una ejecución más rápida y da un medio de control.

Naturalmente, todas las situaciones homotéticas planas no están representadas por configuraciones que sugieran la tercera dimensión. Veremos más adelante las condiciones en las que esta operación de puesta en perspectiva puede ser un tratamiento que permite una entrada profunda y rápida en la aproximación matemática de las situaciones de homotesia y baricentro.

LA COORDINACIÓN ENTRE FIGURA Y DISCURSO EN GEOMETRÍA

Recurrir al registro de figuras presenta, en geometría, una particularidad esencial: *una figura representa una situación geométrica sólo en la medida en que la significación de ciertas unidades figurales y de algunas de sus relaciones, estén explícitamente fijadas de entrada.* Para fijar las propiedades del objeto que se quiere representar en el dibujo, no es suficiente el sólo reconocimiento perceptivo de unidades figurales de dimensión 2, o de relaciones entre unidades figurales de dimensión 1. En geometría, no hay dibujo que represente por sí mismo, es decir, no hay dibujo "sin leyenda". Un mismo dibujo puede representar situaciones matemáticas muy diferentes, y por tanto servir de soporte intuitivo a razonamientos diferentes. Es necesaria pues, una indicación verbal para anclar la figura como representación de tal o tal objeto matemático. *Esto quiere decir que la introducción a una figura geométrica es necesariamente discursiva.* Pero, a diferencia de otros cambios de registro practicados en matemáticas, la conversión del discurso en una figura geométrica no acarrea el abandono de los tratamientos vinculados al registro de partida, es decir, de los tratamientos discursivos (aplicación de definiciones, de teoremas...). Debe haber una interacción entre los tratamientos figurales que por abducción guían el recorrido heurístico, y los tratamientos

discursivos que por deducción constituyen el recorrido basado en los objetos representados en la figura. Naturalmente, esta interacción puede verse bloqueada por fenómenos importantes de no-congruencia en las múltiples idas y venidas que requiere la movilización simultánea de estos registros. Más radicalmente, esta interacción puede engendrar graves confusiones si, de una parte, los alumnos no están preparados para integrar el nivel de una aprehensión gestaltista de las figuras en el de su aprehensión operatoria, y si, de otra parte, ellos no han descubierto la especificidad de la organización deductiva del discurso en relación con sus otras formas de expansión discursiva como la explicación, la argumentación o la descripción.

La introducción discursiva en la figura

La organización perceptiva de una figura privilegia el reconocimiento de ciertas unidades figurales y tiende a ocultar las otras. Ahora bien, las unidades figurales que se han podido identificar perceptivamente no siempre concuerdan con las que están designadas en el enunciado, o con las que son pertinentes para la resolución del problema planteado. Los dos ejercicios citados antes (fig. 2 y 3) propuestos a alumnos de 9º son un bello ejemplo del primer caso. En uno, el enunciado hace referencia a paralelogramos y el dibujo muestra dos paralelogramos que se recubren parcialmente. En el otro, dado en la página siguiente, el enunciado hace referencia a rectas paralelas y el dibujo muestra un pequeño triángulo inscrito en un triángulo grande. La disminución de éxitos de una página a otra es espectacular.

A la inversa, una fuerte congruencia entre la introducción discursiva y la organización perceptiva de la figura puede constituir un obstáculo mayor para la resolución de un problema, si las unidades figurales a tomar en consideración no son aquellas directamente visibles en la figura y designadas en el enunciado. En este caso, es necesario olvidar los objetos nombrados en el enunciado y mostrados en la figura. La observación de las respuestas que alumnos de 9º, dieron al siguiente problema ilustra el segundo caso.

¿Cuántos **rectángulos**

hay en esta figura?



Figura 8. Problema propuesto por Balacheff.

Parece que “la resolución de este problema depende de manera esencial de las concepciones que se tienen de los objetos a demostrar y del análisis *que se hace de la figura* (el subrayado es nuestro)” (Balacheff, 1982, p. 280). En efecto, los rectángulos, en esta figura, pueden ser considerados como:

- “elementos de un mosaico”: los rectángulos pequeños (dimensión 2) son vistos como unidades figurales elementales, lo que no provoca, aquí, ninguna modificación de la figura,
- “intersección de dos bandas”: es necesario ver unidades figurales de forma rectilínea y abiertas, para lo cual es necesario prolongar todos los trazos hechos,
- “conjuntos de cuatro puntos”: es necesario ver agrupamientos de unidades figurales de dimensión 0, para lo cual se requiere olvidar todos los trazos.

Ahora bien, la ley gestaltista de cierre impone la visión de un rectángulo grande formado por rectángulos pequeños. Las otras dos lecturas de la figura suponen una modificación figural que la

mayoría de los alumnos no hacen: "en efecto, es el primer tipo de solución el que domina en las observaciones clínicas que hemos realizado antes y durante la experiencia misma. Parece verosímil que este tipo de solución corresponde *a una aproximación perceptiva de la figura*..." (Balacheff, 1982, p. 281).

La exploración de una figura: secuencias de sub-figuras y sucesión de pasos en el razonamiento

La aprehensión operatoria permite ver desplegarse en una figura dada una variedad de sub-figuras posibles, que no son inmediatamente perceptibles al "primer golpe de vista". Estas sub-figuras son reorganizaciones perceptivas diferentes que representan algunas (o todas) las unidades figurales elementales de la figura de partida. Así, aunque el acceso a cada sub-figura es independiente del acceso a otras y que no es posible la simultaneidad de los diferentes accesos, las sub-figuras tienen las mismas unidades figurales de dimensión 2, 1 o 0 que la figura de partida. *Este fondo común permite formar secuencias diferentes de sub-figuras.* Entonces, ¿cómo es que una de estas secuencias de sub-figuras se puede imponer como el camino heurístico para la resolución de un problema?

Un problema fija, por sus datos y por la pregunta planteada, una figura de partida y una sub-figura de llegada. Cuando éstas son identificadas, se hace posible ver la secuencia de sub-figuras intermediarias que permite pasar de la una a la otra. El éxito de la exploración de la figura en el marco de un problema planteado, va a depender entonces de la articulación entre esta aprehensión operatoria de la figura y un manejo discursivo de inferencias que moviliza una red de definiciones y de teoremas. Pueden entonces surgir fenómenos de no congruencia entre lo que muestra cada una de las sub-figuras de una secuencia, y los objetos a los cuales se refieren las definiciones y los teoremas que se deben utilizar para llegar a la solución matemática del problema.

Algunos de estos fenómenos se deben a la heterogeneidad dimensional de las unidades figurales. En efecto, la correspondencia entre el registro de las figuras y el del discurso, se establece al nivel de la correspondencia entre las unidades figurales y las expresiones referenciales. Ahora bien, en un mismo paso de razonamiento se puede hacer referencia a objetos que están representados por unidades figurales de dimensión 2, 1 o 0. En el registro del discurso, esto no introduce ninguna heterogeneidad de tratamiento. Pero no es lo mismo en el registro de las figuras: *el vaya y venga constante entre las diferentes unidades figurales, implica saltos en la percepción de la figura.* De manera más general, la **no-congruencia dimensional** parece ser característica de la coordinación entre figura y razonamiento. La exploración heurística de las figuras tiende a privilegiar las unidades de dimensión 2 sobre las de dimensión inferior. Al contrario, la aplicación de definiciones o de teoremas en la sub-figura seleccionada, tiende a privilegiar las unidades de dimensión 1 o 0. Puede hacerse la misma observación para la geometría en el espacio. ***El razonamiento necesita un trabajo en un número de dimensiones inferior*** *a aquel en que los objetos de que se trata se encuentran figuralmente representados.* El papel heurístico de una figura se basa en que permite percibir los objetos y sus relaciones en un espacio de dimensión superior a aquella en que el razonamiento las explicita: *una figura juega, pues,* ***un papel heurístico*** *si permite trabajar en la* ***dimensión superior*** *a la de las unidades figurales que representen cada uno de los objetos del razonamiento.*

Las situaciones de homotesis ofrecen un ejemplo típico. Antes hemos indicado cómo la percepción en profundidad de dos figuras aparentemente independientes puede guiar la lectura de puntos homólogos. Pero no es lo mismo para muchas situaciones afines. La misma percepción en profundidad del trapecio ensamblado con triángulos (fig. 3) permite ver los contornos de un libro

abierto: resulta visible la relación de transitividad entre los bordes del canto del libro y el borde del dorso; no queda sino dar una interpretación que utilice la definición de paralelogramo.

Este análisis parece valer no sólo para la geometría plana; se aplica también a las situaciones más simples de la geometría "en" el espacio. Encontramos allí el mismo fenómeno de disminución de dimensiones cuando se pasa de la figura al razonamiento: las figuras están enmarcadas en sub-figuras que son planos o secciones planas del objeto tridimensional, y por tanto unidades de dimensión 2 y no unidades de dimensión 3 (Rommevaux, 1991, p. 93-95). Igualmente, encontramos la misma condición para que una representación cumpla una función heurística: la representación debe comportar un número de dimensiones superior al que tienen las unidades a tomar en consideración para el razonamiento. Esto quiere decir que una maqueta es una representación heurística para la geometría en el espacio, mientras que una representación en perspectiva no lo es en tanto que no permite un aumento en el número de dimensiones. En efecto, la percepción de una y otra no son en absoluto la misma cosa. Una representación en perspectiva es una representación plana en la que la tercera dimensión no está presente sino sugerida por algunos índices. Esto provoca dos serias limitaciones. En primer lugar, la representación en perspectiva excluye toda variación en el punto de vista: supone, al contrario, que se privilegia un punto de vista particular *cuya escogencia, en general, forma parte de la resolución del problema!* La segunda limitación es que su lectura, en razón de la ausencia de tercera dimensión, rápidamente se hace ambigua: de allí la necesidad de recurrir a variables visuales suplementarias, como por ejemplo el color, para aumentar el número de índices sobre la posición en el espacio de algunas unidades figurales de dimensión 0, 1 o 2. Con una maqueta, al contrario, la tercera dimensión se da efectivamente: permite pues, una variación de puntos de vista sobre una unidad figural de dimensión 3, variación que permite descubrir sub-figuras muy diferentes y seleccionar sub-figuras pertinentes de dimensión 2 (Rommevaux, 1991, p. 87-88).

Otros fenómenos de no-congruencia están vinculados a la especificidad de la organización deductiva del discurso. El discurso no sólo articula expresiones que cumplen una función referencial, como los nombres en posición de sujeto en las frases, sino también unidades que tienen un valor lógico y epistémico, como las proposiciones (cap. II, p. 111; cap. V, p. 218-219). Además, la deducción es una organización del discurso que se apoya exclusivamente en proposiciones y que superpone dos modos de funcionamiento: un funcionamiento por sustitución al interior de cada paso y un funcionamiento por reciclaje de una proposición para encadenar los diferentes pasos (cap. V, p. 244-246). La articulación entre figura y discurso, en la resolución de un problema en geometría, debe efectuarse en estos dos niveles de funcionamiento del razonamiento deductivo: debe efectuarse, pues, de manera local y global. La articulación local es la que se efectua en los límites de un paso de deducción: se apoya en la correspondencia entre las unidades figurales de dimensión 0 o 1 y las expresiones referenciales. La articulación global es la que concierne el proceso de resolución del problema: se apoya en la correspondencia entre la visión de una secuencia de sub-figuras y el encadenamiento de los pasos deductivos. Para un individuo que haya tomado conciencia del funcionamiento del registro figural y de la organización deductiva del discurso, y que haya alcanzado el estadio de la coordinación de los registros, es la articulación global la que constituye lo esencial de la actividad geométrica: para él, la heurística y la demostración forman un sólo recorrido. Pero, ¿es así para los alumnos de secundaria? ¿No hace falta un doble aprendizaje previo, uno concerniente a los tratamiento propios al registro de la figura y otro relativo a la organización deductiva del discurso, para que en primer lugar se logre la articulación local entre figura y razonamiento? Volveremos sobre estas preguntas en el capítulo que sigue sobre razonamiento.

Pero uno de los mayores problemas en la enseñanza de las matemáticas es que la coordinación necesaria entre los tratamientos figurales y los tratamientos discursivos sólo se da en muy pocos alumnos, incluso después de muchos años de educación básica y media. ¿Los análisis que acaban de bosquejarse permiten explicitar las razones de esta deficiencia y pueden contribuir a definir el tipo de actividad susceptible de favorecer esta coordinación? Algunas experiencias nos dan serias razones para pensar que sí.

APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA Y COORDINACIÓN DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

La especificidad de la actividad geométrica consiste no sólo en la necesaria coordinación entre los tratamientos en dos registros, el de las figuras y el de la lengua natural. Se basa también en el hecho de que los tratamientos que requiere van en contravía de los que se practican espontáneamente. Se

manifiesta indispensable el aprendizaje por separado de las operaciones demandadas en cada uno de estos dos registros, al menos para evitar los impases de una falsa proximidad entre los tratamientos pertinentes para una actividad matemática y los que son comúnmente efectuados en la percepción de las figuras, en la comprensión del discurso y en su producción. Las actividades orientadas hacia el descubrimiento y la puesta en marcha por separado de las operaciones matemáticamente pertinentes en cada uno de los dos registros, y que no impliquen una movilización de los dos registros a la vez, constituyen pues las condiciones necesarias para el aprendizaje de la geometría. Ahora vamos a presentar las condiciones para el aprendizaje de la aprehensión operatoria de las figuras.

Reconocimiento perceptivo, aprehensión operatoria y heurística

La reconfiguración, la superposición por puesta en profundidad y las otras operaciones relativas a las modificaciones posibles de una figura, son operaciones que están lejos de ser espontáneas y evidentes. El asunto es que con la complejidad de la figura no sólo aumenta el costo en el tiempo, sino sobretodo, que no todos los alumnos llegan a efectuarlas. Para convencerse de ello basta con considerar las modificaciones más simples, es decir, las modificaciones de posición por rotación o por translación. Es bien conocido por los profesores que el simple cambio de orientación de una unidad figural elemental puede ser un obstáculo para su simple reconocimiento. Nosotros mismos fuimos testigos de la siguiente reacción en una clase de 7º. Los alumnos habían trabajado con los diferentes patrones de un cubo. Luego de diferentes propuestas, se pintaron ocho patrones en el tablero. El profesor llamó la atención sobre la semejanza de las siguientes dos propuestas

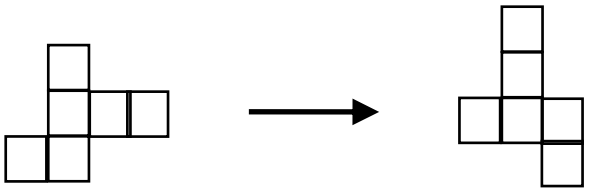


Figura 9. Dos representaciones de un mismo patrón de un cubo desplegado.

Cinco alumnos de la clase rechazaron sistemáticamente que se trataba de un mismo patrón, a pesar de la explicación verbal de su superposición por rotación. Ciertamente se trataba de no muy buenos alumnos, en los cuales, la diferencia cualitativa introducida por el pasaje de una orientación horizontal a una orientación vertical pudo ser suficiente para inhibir la operación de rotación mental de uno de los patrones en relación con el otro. Pero su fracaso se relaciona con un fenómeno más general, que experimentalmente fue puesto en evidencia por Shepard y Metzler (1971): el tiempo requerido para reconocer un mismo objeto en dos figuras planas diferentes, obtenidas por rotación de una de las dos, aumenta con el valor del ángulo de rotación. Así, está lejos de ser espontánea e inmediata una de las aprehensiones operatorias más simples, la rotación mental.

Encontramos el mismo fenómeno con la reconfiguración. Una observación a alumnos de 6º y de 7º que trabajaban en parejas con ejercicios que podían ser resueltos por simple reconfiguración de unidades figurales, muestra que el tiempo de respuesta aumenta considerablemente y que el número de respuestas exitosas decae cuando desaparece todo apoyo perceptivo para la operación de reconfiguración (Padilla, 1990, p. 130-231). Un soporte perceptivo para esta operación puede estar constituido por la cuadrícula del fondo sobre el que se destaca la figura, o por una división en bandas de ese fondo. Cuando el fondo es homogéneo, la operación de reconfiguración sólo tiene como índices perceptibles los contornos de la figura.

Soporte perceptivo para la operación de reconfiguración	Ejercicio	Proporción de aciertos	Tiempos de respuesta para los aciertos			
			0-30 seg	1-2 seg.	3-7 seg.	8-20 seg
	I	1	.5	.4	.1	
CUADRICULA	V	.85	.1	.3	.3	.2
	VI	.85	.3	.2	.3	.1
	II	.71		.5	.5	
BANDAS	IV	.64		.2	.5	.3
CONTORNOS	III	.35			.4	.6

Figura 10

Tiempos de respuesta en las pruebas de reconfiguración (tomado de Padilla 1990). Las observaciones se realizaron a un total de 14 parejas, 7 con alumnos de 6º y 7 con alumnos de 7º. El ejercicio I era una simple tarea de partición de cinco círculos, representando pasteles, en cuatro partes iguales. El ejercicio III es el que se presenta en la fig. 11.

La pregunta que se plantea en esta operación está en relación con la disminución de aciertos y el aumento en el tiempo de respuesta cuando sólo hay contornos como indicadores para la operación de reconfiguración. En efecto, varios factores inciden en lo que, en otra parte, hemos llamado la "visibilidad de la modificación mereológica": el carácter convexo o no convexo de la sub-figura obtenida, el recubrimiento parcial o no recubrimiento de las unidades figurales a tomar en consideración para la reconfiguración, es decir, su desdoblamiento, la necesidad o no de fraccionar una de las unidades figurales, etc. (Duval, 1988, p. 63, 66-67; Mesquita, 1989b, p. 65-66, 82-84, 91-95; Padilla, 1992, p. 27-33). Todos estos factores pueden facilitar la operación de reconfiguración o, al contrario, ocultar la posibilidad. Pero de todas maneras, la considerable prolongación de los tiempos entre el ejercicio I y aquellos en los cuales la operación de reconfiguración no tenía más índices que los contornos, muestra que cuando los alumnos tienen que trabajar a partir de una figura, la reconfiguración está lejos de ser un tratamiento familiar.

La sección de un objeto tridimensional que se tiene ante los ojos, que se puede examinar desde todos los puntos de vista que se desee y sobre el cual incluso se puede trazar el contorno de una sección plana, es también una operación nada obvia para los alumnos de 10º. En una experiencia realizada con 36 parejas durante 3 sesiones de trabajo, la mayoría se mostró incapaz de "concebir la diversidad de las sub-figuras planas extractadas de un cubo" suspendido desde uno de sus vértices: sub-figuras planas obtenidas por sección horizontal, sub-figuras con contorno no triangular (Rommevaux, 1991, p. 119). Así pues, muchos no pudieron avanzar en la resolución del problema planteado, la cual implicaba la selección de algunas sub-figuras planas para su tratamiento matemático y una coordinación de los resultados obtenidos en la representación del objeto tridimensional.

No es necesario seguir con ejemplos de operaciones vinculadas con otros tipos de modificaciones de una figura. Los que se han dado bastan para mostrar que la aprehensión operatoria, sin la cual las figuras no pueden cumplir su función de soporte intuitivo, debe ser el objeto de un entrenamiento. Esta aprehensión requiere no sólo la neutralización de la

organización perceptiva espontánea de la figura, sino que también tiene un costo temporal que varía considerablemente según el número, la heterogeneidad y las posiciones respectivas de la unidades figurales elementales que la componen.

Condiciones para el desarrollo de la aprehensión operatoria

Cada una de las operaciones relativas a la modificación de las figuras debe solicitarse explícita y sistemáticamente. Evidentemente, para eso es necesario proponer ejercicios cuya resolución pueda ser obtenida por medio de un tratamiento figural. Pero si esto es una condición necesaria evidente, que parece no ser tomada en serio en la enseñanza de las matemáticas, está lejos de ser suficiente. Son tres las condiciones que mínimamente deben ser tomadas en consideración.

La resolución del ejercicio propuesto no debe implicar *ninguna actividad de razonamiento* que exija la utilización de definiciones o de teoremas.

La resolución del ejercicio propuesto no debe implicar *ningún cambio de dimensión en la secuencia de sub-figuras.* Más generalmente, el trabajo con unidades figurales de dimensión 2 parece que debe preceder el tratamiento sobre las dimensiones figurales de dimensión 1 y, a fortiori, de dimensión 0. Los ejercicios para los cuales la resolución puede obtenerse por la operación de reconfiguración, cumplen perfectamente la primera y la segunda condición.

El ejercicio propuesto debe tener lugar en una *serie organizada en función de una variación sistemática de los factores de visibilidad* que facilite o retarde la aprehensión operatoria (Padilla, 1992). Este punto es esencial para poner en acto tratamientos figurales en todos los "casos de figura" y para reforzar la conducta de abducción. Es justamente la consideración de esta tercera condición lo que permite organizar un aprendizaje específicamente centrado en los tratamientos propios al registro de las figuras.

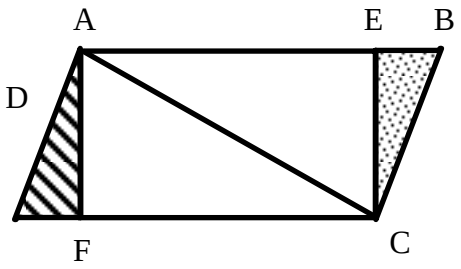
De manera más general, éstas tres condiciones presuponen que se dispone de una clasificación de los diferentes tipos de figura; clasificación susceptible de ilustrar no tanto un concepto o una definición, como lo que se ha llamado una "red de conceptos". Tal clasificación se fundamenta evidentemente en criterios semióticos y perceptivos de la organización de unidades figurales elementales.

Veamos dos ejemplos para ilustrar estas condiciones. El primero concierne la operación de reconfiguración y el segundo el de puesta en perspectiva.

Primer ejemplo: comparación de dos ejercicios que solicitan la reconfiguración. El primer ejercicio es el ejercicio III de la experiencia de Padilla cuyos resultados fueron presentados atrás. El segundo es el problema cuya resolución por los alumnos, por fuera de todo contexto de aprendizaje de la aprehensión operatoria, fue estudiado por Mesquita (1989a).

ABCD es un paralelogramo.

(CE) // (AF). ¿Por qué se puede decir que el área punteada y el área sombreada son iguales?



HFED es un rectángulo.

Mostrar la igualdad de las áreas de las partes sombreadas.

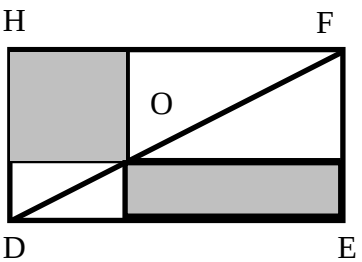


Figura 11.
Dos ejercicios que requieren reconfiguración. El enunciado completo del problema de la derecha se presentó atrás (fig. 4).

Si examinamos estos dos ejercicios desde el punto de vista de las condiciones enunciadas, podemos constatar que cumplen perfectamente las dos primeras. En efecto, para el primer ejercicio, basta con comparar respectivamente las dos reconfiguraciones de unidades figurales y las dos unidades figurales elementales (**I** y **II** en la secuencia que más abajo se presenta) para ver la igualdad de las áreas de la parte gris y de la parte negra. *El tamaño de* las partes a comparar en **I** y en **II** al tener los mismos valores de forma y las mismas características de contorno, *puede ser estimado perceptivamente por recubrimiento mental:* ya sea que las dos tengan el mismo tamaño o que una sea más grande que la otra. Se observará que este recubrimiento mental puede ser efectuado directamente con la parte gris y la negra (**III**). Pero la función heurística de la figura consiste precisamente en lo que la aprehensión operatoria permite ver en **I** y **II,** lo cual constituye la justificación de **III**.

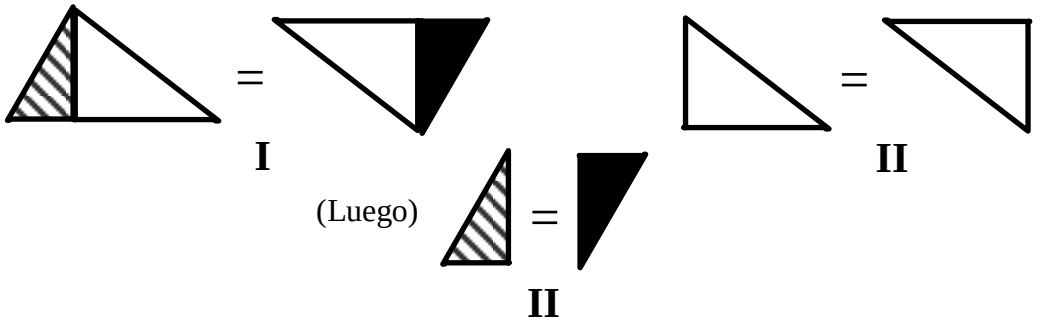


Figura 12. Despliegue de la aprehensión operatoria del primer ejercicio.

La secuencia de las comparaciones **I, II, III** de sub-figuras da la serie de pasos de razonamiento que ha de ser expresada en el registro discursivo. *Pero la expresión de esta serie de pasos de razonamiento puede hacerse de dos maneras por completo diferentes.* Puede hacerse sin recurrir para nada a las definiciones, a los teoremas y a los términos matemáticos: corresponde entonces a una "descripción" de las fases **I, II, III** (fig. 12). Esta descripción puede tomar una forma explicativa o una forma argumentativa, según el tipo de justificación empleada (Mesquita, 1989b). En este caso, hay congruencia entre la aprehensión operatoria y la actividad discursiva. La expresión de la solución también puede hacerse utilizando explícitamente las propiedades del paralelogramo y las hipótesis dadas en el enunciado. La solución está demostrada. En este caso, puede no haber congruencia entre la aprehensión operatoria y la actividad discursiva.

Hay una importante diferencia entre estas dos versiones discursivas, y ello no sólo desde un punto de vista matemático. La versión deductiva requiere que, para la explicitación de cada paso, se efectue un cambio de dimensión: para aplicar las definiciones, las unidades figurales de dimensión 2 tomadas en cuenta deben considerarse como configuraciones de

unidades figurales de dimensión 1 (trazos de los segmentos de los lados, trazo diagonal). Al contrario, no se requiere tal cambio de dimensión para la versión argumentativa. Para elicitar esta versión, es suficiente otro enunciado del ejercicio: ¿Por qué se puede decir que las dos partes sombreadas de la figura son iguales y pueden superponerse?"

El análisis de este ejercicio permite desglosar las siguientes características:

- es un ejercicio en el cual la operación mental de reconfiguración permite "ver" el derrotero de resolución considerando sólo las unidades figurales de dimensión 2.
- la aprehensión operatoria, en el registro de las figuras, es congruente con una explicación o una justificación argumentativa en el registro discursivo.

Naturalmente, encontrar una justificación argumentativa pertinente fundamentada en la aprehensión operatoria, no implica que se esté a la altura de demostrar el resultado. Esto, debido a que se trata allí de una actividad diferente que exige dos condiciones suplementarias: efectuar los cambios de dimensión en la aprehensión de la figura y haber tomado consciencia de lo que es una organización deductiva del discurso. Así pues, el aprendizaje por separado de la aprehensión operatoria y de la organización deductiva del discurso, son las condiciones previas para su coordinación.

El mismo análisis puede aplicarse al segundo ejercicio (fig. 11). La serie de sub-figuras que permite "ver" la igualdad de las áreas, se basa en la misma actividad de comparación de las sub-figuras complementarias. Sin embargo, este ejercicio presenta dos diferencias en la aproximación heurística de la figura. La primera se apoya en el hecho de que las dos partes (sombreadas) a comparar no pueden superponerse mentalmente. Su comparación es dudosa perceptivamente. La segunda se apoya en el hecho de que las unidades figurales que forman las partes complementarias a comparar no se fusionan en otra unidad figural. La no convexidad de la reconfiguración obtenida, constituye un factor que enmascara la aprehensión. Así pues, este ejercicio se diferencia del anterior en relación con la aplicación de los tratamientos propios al registro de las figuras. Y es lo que de hecho importa para un aprendizaje de la aprehensión operatoria. Al presentar este ejercicio después del otro, se puede ver cómo se cumple la tercera condición enunciada más arriba: para una operación dada es necesario hacer variar los factores de visibilidad.

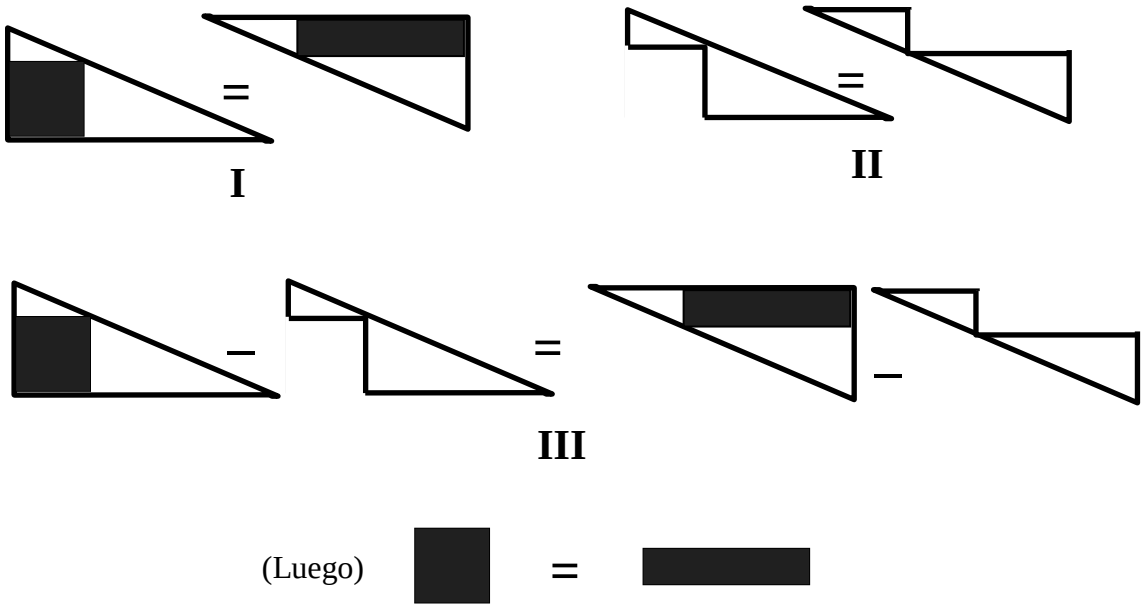


Figura 13. Despliegue (desglose) de la aprehensión operatoria del segundo ejercicio.

La variación que introduce este segundo ejercicio, evidentemente está lejos de ser la única que es necesario tener en cuenta para un entrenamiento en la operación de reconfiguración. También la elaboración de sesiones de entrenamiento para la aprehensión operatoria presupone un inventario sistemático de los factores de visibilidad y una clasificación de todos los "casos de figuras" engendrados por la variación de esos factores.

Segundo ejemplo: la clasificación sistemática de figuras puede representar situaciones de homotesia en el plano.

Una unidad figural puede ser ópticamente transformada en otra, con la misma orientación en el plano fronto-paralelo, que aparecerá más alejada o más próxima (la unidad figural correspondiente es entonces más pequeña o más grande). La unidad figural que es objeto de la transformación y la figura que es obtenida, pueden aparecer como dos figuras separadas o como figuras mas o menos superpuestas. Ellas forman una configuración homotética. Cuando la figura objeto y la figura imagen están superpuestas, puede ser difícil percibirlas en perspectiva y más difícil aún ver las parejas de segmentos a constituir por la igualdad de las relaciones de longitud, así como los puntos homólogos.

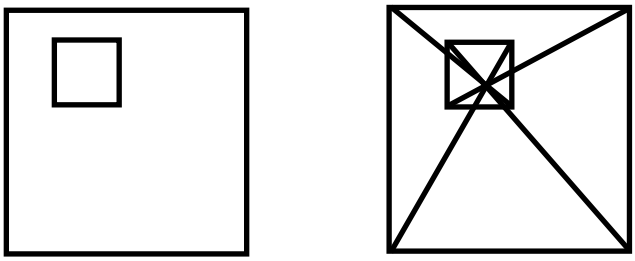


Figura 14. Configuración homotética con superposición de la figura objeto y la figura imagen. (Lémonidis, 1990, p.65).

Tenemos aquí una configuración homotética totalmente diferente a la que fue presentada antes (fig. 7). El problema que se plantea es el siguiente: ¿las diferencias entre estas dos configuraciones, las de las figuras 7 y 14, se pueden describir sólo a partir de la variación de factores concernientes a las unidades figurales? Y, de manera más general, ¿la consideración de todos los factores que pueden modificar la aprehensión de una configuración homotética plana permite poner de relieve una clasificación de todas las configuraciones homotéticas planas? Este problema fue resuelto en el trabajo de Lémonidis (1990, p. 50-61). Los factores que se retienen son:

- las posiciones respectivas de las unidades figurales: separadas, contiguas, recubrimiento parcial...
- la existencia, o no, de una simetría interna para las unidades figurales: cuadrado versus triángulo cualquiera,
- el carácter "exterior" del centro de homotesia en relación con la zona que incluye la figura objeto y la figura imagen (Lémonidis, 1990, p. 65). Esta variación perceptiva corresponde con la variación entre una relación de homotesia positiva y una relación negativa.

Haciendo variar estos diferentes factores se obtiene una clasificación de las posibles diferentes figuras de configuración homotética plana.

El interés de una clasificación tal es que permite determinar los casos de figura que se prestan para una operación de puesta en perspectiva y los que se resisten a esta. Para que una configuración homotética sea percibida en profundidad, es necesario que se cumplan dos condiciones:

- Ningún trazo (rectas que unen los puntos perceptivamente observables, por ejemplo los vértices) se confunde con los lados de la figura objeto o con los de la figura imagen.
- El centro de homotesia es un centro exterior. Esto excluye, por ejemplo, los casos en que la relación de homotesia es negativa.

Cuando estas dos condiciones se cumplen, el centro de homotesia corresponde, en el registro de la representación visual, a un punto de fuga. Si la segunda condición no se cumple, la configuración homotética se resiste a una puesta en perspectiva. Esto quiere decir que la figura imagen tiene una orientación inversa a la de la figura objeto. Esta inversión se ve en el caso de unidades figurales sin simetría interna. Pero eso es completamente "borroso" en el caso de unidades figurales con simetría interna. Si, al contrario, la segunda condición se cumple pero no la primera, estamos en la situación de figuras "ambiguas", es decir, de figuras que pueden ser vistas de dos maneras diferentes: "en profundidad" o "de plano".

La aplicación del teorema de Tales, en el caso de los triángulos homotéticos, permite darse cuenta de la importancia de esas dos condiciones. En efecto, tenemos dos figuras tipo posibles (fig. 15). Los triángulos de forma "cuerno" no cumplen la primera condición y los de forma de "mariposa" no cumplen la segunda.

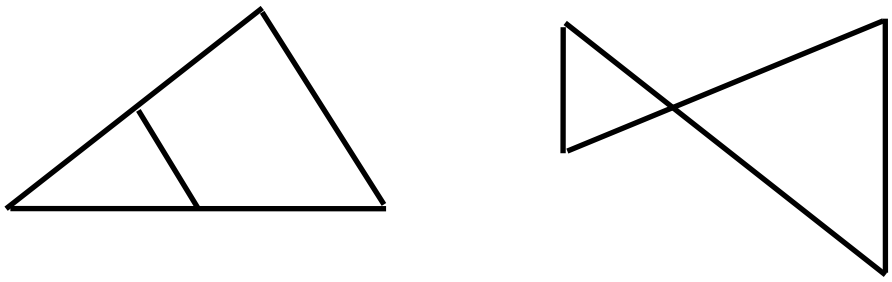


Figura 15. Triángulos homotéticos de forma de "cuerno" y de forma de "mariposa".

Utilizando el teorema de Tales, hay tres problemas de cálculo posibles. El primero se refiere a la determinación de la relación de los lados alineados de los triángulos respectivos; el segundo a la de los lados paralelos, y el tercero a la relación de los perímetros de los triángulos completos. Cuando la primera condición no se cumple, los dos últimos problemas pueden llegar a ser más difíciles para los alumnos que no hayan tenido un aprendizaje específico de los tratamientos figurales. Cuando la segunda cuestión no se cumple, los tres problemas relativos a los triángulos "mariposa" pueden ser difíciles para esta misma población de alumnos. Los resultados de una evaluación a alumnos de 10º muestran que los problemas con triángulos "mariposa" son menos exitosos que con los "cuerno", y que los problemas sobre los lados paralelos son menos exitosos que los que son sobre los lados alineados o sobre los triángulos completos (Lémonidis, 1990, p. 241-242).

Es pues manifiesta la necesidad del aprendizaje de los tratamientos que dependen de cada una de las operaciones de modificación figural. En el caso de la operación de puesta en perspectiva, una clasificación de las diferentes figuras de configuración homotética permite distinguir bien las que se prestan fácilmente a la puesta en perspectiva, las que se resisten a ello y las que son inestables para una aprehensión "de plano" o "en profundidad". Figuralmente, las primeras son las simples y las segundas las más complejas. Entonces, es posible organizar una enseñanza que tome en consideración el grado de complejidad del tratamiento figural y que ponga en correspondencia la variación de las figuras y las variaciones propias a la escritura de las relaciones de homotesia (Lémonidis, 1990, p. 68). Aunque se realice en un período muy breve la experiencia de tal aprendizaje, se pueden obtener resultados espectaculares en este punto preciso: en poco tiempo los alumnos están dispuestos para dilucidar sin dificultad configuraciones que con frecuencia dan lugar a confusiones. Y con la utilización del teorema de Tales, sobre el cual no se hizo ninguna alusión durante la experiencia, se redujeron considerablemente los fracasos frente a la variación de los problemas y de las figuras (formas "cuerno" y "mariposa"). De

manera más general, se verificó que, para el aprendizaje de situaciones relativas a la homotesia, el trabajo sobre las unidades figurales de dimensión 2 debe preceder al trabajo sobre las unidades figurales de dimensión 1 (relaciones de homotesia sobre una recta).

Con estos dos ejemplos se ha podido observar que el análisis de las figuras se hace a partir de las operaciones de modificación figural, y que para cada una de estas operaciones existen factores específicos que hacen más o menos visible la posibilidad de efectuarla sobre una figura dada. Es esta diversidad de operaciones para una misma figura lo que constituye la riqueza y la complejidad del registro de las figuras geométricas desde el punto de vista de los procedimientos heurísticos. Hay en esto un campo de estudio aún poco explorado pero esencial si se quiere comprender las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría (Duval, 1994).

La necesaria concientización sobre los diferentes tipos de funcionamiento de expansión discursiva

El tipo de conversación más natural en la actividad geométrica es el que consiste en pasar de un enunciado en lenguaje natural a una o varias representaciones figurales. El tipo de conversación inversa, la que consiste en describir una figura, exige la puesta en marcha de situaciones y de restricciones extra-matemáticas: comunicación de instrucciones elaborada a partir de una figura dada, o de una figura que se acaba de construir para que los destinatarios pueden reconstruirla. Con frecuencia y con objetivos diversos, este tipo de conversación se ha puesto en escena en tareas didácticas: observar el lenguaje espontáneo empleado por los alumnos de 6º a 9º en su aprehensión de las figuras, hacerles comprender el juego de restricciones inherente a toda figura geométrica, o hacerles descubrir la necesidad de recurrir a un lenguaje que se base en definiciones y que permita formulaciones de interpretación unívoca. Dicho de otra manera, en la enseñanza de la geometría se solicita el tipo de conversación inversa, para lograr que los alumnos entren en las restricciones del discurso matemático y para favorecer la articulación con el registro de las figuras.

La pregunta que se puede plantear al término de estos análisis es saber si este tipo de conversación "figura → texto que describe su construcción" es pertinente para favorecer la coordinación entre el registro de las figuras y el del discurso matemático. Se desprenden dos conclusiones del análisis que venimos de desarrollar.

En primer lugar, la utilización heurística de las figuras depende de los tratamientos figurales que se basan en las modificaciones mereológicas, ópticas o posicionales de la figura, y en las unidades figurales que son discernibles. Estos tratamientos figurales, que dependen del nivel de aprehensión operatoria de las figuras, pueden ser favorecidos o inhibidos por factores a la vez propios al registro figural y a cada una de las operaciones de modificación. Un aprendizaje específico de estos tratamientos figurales es, pues, necesario y no puede efectuarse a través de tareas de análisis de figuras que se efectúen desde el punto de vista de su constructibilidad con la ayuda de herramientas de dibujo o lógicas.

En segundo lugar, la utilización heurística de una figura se manifiesta por la conducta de abducción, la cual de ninguna manera puede compararse con un recorrido deductivo. Ahora bien, si en la resolución de un problema de geometría o en la búsqueda de la demostración de una proposición la interacción entre abducción y deducción se basa en la actividad cognitiva de conversión, ésta actividad se efectúa necesariamente en los dos sentidos. La conversión "figura → enunciado" de ninguna manera es asimilable a una descripción. Por otra parte, hemos visto con motivo de un ejemplo (fig. 4, 11, 12), que el pasaje en el sentido "figura → texto" por presentar el resultado obtenido con una simple aprehensión operatoria de reconfiguración, podía tomar formas totalmente diferentes: explicación, argumentación o demostración. Eso no es nada accidental. En efecto, hay diferentes tipos de funcionamiento de expansión discursiva, algunos correspondientes a un razonamiento y otros no. Además, hay diferentes formas de funcionamiento cognitivo del razonamiento, de los cuales algunos pueden expresarse a través de organizaciones redaccionales muy parecidas entre sí, y por el empleo de conectores lingüísticos comunes. Las conversiones

efectuadas en el sentido "figura → texto" exigen, pues, que los diferentes tipos de funcionamiento de expansión discursiva y que las diferentes formas de funcionamiento cognitivo del razonamiento se diferencien claramente.

Para permitir a los alumnos tomar conciencia de todas estas diferencias, es necesario proponer tareas específicas que tomen en cuenta todas las posibilidades ofrecidas por la diversidad de los registros de representación. Esto implica, evidentemente, que se disponga de un análisis cognitivo preciso de esas actividades complejas que se designan muy globalmente con las expresiones "razonar" y "comprender un texto". Los dos capítulos que siguen están dedicados al razonamiento y a la comprensión de textos.

capítulo v

EL RAZONAMIENTO

ου γαρ προς τον εξω λογον η αποδειξις, αλλα προς τον εν τη ψυχη
"La demostración no está en el discurso exterior sino en el interior del alma."
ARISTOTELES, *Anal. Post.*, I 76b 24-25

Con el término "razonamiento" por lo general se han designado recorridos del pensamiento muy diferentes. De una parte, los que consisten en inferencias explícitas: de una proposición dada (o de varias) se "deriva" la afirmación de otra proposición. De otra parte, los inherentes a no importa cuál acto de exploración: se procede por anticipaciones seleccionando las que son confirmadas. Los primeros están intrínsecamente ligados a la utilización de un lenguaje: son expansiones discursivas de proposiciones que fueron enunciadas primero a título de premisas. Los segundos, por el contrario, requeridos para toda adaptación a una situación nueva, no están intrínsecamente ligados a la utilización de un lenguaje: problemas para los cuales es suficiente una manipulación de objetos o de instrumentos para resolverlos, sin recurrir a una verbalización, espontáneamente movilizan esos recorridos de exploración.

Desde una aproximación psicológica y didáctica al razonamiento, la primera pregunta que se plantea es la de saber si estos dos tipos de recorridos del pensamiento, uno propiamente discursivo y el otro más vinculado a las acciones, no provendrían de procesos cognitivos comunes. Si tal fuera el caso, el hecho de que el razonamiento se desarrolle en el plano de la acción o en el del lenguaje debería considerarse como una manifestación secundaria en relación con los procesos comunes que el aprendizaje debería favorecer.

Defendiendo la tesis de una continuidad en el desarrollo de estos dos tipos de recorridos del pensamiento, Piaget acreditó la idea de procesos cognitivos subyacentes a todas las manifestaciones de razonamiento: "existe un funcionamiento común a todos los estadios desde el desarrollo sensoriomotor, del cual el funcionamiento de la inteligencia lógica parece ser la prolongación" (Piaget, 1968a, p. 325). En sus estudios sobre "La lógica del niño", buscó poner en evidencia "analogías funcionales" (1968a, p. 211) o "isomorfismos parciales" (1967b, p. 73) entre los comportamientos observables en los diferentes niveles del desarrollo de la inteligencia, desde el nivel sensoriomotor hasta el de las "operaciones formales" (1967b, p. 73-74). Así, el razonamiento por transitividad estaría actuando de manera concreta desde los siete años en tareas prácticas de seriación de objetos, mientras que en "el plano verbal, una pregunta exactamente igual en su forma" sólo sería resuelta hacia los 11-12 años (1967a, p. 9): "tal transitividad en el plano de la acción, constituye el equivalente funcional de lo que en el plano representativo será la transitividad de las relaciones seriales" (1964, p. 107-108). Piaget erigió en método de investigación esta búsqueda de isomorfismos entre los comportamientos propios a niveles de conocimiento diferentes (1967b, p. 74, 78). Escogió como situaciones experimentales las que requieren de manipulaciones físicas de objetos materiales y de observaciones, de preferencia las que demandan un tratamiento de representaciones semióticas (1967a, p. 5-10). Ésto, no sólo en las célebres pruebas de conservación, sino también en las que son la base de las conclusiones sobre el desarrollo del pensamiento formal en la adolescencia (1955). Entonces, no es en absoluto sorprendente que la adquisición del

razonamiento "hipotético-deductivo" y del de las "operaciones proposicionales" como la implicación, hayan sido presentadas como la prolongación, en el plano verbal, de razonamientos más directamente vinculados con la acción y con redcorridos del pensamiento de carácter exploratorio.

Ahora bien, tanto desde un punto de vista cognitivo como didáctico, la adquisición del razonamiento "hipotético-deductivo" y la hipótesis general sobre una continuidad entre los diferentes recorridos del pensamiento llamados de "razonamiento", chocan con serias dificultades. En primer lugar, en el movimiento de la Reforma de las "Matemáticas Modernas" hubo numerosas experiencias que intentaron en vano poner en juego las explicaciones piagetianas relativas al estadio de las operaciones formales: es trivial pero no inútil recordar aquí la amplitud y la persistencia de las incomprensiones a las cuales se enfrentaron el aprendizaje y la utilización de la implicación; en las últimas dos décadas lo han señalado muchos trabajos de investigación. En segundo lugar, tampoco se debe olvidar que la justificación de la tesis de continuidad entre los dos tipos de recorridos del pensamiento, se basa esencialmente en la noción de una función general de asimilación común a todos los organismos vivos (Piaget, 1968a, p. 353-366). Por último y sobre todo, hay obstáculos, aparentemente insuperables por parte de la mayoría de alumnos, relativos a la comprensión del funcionamiento del razonamiento deductivo, comprensión requerida para la demostración en matemáticas. Esto plantea un problema didáctico mayúsculo que no sólo no podrá resolverse sino que incluso no podrá enfrentarse seriamente, si se pretende explicar el desarrollo del pensamiento lógico a través de procesos cognitivos en los cuales el lenguaje está más o menos excluido.

Así pues, la pregunta sobre el aprendizaje de los recorridos del razonamiento vinculados con la utilización de un lenguaje aún está viva. Tales recorridos no aparecen como prolongación de las "operaciones concretas", a través de las cuales se explican las conductas de resolución de problemas que se encuentran en el marco de situaciones materiales. El postulado de una "equivalencia funcional" entre los razonamientos intrínsecamente ligados a la utilización de un lenguaje y los que están directamente vinculados con acciones de exploración, no permite analizar el funcionamiento de los primeros ni poner en evidencia las condiciones de su aprendizaje.

Las formas de razonamiento intrínsecamente vinculadas con la utilización de un lenguaje, natural o formal, son muy variadas. Clásicamente se distinguen el silogismo aristotélico, la deducción a partir de un sistema de axiomas y de definiciones, el razonamiento por el absurdo, las inferencias semánticas y la argumentación, esta última entendida como toda justificación o toda refutación espontánea de una declaración en una discusión o en un debate. La característica principal de todas estas formas de razonamiento es la de movilizar explícitamente **proposiciones**. Esas formas de razonamiento consisten en el pasaje, "justificado" o "necesario", de la enunciación de ciertas proposiciones en calidad de premisas, a la aserción de una nueva proposición en calidad de su consecuencia o su conclusión.

Se habrá observado que entre las formas de razonamiento que hemos mencionado no está la inducción, a pesar de que con frecuencia se la presenta como un razonamiento que procede a la inversa de la deducción. La inducción es una forma de razonamiento estrechamente dependiente del dominio de objetos a los cuales apunta. La experiencia con los objetos a los cuales se refieren las proposiciones enunciadas (experiencia que se basa en la observación de regularidades, en constataciones perceptivas, en anticipaciones...), también cuenta, al menos, tanto en las trayectorias de generalización como en las reglas de inferencia. El conocimiento del dominio de objetos a los cuales apunta el razonamiento o, más precisamente, una cierta familiaridad con los objetos independientemente del registro

semiótico en el cual se los representa, es una condición necesaria para un razonamiento inductivo. Por tanto, no puede ser considerado por entero como un razonamiento intrínsecamente ligado a la utilización de un lenguaje.

Lo que constituye la dimensión nueva de los razonamientos intrínsecamente vinculados con un lenguaje, en relación con las otras trayectorias de razonamiento, es la cuestión de su validez. Un razonamiento intrínsecamente ligado a un lenguaje no tiene que ser confirmado o invalidado por la experiencia, por el aporte de informaciones suplementarias o por el establecimiento de un consenso al interior de un grupo. Es, por sí mismo, **válido** o **no válido.** Únicamente los razonamientos válidos tienen fuerza y valor objetivo de demostración. Un razonamiento no válido no puede probar nada. Ahora bien, *la discriminación entre razonamientos válidos y razonamientos no válidos, así como la toma de consciencia de la diferencia epistémica que los separa,* constituye un gran obstáculo en la enseñanza de las matemáticas, así como en los estudios psicológicos y didácticos del razonamiento.

En las situaciones de aprendizaje, ese obstáculo puede delimitarse a partir de los siguientes dos fenómenos. En primer lugar, la validez de un razonamiento depende del respeto de las reglas que rigen la organización de las proposiciones entre sí, y no del contenido de las proposiciones. Ahora bien, se ha comprobado que el conocimiento de estas reglas sensibiliza muy poco para el reconocimiento del carácter válido o no válido de un razonamiento, de la misma manera como el conocimiento de las reglas gramáticales no ayuda a que la mayoría de los alumnos escriban correctamente o que tengan menos faltas de ortografía. Si bien un razonamiento no válido no prueba nada, sin embargo, puede convencer; al mismo tiempo, y con frecuencia, ¡un razonamiento válido no convence!.

En las aproximaciones psicológicas los trabajos de investigación chocan con la aparente oposición entre un funcionamiento "natural" del razonamiento, comandado por las representaciones de los sujetos, y un funcionamiento "lógico", comandado por reglas de validez. Sea que traten uno u otro de los modos de funcionamiento, las investigaciones no han logrado poner en evidencia procesos cognitivos comunes entre ellos.

Una primera línea de investigación se orientó hacia el reconocimiento de la validez de los silogismos aristotélicos (Woodworth & Sells, 1935; Wason & Johnson-Laird, 1972; Johnson-Laird, 1983) o, a partir de los trabajos de Piaget, hacia la utilización del esquema implicacional del "si ... entonces ..." (Wason & Johnson-Laird, 1972). ¡Las experiencias de estas investigaciones han constatado una ruptura entre el funcionamiento real del razonamiento en los sujetos y el funcionamiento del razonamiento según las leyes lógicas del pensamiento! Según ellas, el funcionamiento del razonamiento de los sujetos sería más sensible al contenido de cada una de las proposiciones que a la forma de sus vínculos. Pero estas investigaciones no han permitido formular hipótesis relativas a las condiciones de un aprendizaje de lo que es un razonamiento válido. Esto quizá se debe a un error teórico común de entrada: asumir como idénticos el funcionamiento cognitivo de un razonamiento, así como la comprensión de su validez, y la aplicación "espontánea" de leyes lógicas canónicas particulares a una forma con un contenido arbitrario.

La segunda línea de investigación es más didáctica. Se ocupa de los razonamientos "espontáneos" tal como se realizan en las prácticas discursivas comunes y corrientes o en las discusiones. Aquí, el razonamiento ya no es visto en relación con modelos "lógicos", sino en relación con factores de interacción social que pueden comandar o favorecer la producción. Ahora bien, la argumentación tiene como característica esencial no tener restricciones de organización que les sean inherentes en toda práctica espontánea del discurso. Esto es una ventaja para el estudio del funcionamiento real del razonamiento. Pero también es un gran inconveniente, pues la organización

discursiva de una argumentación obedece a criterios de pertinencia y no a criterios de validez. Hay una ruptura cognitiva profunda entre los razonamientos argumentativos que tratan de convencer, y los razonamientos demostrativos que prueban (Duval, 1992). La práctica de los primeros no permite entrar en el funcionamiento de los segundos.

La aparente oposición entre un funcionamiento "natural" del razonamiento que estaría comandado por las representaciones del sujeto, y un funcionamiento "lógico" comandado por las reglas de validez, parece pues encerrar en un dilema toda investigación sobre el funcionamiento y el aprendizaje del razonamiento: estudiar lo uno no conduce más que a constatar la no pertinencia de lo otro. ¿Es ineluctable este dilema?

Lo que llama la atención en casi todos los estudios psicológicos y didácticos del razonamiento es la ausencia de una reflexión teórica sobre lo que es el razonamiento. ¡Se actúa como si la lógica y la práctica de las matemáticas proporcionaran respuestas evidentes a esta pregunta! Ahora bien, es forzoso constatar que no es este el caso. En particular, hay dos preguntas teóricas previas que no se enfrentan en el marco de la lógica o en el de las matemáticas y que son esenciales para un estudio psicológico del funcionamiento del razonamiento y de su aprendizaje.

La primera pregunta apunta a la naturaleza del razonamiento, es decir, a lo que diferencia el razonamiento de otras formas de utilización del lenguaje. ¿Por qué ciertas formas de expansión discursiva, en lengua natural o formal, se imponen como razonamientos y no como descripciones, relatos, explicaciones, comentarios o instrucciones? ¿Qué es lo que permite decir que se trata de un razonamiento? Ni la validez del pasaje de las premisas a una conclusión, ni la presencia de conectivos pueden presentarse como los criterios, en razón de que si bien un razonamiento falso no es lógicamente un razonamiento, ¡no por ello es una descripción o una explicación!. Por otro lado, puede ocurrir que una demostración falsa no se detecte como tal inmediatamente y se imponga como si fuera "justa". Cuando se detecta la "falsedad" del razonamiento, deja de ser una demostración pero su funcionamiento discursivo sigue siendo el de un razonamiento. Igualmente, los conectivos no son característicos del razonamiento puesto que las explicaciones pueden recurrir con mucha frecuencia a ellos, además de que pueden haber razonamientos que no emplean conectivos (Duval, 1992).

La respuesta a esta pregunta sólo puede encontrarse en un **análisis funcional** de la forma de expansión discursiva común tanto a los razonamientos válidos como a los razonamientos falsos o a los razonamientos neutros desde el punto de vista de la validez, como la argumentación. A diferencia del análisis lógico, el análisis funcional considera las proposiciones en tanto que *proposiciones enunciadas dentro de un recorrido discursivo.* Esto quiere decir dos cosas. La primera es que las proposiciones son consideradas en tanto que unidades apofánticas. Su "sentido" está constituido a la vez por el contenido enunciado, es decir, por lo invariante en sus múltiples ocurrencias posibles, y por los diferentes valores que este contenido puede tomar en un universo cognitivo, en un universo representacional o en un universo relacional dado: valor epistémico, valor de verdad, valor social (cap. II, p. 112). La segunda, es que la proposición no puede separarse de su contexto de enunciación, el cual está conformado por los pasos del razonamiento y no por el razonamiento global o la situación del locutor. Es este contexto de los pasos del razonamiento lo que confiere a la proposición su status en la organización discursiva del razonamiento. La distinción estricta entre el valor epistémico de una proposición y su valor de verdad, y la que hay entre dos tipos de contexto de enunciación, uno teórico y el otro ligado a la producción de un paso de razonamiento, son las dos distinciones claves para un análisis funcional del razonamiento.

La segunda pregunta tiene que ver con la variedad de las formas posibles de razonamientos válidos o sólo pertinentes. Por ejemplo, ¿por qué la argumentación y el razonamiento deductivo,

que tienen grandes similitudes en el plano de la expresión lingüística, tienen efectos tan diferentes? Es decir, ¿por qué la primera puede provocar solamente la convicción mientras que el segundo tiene fuerza de prueba? O aún, ¿por qué el silogismo aristotélico y el razonamiento deductivo, que tienen grandes diferencias en el plano de la expresión lingüística, son dos formas de razonamiento igualmente válidas? y ¿por qué el primero resulta ser una forma de razonamiento costoso y muy limitado? Entonces, la organización particular de cada forma de razonamiento debe analizarse desde el punto de vista de su complejidad cognitiva. Esto remite a un **análisis estructural**. La distinción entre los status de las proposiciones ligados a los contextos de enunciación y a su contenido, es la distinción clave para este análisis estructural.

Estos dos tipos de análisis son los que permiten descubrir el funcionamiento cognitivo del razonamiento más acá de la codificación de sus formas lógicas y de las variaciones posibles de sus expresiones lingüísticas. Más precisamente, permiten descubrir los mecanismos discursivos por medio de los cuales un razonamiento puede cambiar la convicción subjetiva relativa a una proposición y, por medio de los cuales el reconocimiento de la validez de un razonamiento confiere simultáneamente fuerza objetiva de prueba y valor subjetivo de certeza a la proposición demostrada. Para eso, uno podría quedarse con un simple estudio psicológico del razonamiento, pero las exigencias propias del aprendizaje de lo que es una demostración matemática, requiere que también se tome en consideración el contexto teórico en el cual se efectúan los razonamientos.

La apropiación por parte de los alumnos de un contexto teórico, es decir, de un cuerpo de proposiciones iniciales que permita el desarrollo de razonamientos deductivos, evidentemente, es un problema muy amplia y tenebroso. Aquí, sólo abordaremos el aspecto estrictamente ligado al aprendizaje de lo que es una demostración: la comprensión de las definiciones. En relación con las definiciones se plantean dos problemas. El primero es el de la heterogeneidad de los recorridos de las definiciones: ¿la comprensión de una definición proviene de los mismos procesos cuando se plantea en un recorrido de clasificación de datos observados, o en uno de construcción de objetos o incluso en un recorrido de discriminación de objetos? El segundo problema es más fundamental. Ha sido el origen de lo que se ha llamado "la crisis de los fundamentos en matemáticas" y comprometió elecciones pedagógicas muy discutidas con ocasión de la Reforma de las Matemáticas Modernas en los años 70. Es el problema de la relación entre definición e intuición en la constitución de los conocimientos matemáticos: ¿puede darse un acceso cognitivo a los objetos definidos, independientemente de las definiciones mismas o previo a su determinación? Esta pregunta se plantea de manera muy particular en geometría, en donde tiene que ver con el papel intuitivo de las figuras y de la representación del espacio en el acceso cognitivo a los objetos matemáticos, en relación con las proposiciones que los enuncian. Estos dos problemas relativos a la comprensión de las definiciones llaman a un **análisis epistemológico**.

Los análisis funcional y estructural, que se sitúan más acá de un análisis lógico del razonamiento, y el análisis epistemológico que se sitúa más allá, dan luz a la complejidad cognitiva subyacente a la comprensión de lo que es una demostración. En particular, muestran que esta comprensión presupone la coordinación de actividades cognitivas independientes y heterogéneas. Son análisis que permiten determinar las variables pertinentes para tomar en consideración en las experiencias o en las observaciones concernientes al funcionamiento del razonamiento en los sujetos, o las condiciones de un aprendizaje de la demostración o las condiciones de un desarrollo de la argumentación. La **aproximación didáctica** al razonamiento depende de estos diferentes análisis sin que los pueda preceder o economizárselos.

En este capítulo vamos a desarrollar los diferentes análisis del razonamiento: análisis funcional, análisis estructural, análisis lógico, análisis epistemológico y aproximación didáctica.

ANÁLISIS FUNCIONAL DEL RAZONAMIENTO

De manera general, todo discurso que tenga por propósito probar la verdad de un enunciado o hacer que un interlocutor admita lo "bien fundamentada" que está una afirmación o su rechazo, se reconoce como "razonamiento". En otras palabras, para que un discurso pueda reconocerse como un razonamiento se necesita que cumpla las dos características siguientes:

- Estar orientado hacia un enunciado-objeto, es decir, hacia una proposición que se quiere justificar,
- Estar centrado en el valor, lógico o epistémico, de esta proposición y no en su contenido.

En matemáticas, cuando se trata de una demostración, el enunciado-objeto se cita al comienzo, y el discurso termina con la obtención de este enunciado a través de un procedimiento de expansión discursiva. En los razonamientos de tipo argumentativo, el enunciado-objeto no siempre está anunciado explícitamente como tal y el discurso no tiene un criterio estricto de cierre.

Por lo general, es suficiente percatarse que se cumplen estas dos características para afirmar que se está en presencia de un razonamiento y no de un relato, de una descripción o de una explicación. En efecto, en las descripciones, en los relatos, en las explicaciones, no hay enunciado-objeto sino un tema recurrente que nunca es susceptible de ser identificado con un enunciado particular, sea éste una proposición del texto, el título o una frase presentada como resumen. Pero si bien estas dos características son suficientes para distinguir el razonamiento de otros recorridos discursivos, sin embargo no permiten definirlo. Dejan en la sombra lo que constituye el funcionamiento cognitivo y no permiten responder a dos preguntas esenciales: ¿cómo es que un razonamiento puede probar la verdad de una proposición y provocar la convicción? ¿Cómo puede descubrirse la diferencia intrínseca entre un razonamiento válido y otro no válido y cómo puede tener efecto sobre la convicción?

Para responder estas preguntas es necesario volver a las unidades discursivas que todo razonamiento combina, las proposiciones, y analizar lo que constituye el "sentido". A diferencia del "sentido" de un término o de una expresión, el "sentido" de una proposición está determinado no sólo por su contenido semántico sino también por sus diferentes valores lógico, epistémico y social. Así, uno de los puntos decisivos para que los alumnos de 8º descubran lo que es una demostración, ha sido el valor de verdad de una proposición y su valor epistémico (Egret, 1989; Duval, 1991b). *El funcionamiento cognitivo del razonamiento depende en primera instancia de la interacción entre tres componentes del "sentido" de las proposiciones enunciadas en el razonamiento:* el contenido semántico, el valor lógico de verdad y el valor epistémico. Esta interacción es propia del funcionamiento del razonamiento y no interviene en otras formas de expansión discursiva como la explicación o la descripción.

Los componentes del "sentido" de un enunciado mas allá de cualquier contexto teórico de enunciación

El "sentido" de una proposición no se reduce sólo al contenido semántico de esta proposición, sino que también está constituido por los valores que toma por el hecho de su enunciación.

En primer lugar el valor epistémico. El **valor epistémico** es el grado de fiabilidad que posee lo que se enuncia en la proposición. En el instante mismo de su aprehensión, el contenido de una

proposición puede parecer evidente, cierto o sólo verosímil, plausible o simplemente posible, imposible, o incluso absurdo... Así, cuando un enunciado se "comprende", lo es como el enunciado de un hecho establecido, o como una simple hipótesis, una representación puramente imaginaria, una creencia, una trivialidad, una regla, una convención, una incoherencia, una inverosimilitud, etc. Eso depende del estado de los conocimientos de que dispone quien lo aprehende. Naturalmente, una misma proposición no necesariamente tiene el mismo valor epistémico para dos personas distintas. Así, una misma proposición puede tener valores epistémicos diferentes según los interlocutores: "verosímil" para uno y "absurdo" para otro, "cierto" para uno e "imposible" para otro (Duval, 1992, p. 46). Esta variación del valor epistémico de una persona a otra puede resultar de un estado de conocimientos diferente en las dos personas, o bien reflejar la pertenencia a medios sociales diferentes. Con frecuencia, esta variación da lugar a un debate o hace aparecer la necesidad de una justificación. Pero, haya o no variedad, el "sentido" que una proposición tiene para quien la comprende incluye, necesariamente, un valor epistémico[17].

En segundo lugar el **valor lógico de verdad**. Alude al hecho de que la proposición sea verdadera o falsa. A diferencia del valor epistémico, el valor lógico de una proposición no depende sólo de la comprensión de su contenido sino que *resulta de procedimientos específicos de verificación o de prueba*. Clásicamente se han considerado dos grandes clases de procedimientos. Uno, *relativo a la percepción*: más allá del registro de la lengua, hay un acceso a lo representado dado por el contenido de las proposiciones. Este acceso puede ser inmediato o instrumental, directo o sometido a procedimientos experimentales. El otro, *relativo al razonamiento*: la proposición puede estar situada deductivamente en una serie de otras proposiciones, donde las proposiciones anteriores tienen valor de verdad. Sin embargo, es importante observar que hay muchas proposiciones de las que no se puede determinar el valor verdadero o falso, aunque puedan parecer evidentes, plausibles, poco verosímiles o inverosímiles. Por esta razón, es importante tomar en consideración, como en las lógicas trivalentes, un tercer valor de verdad: "indeterminado"; proposiciones "que no tienen un valor lógico determinado como verdadero o falso, pueden tener un tercer valor indeterminado" (Lukasiewicz, 1963, p. 78).

El valor epistémico y el valor lógico de verdad, en tanto componentes del "sentido" de una proposición enunciada, deben poder explicitarse de la misma manera que su contenido.

La **explicitación del valor** epistémico de una proposición se hace a través de su engarce en aquellas expresiones que luego de Russell y Carnap se llaman "actitudes proposicionales", y más generalmente, a través del recurso a las construcciones que se llaman proposiciones completivas: "yo creo que...", "se admite que...", "estoy seguro que...", "es evidente que...", "es imposible que...", etc. Una misma proposición *p* puede ser engarzada en expresiones de actitud proposicional diferentes según el estado de conocimiento del sujeto que la comprende: "yo creo que p", "es evidente que p". ***La explicitación del valor epistémico traduce el valor epistémico que está vinculado a la comprensión del enunciado por parte de quien lo explicita***. La explicitación del valor de verdad igualmente puede hacerse a través de una expresión de actitud proposicional: "es cierto que...", "es falso que...", "aún no se ha demostrado que..." o a través de su engarce en las formas predicativas correspondientes: ".... es verdad". La explicitación de los valores epistémico o lógico de una proposición proviene de la función de reflexividad discursiva (cap. II, p. 134-136) mientras que la explicitación del contenido de una proposición proviene de la función referencial (cap. II, p. 123).

---

[17] La siguiente declaración de un niño de siete años, expresada bruscamente en el transcurso de una conversación sobre el tamaño de los océanos, es una perfecta ilustración del hecho de que el valor epistémico, de un lado, es relativo a un estado de conocimientos y, del otro, es parte integrante del sentido de un enunciado: *"Yo no creo que* el sol sea más grande que la tierra. Además, *nadie cree en eso...*".

Sin embargo, se observará que lo más frecuente es que el valor epistémico de una proposición quede implícito. Esto, por una simple razón: la comprensión de la proposición implica la determinación del valor epistémico de su contenido. *Para que se explicite el valor epistémico de una proposición, es necesario que haya un conflicto cognitivo potencial*... Tal conflicto no surge sólo en presencia de una contradicción lógica entre dos proposiciones, sino también en la presencia de una escogencia de valores epistémicos para una misma proposición. Este conflicto puede ser más fuerte cuando los valores epistémicos pueden ser tan extremos como "evidente" y "absurdo".

Hemos visto a alumnos que ante la pregunta "¿hay más números enteros que cuadrados de enteros?", examinaron el argumento de inclusión que favorece la respuesta "sí" y el argumento de la puesta en correspondencia biyectiva que favorece la respuesta "no" y optaron por la respuesta "no"; sin embargo, ante la pregunta "¿hay más números enteros que números pares?" la rechazaron de golpe por considerarla "un poco tonta" y porque "no quiere decir nada" (Duval, 1983, p. 395-400; 1985, p. 161-162). Plantear la segunda pregunta les pareció absurdo no porque repitiera la primera, sino porque ¡la respuesta "sí" era más "evidente" de cara a la partición "mitad-mitad" que induce el sentido de la expresión "número par"! Entonces, su respuesta inmediata fue explicitar el valor epistémico de esta proposición enunciada como pregunta y rechazar su pertinencia. Pero lo más sorprendente en toda esta experiencia fue la siguiente observación: la mayoría de los alumnos *quedaron más atónitos por el conflicto de valores epistémicos* generado por la proposición que forma el contenido de la pregunta "¿hay más números enteros que números pares?", *que por la contradicción resultante entre los dos valores de verdad* (verdadero, falso) que pueden atribuirse a la proposición que forma el contenido de la pregunta "¿hay más números enteros que cuadrados de enteros?".

Así pues, es necesario separar claramente el valor epistémico de una proposición y su valor de verdad. Estos valores no proceden exactamente de los mismos procesos de determinación: uno procede de la comprensión del contenido y el otro de procedimientos externos a la comprensión del contenido. Además, si todas las proposiciones enunciadas en lengua natural tienen un valor epistémico ligado a su comprensión, no todas tienen un valor lógico determinado (verdadero o falso). Por último, los valores epistémicos parecen tener una pregnancia más fuerte que los valores lógicos de verdad.

Estas relaciones entre el contenido de una proposición, su valor epistémico y su valor de verdad, pueden representarse de la siguiente manera:

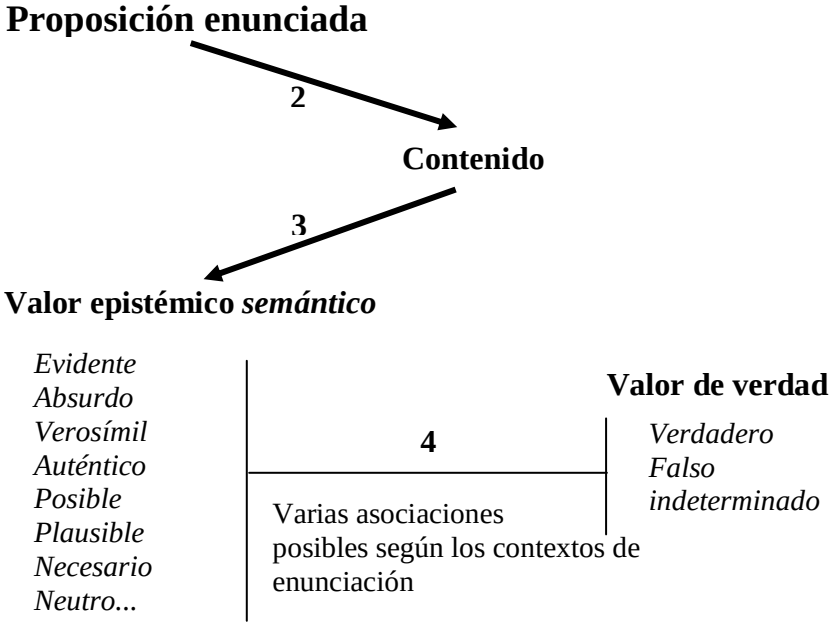


Figura 1. Relaciones entre los componentes del "sentido" de una proposición enunciada más allá de todo contexto teórico. La distinción entre los diferentes valores epistémicos es compleja, ya que corresponden a los diferentes grados de convicción así como a los valores modales a los que es susceptible una afirmación: hay un gran número de valores epistémicos entre los valores extremos absurdo o imposible y evidente o necesario. Por el contrario, sólo hay tres valores lógicos de verdad. La enunciación de una proposición en un contexto teórico conduce a enfrentar un segundo valor epistémico (ver figura 2, flecha 1).

Naturalmente, en tanto que el valor epistémico y el valor de verdad son dos componentes del "sentido" de una proposición enunciada, espontáneamente se tiende a identificarlas. Así, "cierto" y "verdad" parecen ser calificativos tan inseparables que a veces uno puede ser empleado en lugar del otro. Por tanto, su separación puede parecer inútil. Pero no separarlos equivale a olvidar que hay múltiples puestas en correspondencia posibles entre los valores epistémicos y los tres valores de verdad (fig. 1, raya 4), y que la correspondencia cambia según las disciplinas de conocimiento.

Así, por fuera de las matemáticas, el valor "verdad" por lo general se asocia al valor epistémico "evidente". Para que una proposición sea evidente basta que su contenido corresponda a la inmediatez de los datos percibidos o a observaciones repetidas y variadas. "Evidente" y "verdad" son inseparables en las disciplinas en que los enunciados "de constatación" juegan un papel importante. Si no fuera así, toda posibilidad de un conocimiento fundamentado en constataciones y en observaciones se echaría a perder. Por el contrario, en matemáticas, en donde la percepción está excluida de los procesos de prueba, el único vínculo posible es el que hay entre el valor epistémico "necesario" y el valor lógico "verdad". "Evidente" es el valor epistémico propio al carácter de inmediatez o de primitividad del contenido de una proposición, independientemente de su relación con otras proposiciones; "necesario" es el valor epistémico propio a la derivabilidad deductiva de una proposición en relación con otras.

No separar valor epistémico y valor lógico de verdad corresponde a eludir la pregunta sobre su interacción: ¿el valor epistémico se deriva del o determina al valor de verdad, o por el contrario, cada uno se determina de manera independiente? Esta pregunta es esencial para saber a través de qué procesos la discriminación de la validez de un razonamiento conduce a la convicción, cualquiera que sea el valor epistémico que haya sido fijado con anterioridad a la conclusión de ese razonamiento.

Pero antes de examinar esta pregunta, es necesario analizar la modificación del "sentido" que se produce cuando una proposición es enunciada en el marco de una teoría, es decir, en relación con un cuerpo de proposiciones cuyos valores epistémicos y de verdad han sido determinados previamente.

La modificación del "sentido" de un enunciado en un contexto teórico de enunciación

Una proposición enunciada además de un "sentido" tiene un **status que depende del contexto de enunciación.** El status de una proposición es lo que determina su lugar en la organización discursiva de un conjunto de proposiciones, o lo que determina el papel que juega en la expansión discursiva. Toda organización de proposiciones en un recorrido discursivo específico (teoría, razonamiento, explicación, fábula...) implica la determinación de status específicos.

Un marco teórico se caracteriza por un conjunto de **status teóricos** que determinan su organización y las posibilidades de su desarrollo: definición, axioma, regla, hipótesis, etc. Una proposición no puede estar enunciada en un marco teórico sin que tome alguno de esos status. La

explicitación y la distinción de los diferentes status posibles para una proposición enunciada en un marco teórico, naturalmente, es muy antigua. Tal explicitación y distinción son la base de los *Elementos* de Euclides. Lo que se llama la "forma euclidiana", o inncluso el razonamiento *"more geometrico"*, se basa en la explicitación sistemática y previa del status teórico conferido a las diferentes proposiciones que van a servir de apoyo para la producción de los razonamientos; "la forma euclidiana es la forma demostrativa" (Caveing, 1990, p. 114). A pesar de que la lista de los diferentes status teóricos distinguidos haya sido modificada un poco después de Euclides, e incluso que algunos status teóricos ya no estén asociados al mismo valor epistémico que tenía en los tiempos de Euclides[18], el principio de un explicitación previa y sistemática del status teórico permanece igual. Por fuera de las matemáticas, no hay categorización tan sistemática y tan apremiante del status de las proposiciones. En esas otras disciplinas, por lo demás, se recurre a categorías de naturaleza diferente: principio, ley, regla, artículo de contrato...

Un paso de razonamiento se caracteriza por un conjunto de **status operatorios** que determinan su organización interna y las posibilidades de su funcionamiento. Generalmente, para definir el razonamiento uno se contenta con mencionar la relación entre dos status operatorios: el razonamiento es el pasaje de las *premisas* a una *conclusión.* En razón de la posibilidad de inferencias directas, pasa en silencio el status operatorio de los *tercer-enunciados.* (Blanché, 1980). Pero la organización de un paso de razonamiento deductivo efectuado en un marco teórico, requiere que el pasaje de las premisas a la conclusión se haga a través de una tercera proposición (definición, teorema...) que pertenece al corpus del marco teórico. En un razonamiento deductivo, las proposiciones sólo pueden movilizarse a condición de tener uno de estos tres status operatorios.

En los razonamientos matemáticos, las proposiciones tienen pues un doble status, teórico y operatorio, ya que provienen de dos organizaciones: la del marco teórico que constituye la reserva de "medios" de la que se puede sacar aquello de lo cual "se tiene necesidad de demostrar" el resultado pedido o buscado, y la del paso de razonamiento en el cual las proposiciones se movilizan. De manera más general, se puede considerar que el marco teórico funciona como un contexto global para la proposición enunciada y que la organización del paso de razonamiento funciona como un contexto local. Se ve entonces que el **contexto global** es el conjunto de los discursos previos en relación con los cuales se organiza el discurso (aquí el razonamiento) que se produce. El **contexto local** es la organización propia al discurso que se produce. Estos dos niveles de contexto son componentes del sentido de las proposiciones enunciadas, esenciales no sólo en el razonamiento deductivo, sino también en muchas otras formas de discurso por fuera de las matemáticas.

Habiendo hecho presentes estas observaciones sobre el lazo entre los diferentes status posibles de una proposición y la organización de un recorrido discursivo, llegamos al primer punto clave del análisis del funcionamiento cognitivo del razonamiento: el *status teórico de una proposición determina su status operatorio posible para un paso de razonamiento*[19]*, e induce un valor epistémico propio independiente del valor inducido por la comprensión del contenido de la proposición.* Esto provoca una consecuencia inmediata para el análisis de los razonamientos válidos y para el análisis de las demostraciones. El contexto de enunciación de la proposición, y en consecuencia, su status, al ser prioritario sobre su contenido, sólo toma en consideración el valor epistémico teórico. Dicho en otras palabras, cuando una proposición es enunciada en un marco teórico, el valor epistémico suplanta, o inhibe, el valor semántico. Es de esta manera como el "sentido" de la proposición se encuentra modificado por el juego de su enunciación (ver fig. 2).

---

[18] Desde el siglo XIX los axiomas tienen un valor epistémico de convención, luego de haber tenido, en el período griego, el de evidencia.

[19] Con exclusión del status de conclusión que está determinado únicamente por la organización constitutiva de un paso de razonamiento (ver más adelante fig. 3)

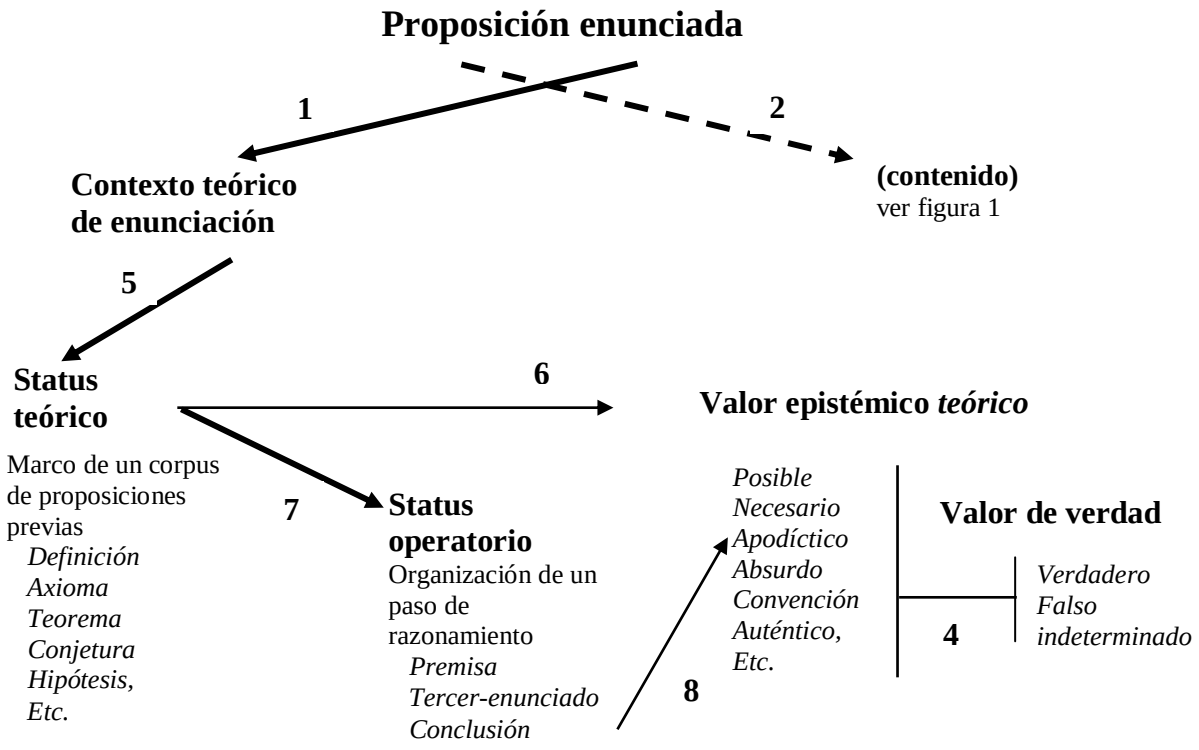


Figura 2. Modificación de las relaciones entre los componentes del "sentido" de un enunciado por la introducción de un contexto teórico. Al comparar este esquema con el anterior (fig. 1), se puede ver que la aparición de un valor epistémico teórico inducido por el status teórico, inhibe el valor epistémico semántico inducido por el contenido.

Se ve pues que la comprensión de un razonamiento válido o de una demostración, presupone que se haya tomado consciencia de la existencia de este segundo valor epistémico teórico, y del hecho de que sustituye el valor epistémico semántico. Si no es así, el valor epistémico semántico, que por lo general es diferente del valor epistémico teórico, es lo que continúa dominando. Esto permite ya señalar la dificultad secreta e inasequible a la cual se enfrentan los alumnos cuando se trata de hacer un razonamiento en matemáticas, y más particularmente en geometría. De hecho, para ellos sólo hay un valor epistémico, el inducido por la comprensión del contenido de la proposición; este valor será tanto más fuerte cuanto corresponda a una evidencia perceptiva dada por una figura. Este valor epistémico semántico es inmediatamente asociado por los alumnos con el valor lógico de verdad. Entonces, no tiene ningún efecto querer etiquetar las proposiciones como hipótesis o teoremas para hacer predominar el valor epistémico teórico, ya que eso no modifica en nada el "sentido" que las proposiciones tienen para los alumnos. Eso no les ayuda a descubrir el valor epistémico teórico "necesario" y su predominancia sobre el valor epistémico semántico. Ellos se quedan en un funcionamiento del tipo representado en la figura 1 y para nada presentan un funcionamiento del tipo representado en la figura 2. Para que pasen de un modo de aprehensión a otro, es necesario que los alumnos perciban el funcionamiento de un paso de razonamiento en la totalidad de sus aspectos.

La interacción entre valor epistémico y valor de verdad en un paso del razonamiento

De los análisis precedentes se desprenden tres puntos:

- El valor epistémico y el valor de verdad de una proposición son dos valores distintos, aunque con frecuencia sean psicológicamente indisociables,
- En un contexto teórico, el valor epistémico depende del status de la proposición y no de la comprensión de su contenido,
- El status teórico determina el status operatorio de las proposiciones y su valor epistémico teórico.

Estos tres puntos nos permiten abordar la pregunta sobre el funcionamiento cognitivo del razonamiento: ¿cómo es que un razonamiento válido, efectuado en un marco teórico, puede *demostrar* una proposición C y provocar la *convicción* del sujeto sobre su *verdad* simultáneamente? Y ya que el valor epistémico y el valor de verdad son dos componentes del "sentido" de una proposición enunciada, se puede formular la pregunta así: ¿cómo puede transformarse el "sentido" de una proposición C a través de un razonamiento válido para el sujeto que efectúa el razonamiento?

Entonces, deben distinguirse tres fases en el proceso de esta transformación (fig.3):

Fase 1 (Antes). La proposición C que tiene el status teórico de conjetura o de pregunta tiene un valor epistémico teórico (posible o verosímil) asociado al valor de verdad "indeterminado".

Pero para un sujeto que aún no hace la diferencia entre el valor epistémico teórico y el valor epistémico semántico, es el contenido lo que induce el valor epistémico (flecha punteada). Cuando este valor epistémico semántico es de lo evidente o de lo absurdo, la exigencia de un razonamiento resulta inútil o inaceptable. En tanto lo evidente está asociado con lo verdadero así como lo absurdo con lo falso, no hay que probar lo que es verdadero. El reconocimiento del valor verdadero para una proposición elimina la exigencia de su prueba. Este principio, que comanda todos los recorridos intelectuales, provoca naturalmente incomprensión y resistencia frente a la exigencia de demostración. Así, una proposición que es evidente simplemente por la comprensión de su contenido o a través de un procedimiento complementario de constatación visual ("eso se ve en el dibujo"), es automáticamente verdadera. Por tanto, no tiene que ser probada. Sólo las proposiciones cuyo valor epistémico semántico está asociado al valor lógico Indeterminado, pueden tener necesidad de una prueba.

Hemos observado en un alumno de 8º una manifestación original de esta resistencia a probar que es verdadero porque es evidente. Ante un problema de geometría en el que la proposición que se debía probar anunciaba una relación evidente con la figura, este alumno propuso dos razonamientos diferentes que probaban dos proposiciones diferentes, subrayando que uno tomaba en consideración la figura y el otro no. Ahora bien, ¡el primer razonamiento tomó como hipótesis aquello que la pregunta pedía probar y que era evidente en la figura! Por el contrario, en el segundo razonamiento no realizó este giro "vicioso" del status de las proposiciones; tomó como enunciado-objeto una proposición distinta a la fijada por la pregunta. Este alumno, pues, efectuó dos razonamientos que tuvieron en común evitar demostrar lo que era evidente en la figura (Duval, 1991b, p. 255-256).

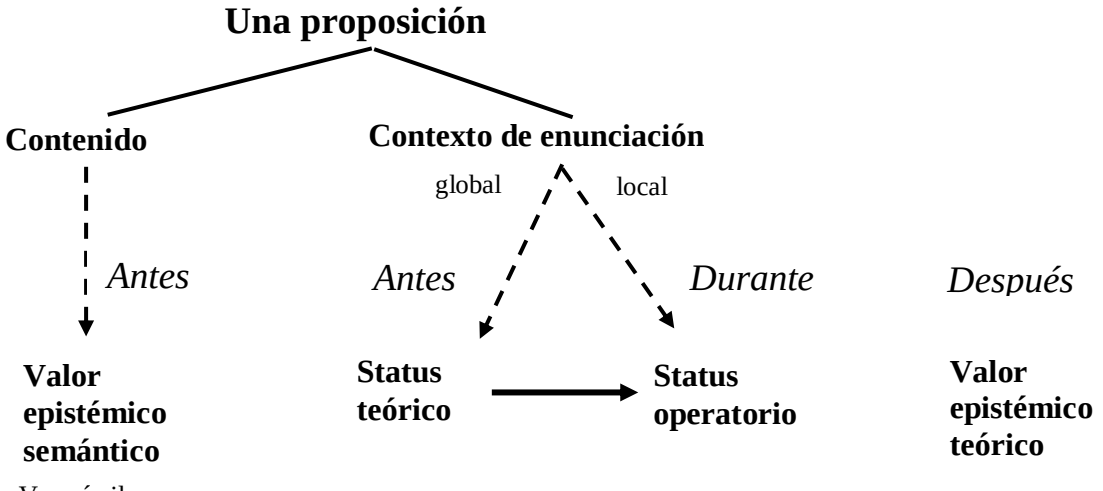


Figura 3. Transformación del valor epistémico teórico y por tanto del "sentido" de una proposición C en el funcionamiento de un paso de deducción, el cual pone en juego por lo menos tres proposiciones.

Fase 2 (Durante). La organización de las proposiciones en pasos de deducción se hace según su status operatorio, el cual es determinado por el status teórico. La regla de pasaje de las premisas a la conclusión a través del tercer-enunciado, se hace con la operación de extracción (p. 244). En estas condiciones de organización y con esta operación de extracción, la conclusión adquiere el valor epistémico teórico necesario o apodíctico.

Sin adelantarnos a los análisis que vienen después, indiquemos únicamente que hay un paso de razonamiento en el cual este pasaje no se hace a través de la operación de extracción. La organización de las proposiciones en un paso de razonamiento no se basa en esa ocasión en el status operatorio sino en las relaciones semánticas entre sus contenidos. Se trata allí de un modo de organización más "natural" porque es más próximo a la práctica espontánea del discurso.

Se ha comprobado que también es decisiva la diferenciación entre una organización de los pasos de razonamiento centrada en los status operatorios y una centrada en el contenido de las proposiciones. Cuando no se hace esta diferenciación, el funcionamiento de un paso de deducción se asimila al de un simple paso de argumentación. En este caso, la conclusión a la que se llega no puede adquirir para el sujeto el valor epistémico de lo apodíctico. Hemos podido observar alumnos que producen razonamientos cuya expresión podría ser la de un paso de deducción, pero que en realidad era la de una argumentación (Duval, 1991b, p. 247-248).

Fase 3 (Después). *Lo que produce un razonamiento válido no es la verdad de la conclusión sino su necesidad.* Dicho de otra manera, el razonamiento transforma el valor epistémico de la proposición C: ésta adquiere el valor epistémico de lo necesario que no tenía antes del razonamiento. Y, como Aristóteles ya lo había señalado, debido a que la aserción de una proposición (en un contexto teórico determinado) es necesaria, esta proposición es verdadera (*Anal. Post.* 74b 14-20). La comprensión del funcionamiento de un razonamiento válido implica tomar consciencia de este valor epistémico. **El pasaje del valor epistémico semántico "evidente" al valor epistémico teórico "apodíctico" para una proposición, constituye una ganancia epistémica que incluso los alumnos de 8º pueden percibir fácilmente:** el razonamiento no sólo "demuestra" el enunciado-objeto, sino que "convence" a los alumnos que han comprendido el funcionamiento del razonamiento deductivo (Duval, 1991b, p. 252-257).

Esto nos permite encontrar una ley más general. El conocimiento de un valor lógico de verdad depende del valor epistémico que le es reconocido, y no a la inversa. Esto vale tanto para el valor epistémico teórico como para el valor epistémico semántico. Esta subordinación del reconocimiento del valor de verdad al reconocimiento del valor epistémico puede sorprender. En efecto, hay proposiciones de las que se "acepta" la verdad, sin que por eso tengan algún valor epistémico para quien lo acepta. Pero si se examina esa situación, se observa que se trata siempre de proposiciones cuyo contenido no se comprende sea por el vocabulario empleado o bien porque hacen falta conocimientos previos. Por ejemplo, es la situación del "profano" ante proposiciones matemáticas, o científicas, cuando no sabe lo que "quieren decir". En estas condiciones, la aceptación de la verdad de una proposición se basa sólo en la confianza que se tiene en la competencia y la fiabilidad de quien la enuncia. Los argumentos que se presentan a favor de la proposición de la cual se acepta la verdad, no se perciben de ninguna manera como justificaciones. La aceptación de la verdad de una proposición cuyo contenido no se comprende, y que por tanto no tiene valor epistémico, no puede ser más que una aceptación totalmente neutra que no confiere ninguna certeza a quien la acepta.

Un razonamiento cuyas proposiciones son enunciadas en un contexto teórico, transforma entonces el valor epistémico de la proposición que prueba. *La certeza intrínseca al descubrimiento de la necesidad de una proposición fundamenta la de su verdad, y no a la inversa.* Naturalmente, un razonamiento tal sólo puede funcionar cognitivamente como razonamiento para quien ha tomado consciencia del desdoblamiento del valor epistémico y ha descubierto una organización del razonamiento centrado sólo en el status de las proposiciones. Para quien permanece focalizado sólo en el contenido de las proposiciones, como en el funcionamiento ordinario del discurso, ni ese desdoblamiento ni esa organización diferente del razonamiento son siquiera presentidas.

De tal manera pues, se comprende la naturaleza y la importancia del salto que se debe efectuar para comprender los recorridos del pensamiento matemático y el papel central que juega la demostración. Para romper la ligazón tan fuerte que existe entre "verdadero" y "evidente", por ejemplo, el asunto no es establecer diferencias entre niveles de capacidad de abstracción y de conceptualización, sino descubrir un modo de expansión discursiva distinto al de la expansión natural (cap. II, tabla 3, p. 129) y discriminar los diferentes componentes del "sentido" de una proposición. Tal descubrimiento y tal discriminación requieren de situaciones específicas de aprendizaje.

Una definición funcional del razonamiento

En los párrafos anteriores estuvimos interesados esencialmente en los razonamientos que articulan proposiciones enunciadas en un contexto teórico. ¿Cómo son los que articulan proposiciones que no son enunciadas en un contexto teórico?

De inmediato se impone una observación. Al no estar enunciadas en un contexto teórico, las proposiciones no tienen status teórico. Esto quiere decir que tanto su valor epistémico como su organización en un razonamiento, se determinan a partir de su contenido y que su status operatorio no está fijado previamente. Habitualmente encontramos descrito este tipo de razonamiento como "argumentación".

La argumentación tiene como propósito modificar la naturaleza o el grado de convicción que un interlocutor tiene sobre una proposición, de manera que la acepte o la rechace. Dicho de otra manera, la argumentación tiene el propósito de hacer cambiar el valor epistémico semántico que un enunciado-objeto puede tener para el interlocutor al que se dirige: hacer aceptar como plausible lo que él estima imposible, hacer reconocer como poco plausible lo que él considera evidente, absurdo lo que considera verosímil o incluso cierto... El logro de esta modificación depende de dos factores: el "peso" de los argumentos desarrollados y la distancia entre el valor epistémico inicial y el valor epistémico que se quiere hacer reconocer (Duval, 1992).

De inmediato se ve que la argumentación juega sobre una gama de valores epistémicos mucho más amplia y mucho más matizada de lo que lo hace un razonamiento válido, el cual apunta sólo a los valores de necesidad y apodíctico. Esto tiene una consecuencia importante: la modificación del valor epistémico no provoca automáticamente la modificación del valor lógico de verdad. La argumentación no busca ante todo "probar" sino "convencer". Naturalmente, los valores epistémicos extremos están asociados con los dos valores de verdad determinados: "evidente" está asociado a "verdad". Pero esta asociación no debe llamar a ilusiones. En efecto, si, como lo hemos visto antes, el reconocimiento del valor de verdad inhibe toda exigencia de prueba y toda posibilidad de discusión, por el contrario, ¡siempre se puede argumentar sobre proposiciones "evidentes"!

La comparación de los razonamientos que articulan proposiciones enunciadas en un contexto teórico y los razonamientos que articulan proposiciones enunciadas por fuera de todo contexto teórico, nos permite ver tres cosas:

- El propósito de todo razonamiento es la modificación del valor epistémico, semántico o teórico, del enunciado-objeto,
- Esta modificación puede tener dos consecuencias diferentes sobre el valor de verdad,
- Las proposiciones intervienen en un razonamiento en función de su valor epistémico ya sea de manera indirecta por su status teórico, o de manera directa por su contenido.

El **razonamiento** puede entonces definirse como **la forma de expansión discursiva que está orientada hacia un enunciado-objeto con el propósito:**

- *De modificar el valor epistémico, semántico o teórico, que ese enunciado-objeto tiene en un estado de conocimiento dado, o en un medio social dado,*
- *Y, en consecuencia, de modificar el valor de verdad cuando se cumplen ciertas condiciones particulares de organización discursiva.*

Esta definición funcional del razonamiento permite poner de relieve las características comunes a las formas de razonamiento generalmente reconocidas como irreductibles entre sí: los que responden únicamente a criterios lógicos, como la deducción, y los que responden primero a exigencias dialógicas, como la argumentación. Son características que distinguen la expansión

discursiva propia al razonamiento de las propias a las de una descripción, de una explicación o de un relato.

Tomemos, por ejemplo, el caso de la explicación. La explicación puede presentar algunas similitudes con el razonamiento: organización en función de un enunciado-objeto (el que expresa el fenómeno que se debe explicar), recurso a otros enunciados para dar una "razón", utilización de conectivos comunes ("porque...", "en razón de...", Duval, 1992, p. 41). Superficialmente, una explicación puede presentar las mismas marcas lingüísticas que una argumentación o que una demostración. Sin embargo, la forma de su expansión discursiva es diferente en dos aspectos.

El primero es que la explicación no tiene como propósito modificar el valor epistémico del enunciado-objeto, sino aportar elementos nuevos de información sobre el fenómeno que se quiere explicar mencionado en el enunciado-objeto (Grize, 1990, p. 15). En efecto, explicar un fenómeno es situarlo en el sistema en que se produce y del cual proviene (máquina, circuito, organismo, sistema teleológico de un individuo, etc.). Desde este punto de vista, la explicación es más próxima a una descripción que a un razonamiento. En una descripción, cada proposición nueva aporta una información complementaria al contenido de la temática de la descripción, y por consiguiente, a la representación mental del objeto descrito. Igualmente, en una explicación cada proposición nueva enriquece la descripción del sistema teleológico de relaciones, o del mecanismo de funcionamiento, en el cual el fenómeno que se quiere explicar está situado: la expansión discursiva de una explicación puede así explicitar, enriquecer o modificar el contenido de una pregunta planteada. Por otro lado, una explicación podría presentarse tanto bajo la forma de esquema, de diagrama, de una secuencia de figuras como bajo la forma de texto. Basta consultar un modo de empleo, por ejemplo, para darse cuenta de eso. E incluso en matemáticas, la explicación no está vinculada con un lenguaje: por lo demás, ¡esto es lo que justifica el recurso al registro de las figuras! Y esto, no sólo en geometría. La representación de los números enteros a través de una disposición figural de puntos se ha utilizado desde tiempo atrás para explicar proposiciones aritméticas (Bresson, 1987, p. 937-939). *La explicación, a diferencia del razonamiento, no está ligada a un lenguaje.*

El segundo aspecto es que los valores epistémicos de las proposiciones no juegan ningún papel en la expansión discursiva. Esto es muy simple de verificar. La explicitación de los valores epistémicos a través de actitudes proposicionales no aporta nada a la comprensión de una explicación. Por el contrario, la explicitación de los valores epistémicos juega un papel esencial en la comprensión de una argumentación y en el control de una demostración. Esto refleja la diferencia epistemológica clásicamente reconocida entre explicación y razonamiento: una explicación describe relaciones de causalidad entre los fenómenos, un razonamiento desarrolla las relaciones de dependencia discursiva entre las proposiciones.

Es sólo en los razonamientos, y no en las descripciones, las explicaciones o los relatos, que el valor epistémico de las proposiciones, y a fortiori su transformación, es un factor esencial de expansión discursiva. La expansión discursiva de los razonamientos presenta además otra particularidad. Orientada hacia un enunciado-objeto, cuyo valor epistémico trata de cambiar, la expansión discursiva de los razonamientos no parte de ese enunciado y no explicita el contenido[20]; se refiere a otros enunciados que no tienen necesariamente un lazo semántico con el contenido del enunciado-objeto. Esos enunciados son considerados como datos de partida o como proposiciones

[20] En este sentido, el trabajo de elaboración de una definición con el método del contraejemplo, proviene de otro recorrido cognitivo. Este trabajo se dirige esencialmente a la relación entre el contenido de una proposición y un dominio de objetos que pretende caracterizar de manera exhaustiva: las modificaciones sucesivas al contenido de la definición se dan en función de los contraejemplos encontrados. Aquí, no es considerado el vínculo entre proposiciones en función de su valor epistémico respectivo. Volveremos sobre esta cuestión de las definiciones en la quinta parte de este capítulo.

de apoyo (los argumentos, los teoremas, las definiciones...) cuyo valor epistémico está más allá de cualquier discusión. La modificación del valor epistémico de un enunciado-objeto depende, pues, de la escogencia de los datos de partida y de las proposiciones de apoyo. Esta particularidad de la expansión discursiva provoca una organización discursiva muy específica para los razonamientos, cuyo estudio proviene de un análisis estructural.

ANÁLISIS ESTRUCTURAL DEL RAZONAMIENTO

Para lograr el enunciado-objeto, puede bastar un solo **paso de razonamiento** o, por el contrario, pueden necesitarse varios pasos. La organización de un paso de razonamiento y de la un "**encadenamiento**" **de pasos de razonamiento** no proviene del mismo nivel de organización y no son de la misma naturaleza. Un paso de razonamiento articula proposiciones en función de su status operatorio: modifica el valor epistémico de su conclusión. Un encadenamiento de pasos articula "bloques" de proposiciones ya organizadas entre sí: asegura la continuidad entre las conclusiones obtenidas en cada paso y la que corresponde al enunciado-objeto.

Estos dos niveles de organización, pues, no deben confundirse como lo hace la presentación clásica de los razonamientos en el registro de la lengua natural. ¿A veces no se describe el razonamiento como un "encadenamiento de proposiciones", encadenamiento señalado o efectuado a través de conectivos? Esta es una vía errónea. En el razonamiento deductivo, los conectivos no encadenan proposiciones; marcan sólo su status operatorio (Duval, 1992, p. 56-57). Esto presenta una consecuencia importante: la organización de un paso de razonamiento puede identificarse sólo con *criterios puramente funcionales*, y no con marcas lingüísticas superficiales. Por el contrario, la organización de un encadenamiento de pasos puede identificarse con *criterios globales de coherencia textual*, es decir, con criterios que permiten asegurar en un conjunto de proposiciones la continuidad temática de una declaración sobre alguna cosa, o con *criterios locales de continuidad por repetición de una misma proposición* entre dos pasos.

Ahora bien, no hay una sola organización posible para un paso de razonamiento sino varias. Igualmente, no hay un solo tipo posible de encadenamiento de pasos de razonamiento. Cada una de las formas de razonamiento clásicamente reconocidas como el silogismo aristotélico, la deducción, el razonamiento por el absurdo, la argumentación, etc., son una combinación de un tipo de organización particular interna al paso de razonamiento y de un tipo de encadenamiento de pasos entre sí. Una clasificación de las diferentes organizaciones posibles de un paso y de los tipos posibles de encadenamiento, pues, es importante para la aproximación al funcionamiento cognitivo del razonamiento.

Clasificación de los pasos de razonamiento

Una clasificación de los pasos de razonamiento depende de factores de variación susceptibles de modificar su organización interna.

Antes hemos visto que para analizar un razonamiento era necesario tomar en consideración el contexto de enunciación de las proposiciones. Cuando las proposiciones son enunciadas en un marco teórico tienen un status teórico (hipótesis, definición...) que determina su status operatorio (premisa, tercer-enunciado). Si las proposiciones son enunciadas por fuera de un contexto teórico, no tienen status teórico. Vemos así pues, una primera variación cognitiva susceptible de jugar en la organización de un paso de razonamiento: puede reconocerse en las proposiciones la presencia o

ausencia de un status operatorio explícitamente determinado antes del razonamiento y que neutraliza los valores epistémicos semánticos.

Igualmente puede observarse una segunda variación cognitiva: el pasaje de las proposiciones dadas a otra proposición enunciada como su consecuencia, puede efectuarse directamente o por intermedio de un tercer-enunciado. En el primer caso, el pasaje de las premisas a la conclusión, se efectúa únicamente a través del aprovechamiento del contenido de las premisas. Se privilegian entonces algunos términos de las premisas: los sustantivos o los adjetivos, en la medida en que puedan interpretarse como predicados, y los determinantes, en la medida en que marquen una cuantificación y delimiten el alcance de la afirmación o de la negación. Generalmente, estos pasos directos del razonamiento se perciben como razonamientos puramente "lógicos", ya que sólo movilizan el manejo extensional permitido por la negación y la cuantificación, o el manejo intensional permitido por la semántica lexical de una lengua. En el segundo caso, el pasaje de las premisas a la conclusión se efectúa utilizando una proposición distinta a las premisas: esta proposición se toma de un dominio particular de conocimientos o de un dominio de convicciones que se comparte con el interlocutor. Los pasos de razonamiento que utilizan así un tercer-enunciado, por lo general se perciben como razonamientos "teóricos" o como argumentaciones.

También se puede observar una tercera variación: el número de premisas. Cada paso de razonamiento comprende, necesariamente, una o varias premisas. Se trata de una variación no despreciable psicológicamente en la medida en que tomar en consideración dos informaciones diferentes representa un umbral en las primeras fases del aprendizaje. Además, cuando se trata de evaluar la complejidad cognitiva de un razonamiento, el número de premisas necesarias para un paso es un factor al menos tan importante como el número de pasos para ese razonamiento. Pues, la efectuación, como el control, de un paso de razonamiento requieren *una aprehensión simultánea de premisas que pueden estar contextualmente alejadas unas de otras.* Pero como se trata de una variación diferencial y que con muy pocas excepciones corresponde a la división entre los pasos que no están organizados en función de un status operatorio y los que sí lo están, nos podemos quedar sólo con las dos primeras variaciones.

Combinando estos dos factores de variación, podemos distinguir cuatro organizaciones posibles de la expansión discursiva de una o de varias proposiciones dadas.

Tabla 1

Los cuatro pasos de razonamiento o las cuatro organizaciones posibles de la expansión discursiva de una o de varias proposiciones

	Sin status operatorio	**Con** status operatorio
Sin Tercer-enunciado	**I.** Inferencia semántica	**II.** Silogismo aristotélico
Con Tercer-enunciado	**III.** Inferencia discursiva	**IV.** Deducción

Evidentemente, esta clasificación sólo resulta interesante si cada tipo de organización de expansión discursiva de una proposición corresponde a un modo diferente de razonamiento. Esto es lo que ahora vamos a examinar.

El funcionamiento propio de cada uno de estos cuatro pasos de razonamiento

Las inferencias semánticas, ligadas a la comprensión de una lengua: paso de status operatorio y paso de tercer-enunciado (paso de tipo I)

Las inferencias inherentes a la comprensión del discurso más cotidiano son el ejemplo más trivial de este tipo de expansión, caracterizada por el pasaje directo de una proposición a otra. Con mucha frecuencia estas inferencias se confunden con la movilización de la organización semántica del léxico de una lengua natural (tareas de verificación en la red semántica) y con algunas operaciones elementales de oposición como la conmutación extensional o como la aplicación del operador unario de oposición a los términos extensionales: todos → algunos, un → ningún... (cap. III, tabla 2, p. 165). Los tratamientos por negación, es decir, los que combinan dos operaciones elementales de oposición (para pasar, por ejemplo, de una proposición a su contradicción) también son inferencias semánticas, en la medida en que implican una conmutación antonímica o la aplicación del operador unario a un término de propiedad.

La comprensión de los "presupuestos" de un enunciado, es decir, de la parte del contenido semántico que no está explícitamente afirmada pero que se conserva en las transformaciones interrogativa o negativa del enunciado, también pueden considerarse como una inferencia semántica:

1 Él no come más caviar 1' Él comió caviar

Puede parecer extraño clasificar entre los tipos de pasos de razonamiento una inferencia que con frecuencia queda implícita. Ducrot, por ejemplo, rehusa considerar la explicitación 1 → 1' como un "razonamiento": esa explicitación sería "ridícula" ya que informativamente es "tautológica" (Ducrot, 1972, p. 83-85). Desde este punto de vista, una conclusión no informativamente tautológica sería:

2 Él no come más caviar → 2' Él es capaz de contenerse

Y de manera más general:

> Cuando A está encadenado, a través de una conjunción de coordinación o de subordinación (con excepción de *y* y de *si*), o a través de un lazo lógico implícito, a otro enunciado B, el lazo así establecido entre A (PREMISA) y B (CONCLUSIÓN) jamás concierne lo presupuesto sino sólo lo que es planteado por A y por B". (Ducrot, p. 81).

Según esta definición, la expansión 2 - 2' sería un "razonamiento", pero 1 -1' no lo sería.

Saltan a la vista las dificultades que tiene tal definición. Trata de reducir el razonamiento a la expresión del razonamiento y a un criterio de informatividad. Ahora, si se mira bien, la expansión 2 - 2' sólo puede ser un razonamiento si también se toma en consideración la expansión 1'. Por lo demás, Ducrot lo señala él mismo:

> El recorrido argumentativo nos parece el siguiente: sabiendo que él come (el presupuesto 1'), entonces el hecho de que ahora no coma (lo servido, 1 o 2) prueba que él se sabe contener (la conclusión 2'). (Ducrot, p. 85).

En otras palabras, para poder considerar 2 - 2' como un razonamiento, ¡es necesario tomar el presupuesto 1' como una segunda premisa! Pero eso aún no es suficiente puesto que dos premisas

no constituyen un silogismo. Para obtener la conclusión 2' es necesario recurrir a un tercer-enunciado implícito: "para dejar de comer algo, es necesario ser capaz de contenerse". La diferencia entre las dos expansiones 1 -1' y 2 - 2' es en realidad la que separa la expresión completa de un paso de tipo I (inferencia semántica) y una expresión resumida de un paso de tipo IV (deducción).

El silogismo aristotélico: sin tercer-enunciado pero con status operatorio para las proposiciones (paso de tipo II)

Generalmente, bajo el término de "deducción" se agrupan tanto los silogismos clásicos como toda derivación de proposiciones nuevas a partir de un corpus de axiomas, de definiciones y de teoremas. Tomar en consideración dos factores de variación en el pasaje de las premisas a la conclusión nos conduce, por el contrario, a separar el pasaje de tipo "silogismo" y el pasaje de tipo "deducción". En efecto, el funcionamiento del paso de razonamiento no es el mismo en los dos casos.

Los silogismos clásicos, o de forma aristotélica, tienen dos diferencias que los distinguen de la deducción matemática. La primera es que el pasaje de las premisas a la conclusión se hace directamente y no a través de un tercer-enunciado. La segunda es que las premisas no pueden ser independientes una de la otra; deben tener un término común para que sea posible un paso de razonamiento[21].

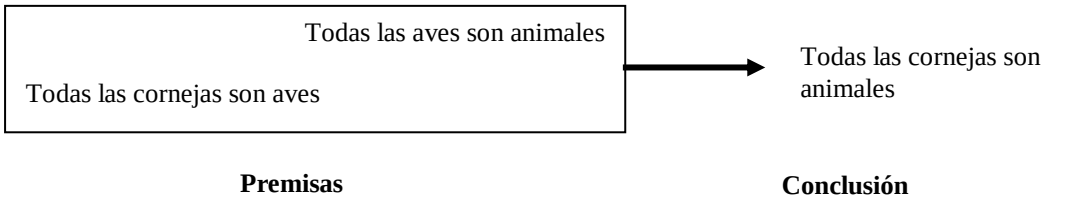


Figura 4. Organización de un silogismo. El silogismo del ejemplo es un silogismo del primer modo de la primera figura. El paso de un razonamiento de naturaleza silogística depende únicamente de la presencia de un mismo término en las dos premisas, "ave", que ocupa una de las dos posiciones gramaticales de sujeto o de atributo.

En cada una de las dos premisas hay una relación de inclusión, de intersección o de exclusión entre la extensión del término común y la extensión del otro término en posición de sujeto o de atributo. La conclusión resulta de la combinación de estas dos relaciones de extensión entre el término común y los otros dos términos (ver más adelante, p. 251-252). Así, en el silogismo llamado del primer modo de la primera figura (fig. 5), las posiciones gramaticales del término común permiten

[21] Este punto, lógicamente importante, curiosamente es desconocido en algunas presentaciones recientes del silogismo. Este desconocimiento conduce a interpretaciones discutibles sobre la naturaleza y el funcionamiento del razonamiento. Así, queriendo analizar el "discurso argumentativo", Ducrot escribe: "un razonamiento, un silogismo, por ejemplo, no constituye un discurso en el sentido fuerte que le doy a este término. Los enunciados que componen un razonamiento son independientes entre sí - en la medida en que se considere que cada uno expresa una cierta "proposición", es decir, un cierto estado del mundo presentado como real o virtual. Esto, en razón de que en un razonamiento el encadenamiento de los enunciados no se fundamenta en los enunciados en sí mismos sino en las proposiciones vehiculizadas por ellos, en lo que dicen o suponen sobre el mundo... La situación es totalmente diferente cuando se trata de un discurso. En éste, el encadenamiento de los enunciados tiene un origen interno, se fundamenta en la naturaleza misma del enunciado, en su sentido y no en el estado del mundo al cual remite..." (Ducrot, 1980, p. 10-11). Esta descripción es totalmente falsa. En un silogismo, las proposiciones no pueden ser separadas de los enunciados, están encadenadas, y el hecho de que remitan o no a un estado del mundo es neutro (ver más adelante IV, B), ¡El silogismo corresponde a los criterios que Ducrot da para caracterizar un discurso!

establecer una relación de inclusión entre los otros dos términos. Los silogismos provienen pues de una lógica de los términos, y no de una lógica de las proposiciones (Bochenski, 1970, p. 70; Lukasiewicz, 1972, p. 65-66). *Además, esta lógica de los términos está ligada a una estructura remática y no a una estructura funcional del contenido de las proposiciones.* En razón de este tipo de funcionamiento, los silogismos son más próximos a las inferencias semánticas que a los pasos de deducción que se efectúan a través de un tercer-enunciado.

Por último, es importante ver que el silogismo clásico es un razonamiento que se reduce a un solo paso de razonamiento. Además, al ser este paso directo, tiene cierta ambigüedad como para calificarlo de "razonamiento mediato" (Blanché, 1980). ¡Esto lleva confundir en el análisis del razonamiento, el número de premisas, la naturaleza de los pasos y el número de pasos!

Las inferencias discursivas: recurso a un tercer-enunciado pero sin status operatorio (paso de tipo III)

Las inferencias discursivas son las que utilizan un tercer-enunciado que no pertenece a un corpus teórico. El tercer-enunciado puede ser una declaración, una constatación ligada a un contexto particular, un principio que se impone como una norma en un medio social... Estas inferencias se efectúan en el marco de la argumentación.

A diferencia de los dos tipos de pasos anteriores, las inferencias discursivas no dependen de la organización semántica del léxico de una lengua. Sin embargo, *el pasaje de una proposición a la conclusión con la ayuda de un tercer-enunciado, se efectúa a través de las relaciones semánticas como la instanciación, subsunción, u oposición...*

Tomemos por ejemplo la inferencia discursiva 3a-3b-4 en el pasaje de *Mains sales* (Tabl. V, escena V) citado por Perelman (p. 614)

JESSICA.- Hugo! Hablas en contra de tu corazón. Te he visto mientras discutías con Hoerderer:

0 **Él te ha convencido**

HUGO. -

1 Él no me ha convencido.

2 Nadie me puede convencer de que (se debe mentir a los camaradas)

3a Pero si me hubiera convencido

3b sería una razón de más para descenderlo

4 **porque** *eso probaría que* él convencería a otros.

La secuencia 3a-3b-4 se presenta como un paso de razonamiento en el cual el pasaje de 3a a 3b está justificado con 4 ("porque..."). Pero, ¿en virtud de qué 4 permite el pasaje de 3a a 3b? En otros términos, ¿cuál es el lazo entre la premisa 3a y el tercer-enunciado 4? Estamos forzados a reconocer que el lazo entre 3a y 4 es, en realidad, otro paso de razonamiento. En efecto, 4, que se introduce como justificación ("porque..."), igualmente se presenta como una conclusión ("eso probaría que..."): "si él me hubiera convencido... eso probaría que convencería a otros". Para este pasaje de 3a a 4, es 2 la que tiene status de tercer-enunciado.

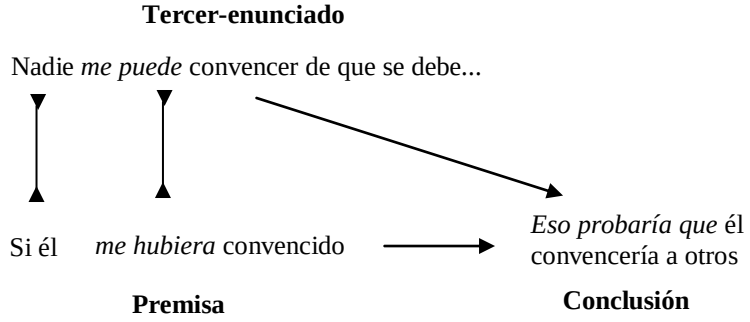


Figura 5. Organización de una inferencia discursiva que funciona según las operaciones semánticas de subsunción y de oposición. Entre la premisa y el tercer-enunciado hay una doble oposición de cantidad (él/nadie) y de modalidad (hecho contingente/imposibilidad). La hipótesis contrafactual toma como premisa que contradice al tercer-enunciado y provoca no su rechazo ¡sino la conclusión "él convencería a otros"!

Se habrá observado que la inferencia discursiva funciona con *una sola premisa*. Esto no es una regla, como para el silogismo aristotélico que requiere dos premisas y sólo dos, aunque todas las inferencias discursivas funcionen de esta manera. Eso constituye una diferencia importante con la deducción, la cual está abierta a un número variable de premisas, y por lo general, al menos a dos. Como veremos, esta diferencia se explica por la estructuración interna de los tercer-enunciados: no es la misma según previamente se haya producido o no un contexto teórico.

La deducción: status operatorio y recurso a un tercer-enunciado (paso de tipo IV)

Las proposiciones, enunciadas en un contexto teórico, tienen un status teórico que determina su status operatorio en la organización de un paso de razonamiento (fig. 2 y 3). Ello implica que los tercer-enunciados utilizados hayan sido producidos anteriormente y enunciados en un marco teórico bajo forma de definición, de axioma, de teorema... En este caso, presentan una organización interna específica que va a modificar completamente el funcionamiento de la deducción en relación con el de las inferencias discursivas.

Un tercer-enunciado teórico comporta dos partes funcionalmente distintas: una de PROPOSICIÓN(es) ANTECEDENTE(s) *que deben verificarse*, y otra de PROPOSICIÓN CONSECUENTE *que debe extraerse*. Por lo general, esta organización interna de un enunciado se expresa a través de giros del tipo "si... entonces...", "un... que... es un...". Eso quiere decir que el tercer-enunciado debe leerse como la articulación de dos partes, la primera de las cuales corresponde a una operación de verificación y la segunda a una operación de extracción. Cuando entre las hipótesis iniciales o las conclusiones anteriores se encuentran proposiciones que corresponden a las proposiciones antecedentes del tercer-enunciado, la proposición consecuente automáticamente es asertiva con el status de conclusión. En este sentido se puede decir que el funcionamiento de un paso de deducción tiene un carácter algorítmico (fig. 6).

Se observa entonces la diferencia que separa la deducción y las inferencias discursivas espontáneas. La primera procede por una operación de extracción, históricamente llamada el *modus ponens*, mientras que la inferencia discursiva procede por relaciones semánticas de instanciación, de subsunción, de oposición. En la deducción la utilización del tercer-enunciado es algorítmico; en las inferencias discursivas no lo es.

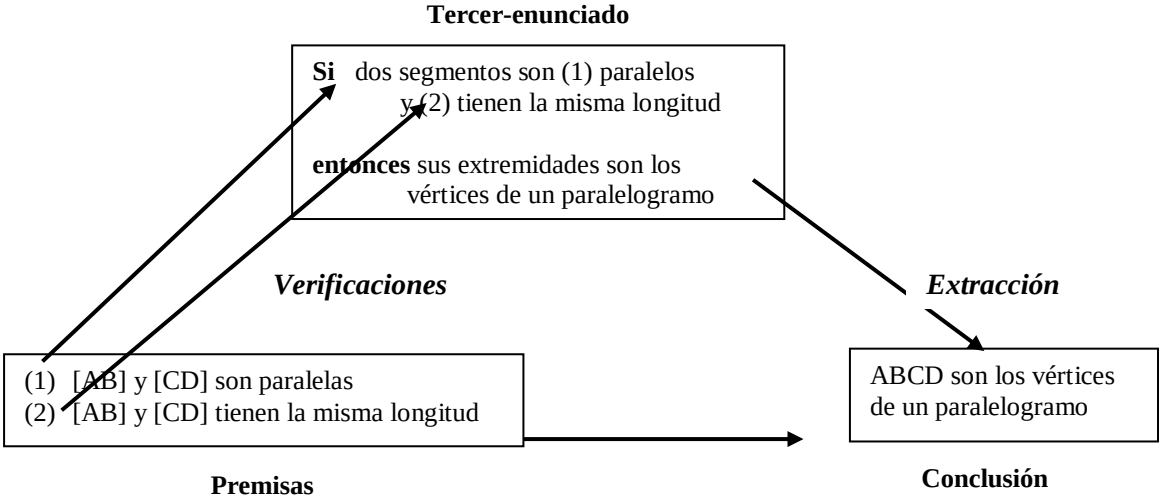


Figura 6. Organización de un paso que funciona según el *modus ponens*. Para poder aplicar el teorema es necesario verificar que todas las condiciones expresadas estén juntas. Todas las proposiciones antecedentes que forman la parte CONDICIÓN deben verificarse: deben darse en las hipótesis iniciales o haber sido obtenidas en conclusiones anteriores, las cuales se constituyeron entonces en las premisas del paso. Luego de esta verificación, la proposición consecuente es extrae como conclusión.

Contrario a una opinión muy común, la utilización algorítmica de un tercer-enunciado no es en absoluto ni evidente ni espontáneo. De una parte, esa opinión supone que se discrimina muy bien la organización interna del tercer-enunciado. De otra, supone que en la organización de las proposiciones se hace predominar el aspecto de las operaciones de verificación y de extracción sobre las de las relaciones semánticas de oposición y de instanciación. Así, al analizar las producciones de demostraciones por parte de alumnos de la educación media, se observa que ellos no se percatan de esta utilización algorítmica de los teoremas; hacen una utilización no algorítmica como en las inferencias discursivas (Egret, 1989, p. 47-48). Esta asimilación de la deducción a la inferencia discursiva está además reforzada por el fenómeno de la **globalización descriptiva:** se agrupan en una misma expresión datos o relaciones distintas pero semejantes (Duval, 1990b, p. 9, 10). Tomemos, por ejemplo, la siguiente definición tomada de un manual de 7º:

> Un cuadrilátero en el que se verifica una de las siguientes condiciones es un paralelogramo:
>
> (1) ***los*** *lados opuestos* son paralelos,
>
> (2) ***dos*** *lados opuestos* son paralelos y tienen la misma longitud.
>
> (colección Pitágoras, 1987, p. 162-163)

El enunciado (1) es un caso de globalización descriptiva. Como el enunciado (2), que coordina dos proposiciones independientes, *el enunciado (1) requiere dos verificaciones independientes entre sí, pero las formula en una sola proposición.* En general, se recurre al procedimiento redaccional de globalización descriptiva para evitar el carácter repetitivo que tomaría la enunciación de dos proposiciones. La globalización descriptiva puede no prestarse a equívocos si está acompañada de una figura o de una imagen mental; pero deja oculta la necesidad de varias operaciones distintas de verificación, independientes entre sí.

Hay otra ilusión que puede contribuir a ocultar la irreductibilidad de la deducción a un inferencia discursiva; es la de las deducciones directas. La **automatización** de un cierto número de tercer-enunciados hace tan inmediata su utilización, que ya no hay necesidad de enunciarlos y además la deducción puede aparecer como una inferencia semántica. La contraposición es un paso de razonamiento de este tipo, en el que el tercer-enunciado es un esquema válido que proviene del marco del cálculo de las proposiciones. Otro ejemplo es el pasaje de a = b y de b = c a a = c, sin que se presente la necesidad de mencionar la propiedad de transitividad. Pero tal reducción puede ser engañosa ya que de a $\perp$ b (a perpendicular a b) y de b $\perp$ c no se puede concluir que a $\perp$ c (a perpendicular a c).

Los dos tipos de encadenamientos de los pasos de razonamiento

Por lo general son necesarios varios pasos de razonamiento para llegar al enunciado-objeto. Eso es lo que se quiere expresar cuando recurrimos a la metáfora del "encadenamiento". Pero la organización propia a un encadenamiento de pasos es por completo de una naturaleza distinta a la de un paso de razonamiento. Mientras que la organización interna de un paso apunta a la transformación del valor epistémico de la conclusión que él establece, la organización de varios

pasos en un solo razonamiento tiene como propósito la continuidad entre los diferentes pasos. El encadenamiento de los pasos, pues, debe obedecer criterios de coherencia discursiva.

Hemos visto en el segundo capítulo que la expansión discursiva de una proposición exige tomar unidades significantes comunes (similitud semiótica), o cuando esto no se hace, haber una referencia común a los mismos objetos (similitud semántica) (cap. II, tabla 2, p. 129). La selección de uno de estos procedimientos para asegurar la continuidad discursiva en un razonamiento, depende de la naturaleza del paso de razonamiento. Los llamaremos respectivamente, encadenamiento por reciclaje y encadenamiento por conexión extrínseca.

El encadenamiento por reciclaje de una proposición

La continuidad entre dos pasos de deducción está asegurada cuando se retoma una misma proposición: la conclusión del primer paso se retoma como premisa en el paso siguiente (en caso de desarrollo estrictamente lineal) o en una paso de rango superior (en caso de desarrollo en forma de árbol, fig. 15, 17, 18). La repetición literal de la proposición es la vía por la cual se retoma. Pero regularmente, por razones de "estilo", es decir, para evitar la pesadez retórica de las repeticiones, también se puede retomar la proposición a través de la simple mención. Al retomarla, la proposición cambia de status operatorio: la conclusión de un paso se vuelve premisa en el paso siguiente. Este tipo de encadenamiento presenta dos propiedades esenciales desde el punto de vista de la función de expansión discursiva.

De una parte, ***no es necesario ningún conectivo proposicional.*** No es pertinente recurrir a los conectivos proposicionales (ahora bien, pues, si... entonces...) para este tipo de encadenamiento ya que sólo se fundamenta en la repetición de la misma proposición, cambiando su status operatorio de un paso al siguiente. El empleo de conectivos no puede tener un valor distinto al puramente retórico.

De otra parte, ***el encadenamiento de pasos no implica ninguna continuidad temática*** entre las proposiciones que forman cada uno de los dos pasos así vinculados: los objetos a los cuales se refieren las premisas del primer paso pueden ser diferentes a los objetos a que se refieren las premisas del paso siguiente. En otras palabras, un encadenamiento por reciclaje no respeta todas las leyes de coherencia que por lo general se tiene cuidado de respetar en la redacción de un texto. Así, una serie de frases debe respetar una coherencia de anclaje temático en los objetos introducidos al comienzo del texto: "habiéndose introducido un elemento del contenido, el texto lo reproduce regularmente... y construye así un fondo de referencia continuo ... o derivado" (Charolles, p. 20; Ducrot, 1972, p. 87). Esta reproducción se efectúa por medio de diferentes mecanismos: retomar los mismos términos, pronominalización, referenciación deíctica conceptual, sustitución lexical, etc. Estos son mecanismos que aseguran la continuidad temática entre todas las frases de un texto. Por ejemplo, en el pasaje de Sartre citado antes, la repetición del término predicativo "convencer (me... a los otros...)" en **1, 2, 3a** y **4** asegura la continuidad temática de la refutación, por Hugo, de la afirmación de Jessica. Si se considera que en un razonamiento deductivo son las hipótesis dadas al comienzo las que introducen los objetos de anclaje temático, es forzoso constatar que el razonamiento deductivo no implica una coherencia global de anclaje temático.

Al eliminar la necesidad de una coherencia global de anclaje temático, el encadenamiento por reciclaje provoca un funcionamiento discursivo por sustitución que diferencia el razonamiento deductivo de toda otra forma de discurso: *el progreso del razonamiento se desarrolla sustituyendo la conclusión anterior* (o las conclusiones de rango inmediatamente precedente) *por una nueva*, hasta la obtención del enunciado-objeto. Esto quiere decir que una vez se ha efectuado un paso de

razonamiento, sólo se retiene la conclusión para lo que sigue del razonamiento: no hay necesidad de retener en la memoria el tercer-enunciado ni las premisas de un paso para comprender los pasos que siguen[22].

El encadenamiento por conexión extrínseca

Las inferencias semánticas y las inferencias discursivas articulan las proposiciones en función de sus relaciones de contenido y no en función de su status. En una discusión, son producidas para apoyar una tesis, o ir en su contra, y deben presentar una coherencia temática con la tesis discutida. Intervienen como argumentos que se refuerzan mutuamente o que, por el contrario, parecen oponerse. La organización global de la argumentación debe tener en cuenta, pues, la fuerza y la orientación de los argumentos en relación con el enunciado-objeto. Como dependen de relaciones de contenido con el enunciado-objeto y como la interpretación de una relación de contenido entre dos proposiciones no siempre es unívoca, es necesario que la fuerza respectiva de los argumentos entre sí y su orientación sean explícitamente señalados. Esto es función de los conectivos.

Así, cuando los pasos de razonamiento convergen, es decir, producen el mismo cambio de valor epistémico del enunciado-objeto, pueden emplearse expresiones como "a fortiori", "razón de más". Cuando, por el contrario, los dos pasos de razonamiento divergen, es decir, conducen a diferentes cambios del valor epistémico del enunciado-objeto, se utilizan conectivos como "pero". En este tipo de encadenamientos, el conectivo no sólo establece el lazo entre dos pasos, los cuales podrían aparecer sin proposición o sin términos comunes, sino que también marca la naturaleza del lazo establecido: van en el mismo sentido, se oponen, etc.

En el texto de Sartre citado antes (p. 242) hay dos pasos de razonamiento: uno es simple (**2 - 1**) y el otro es una imbricación de dos pasos entre sí (**3a-2-4, 3a-4-3b**) (fig. 12, p. 262). Estos dos pasos convergen en el enunciado-objeto parcialmente implícito: "quedo convencido que es necesario descenderlo (a Hoederer)". Sus conclusiones están asociadas a este mismo enunciado-objeto. Además, esta convergencia está marcada en el texto a través de la expresión "razón de mas", la cual señala la "sinergia" de estos dos pasos. Lo más frecuente es que sea de manera indirecta como los conectivos encadenen los pasos de razonamiento, y que lo hagan por la vía de proposiciones que les pertenecen respectivamente y que los conectivos vinculan inmediatamente. Así, en ese mismo pasaje, "pero" opone dos proposiciones, una que es la conclusión del primer paso y otra que es la premisa de otro paso. Por el contrario, en el siguiente texto, "pero" marca la oposición de orientación entre dos pasos de razonamiento. Esto se basa en el hecho de que cada uno de los dos pasos coincide con una frase compleja.

> Los Maestros que dan educación a particulares sólo le prestan servicio a sus alumnos; *pero* cualquiera que se inclinara hacia la virtud de ser maestro de las masas, simultáneamente prestaría servicio a unos y a otros, a los que ostentan el poder y a los que están bajo su autoridad.
>
> Isócrates citado por Perelman (1958, p. 312)

El encadenamiento por conexión extrínseca fija las relaciones de los argumentos entre sí y con el enunciado-objeto. *El progreso del razonamiento se hace, pues, por acumulación* y no por sustitución de sus diferentes conclusiones intermediarias: ellas se añaden las unas a las otras y

---

[22] Aquí es importante no confundir el análisis de la heurística y de la producción del razonamiento deductivo con el análisis estructural de la organización y del funcionamiento del razonamiento deductivo. Desde un punto de vista heurístico, una hipótesis que haya servido de premisa para un paso o un tercer-enunciado ya utilizado, puede servir de nuevo para otro paso. Pero eso es neutro para el análisis estructural de la organización deductiva, ya que cada paso es temáticamente independiente de los otros y ya que sólo cuenta el orden de las conclusiones (válidas). Más adelante veremos que para los alumnos de educación media la comprensión de la organización deductiva es una condición previa para la heurística y para la producción de razonamientos deductivos.

entran en alguna suerte de "resonancia"[23] entre sí y con el enunciado-objeto. Este tipo de encadenamiento exige que se guarde memoria del conjunto de las proposiciones y que haya una aprehensión de las múltiples correspondencias de contenido que tienen las proposiciones entre sí.

ANÁLISIS DE DIFERENTES FORMAS DE RAZONAMIENTO

Existen varias formas de razonamiento:

- el silogismo aristotélico que por largo tiempo ha sido considerado como el razonamiento lógico tipo, el cual ha sido el objeto de estudio de muchos trabajos en psicología que han pretendido determinar la naturaleza del funcionamiento del pensamiento,
- el razonamiento deductivo y el razonamiento por el absurdo, que en matemáticas son las formas de razonamiento para la demostración,
- la argumentación, forma de razonamiento más adaptada a las situaciones abiertas de discusión o de investigación.

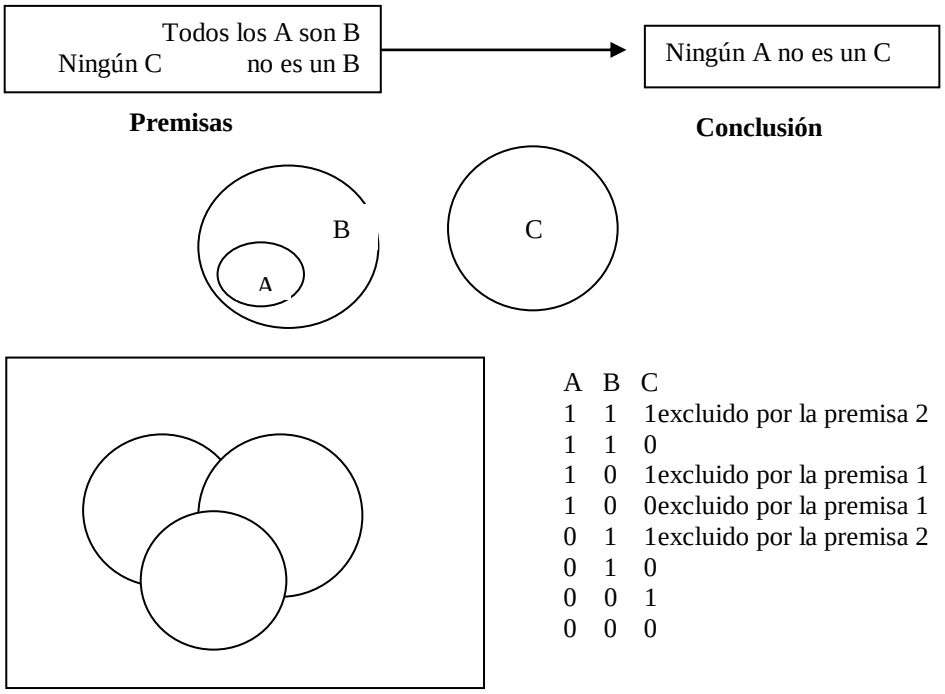
Los análisis anteriores, ¿permiten explicitar la naturaleza y el funcionamiento cognitivo de los razonamientos efectuados a través de diferentes formas? Vamos a examinar, en particular, dos puntos para cada una de las formas. El primero es el de la relación entre su mecanismo de expansión discursivo y su expresión lingüística: ¿las restricciones estructurales propias a cada una se inscriben en reglas de expresión y en el empleo de marcas lingüísticas específicas o, por el contrario, la expresión lingüística de cada una de estas formas de razonamiento es libre y variable? La segunda pregunta concierne la proximidad entre estas diferentes formas de razonamiento. Silogismo y razonamiento deductivo con frecuencia se asimilan como formas de razonamiento demostrativo. El razonamiento deductivo y la argumentación con frecuencia se asocian como formas de razonamiento explicativas de la verdad de una proposición. ¿Estas vecindades corresponden a recorridos de razonamiento cognitivamente similares u ocultan recorridos radicalmente diferentes? Estas dos preguntas, secundarias desde una perspectiva estrictamente epistemológica, son esenciales desde una perspectiva didáctica.

El silogismo clásico

Hemos visto que el mecanismo del silogismo consiste en la determinación conjuntista de las relaciones de inclusión, de intersección o de exclusión que existe entre las extensiones de tres términos. La particularidad del silogismo clásico, que fue el primer modelo de razonamiento válido elaborado con el propósito de demostración (Aristóteles, *Analítica Posterior*, libro I, 71b 16-17, 73a 24), es la de *vincular esta determinación conjuntista a formas lingüísticas estrictas:* los tres términos deben presentarse en posición de sujeto gramatical o de atributo en una proposición predicativa, la cuantificación del término en posición de sujeto gramatical debe explicitarse y uno

[23] Esta metáfora ha sido empleada para describir la comunicación entre dos interlocutores, por oposición al modelo más físico de "transmisión" (Grize, 1982, p. 190). Pensamos que también puede aplicarse para describir la relación entre enunciados diferentes en el interior de un mismo texto. Eso implica que un enunciado debe poder ser puesto en relación directa con no importa cuál otro enunciado del mismo texto (Duval, 1986, p. 80-82).

de los tres términos debe ser común en las proposiciones que presentan esos términos. Las dos premisas de un silogismo clásico deben respetar estas tres restricciones lingüísticas. Al hacer variar la posición del término común en las dos premisas y tomar en consideración la naturaleza de las proposiciones (universal o particular, afirmativa o negativa), se obtienen 64 silogismos diferentes posibles, de los cuales sólo 27 son válidos. Las reglas que permiten distinguir la validez de un silogismo clásico son muy complejas si uno se basa en las marcas lingüísticas. Basta hojear *La Lógica de Port-Royal* para uno percatarse de eso (Arnauld & Nicole, 1970). Por ejemplo, la posibilidad de concluir va a depender de las posiciones respectivas del término común en cada una de las dos premisas (de donde proviene la metáfora de la "figura" del silogismo), y de la cuantificación de los términos en posición de sujeto gramatical. Por el contrario, si se recurre a círculos (Euler) y a diagramas de Venn para representar la extensión de los tres términos la situación va a ser totalmente diferente, y el conocimiento de aquellas reglas no va a ser necesario (Johnson-Laird, 1983, p. 76-93).



A	B	C	
1	1	1	excluido por la premisa 2
1	1	0	
1	0	1	excluido por la premisa 1
1	0	0	excluido por la premisa 1
0	1	1	excluido por la premisa 2
0	1	0	
0	0	1	
0	0	0	

Figura 7. Diversas representaciones de un silogismo de la segunda figura. Los círculos de Euler: cada círculo representa la extensión de uno de los tres términos A, B, C. Abajo a la izquierda, un diagrama de Venn: cada círculo también representa la extensión de uno de los tres términos; las zonas sombreadas representan los subconjuntos respectivamente excluidos por cada una de las dos premisas; la conclusión corresponde a la zona en blanco. A la derecha una tabla de contingencias inspirada en Newell; las cuatro líneas no excluidas también corresponden a las zonas en blanco: intersección de zonas blancas (línea 2), zona blanca aislada (líneas 6 y 7) y la zona complementaria de los tres círculos (línea 8). Tienen en común la ausencia de la dupla (1,1) para A y C. Si reemplazamos A por "verdad cristiana", B por "caritativo" y C por "piadoso con el pobre" (ejemplo de la lógica de Port-Royal, Arnauld, 1970, p. 253) obtenemos la conclusión "ningún verdadero cristiano no es piadoso con el pobre". Este silogismo se confunde aquí con inferencias semánticas.

En razón de su estrecha ligazón con formas lingüísticas precisas, el silogismo sólo puede ser verdaderamente utilizado para términos que pertenecen a una clasificación de tipo taxonomía, es decir, a una red semántica construida en función de relaciones de inclusión o de intersección. El

silogismo clásico es un razonamiento en el cual las unidades son en realidad términos y no proposiciones. Como además el silogismo clásico no utiliza ningún tercer-enunciado para pasar de las premisas a la conclusión, *tenemos que el funcionamiento cognitivo del silogismo clásico necesariamente es muy próximo a un empleo común de la lengua natural.* Un silogismo clásico puede efectuarse espontáneamente como una inferencia semántica (paso de tipo I) basándose sólo en la comprensión de la significación de los tres términos y sin tomar en consideración las restricciones lingüísticas de organización interna de las dos premisas. Ya que la inferencia de una propiedad no se hace ni por herencia ni por defecto (Hoc & Nguyen-Xuan, 1987, p. 1727), el funcionamiento de un silogismo puede coincidir con la utilización de una red semántica (Leiser, 1987, p. 1840). *Esto quiere decir que hay dos procedimientos cognitivos totalmente diferentes para efectuar o evaluar un silogismo.* El acierto o el fracaso en una prueba de evaluación de silogismos, puede depender de hecho de que haya o no congruencia entre una simple inferencia semántica y el mecanismo de inferencia válido definido por las restricciones lingüístico-conjuntistas propias del silogismo. Hay dos figuras, como la primera, para las cuales el tratamiento puramente semántico y el tratamiento lingüístico-conjuntista del contenido de las premisas son congruentes: en este caso se puede tener acierto sin haber comprendido las reglas de validez. Pero para las otras tres figuras no es lo mismo. Las experiencias psicológicas que toman el silogismo como tipo de razonamiento lógico, sólo pueden encontrar en sus resultados variaciones provocadas por los fenómenos de congruencia o de no congruencia entre la inferencia semántica (paso de tipo I) y las reglas de validez definidas con base en las restricciones lingüístico-conjuntistas (paso de tipo II).

Además, no todos los silogismos consisten en un solo paso de razonamiento. Es sabido que clásicamente los silogismos se han clasificado en cuatro figuras según las posiciones respectivas del término común en las dos premisas. Esta identidad de forma redaccional (dos premisas y una conclusión) es engañosa. Algunos silogismos, los que pertenecen a la primera figura, los que Aristóteles llamó los *"silogismos perfectos", corresponden a un solo paso de razonamiento.* Esto quiere decir que no hay necesidad de transformar las premisas para obtener inmediatamente la conclusión. La mayoría de los silogismos de las otras figuras, y especialmente aquellos cuyas premisas son proposiciones particulares o negativas, son los *"silogismos imperfectos" que recubren varios pasos de razonamiento*. Eso quiere decir que es necesario transformar o una de las dos premisas o las dos, para poder obtener la conclusión. Esto es particularmente claro en el caso de la cuarta figura, omitida por Aristóteles, y a propósito de la cual Johnson-Laird obtuvo resultados espectaculares para justificar su análisis (1983, p. 67-69).

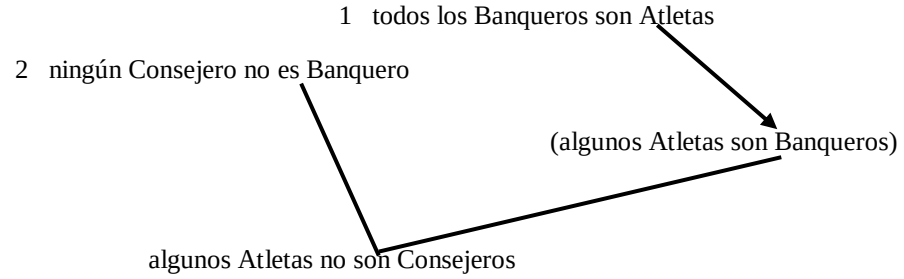


Figura 8. Los dos pasos de razonamiento de un silogismo de la cuarta figura. El primero convierte la proposición universal afirmativa de la primera premisa en una proposición particular inversa (paso de tipo I), la cual va a servir de premisa para el segundo paso. Y entonces, las premisas del segundo paso son un silogismo de la segunda figura. *El primer paso transforma el silogismo dado en un silogismo de otra figura.* Es una lástima que en sus experiencias, Johnson-Laird no haya presentado este segundo paso en sí mismo y comparado los resultados con los obtenidos de los dos pasos. A la derecha damos la representación del

silogismo según los círculos de Euler. Allí salta a la vista que es necesario partir de la zona B ubicada en la zona A para describir la situación: "Los A que son B no son C" ("los atletas que son banqueros no son consejeros").

La recíproca de la conclusión ("algunos consejeros no son atletas") es una conclusión no válida. Ahora bien, ésta es la solución que los sujetos prefieren escoger, mientras que casi nadie (5%) escoge la forma válida. Exactamente la observación inversa se puede hacer para una situación análoga con un silogismo de la primera figura.

Todos los estudios psicológicos sobre el razonamiento han subrayado la importante influencia del contenido (formulación negativa de una de las premisas, familiaridad de la situación evocada por las proposiciones del silogismo, posición en las premisas del término sujeto de la conclusión), sobre la forma para evaluar la validez de una conclusión o para producir una conclusión correcta. Pero los resultados que muestran la influencia de estos diferentes aspectos del contenido, parecen escapar a toda explicación sistemática (Rips, 1988, p. 137-145). En realidad, las variables de contenido tomadas en consideración mezclan fenómenos de naturaleza diferente: uno o varios pasos de razonamiento según la figura del silogismo, la congruencia o no congruencia con las inferencias semánticas, la necesidad o no de cambiar de registro de representación, al tiempo que se ignora la complejidad de las reglas de organización lingüística de las premisas para los 27 silogismos válidos sobre los 64 posibles. Estos son los fenómenos que son variables pertinentes para un estudio psicológico del silogismo antes de todo aprendizaje.

El razonamiento deductivo

Hemos visto que el mecanismo de la deducción consiste en la operación de extracción de una proposición y en su reciclaje en premisa para otro paso. Esta operación implica la utilización de un tercer-enunciado que comprende una parte proposición(es) antecedente(s) y una parte proposición consecuente. A diferencia del silogismo, el cual consiste en un tratamiento lingüístico-conjuntista de tres términos contenidos en dos premisas, *el razonamiento deductivo no puede en ningún caso corresponder a las inferencias semánticas.* La diferencia aparece, por lo demás ampliamente, cuando se cambia de registro. Mientras que la organización que determina el funcionamiento del silogismo se representa a través de superposiciones de figuras (círculos...), la del razonamiento deductivo se representa a través de árboles. En estos árboles, la posición de las diferentes proposiciones enunciadas corresponde con su status operatorio en el paso de deducción donde intervienen (figura 15, 17).

Las restricciones de organización propias al funcionamiento del razonamiento deductivo no están vinculadas a ninguna forma lingüística particular. En efecto, estas restricciones se basan en el status operatorio de las proposiciones enunciadas y no en su contenido. Este status operatorio está determinado por el status teórico y, sobre todo, puede estar marcado lingüísticamente de maneras muy heterogéneas: actitudes proposicionales, conectivos, o simplemente el orden de ocurrencia de las proposiciones. Además, no se requiere ninguna correspondencia estricta entre las unidades lingüísticas y las unidades de razonamiento que constituyen un paso: las proposiciones que intervienen como premisa, como tercer-enunciado y las que son extraídas como conclusión, pueden expresarse en una única frase o en varias. Hay grandes variaciones posibles para expresar un razonamiento deductivo en el registro de la lengua natural (Duval & Egret, 1993, p. 125-129). Si a lo anterior se añade el hecho de que un razonamiento deductivo progresa por sustitución y no por acumulación, se puede afirmar que la lengua natural no es el primer registro en el cual puede

hacerse la experiencia del funcionamiento del razonamiento deductivo. Aquí, la expresión lingüística enturbia, además de que no muestra el funcionamiento real de la deducción. Esto plantea un grave problema para su aprendizaje.

Ahora bien, en la medida en que los problemas de geometría son el dominio más asequible para los primeros encuentros de los alumnos de educación media con la demostración, es el registro de la lengua natural el que en realidad se privilegia para el aprendizaje del razonamiento deductivo. No es entonces sorprendente que este encuentro sea para la gran mayoría de alumnos el de una exigencia arbitraria, estéril, incomprensible y que incentive o refuerce un "bloqueo" durable frente a toda actividad matemática distinta al cálculo. *Para la comprensión del razonamiento deductivo que exige centración en el status de las proposiciones y neutralización de su valor epistémico semántico a favor de un valor epistémico teórico, el descubrimiento de la organización deductiva del discurso no puede hacerse verdaderamente más que a través de un registro distinto al de la lengua natural.* Volveremos más ampliamente sobre el aprendizaje del razonamiento deductivo y sobre sus relaciones con la demostración en las aproximaciones epistemológica y didáctica.

El razonamiento por el absurdo

Este razonamiento es el que establece la necesidad del enunciado-objeto mostrando que su negación conduce a una contradicción. Entonces, comporta necesariamente un paso inicial que consiste en negar el enunciado-objeto, y un paso terminal que consiste en rechazar esta negación. Entre el paso inicial y el final, hay un razonamiento intermediario que puede ser puramente deductivo como en matemáticas, o, por el contrario, argumentativo como en un discurso polémico o irónico: este razonamiento intermediario se desarrolla hasta el momento en que se produce una conclusión que contradice un dato anterior. Los problemas particulares que plantea el razonamiento por el absurdo tienen que ver entonces con el paso inicial y el paso final.

El paso inicial consiste en la negación del enunciado-objeto. Es un paso de tipo I, es decir, una inferencia semántica. Esta operación discursiva no requiere ni el pasaje por un tercer-enunciado ni la determinación previa del status de la proposición negada. En efecto, no hay lengua que no comporte la posibilidad de efectuar la negación de un enunciado (cap. II, p. 164-165). Tomemos por ejemplo la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, es decir, de la proposición:

$\sqrt{2}$ es un número irracional: $\sqrt{2} \neq m/n$ para todo entero m y n.

El paso inicial consiste en negar esa proposición y entonces plantear:

$\sqrt{2}$ es un número racional: hay dos enteros m y n tales que $\sqrt{2} = m/n$.

La dificultad de este primer paso se basa en el contexto paradójico que crea: introducir un enunciado-objeto auxiliar que es exactamente la contra-tesis del enunciado-objeto enfocado.

*El paso final es un paso que por **feed-back** gira al razonamiento hacia el paso inicial*. El razonamiento deductivo intermediario se detiene cuando surge una contradicción, la contra-tesis se rechaza como falsa. El paso terminal transforma pues el rechazo de la contra-tesis en aserción del enunciado-objeto. Esta transformación, con frecuencia presentada como si fuera directa, requiere el concurso de un tercer-enunciado, el del tercero excluido. En la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, el razonamiento deductivo intermediario parte de la contra-tesis:

$\sqrt{2}$ es un número racional, es decir, hay dos enteros m y n tales que $\sqrt{2} = m/n$, m y n primos

Al elevar $\sqrt{2} = m/n$ al cuadrado, se obtiene $2n^2 = m^2$

Y de allí se puede probar que m y n son pares, lo que contradice la contra-tesis de partida. Tenemos entonces el paso final siguiente:

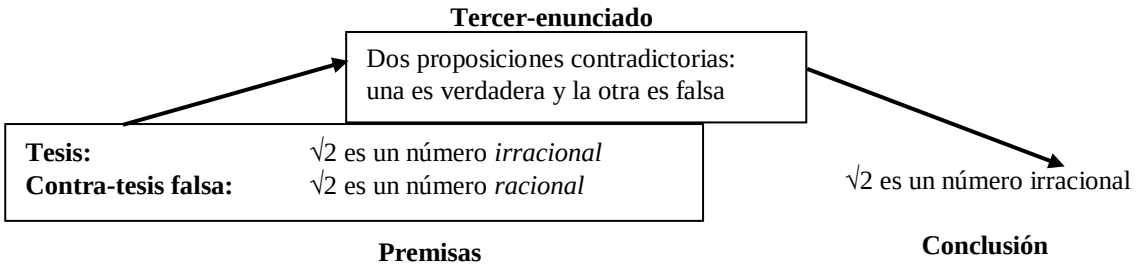


Figura 9. Ejemplo de paso final de un razonamiento por el absurdo. Se observará que no hay una utilización algorítmica del tercer-enunciado: no se trata de una operación de extracción.

Entre el paso inicial y el paso final, el razonamiento es un razonamiento deductivo. Pero este razonamiento no llega hasta su término, el enunciado-objeto auxiliar. Se detiene cuando una de las conclusiones intermediarias contradice uno de los datos iniciales. Requiere pues de un *feed-back* sobre sus datos iniciales.

El razonamiento por el absurdo presenta entonces dos particularidades. De una parte, comporta dos enunciados-objeto y, de otra, dos *feed-back*. La representación no discursiva de un razonamiento por el absurdo, en razón de este doble *feed-back*, no puede ser simplemente la de un árbol. El grafo proposicional de la organización de un razonamiento por el absurdo se debe cerrar.

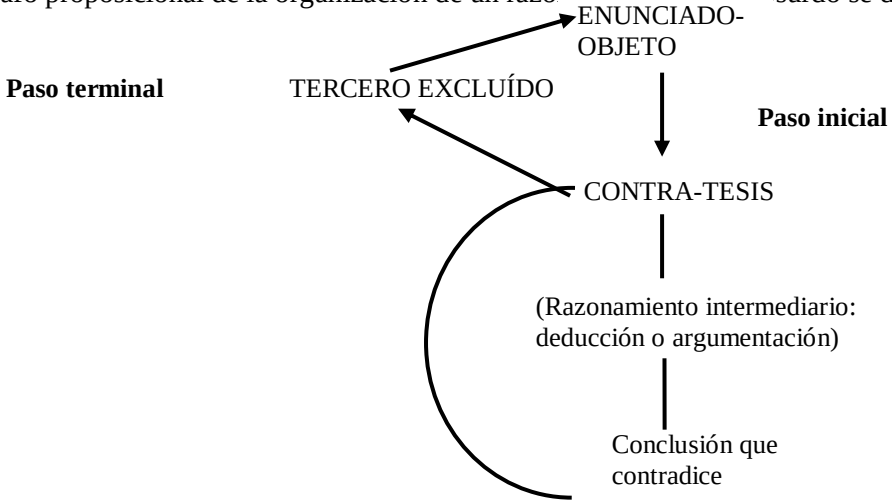


Figura 10. Esquema de la organización de un razonamiento por el absurdo. El razonamiento deductivo para llegar a la conclusión contradictoria puede ser largo y complejo. Se observa que el bucle corresponde a las relaciones de oposición entre dos proposiciones (aquí las relaciones de oposición son contradicciones). Por lo general, el razonamiento por el absurdo se define a través de la tautología

$$\{[(H\ y\ (no\ C)) \Rightarrow (A\ y\ no\ A)] \Rightarrow (H \Rightarrow C)\}$$

Esta definición satisfactoria desde un punto de vista lógico está lejos de ser suficiente para un análisis de este razonamiento. Salta a la vista, por ejemplo, que los tres símbolos de implicación no remiten a los mismos procedimientos de producción. El primer símbolo se refiere a todo el razonamiento deductivo intermediario. El tercer símbolo se refiere al paso final y el segundo a dos *feed-back*. No es nada sorprendente pues, que si se

toma este código simbólico de la organización cognitiva como modelo para presentar el razonamiento por el absurdo, se constaten "resultados decepcionantes" (Glaeser, 1971, p. 103)

La especificidad del razonamiento por el absurdo está en el juego de la negación y de la contradicción puesto en acto en los pasos inicial y final, así como en la organización en bucle que resulta. En virtud de esta especificidad, el razonamiento por el absurdo puede ser empleado tanto con propósitos demostrativos como con fines argumentativos. A diferencia del razonamiento deductivo, puede emplearse tanto en el discurso ordinario como en un contexto teórico, de la misma manera que el silogismo (Duval, 1990a, p. 208-219). Eso depende de la naturaleza del razonamiento intermediario. En efecto, son posibles tres situaciones: este razonamiento es deductivo, como en el ejemplo anterior, argumentativo como en el texto de Montesquieu que presentaremos más adelante (fig. 13-14), o está ausente. Los razonamientos por el absurdo que se han podido observar en tres niños, corresponden al tercer caso: ponen en evidencia su consciencia del sentido de los términos empleados. Cuando es empleado con fines argumentativos, el razonamiento por el absurdo lleva a resaltar la imposibilidad de lo que cualquiera estaría inclinado a considerar posible, verosímil o evidente. Implica, pues, el contexto de un conflicto epistémico.

La argumentación

Es la forma más familiar de razonamiento, la que se efectúa espontáneamente cuando se trata de convencer a alguien de la aceptabilidad de nuestra declaración o del carácter insostenible de la suya. Por lo general, también se insiste sobre la naturaleza "dialógica" de la argumentación: en tanto se dirige a un interlocutor, toma en consideración las representaciones relativas al tema de nuestra declaración o de su declaración. En otras palabras, se refiere no sólo a los valores epistémicos que tienen las proposiciones que se enuncian para quien lo hace sino también a los valores de quien escucha. La oposición de dos puntos de vista se traduce en la consideración de dos valores epistémicos no compatibles (verosímil/absurdo) o distantes (cierto/posible) para una misma proposición. El funcionamiento de la argumentación parece, pues, radicalmente diferente a las formas anteriores de razonamiento, ya que en ninguna de estas es un elemento motor *la oposición entre dos valores epistémicos para una misma proposición*. La cuestión entonces es saber cómo interviene esta oposición en el razonamiento argumentativo, y en particular, si el análisis estructural anterior es suficiente para explicarlo.

En primer lugar, la argumentación proviene de un empleo común de la lengua natural. Esto en razón misma de su naturaleza diálogica. Esto quiere decir que los pasos de razonamiento serán prioritariamente pasos de tipo I (inferencia semántica) o de tipo II (silogismo) o de tipo III (inferencia discursiva).

La anteriormente citada argumentación de Isócrates para mostrar que es mejor formar formadores que alumnos (versión moderna), presenta un paso de razonamiento de tipo I: "inclinar hacia la virtud a *los maestros de las masas* → prestar servicio a la vez *a los que ostentan el poder y a los que están bajo su autoridad*".

Los textos del siglo XVIII recurren con frecuencia a la forma silogística:

> Una interpretación de la escritura por completo contraria al espíritu del evangelio, no puede más que ser falsa. Ahora bien, el sentido literal de las palabras "Forzado a introducirlas" es por completo contrario al espíritu del evangelio. Por tanto, el sentido literal de estas palabras no puede más que ser falso.

Bayle (citado por Barbault & Ducrot, 1973, p. 58)

Aunque las premisas no estén presentadas bajo una forma canónica, fácilmente se reconoce un silogismo de la primera figura, en el cual la premisa mayor es una proposición universal y la menor una proposición particular:

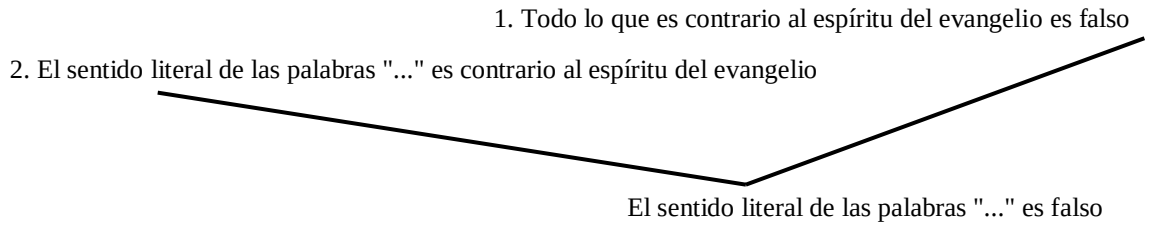


Figura 11. La forma canónica del silogismo requiere que solamente haya tres términos. El término "interpretación de la escritura" por tanto, no puede conservarse. Ahora bien, ese término juega un papel en el conjunto de la argumentación desarrollada por Bayle, que con el propósito de probar la menor, rechaza toda justificación evangélica del uso de la fuerza.

El texto de Sartre citado antes presenta un paso de tipo III (p. 242). Pero hemos visto que para este tipo de paso, el recurso al enunciado-objeto no funciona de la misma manera que en el razonamiento deductivo: no da lugar a una operación de extracción. El único paso excluido por la argumentación es el de tipo IV, que se basa en la operación de extracción de la parte "consecuencia" del enunciado-objeto. Esto se comprende fácilmente. La argumentación excluye el tipo de paso en el que su funcionamiento es ajeno al empleo común de la lengua natural.

El encadenamiento de los pasos de razonamiento en una argumentación debe respetar lo que constituye la primera condición de todo discurso en un empleo común de la lengua natural: la **continuidad temática**. Deben poder establecerse correspondencias directas de contenido {co-referencia de las expresiones en posición de sujeto, antonimia, hiperonimia (inclusión) o sinonimia (equivalencia) de las expresiones predicativas} entre las proposiciones que pertenecen a pasos diferentes. Esto excluye, como hemos visto antes, todo encadenamiento por reciclaje de la conclusión precedente. En una argumentación los pasos de razonamiento no se suceden y no progresan como en un razonamiento deductivo: se añaden unos a otros, se completan y, a veces, se superponen. El texto de Sartre citado es un ejemplo típico. La premisa del segundo paso retoma de manera negativa (bajo el modo de hipótesis contrafactual) la conclusión del primer paso; y la imbricación del segundo y el tercer paso confirma el enunciado-objeto que podía derivarse de la conclusión del primer paso.

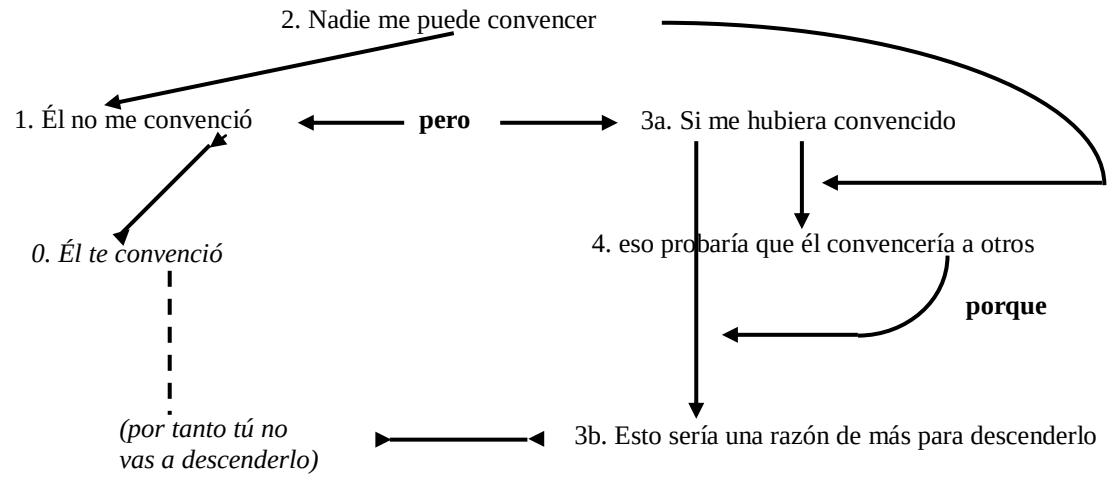


Figura 12. Organización de la argumentación del texto de Sartre. Los números remiten a la segmentación dada en el pág. 242 y el esquema comprende dos tipos de doble flecha: unas representan las relaciones de oposición y las otras relaciones de equivalencia (ver más adelante p. 363, tabla 3). Se pueden distinguir tres pasos de razonamiento explícitos: (2 hacia 1), (3a y 2 hacia 4), (3a y 4 hacia 3b). Se observa que la conclusión (4) se retoma no como premisa sino como tercer-enunciado, y que el enunciado 2 a la vez es premisa para un paso de razonamiento y tercer-enunciado para otro. Este doble status de premisa y tercer-enunciado, para una misma proposición, es característica de la argumentación. El enunciado-objeto se sostiene en la conservación de la determinación de Hugo de sacrificar a Hoederer: las conclusiones (1) y (3b) convergen en confirmar este enunciado-objeto y rechazar la conclusión implícita de (0) presentada por la interlocutora de Hugo.

El encadenamiento de los pasos en una argumentación debe permitir la realización de la confrontación de puntos de vista opuestos sobre una misma cuestión. Por tanto, debe poder hacerse en función de **relaciones de oposición**, las cuales se pueden basar en las proposiciones o en los términos. Ya hemos visto que las relaciones de oposición que se basan en las proposiciones pueden combinar operaciones elementales de oposición que se basan en los términos (cf. p. 165-167). Las relaciones de oposición entre los términos son las que expresan un contraste: contrarios graduables susceptibles de un empleo comparativo (caliente-frío), contrarios no graduables que dividen el universo del discurso en dos subconjuntos complementarios (par-impar), conversos (antes-después), duplas filosóficas (apariencia-realidad)... (Lyons, 1978, p. 219-232; Perelman, 1958, p. 564). Estas diferentes relaciones por lo general se desarrollan con proposiciones que tienen el mismo valor epistémico para los interlocutores. El ejemplo de la célebre argumentación de Montesquieu es típico a este respecto:

> Si tuviera que (A) sustentar el derecho que debemos darle a los esclavos negros**, he aquí lo que diría**: ...
> [1] *es imposible que* (1') *supongamos que* (1") esa gente sean humanos,
> porque, (2) si (1'-1") suponemos que son hombres,
> [3] *se comenzaría a creer que* (3') nosotros mismos somos cretinos.
>
> *Sobre el espíritu de las leyes*, Libro XV, cap. 5

Tenemos ahí una argumentación que se presenta como un verdadero razonamiento por el absurdo, al mismo título que la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Para verificarlo basta con aplicar el esquema de la figura 10 anterior:

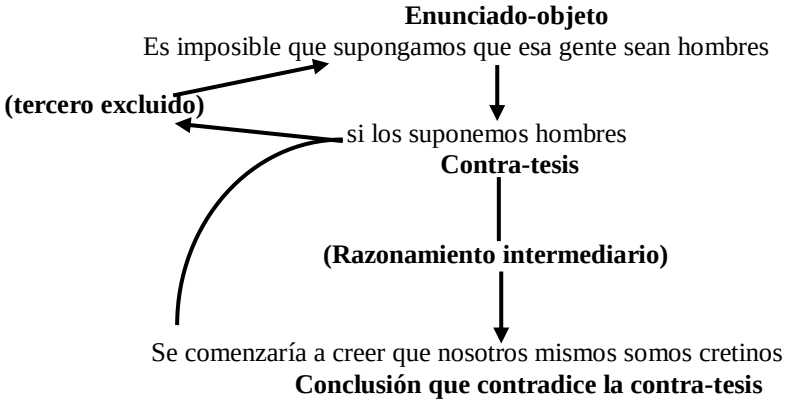


Figura 13. Esquema del razonamiento por el absurdo de Montesquieu.

No obstante, bien se da cuenta uno que este razonamiento por el absurdo no es una demostración sino una argumentación. ¿En qué radica la diferencia con la demostración de la irracionalidad de √2? Debe buscarse en el razonamiento intermediario. Ahora bien, al comparar el texto con su representación en el esquema (fig. 13) constatamos que este razonamiento intermediario no está dado; sólo disponemos de su conclusión.

Este razonamiento intermediario puede reconstruirse fácilmente si partimos de la hipótesis de que una argumentación se apoya en todas las relaciones transversales del contenido, implícitas o no, que existen entre las proposiciones que la argumentación opone. Todas las relaciones transversales del contenido forman algo así como una red que representa las creencias, opiniones, conjeturas que se confrontan en la argumentación. Esta red, como todas las redes semánticas, permite engendrar nuevas proposiciones, en cantidad mayor que la de las proposiciones explícitamente formuladas o aceptadas por los interlocutores. Entonces, **toda la argumentación consiste en jugar con las compatibilidades y las incompatibilidades entre todas las proposiciones que la red permite generar.**

En el ejemplo del razonamiento de Montesquieu, las dos proposiciones de base para la argumentación son la proposición (A), es decir, la tesis por la cual el razonamiento por el absurdo se desarrolla irónicamente ("si yo sostuviera que (A)") y la proposición (B), principio traído a colación en uno de los capítulos precedentes.

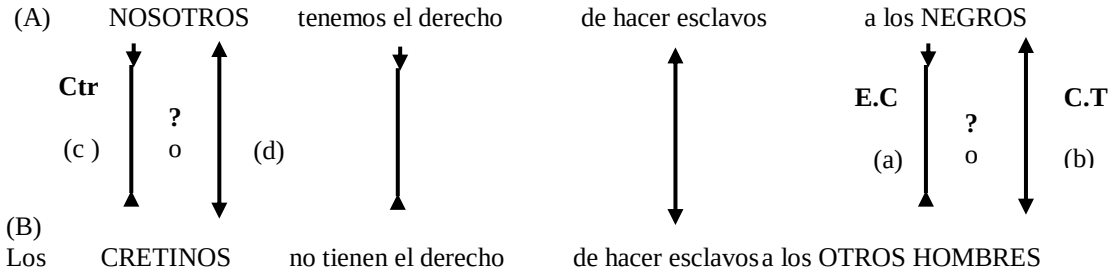


Figura 14. Red argumentativa para el razonamiento intermediario. De las dos proposiciones, A y B, se pueden inferir semánticamente cuatro proposiciones, las cuales saltan a la vista cuando se miran las relaciones transversales del contenido entre (A) y (B). Esas proposiciones son:
[a] *Los negros no son hombres* (es el contenido 1-1" del enunciado-objeto del razonamiento por el absurdo)
[b] *Los negros son hombres* (el contenido 1'-1" de la contra-tesis)
[c] *Nosotros no somos cretinos* (es el contenido 3' de la conclusión que contradice la contra-tesis)
[d} *Nosotros somos cretinos* (es el presupuesto de la conclusión 3-3')
Ahora bien, de inmediato se ve que:

- las proposiciones (a) y (b) son contradictorias y no pueden ser ambas verdaderas, de la misma manera que las proposiciones (c) y (d),
- las proposiciones (b) y (c) son perfectamente compatibles y pueden ser ambas verdaderas.

Además, la proposición (d) no es compatible con la proposición A en razón misma de B. Igualmente, la proposición (c) puede considerarse como la consecuencia de A, si se acepta B como principio.

Si ahora volvemos al razonamiento explícito de Montesquieu (fig. 13), podemos constatar un deslizamiento en la organización del razonamiento por el absurdo: la conclusión (3-3') del razonamiento intermediario se utiliza como premisa para el paso final, como si su contenido (c) fuera contradictorio con el contenido (b) de la contra-tesis, mientras que las dos proposiciones son compatibles.

Lo que sucede en realidad es que (c), conclusión lógica del razonamiento intermediario, ¡contradice una hipótesis implícita distinta a la de partida, a saber (d)! Montesquieu conduce todo su razonamiento por el absurdo como si fuera preferible rechazar el contenido (b) de la contra-tesis, proposición que por tanto ni implica ninguna contradicción, mejor que rechazar esta hipótesis (d) cuyo valor epistémico de certeza (para

los defensores de la tesis esclavista) es asimilado al valor de verdad. Revela así una contradicción (no lógica) entre (d) y A, en la cual los partidarios de la esclavitud son la "sede", para retomar la terminología propuesta por Grize y Piéraut-Le Bonniec (1983, p. 30).

Toda la ironía de este razonamiento por el absurdo consiste en parecer justificar el enunciado-objeto ("Es imposible que supongamos que esa gente sea humana"), proposición que si se formula explícitamente también puede parecer inverosímil a ojos de los defensores de la esclavitud, mejor que en rechazar una proposición ("somos cretinos") de lo cual sólo los defensores de la esclavitud están convencidos. De paso se habrá notado que la explicitación de los valores epistémicos *"es imposible que..."* y *"se comenzaría a creer que..."* concierne las proposiciones (a) y (d) que, para Montesquieu, son proposiciones admitidas implícita o explícitamente por los defensores de la esclavitud. Por lo demás, eso corresponde a una regla estratégica general en la conducción de una argumentación: sólo se explicitan los valores epistémicos que el interlocutor reconoce y que no discutirá, y no los que reconoce el que habla, sobretodo cuando son diferentes (cf. p. 365-366).

La existencia de una red subyacente de oposiciones también puede ponerse en evidencia a través de las argumentaciones que no toman la forma de un razonamiento por el absurdo y que no se proponen refutar una tesis, como por ejemplo la de Isócrates citada antes (Duval, 1990a, p. 214-216). En tanto utiliza una red de oposiciones y respeta la continuidad temática, la argumentación es entonces una forma de razonamiento que sólo puede funcionar por acumulación y no por sustitución. En concreto esto quiere decir que una argumentación no se puede recorrer ni controlar paso a paso como un razonamiento deductivo: exige, por el contrario, una aprehensión simultánea de las múltiples relaciones transversales del contenido existente entre todas las proposiciones del razonamiento. Esa red de relaciones transversales constituye un conjunto potencial de proposiciones compatibles o incompatibles entre sí. El valor epistémico del enunciado-objeto se cambia gracias a su recontextualización en este conjunto potencial de proposiciones, de las cuales algunas quedan implícitas. En este sentido, se puede decir entonces que una argumentación reorganiza de manera distinta la red epistémica, y también la semántica, que subyace a una opinión, a una creencia o a un conocimiento local aceptado por un interlocutor real o virtual. Y, en el caso de la argumentación aún más que en cualquier otra forma de discurso o de razonamiento, resulta esencial distinguir la estructura superficial y la estructura profunda, es decir, las conexiones marcadas entre las proposiciones explícitamente enunciadas y la red proposicional subyacente.

Se ve así pues el profundo abismo que separa el funcionamiento de la argumentación y el del razonamiento deductivo. No tienen en absoluto nada en común, a pesar de que un razonamiento deductivo pueda expresarse en el registro de la lengua natural como una argumentación. Es sólo en la medida en que el razonamiento por el absurdo requiera un razonamiento intermediario de forma deductiva, que el funcionamiento de éste puede estar emparentado con el de la argumentación. Pero, como en una argumentación, la comprensión y el control de lo específico al razonamiento por el absurdo (es decir, el paso inicial y el paso final) requiere que haya una comprensión simultánea de las relaciones entre todas las proposiciones que lo componen. Es en este sentido que el razonamiento por el absurdo aparece como la forma común a la demostración y a la argumentación.

ANÁLISIS LÓGICO DEL RAZONAMIENTO

El análisis lógico de un razonamiento se basa en sus condiciones de validez. Por lo general, los investigadores se han apoyado en la simple oposición **forma** y **contenido** para describir estas condiciones de validez y su aplicación, tal como la siguiente presentación clásica lo ilustra.

> La validez de una inferencia, o la corrección del razonamiento a través del cual se hace esta inferencia, no depende de su contenido sino únicamente de su forma. La función de la lógica es, en primer lugar, poner sobre relieve estas formas válidas y, en segundo lugar, prevenir contra las formas no válidas que se corre el riesgo de confundir con las primeras (Blanché, 1980)

Frente a esta oposición clásicamente admitida, todas las distinciones que hemos introducido podrían parecer complicadas y sobretodo inútiles. Ahora bien, esta oposición está lejos de constituir una distinción tan clara y tan pertinente como por lo general se la supone.

De manera contraria a una afirmación que con frecuencia se hace, el problema sobre la validez de un razonamiento es independiente de la distinción entre forma y contenido de las proposiciones que lo constituyen. Esto en razón de que tal distinción no permite responder a la pregunta sobre *lo que fundamenta la validez de un paso de razonamiento* y lo que esa validez fundamenta en un encadenamiento de pasos. Ahora bien, sólo en la medida en que se disponga de una respuesta a esa pregunta, se podrán determinar las reglas de validez para los diferentes tipos de razonamientos posibles[24].

Además, la distinción entre forma y contenido está lejos de ser precisa; por el contrario, suscita varias preguntas:

- en qué se basa exactamente: ¿en cada proposición unidad de un paso de razonamiento o en el pasaje de las premisas a la conclusión?
- de las diferentes maneras de distinguir entre la forma y el contenido de una proposición, ¿con cuál quedarse para aplicar los criterios de validez?
- ¿cómo explicar que la similitud entre las "formas válidas" y las "formas no válidas" sea tal que se corre el riesgo de "confundirlas", como Blanché lo indica?

A lo anterior es necesario añadir un problema importante desde un punto de vista didáctico y psicológico:

- *cuando el razonamiento recurre al registro de la lengua natural,* ¿cómo se puede hacer para que se descubra esta distinción entre forma y contenido? Es necesario no olvidar que en este registro, un mismo razonamiento válido puede dar lugar a formulaciones y a marcas redaccionales ampliamente variables. ¡Basta con mirar la presentación de las demostraciones de geometría en lengua natural para darse cuenta de eso! (Duval & Egret, 1993)

---

[24] A la pregunta sobre el fundamento de la validez con frecuencia se le hace hacer cortocircuito en provecho de otra pregunta, más técnica, sobre el inventario de todos los esquemas de razonamiento válido: " la función de la lógica es, en primer lugar, poner sobre relieve estas formas válidas..." (Blanché, 1980, p. 976 col. 1; en el mismo sentido, Ducrot, 1980, p. 81). La pregunta sobre el fundamento de la validez no es evidente ya que Blanché no propone una explicación distinta a esta: "... ahora, ¿qué es lo que nos garantiza la validez de un esquema?, ¿de dónde saca *su autoridad* esta regla? Esta regla es la aplicación de *una ley* lógica, verdad *necesaria*...". En realidad, la importancia de las reglas o de los esquemas de validez está en que permite una economía de tratamiento para la identificación de los múltiples razonamientos válidos posibles. ¡Pero estas reglas o estos esquemas no explicitan en absoluto lo que constituye la especificidad de un razonamiento válido en relación con los razonamientos no válidos!

No se puede explicar el funcionamiento lógico de un razonamiento válido sin recurrir a las distinciones entre valor epistémico y valor de verdad, entre valor epistémico teórico y valor epistémico semántico, entre status operatorio y contenido de una proposición enunciada. En este punto no puede haber ruptura entre un análisis puramente cognitivo y un análisis puramente lógico. La pregunta fundamental sobre lo que constituye la validez de un razonamiento debe plantearse en estos términos: ¿qué condición debe cumplir la organización de un paso de razonamiento para modificar no sólo el valor epistémico del enunciado-objeto sino también su valor de verdad?

El fundamento de la validez de un razonamiento

La respuesta a esta pregunta fundamental fue dada por Aristóteles en el contexto de su estudio de los silogismos. Nació de la lógica como disciplina. En tanto que fue formulada para distinguir las figuras válidas del silogismo de las que no lo son, esta respuesta es independiente de la forma particular de razonamiento que es el silogismo. En efecto, la condición general de validez definida por Aristóteles para los pasos de razonamiento "que no requieren ningún término extraño además de las premisas" (*Anal Prim* I, 24b 21-22), es decir, para los que no recurren a un tercer-enunciado, también se aplica a los pasos que recurren a un tercer-enunciado, es decir, a los que se efectúan a través de la aplicación de un axioma, de una definición o de un teorema...

Para que un paso de razonamiento sea válido, es necesario y suficiente que produzca una y sólo una proposición. Esta condición necesaria y suficiente, Aristóteles la enuncia en términos de propiedades modales. Para que un paso de razonamiento sea válido, basta que a partir de las premisas no haya más que **una sola conclusión posible**; *"es imposible que la conclusión sea otra"* (*Meta* D, 1015b 7-8, *Anal Post* I, 71 b12). Esta definición de la validez de un razonamiento es lo que le permitió a Aristóteles, como veremos más adelante, distinguir entre todas las variedades de silogismos posibles, los que son razonamiento válidos y los que no lo son. En efecto, hay silogismos que dan una sola conclusión posible, y hay otros, más numerosos, que o bien dan al menos dos conclusiones diferentes igualmente posibles o bien no dan ninguna conclusión. Sin embargo, tanto unos como otros respetan las restricciones de organización lingüística de dos premisas, propias del silogismo. Así, un razonamiento válido es un razonamiento cuya *organización de las proposiciones entre sí, produce necesariamente una y sólo una conclusión.*

Esta noción de validez de un paso de razonamiento, o de un razonamiento, evidentemente, no debe confundirse con la noción de validez que concierne las fórmulas de cálculo proposicional, es decir, proposiciones complejas que son funciones de otras proposiciones que las constituyen: una fórmula "válida" en un cálculo proposicional es una fórmula tautológica, es decir, una fórmula siempre verdadera cualquiera que sean los valores de verdad de las proposiciones de las cuales ella es función (Kleene, 1967, p. 20).

Esta definición de la validez de un razonamiento también permite explicar por qué un paso de razonamiento válido confiere a la conclusión un valor epistémico específico, el de lo apodíctico. En efecto, es la unicidad de su posibilidad, es decir, la exclusión de toda otra proposición, lo que

confiere a la conclusión obtenida su carácter de necesidad[25]: "habiendo sido planteadas algunas cosas, cualquier otra cosa *resulta necesariamente* por el sólo hecho de esos datos. Por el sólo hecho de esos datos quiere decir que es por ellos que se obtiene la consecuencia..." (*Anal. Post.* I 24b 18-20). El razonamiento válido confiere a la proposición que produce como conclusión el valor epistémico de apodíctico, bien si esta proposición es totalmente nueva o bien si ya se conocía: ese razonamiento permite descubrir la necesidad intrínseca de su aserción. *Una conclusión, pues, no puede tener el mismo sentido para quien la acepta sin haber comprendido el razonamiento que condujo a ella que para quien la acepta comprendiéndolo.* La propiedad fundamental de un razonamiento válido (respecto a un paso de razonamiento) es entonces la de conferir al enunciado-objeto (respecto a la conclusión) el valor epistémico teórico de apodíctico. Esto en razón de que un razonamiento válido que demuestra es necesariamente un razonamiento que convence. Como veremos más adelante en la aproximación didáctica, la disociación frecuentemente observada entre razonamiento válido que demuestra y razonamiento que convence, tiene su origen en el desconocimiento del funcionamiento de un razonamiento válido, de hecho asimilado a una simple argumentación.

El reconocimiento de la validez de un silogismo clásico

Hemos visto que el silogismo clásico se define por las restricciones de organización lingüística para las premisas. Son restricciones intraproposicionales que se basan en el número de términos, su posición gramatical, su cuantificación y el carácter afirmativo o negativo del vínculo verbal que une los dos términos en cada premisa. Solamente pueden tomarse como premisas cuatro tipos de proposiciones; cada tipo expresa una relación conjuntista entre la extensión de dos términos:

- el tipo **A** (Todos los A son B) expresa una relación de inclusión (estricta o no) entre A y B,
- el tipo **E** (Ningún A no es B, Todos los A son no B) expresa una relación de exclusión,
- el tipo **I** (Algunos A son B) expresa una relación de intersección,
- el tipo **O** (Algunos A no son B) expresa una relación de exclusión para una parte, *al menos o a más...*

Además, las dos premisas deben tener en común un mismo término, que puede tener la posición de sujeto o de atributo en cada premisa. *Tenemos así cuatro configuraciones diferentes de las posiciones respectivas del término común en las dos premisas*: han sido llamadas "figuras" del silogismo. La conclusión obtenida por combinación de dos relaciones conjuntistas, dadas en las premisas, depende de las posiciones gramaticales respectivas del término común.

Las restricciones lingüísticas intraproposicionales y las configuraciones de posición gramatical generan 64 modos posibles del silogismo de los cuales sólo 27 son válidos, es decir, que producen una conclusión y una sola. Los otros o no producen conclusión o producen varias. La observación de las características propias de la clase de silogismos que producen una y sólo una conclusión, permiten inducir las reglas de validez para los silogismos. Las dos reglas más generales son: por lo menos una premisa debe ser afirmativa y por lo menos una premisa debe ser universal (*Anal. Prim.*, 41b 6-18). Un silogismo cuyas premisas no satisfagan estas dos reglas no puede ser válido.

---

[25] Las dos relaciones fundamentales que unifican las dos nociones de posible y de necesario, por lo general se presentan en las dos siguientes fórmulas, en donde M y L se leen respectivamente como "es posible que..." y "es necesario que...", y "~" es el signo de negación:

$$MP \equiv \sim L \sim p$$
$$LP \equiv \sim M \sim p$$

Naturalmente, al cambiar de registro de representación, es decir, utilizando los círculos de Euler o los diagramas de Venn, se obtiene un tratamiento figural poco oneroso que permite economizarse estas reglas. Así, el número de conclusiones posibles, 0, 1, 2... corresponde al número de posibilidades para colocar el tercer círculo (si se recurre a los círculos de Euler).

Se ve entonces la trampa y el interés tan relativos de las experiencias con el silogismo. De una parte, dada la proximidad cognitiva del silogismo y la inferencia semántica, *un sujeto muy bien puede efectuar un silogismo correcto basándose sólo en el contenido de las premisa, sin tomar en consideración el funcionamiento propio de la estructura del silogismo*. El acierto dependerá de los fenómenos de congruencia o de no congruencia. De otra parte, si no ha tenido un aprendizaje previo o no ha tenido la ocasión para hacerse sensible a las restricciones particulares del silogismo clásico, el sujeto no tendrá cómo reconocer que no es oportuno tratar de concluir ciertos modos no válidos. Sea, por ejemplo, el siguiente enunciado:

Todos los que votan (para una elección en Francia) son franceses, y algunos franceses no viven en Francia.

La lectura de estas dos premisas conduce a inferir de inmediato:

C1 Algunos de los que votan (para una elección en Francia) no viven en Francia (=*algunos franceses que no viven Francia votan* (para una elección en Francia)).

Eso se debe al efecto de transitividad inducido por la configuración de las posiciones del término común para los silogismos de la primera figura. *Esta proposición inmediatamente inferida es, de facto, verdadera. A pesar de eso, no puede ser válidamente derivada de las premisas".* Debido a que las dos premisas, en efecto, dejan indeterminada la relación entre la extensión del término "francés" y del término "no viven en Francia", es igualmente posible una segunda conclusión contradictoria:

C2 *Ningún francés que no vive en Francia no vota* (para una elección en Francia).

Esto, pues, introduce una duda sobre la posibilidad de interpretar los aciertos registrados en estas experiencias con ciertos modos de silogismos, en especial con los de la primera figura. Pues perfectamente sólo con base en simples inferencias semánticas se puede encontrar la conclusión correcta. En otras palabras, algunos silogismos pueden ser perfectamente evaluados, o producidos, únicamente a través del manejo de la comprensión del discurso ordinario, sin tener en cuenta las restricciones de la organización de las premisas. El acierto con los silogismos válidos puede proceder, pues, tanto de un tratamiento puramente semántico como de un reconocimiento de la validez del razonamiento. Ahora bien, sólo este reconocimiento es pertinente si se quieren evaluar las posibilidades "espontáneas" del razonamiento según criterios lógicos.

Pero, igualmente, esto introduce una duda sobre la posibilidad de dar una significación cognitiva a los errores. La interferencia de los procesos propios a la comprensión de enunciados en lengua natural con los procesos propios a un razonamiento válido, dota al silogismo clásico de una complejidad tal, que no se puede esperar que un individuo pueda discriminar los 64 modos sin tener un aprendizaje previo. *La resolución de un silogismo (la evaluación o la producción de su conclusión) combina una tarea de comprensión del texto con un cálculo elemental de relaciones entre las extensiones de tres términos.* Ahora bien, se ha comprobado que todas las situaciones que combinan estos dos tipos de tarea, comprensión del texto y cálculo de relaciones, como es el caso por ejemplo para los problemas aditivos, para los problemas de conversión cantidad/proporción o incluso para los que requieren plantear una ecuación elemental, son difíciles y exigen un aprendizaje que con frecuencia da pocos resultados. Los datos recogidos en pruebas sobre silogismos que han sido presentadas luego de todo un trabajo previo sobre sus variedades y su

funcionamiento, no constituyen una base fiable para poner de relieve las estructuras y los modelos profundos del pensamiento. El recurso a los silogismos clásicos para analizar el funcionamiento lógico espontáneo del pensamiento, se basa en el desconocimiento de la heterogeneidad y de la complejidad de las tareas que se requieren para su resolución.

El reconocimiento de la validez de un razonamiento deductivo

A diferencia del silogismo, un paso de deducción no impone restricción morfo-sintáctica a la organización interna de cada premisa. Además, las premisas son independientes. La única restricción que hay para permitir la operación de extracción concierne la organización interna del tercer-enunciado en dos partes, una, formada por la(s) proposición(es) antecedente(s), y otra, por la proposición consecuente. La conclusión para ser extraída está, pues, inscrita en el tercer-enunciado. Las únicas acciones para ser efectuadas son las verificaciones: ver si todas las proposiciones requeridas en la parte de las proposiciones antecedentes del tercer-enunciado están entre las que están a disposición a título de hipótesis o de conclusiones anteriores. La necesidad de la conclusión está pues como preinscrita en el tercer-enunciado. No hay que hacer la distinción entre los pasos de deducción que serían válidos y los que no, como sí es el caso para el silogismo.

Así pues, nada parece más simple que el funcionamiento de una paso de deducción. Sin embargo, este funcionamiento está lejos de ser tan inmediatamente asequible como se podría creer. Durante el aprendizaje de las demostraciones en geometría aparecen confusiones en la utilización tanto de los terceros enunciados como de las hipótesis (Egret, 1989, p. 45-52). Los alumnos, por ejemplo, únicamente realizan la parte "proposiciones antecedentes" de un enunciado que corresponde a una *"check-list"* previo a la aserción de una conclusión. No toman en cuenta para nada las hipótesis, o se contentan con verificar una sola condición. Si no se comprende la importancia del status en la organización de un paso de deducción, una conclusión puede convertirse en hipótesis. Este "círculo vicioso" revela la predominancia del contenido sobre el status, así como la incomprensión del hecho de que la organización deductiva de las proposiciones se hace en función de su status operatorio. Estas confusiones, que se ha comprobado que son resistentes, con frecuencia provocan en los profesores la impresión de una carencia de "aptitud para razonar", y en la gran mayoría de los alumnos el sentimiento de que la demostración es un juego arbitrario, sin interés y estéril. Si no se percibe la validez de los pasos y de su encadenamiento, el razonamiento no provoca ninguna modificación en la aprehensión del "sentido" de las conclusiones obtenidas. Entonces, todo el problema del aprendizaje del funcionamiento de la deducción se basa en estas dos preguntas: ¿cómo hacer comprender la importancia del status de las proposiciones en la organización y la conducción del razonamiento deductivo? ¿cómo hacer descubrir la organización interna bipartita del tercer-enunciado, organización que no se encuentra en los enunciados-objeto de una argumentación?

Recurrir a la oposición forma/contenido para describir las condiciones de validez del razonamiento deductivo parece entonces abusivo y tramposo. Sería más exacto hablar de una oposición status/contenido que concierne las proposiciones. Esto, debido a que un razonamiento deductivo no articula las proposiciones en función de sus relaciones de dependencia que puedan ser derivadas de sus contenidos respectivos, ni en razón directa de su valor epistémico, sino que las articula en razón de una codificación de su status y solamente en función de esta codificación. Ahora bien, esta codificación es variable: depende del marco de referencia que se le ha dado o de la axiomática local que se haya escogido. Entonces, una misma proposición puede cambiar de status cuando se cambia de contexto teórico, sin que por ello cambie ni el contenido ni incluso el valor epistémico semántico. Por tanto, ¿se puede decir que la proposición cambia de forma? Tanto pueda

ser pertinente la oposición forma(lingüística)/contenido para diferenciar el funcionamiento (válido) de un silogismo clásico del de una inferencia semántica en la comprensión del lenguaje ordinario, así mismo debe reemplazarse por la oposición status/contenido para describir el funcionamiento del razonamiento deductivo.

El reconocimiento de la pertinencia de una argumentación

A diferencia del silogismo y del razonamiento deductivo, la argumentación no requiere ninguna restricción de organización morfo-sintáctica o discursiva (el status de las proposiciones). En efecto, una argumentación se desarrolla con pasos de tipo I (inferencia semántica) y de tipo III (inferencias discursivas), es decir, en ausencia de todo status operatorio para las proposiciones movilizadas en el razonamiento (tabla 1, p. 238; fig. 5, p. 243). La organización de las proposiciones en una argumentación, entonces, sólo puede desarrollarse a partir de las relaciones de contenido existentes entre ellas (fig. 12, p. 262, fig. 14, p. 264). Una argumentación también puede presentar organizaciones discursivas ampliamente variadas; la argumentación tiene que respetar únicamente las exigencias comunes a todo discurso en lengua natural. La principal es la continuidad temática, condición necesaria para que un conjunto, o una serie, de proposiciones aparezca formando un todo coherente: descripción, relato, explicación...

La relación entre cada argumento y el enunciado-objeto es, entonces, de una naturaleza distinta a la que existe entre las conclusiones intermediarias y el enunciado-objeto en el razonamiento deductivo, o la que existe entre el tercer-enunciado y la conclusión en el interior de una paso de deducción. **La relación entre un argumento y una conclusión no es una relación de producción sino de justificación**: en una argumentación el enunciado-objeto no se deriva de las proposiciones anteriores. *Un argumento puede ser más o menos fuerte, más o menos pertinente a favor de la tesis que se defiende.* También puede ser necesario un segundo argumento que evite que el argumento avanzado vaya a ser utilizado como contra-argumento para refutar lo que se quiere defender. De esto resulta una importante consecuencia para el problema de la validez. La organización de una argumentación no permite asegurar la necesidad y la unicidad de su conclusión. Que un argumento pueda convertirse en contra-argumento, o que pueda neutralizarse con otro argumento, basta para revelar esta apertura potencial de toda argumentación a varias conclusiones posibles o a conclusiones opuestas. Esto se explica fácilmente por el hecho de una argumentación moviliza una red semántica de predicados contrarios y que los argumentos como la tesis pueden tener valores epistémicos semánticos diferentes para cada uno de los protagonistas de un debate. *Un razonamiento argumentativo, entonces, no puede imponer su conclusión por la validez de las operaciones discursivas efectuadas sino por* ***la pertinencia del contenido de las proposiciones avanzadas*** *para justificar la conclusión defendida*.

Siempre se puede asegurar la pertinencia de una argumentación pero nunca su validez. Esto clásicamente se ha expresado diciendo que el razonamiento "lógico" y la demostración establecen lo que es verdad, mientras que la argumentación sólo establece lo verosímil. Formulación ambigua puesto que, de una parte, lo verosímil no es un valor epistémico entre otros, y, de otra parte, el funcionamiento de los razonamientos llamados "lógicos" se desempeña, como la argumentación, con la toma en consideración del valor epistémico de las proposiciones y con sus modificaciones. En todo caso, lo que excluye a la argumentación del dominio de la lógica es esta imposibilidad de asegurar su validez.

ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO DEL RAZONAMIENTO

Desde un punto de vista científico, no basta que un razonamiento sea válido, es necesario además que las proposiciones sobre las cuales se apoya sean proposiciones verdaderas. A partir de Aristóteles, se llama "demostración" (αποδειξις) a un recorrido discursivo que cumple estas dos condiciones: ser un razonamiento válido y basarse en proposiciones verdaderas. Así, para Aristóteles, quien sólo toma en consideración pasos de razonamiento de tipo II, la verdad de las premisas es lo que hace que un silogismo válido sea un "silogismo científico", es decir, un silogismo "productor de saber" (ποεισει επιστημην, *Anal. Post.* I 71b. 17-18, 20-25). Aristóteles clasifica en dos categorías las proposiciones iniciales que expresan los conocimientos anteriores y necesarios para toda demostración: las que enuncian las propiedades constitutivas, o identificatorias, de un objeto y las que plantean la existencia. Las definiciones pertenecen a la primera categoría y los axiomas a la segunda. Igualmente, hay otras proposiciones iniciales, las hipótesis, que están en las dos categorías (*Anal. Post.* I, 72a, 14-25, 76a 31-b37). La pregunta sobre el valor epistémico de las proposiciones iniciales de una ciencia o de una teoría, es la pregunta clave para un análisis epistemológico de los razonamientos que se efectúan con fines de demostración. Aristóteles reconocía en los axiomas un valor epistémico teórico de necesidad en la medida en que se imponen al espíritu (76b 23). Hoy día la pregunta es más compleja.

La pregunta sobre el valor epistémico de las proposiciones iniciales de una teoría obliga a volver sobre aquella componente del "sentido" de las proposiciones que el funcionamiento de un razonamiento válido no toma en cuenta: *el contenido*. Desde esta óptica, las definiciones son el caso más típico. Su valor epistémico es anterior a toda separación entre valor teórico y valor semántico, pues depende del *modo de acceder o accesibilidad de los objetos* a los cuales se refiere su *contenido*. Se pueden considerar cuatro modos de presentación de los objetos matemáticos:

- *un modo de acceder intuitivo vinculado al reconocimiento de formas y a la discriminación de propiedades características*: la aprehensión de formas, de colecciones y, más generalmente, de **propiedades invariantes a través de modificaciones visuales**, constituye una referencia descriptiva para las definiciones matemáticas. Se trata allí de la accesibilidad relativa a los **objetos perceptibles**. Este modo de acceder a los objetos es lo que fundamenta la epistemología ingenua según la cual el sentido de las palabras y el del discurso dependería por completo de un acceso directo a los objetos, en una experiencia sensible o eidética, que no haría más que reflejarla.
- *un modo de acceder intuitivo vinculado a la estructuración temporal y espacial de toda experiencia y de toda representación posibles:* la intuición de las relaciones topológicas y afines, las **dimensiones** y la **sucesión**, jugaron un papel fundamental en la geometría y en los números naturales. Se trata allí de la accesibilidad intuitiva relativa al **campo de percepción** y no a los objetos. A este modo de acceso es al que esencialmente se refiere la epistemología kantiana.
- *un modo de acceder apofántico* constituido por la operación de predicación para determinar los objetos (p. 113). Se trata allí de la accesibilidad relativa al "juicio" según la acepción clásica de este término, es decir, a las **proposiciones enunciadas.** A este modo de accesibilidad se refiere esencialmente la epistemología dialéctica, según la cual el conocimiento resulta de la **confrontación de sistemas** de clasificación y de modelos **con un campo cada vez más amplio de datos** recogidos experimentalmente.
- *un modo de acceder puramente lógico*, vinculado con la construcción del objeto a través de esa forma de expansión discursiva que es la derivabilidad deductiva por expansión formal (tabla 3, p. 129 y tabla 4, p. 131). Se trata allí de una accesibilidad relativa a las operaciones de pensamiento que están totalmente controladas o que son **totalmente controlables**

semióticamente. A este modo de acceso se refiere la epistemología constructivista desarrollada después de Frege y de Hilbert.

Las definiciones y los axiomas provienen, evidentemente, de un modo de acceder apofántico. Todo el problema es saber si los objetos matemáticos determinados por esas proposiciones iniciales provienen sólo de un modo de acceso puramente lógico o si son igualmente accesibles a través de uno de los otros tres modos (intuitivo externo o interno, apofántico). En otros términos, **¿qué es lo que comanda, regula y justifica la aceptación de una proposición como definición?**

Aquí no insistiremos en la respuesta aristotélica de la *Analítica Posterior* (II) que ha sido ampliamente comentada (Hearth, 1956, I; Eco, 1984). El problema epistemológico de las definiciones ha llegado a ser más complejo con la aparición de las primeras axiomáticas llamadas "formales" (Dedekind, 1881; Hilbert, 1899; Zermelo, 1907) y con el desarrollo de la formalización, originado por Frege (1879) y cuyo desenlace fue la creación de la metamatemática con Hilbert (1924). En efecto, el pasaje de lo que Hilbert había llamado "axiomáticas de contenido" (*inhaltliche Axiomatik*) (1934) como la de los *Elementos* de Euclides, a las "axiomáticas formales" como la de Hilbert y de Zermelo, constituye una ruptura. Todo el problema del análisis epistemológico es saber a qué se refiere exactamente esta ruptura y lo que implica para la demostración.

Este problema no es sólo de naturaleza epistemológica; también es de naturaleza cognitiva pues concierne el aprendizaje de las matemáticas, en particular el de la geometría. En efecto, la geometría trata relaciones, objetos y situaciones que pueden representarse en un registro semiótico específico, el de las figuras, las cuales tienen un valor "intuitivo" y un papel "heurístico". En estas condiciones, *¿el pasaje de las "axiomáticas de contenido" a las axiomáticas formales provoca un rechazo de todo modo de acceso intuitivo a los objetos nombrados en las definiciones y los axiomas* y, en consecuencia, un rechazo al registro de las figuras? Este problema igualmente concierne una pregunta más general sobre la comprensión de las definiciones y su funcionamiento propio. Se puede formular así: *¿cuáles son los criterios de aceptabilidad de una proposición como definición?* Estas dos preguntas, la del modo de acceso a los objetos definidos y la de la determinación de los objetos definidos, comprometen un modelo del funcionamiento cognitivo del pensamiento.

Modo de acceso a los objetos definidos y demostración

Dos importantes cambios marcan el pasaje de las "axiomáticas de contenido" a las "axiomáticas formales". El primero tiene que ver con la relación de las proposiciones iniciales entre sí y el segundo con la naturaleza de los objetos definidos o planteados.

En una "axiomática de contenido" las proposiciones iniciales pueden estar formuladas independientemente las unas de las otras y pueden no utilizar determinaciones que provengan de un mismo campo conceptual. Algunas definiciones, o algunos axiomas, pueden entonces corresponder a la caracterización de objetos simples a los cuales se tiene un acceso directo, independientemente de las proposiciones que los definen o que plantean su existencia. Basta leer la lista de las 23 definiciones, de los 5 postulados y de las 9 nociones comunes del Libro I de los *Elementos* de Euclides para darse cuenta de ello. Su función entonces es delimitar los conceptos de los objetos y no constituir los objetos. Estos son igualmente accesibles intuitivamente a través de la representación de "figuras" según sus propiedades topológicas, afines, proyectivas, métricas...

En las axiomáticas formales no es así. Los axiomas forman un "sistema de proposiciones" que definen un "objeto-estructura". Las definiciones entonces no pueden considerarse aisladamente sino en relación con el sistema que ellas forman. *Esto introduce la exigencia de la no-contradicción de los axiomas entre sí*. La existencia de los objetos así definidos puede subordinarse a esta única condición de no contradicción. Desde este punto de vista, las axiomáticas formales serían más justamente llamadas como "axiomáticas de estructura". Los objetos así determinados no tienen en absoluto la misma naturaleza que en las axiomáticas de contenido: "son las relaciones fundamentales las que se determinan, y no los objetos del dominio a los que se refieren estas relaciones" (Nichanian, 1979, p. 76). Así, Hilbert privilegia las relaciones "estar sobre...", "entre...", "congruente con...", "ser paralelo a ...": "la descripción exacta y apropiada a los objetivos de las matemáticas de estas relaciones (entre puntos, rectas y planos) es dada por los axiomas de la geometría" (Hilbert, 1971, p. 11). *La función de las definiciones en una axiomática formal es, pues, la de poner sobre relieve la estructura semántica común a los conjuntos de objetos.* ¿Pero esto quiere decir que las axiomáticas formales rompen por completo con todo modo de acceso intuitivo a los objetos que ellas construyen?

El problema de la significancia de los signos en los enunciados de definición y de axioma

Es importante no olvidar que las primeras axiomáticas formales (la de Dedekind para los números enteros, la de Hilbert para la geometría y la de Zermelo para la teoría de conjuntos) aparecieron en el contexto de una problemática de fundación lógica de los objetos matemáticos. Las definiciones y los axiomas no deben referirse a nada que esté por fuera de las proposiciones que los enuncian. Su función es "cimentar" los objetos matemáticos de una manera puramente analítica, en el sentido kantiano del término, es decir, constituirlos sin recurrir para nada a la intuición, ni siquiera a la de la estructuración espacial y temporal de toda representación. Los objetos matemáticos, pues, deben darse exclusivamente a través del proceso de derivación deductiva de las proposiciones.

Pero las axiomáticas formales han tropezado con el empleo de los signos, tal como Frege lo muestra en su crítica a la voluntad fundadora de la axiomática de los *Fundamentos de la Geometría* de Hilbert (1899), crítica expuesta en su correspondencia con Hilbert y en sus artículos de 1903-1906 (Nichanian, 1979, p. 80, 194-206). En efecto, el punto ciego de las axiomáticas formales está en la referencia de las letras de individuos en los axiomas[26].

> ¿Qué designan en efecto las letras a, b, en los primeros axiomas hilbertianos ("Si a y b son puntos, existe una recta e tal que a y b se encuentren sobre e" etc.)? ¿tienen una **significación, lista antes del enunciado** de los axiomas, si es que es verdad que los axiomas mismos deben determinar los objetos? ¿se puede decir que reciben una **significación después, en** el sistema de axiomas? Nichanian, 1979, p. 200.

[26] Esta cuestión de la referencia pura y de la significación de los signos en los enunciados axiomáticos igualmente se plantea a propósito de la determinación conceptual de lo que es un "conjunto" en Zermelo: "las letras de individuos en los enunciados axiomáticos (si **a** y **b** son dos puntos, o dos conjuntos, entonces existe **c** tal que...) deben entonces tener una denotación; ¿de dónde reciben esta denotación si no es del sistema de axiomas mismo? Solamente a menos que se quede en el carácter condicional de estos enunciados, una tal denotación no está aún allí en el momento en que las proposiciones axiomáticas se enuncian. Es necesario, entonces, dotar previamente a estas letras de individuos de una denotación, y no evitarlo. Esta es la única función de lo que Zermelo llama aquí un "dominio de individuos". Evidentemente, él confunde esta función con la que nosotros hemos señalado en primer lugar: la de dotar un dominio de aplicación, formado por objetos ya determinados, del si-entonces apofántico..." (Nichinian, p. 93-94). Esta paradoja fue claramente puesta en evidencia por Skolem en 1922 en Algunas observaciones sobre la fundación axiomática de la teoría de conjuntos (*De Hegel a Gödel*, p. 290-301).

Para Frege, este punto ciego toca *una doble confusión que concierne la relación entre la significancia de los signos y la determinación de los objetos.* La primera confusión tiene que ver con dos funciones habitualmente atribuidas indistintamente a los signos, pero que en realidad son independientes: la función de **denotación de un objeto**, y la función de **simple identidad de ocurrencia** en una expansión discursiva. La segunda confusión concierne dos operaciones diferentes de interpretación: la **interpretación semántica de una teoría** que consiste en dar una función denotativa a los signos que sólo cumplen una función de identidad de ocurrencia, y la **aplicación de una teoría** a un dominio de objetos ya determinados en otra parte. Si la ruptura con todo modo de acceso intuitivo a los objetos implica ruptura con toda precomprensión de la denotación de los signos, entonces es necesario que los signos no tengan ninguna función de identidad de ocurrencia y que la interpretación de la teoría sea distinta a su aplicación. Una ruptura tal únicamente puede efectuarse en las axiomáticas formalizadas, y no simplemente formales, es decir, en axiomáticas que permitan tematizar por sí mismas la derivación de los enunciados, unos en relación con otros.

La realización del proyecto de una fundación exclusivamente lógica de los objetos matemáticos, exige entonces que se libere de la **"precomprensión de la denotación" inherente a toda utilización de signos** (Nichanian, 1979, p. 206-210) y que el pasaje de una proposición a otra movilice únicamente la simple aplicación de leyes lógicas (Frege, 1893, p. V-VII). Por eso, hace falta que la tematización de la derivación deductiva de las proposiciones se efectúe con signos o, más precisamente, con los **arreglos de signos que sean promovidos al status de objetos**, y esto independientemente de la significación y de la interpretación de esos arreglos (Nichanian, p. 101-105, 110-114, 157). Es con este propósito que Frege, quien no quiso disociar la formalización de la demostración y la fundación de los objetos, creó su "escritura conceptual" (1879)[27]. Pero tal proyecto sólo se realizó con la meta-matemática, o teoría de la demostración (Hilbert, 1924), al precio de la renuncia a todo modo de acceso puramente lógico o exclusivamente apofántico a los objetos matemáticos (Nichanian, p. 116, 207-208).

En resumen, el pasaje de las axiomáticas de contenido a las axiomáticas formales no provoca el rechazo de los dos modos de acceso intuitivo a los objetos, sino sólo una inversión de la predominancia entre ellos. El modo vinculado al reconocimiento de formas y a la discriminación de propiedades características está subordinado al modo vinculado con la estructuración temporal y espacial de toda experiencia y de toda representación posibles. Para verificar esto basta una simple comparación entre los objetos nombrados en las proposiciones iniciales de los *Elementos* de Euclides con los de los *Fundamentos de la Geometría* de Hilbert.

Axiomáticas formales y modo de acceso intuitivo a los objetos definidos

La particularidad de la geometría es que requiere al menos dos registros semióticos de representación: el registro discursivo y el registro de las figuras. El primero, para enunciar las definiciones y desarrollar las demostraciones, el segundo porque la estructuración espacial es la condición de toda representación y el análisis de las propiedades características de las formas proviene del dominio de la geometría. *Entonces, debe haber una posibilidad intrínseca de coordinación del registro discursivo con el registro de las figuras que esté dada en el enunciado de las definiciones y de los axiomas.* Las axiomáticas formales, pero no formalizadas, no escapan a esta necesidad. Retomando los términos del análisis precedente, no puede haber empleo de signos, así sean simples letras, sin una función denotativa predeterminada que remita al registro de las

[27] Para Frege la realización de tal proyecto sólo podía considerar la aritmética y no la geometría.

figuras. La diferencia entre una axiomática de contenido y una axiomática formal, a este nivel, radica sólo en cuál de los dos modos de acceso intuitivo se privilegia.

Los cinco grupos de axiomas que Hilbert enuncia fijan, cada uno, relaciones ("estar sobre...", "entre...", "ser igual...", "ser paralelo a...") entre los elementos. Con frecuencia se ha dicho que la denominación de estos elementos como "puntos", "rectas", "planos" no tenía ninguna importancia y que hubiera podido escoger otros términos que evocaran otras imágenes distintas. Esto es una trivialidad en la medida en que la escogencia terminológica siempre es secundaria, con excepción de los costos de memorización. Pero jamás es trivial la distinción a la que se está enfrentado a través de la oposición de los término empleados. La distinción que Hilbert da de entrada, conservando de hecho los términos "punto", "recta" y "plano", es una distinción que intrínsecamente pertenece al registro semiótico de las figuras: la distinción entre las dimensiones 0, 1 y 2 (Hilbert, 1971, p.11, definición). En realidad, lo que Hilbert da en el corpus de las proposiciones iniciales son los elementos semióticamente más simples para esas tres dimensiones, y solamente estos elementos. A diferencia de Euclides, no da las unidades figurales de dimensión 2, las cuales pueden definirse discursivamente con base en las unidades figurales de dimensión 1 o de dimensión 0.

Tabla 2

Lista de los objetos nombrados, o definidos, en las proposiciones iniciales
que corresponden a unidades figurales elementales (cap. IV. Fig. 1, p. 177)

Las unidades figurales elementales no deben confundirse con las figuras que representan un "objeto geométrico". Una figura que representa un objeto geométrico exige al menos dos unidades figurales elementales para poder representar una relación topológica, afín o métrica, una relación de orden, una relación de igualdad, una relación de inclusión, etc. Además, una unidad elemental figural no debe confundirse con las sub-figuras que se obtienen por modificación mereológica de una figura dada. La modificación mereológica de una figura es un tratamiento puramente figural: el semicírculo está definido en los *Elementos* (def. 18) como el resultado de una tal modificación.

	Los *Elementos, Libro I* Euclides	*Fundamentos de la Geometría* Hilbert
Dimensión 0	**Punto** def. 1, def. 3	**Punto** Ax. 1, 1-8
Dimensión 1	**línea (recta)** def, 2, 4 **segmento de círculo (curva)** def. 19	**(línea) recta** Ax. I, 1,2,3; Ax. II, 1-2
Dimensión 2	**ángulo plano (inclinación)** def. 8 (+def. 9-12) **círculo** def. 5	**ángulo (región del plano)** def. siguiente al Ax. III, 2

	triángulo def. 21 (+def. 24-29) **cuadrilátero** def. 22 (def. 30-34)	

En la tabla se observa que Euclides parece concederle a las unidades figurales de dimensión 2 el mismo carácter primitivo que a los elementos de dimensión 0 o 1. Esto se explica por la predominancia que le da a las formas y a la discriminación de sus propiedades características. Igualmente se observa que Hilbert está obligado a conservar una unidad figural de dimensión 2, el ángulo. Las otras unidades figurales elementales de dimensión 2 pueden considerarse como composiciones de unidades figurales de dimensión inferior o de la única unidad figural de dimensión 2, el ángulo. Basta leer las definiciones de los diferentes tipos de polígonos para estar seguro de eso. Así, la posibilidad de una articulación con el registro de las figuras se da por igual tan explícitamente en los *Fundamentos de la Geometría* de Hilbert como en los *Elementos* de Euclides.

Igualmente, la articulación entre registro discursivo y registro figural está explícitamente asegurada por la presencia de reglas de construcción en el registro de las figuras[28]. En los *Elementos* están dadas por los postulados 1, 2 y 3, los cuales permiten la construcción de unidades figurales elementales de dimensión 1 (líneas: recta y curva del círculo). En los *Fundamentos de la Geometría* están dadas por los axiomas de congruencia, los cuales permiten el desplazamiento y la relación de los segmentos como los de los ángulos (Hilbert, 1971, III, 1, III, 4, p. 20-22).

Los objetos definidos por un axiomática formal, como la de Hilbert, provienen de un modo de acceso intuitivo, al mismo título que las definiciones para una axiomática de contenido como la de Euclides. Si se admite que hay demostraciones en el marco de la axiomática de Hilbert, eso muestra que una demostración no es a priori incompatible con un modo de acceso intuitivo de los objetos definidos. Ahora nos resta examinar si puede hacerse un razonamiento válido en el marco de una axiomática de contenido como puede serlo en el marco de una axiomática formal.

Comparación de demostraciones en una axiomática de contenido y en una axiomática formal

Este no es un simple problema escolar; ha comprometido decisiones para la enseñanza que ha concernido y concierne aún las generaciones de los estudiantes de educación básica y media. Todos sabemos que la reforma de las matemáticas de 1969 tuvo la ambición, entre otras, de sustituir la enseñanza de la geometría que se venía haciendo a la manera de Euclides, por otra que fuera a la manera de Hilbert. Ahora bien, lo importante es que esta sustitución fue y sigue siendo interpretada como la sustitución de una "geometría con figuras" en la que la demostración se basaría "en la lectura razonada del dibujo" y donde "el recurso a la evidencia" estaría "presente en las demostraciones", por otra "geometría sin figuras" en la cual la demostración sería verdaderamente una demostración ya que excluiría el recurso a la intuición (Barbin, 1990, p. 71). En otros términos, esta interpretación supone que no hay demostración en Euclides y que los funcionamientos del

[28] La memoria de Riemann *Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría* (1854) comienza con estas líneas: "Se sabe que la Geometría admite como datos previos no sólo el concepto de espacio, sino incluso **las primeras ideas fundamentales de las construcciones en el espacio**. De estos conceptos no da más que definiciones mínimas, y las determinaciones esenciales se introducen bajo la forma de axiomas.... Igualmente para las hipótesis: raramente son independientes de las figuras ya que sirven con frecuencia para construir una figura..."

razonamiento no serían los mismos: válidos en Hilbert pero no en Euclides. Así pues, se impone una comparación de las demostraciones en el marco de una axiomática de contenido y en el marco de una axiomática formal.

Naturalmente, no es posible una comparación directa entre textos de demostración. Y no lo es no en razón de las distancias históricas y culturales, sino porque la redacción de una demostración en lengua natural es tan libre como se quiera (Duval & Egret, 1993). Así, la comparación directa de dos demostraciones en lengua natural tampoco es posible así hayan sido producidas en el mismo medio cultural. *Se impone entonces un cambio de registro para poder comparar textos de demostración y, en consecuencia, para poder analizar el funcionamiento del razonamiento subyacente.* Por otra parte, esto no es particular a los textos de demostración o de argumentación, sino que también concierne el análisis de todos los textos, como lo veremos en el próximo capítulo. Así pues, hemos convertido en grafos proposicionales los textos de demostración de un mismo teorema propuesto en los *Elementos* y en los *Fundamentos de Geometría.*

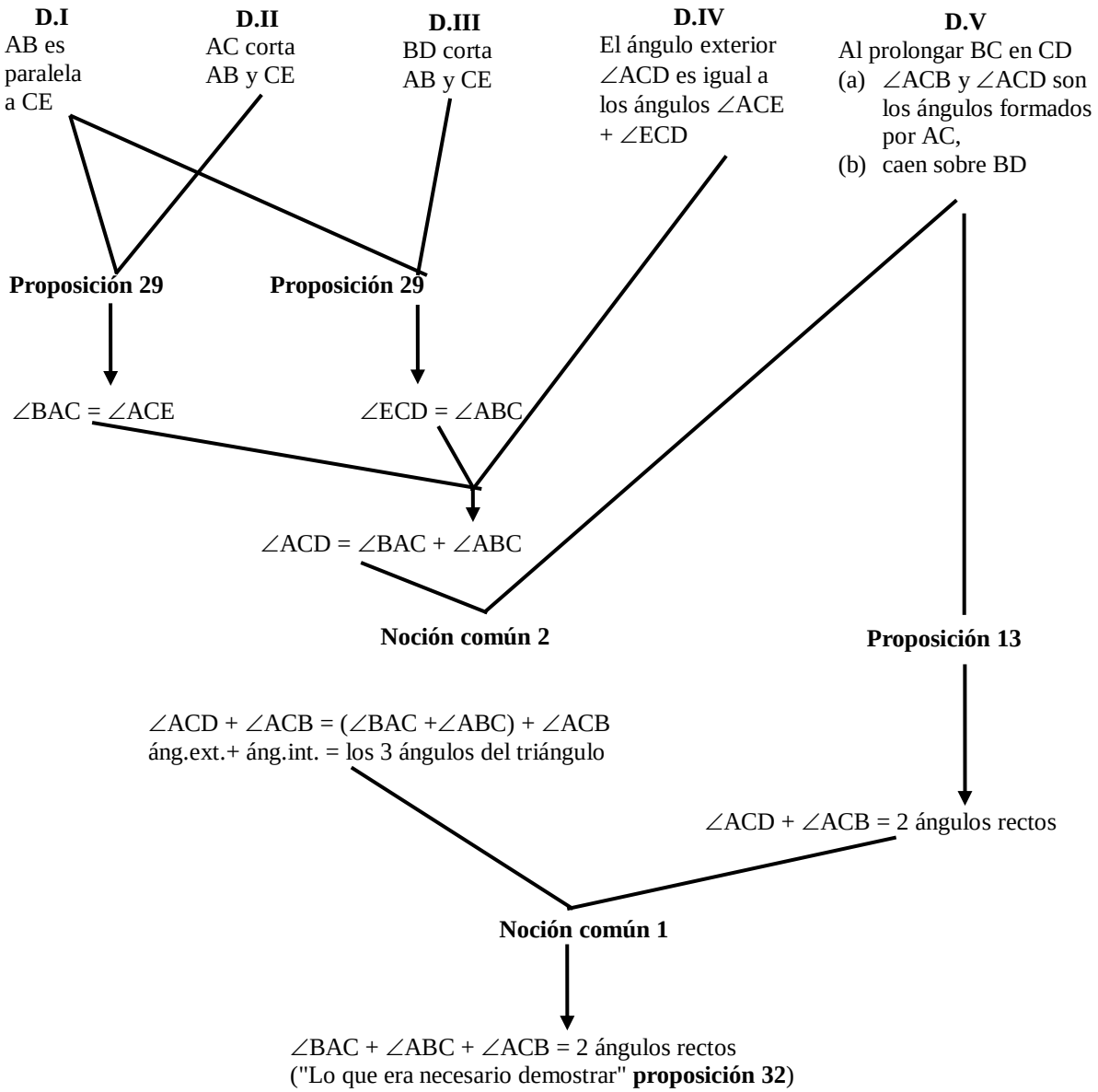


Figura 15. Grafo proposicional de la demostración del teorema "la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos", tal como el texto del Libro I de los *Elementos* la presenta (Euclides, 1990, p. 256). Cada flecha marca un paso de razonamiento. Los datos de partida **I**... **V** corresponden ya sea a proposiciones explícitamente formuladas en forma de consigna de construcción (I y Va) o en forma de constatación (II y III), o bien a informaciones visuales que provienen de la figura construida pero no explícitamente formuladas en el texto (IV y Vb). Los tercer-enunciados explícitamente utilizados son los teoremas 29 y 13, demostrados anteriormente. Los tercer-enunciados implícitamente utilizados son las nociones comunes (axiomas) 1 y 2 ("Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí", "Si a cosas iguales se agregan cosas iguales, los totales son iguales").

En este grafo proposicional podemos ver de inmediato que:

- los tercer-enunciados son o teoremas, es decir, proposiciones apodícticamente verdadera, o axiomas,
- las premisas utilizadas para los pasos de deducción se reparten en dos grupos: las que resultan de un paso anterior y las que son hipótesis, es decir, datos de partida.

Es, pues, exclusivamente a nivel de las hipótesis (DI.... DV) y no en el desarrollo del grafo hasta el enunciado-objeto, que pueden encontrarse las proposiciones que serían una "lectura del dibujo". Para comprender de manera más precisa la función que las hipótesis cumplen en esta demostración, es necesario que tomemos en consideración los tratamientos que pueden efectuarse en el registro de las figuras.

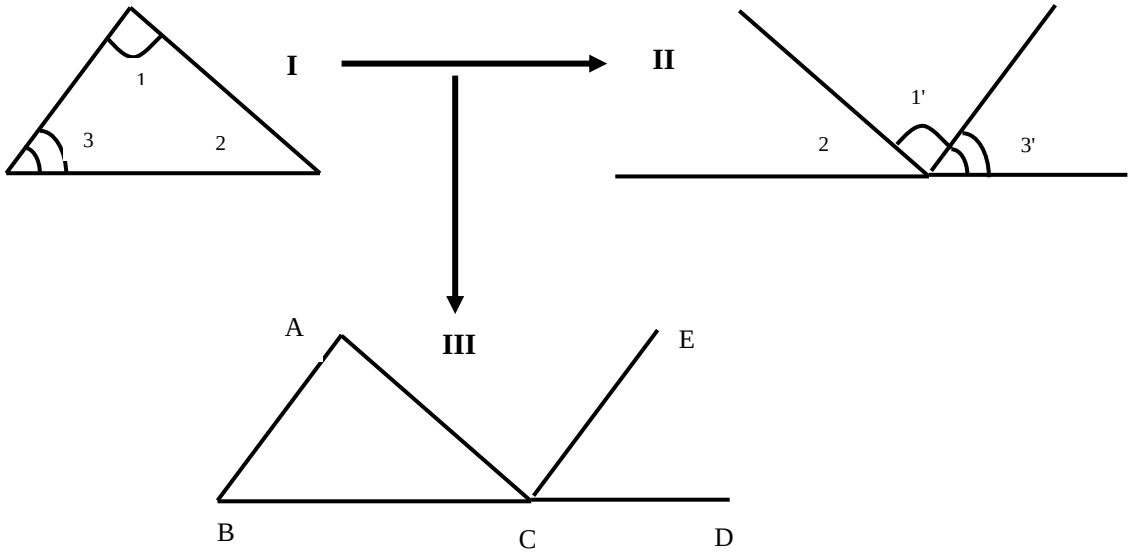


Figura 16. Tratamiento figural correspondiente a la demostración de la proposición 32 de los *Elementos*. El pasaje de I a II corresponde a una operación de reconfiguración: los tres ángulos de un triángulo pueden reconfigurarse en un ángulo plano dividido por las rectas paralelas a los lados del triángulo. Esta reconfiguración constituye el aporte heurístico de la figura. Ella no constituye ni un razonamiento ni una demostración. Lo que generalmente se presenta como la figura, a saber la fase III, ¡es entonces una superposición de las figuras I y II! Presentada aisladamente, esta fase III cumple entonces más una función ilustrativa que heurística, pues si bien permite seguir con más facilidad el texto de la demostración, borra la operación de reconfiguración.

Se observa de inmediato que las hipótesis corresponden a consignas que permiten construir directamente la figura de la fase III. Casi todas (D.I, D.II, D.III, D.Va) enuncian consignas de *construcción auxiliar* en relación con la única figura semánticamente pertinente en vista del enunciado de la proposición que se ha de demostrar, el triángulo (fig. 16, fase I) (Duval, 1988a, p. 20). Estas consignas de construcción auxiliar están autorizadas por las proposiciones iniciales de los *Elementos* (definiciones o postulados). Por el contrario, hay dos hipótesis (D.IV y D.Vb) que no pueden fundamentarse de esta manera y que simplemente tienen el valor epistémico de una constatación sobre el resultado figural inmediato de la construcción.

El análisis muestra pues que esta demostración moviliza tratamientos en dos registros diferentes. De una parte, una reconfiguración en el registro de las figuras y, de otra, una estricto establecimiento del razonamiento deductivo en el registro discursivo. Este razonamiento es válido. El pasaje del tratamiento figurativo al razonamiento deductivo se hace al nivel de las hipótesis: *las*

cinco hipótesis corresponden a la descripción heurística del resultado de dos transformaciones figurales {I-II, (I-II)-III}. El razonamiento se limita a justificar la posibilidad de efectuar la reconfiguración no con las unidades figurales de la figura inicial (los ángulos 1, 2, 3) sino con unidades de la sustitución (los ángulos 1', 3') obtenidos por la construcción auxiliar.

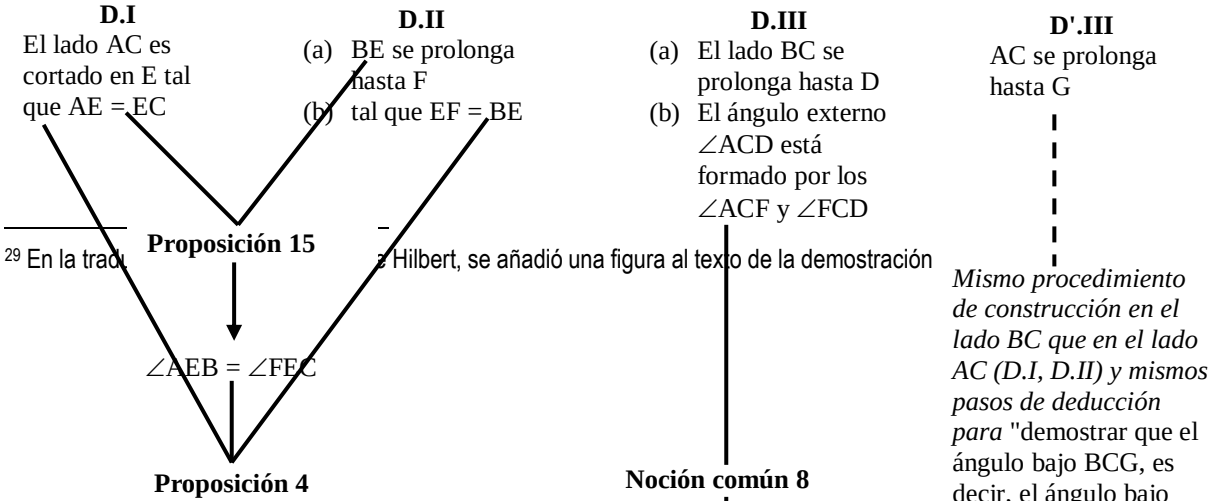
En esta demostración es importante no confundir las dos maneras diferentes de recurrir a la "intuición" que podemos observar. La primera concierne una articulación de los tratamientos que se efectúan en registros diferentes y que pueden justificarse en el registro en que son efectuados: la congruencia de estos tratamientos permite entonces a la intuición cumplir su función heurística. La segunda concierne la conversión directa de un dato obtenido por tratamiento figural (hipótesis D. IV y D. Vb) en una hipótesis teórica de apoyo para el razonamiento: *este recurso a la intuición para nada es heurístico; es epistémico*. Este segundo recurso manifiesta una laguna en la elaboración del corpus de las proposiciones iniciales y no una deficiencia en el desarrollo mismo del razonamiento.

Pueden hacerse las mismas observaciones en las otras demostraciones de los *Elementos*. Si ahora comparamos una demostración propuesta por Hilbert con una demostración de Euclides, para un mismo teorema, podemos constatar que la relación con la intuición se modifica pero no se suprime. Esta modificación se manifiesta en dos puntos:

- ya no hay congruencia entre los tratamientos figurales y los tratamientos discursivos. Si bien siempre es posible, e incluso indispensable recurrir a una figura (material o mentalmente) para seguir la exposición de la demostración[29], la figura ya no juega un papel heurístico.
- todas las hipótesis, correspondiendo como en Euclides a consignas de construcción, se pueden justificar con una proposición inicial, es decir, con un axioma o con una definición.

La primera modificación es importante desde un punto de vista cognitivo: *hay una* ***reducción de la diversidad de las posibilidades semióticas de tratamiento*** *y, en consecuencia, un* ***aumento del costo del tratamiento*** *en el registro discursivo.* Cuando hay congruencia entre el registro figural y el registro discursivo, la representación figural permite anticipar y así permite pues una economía en la exploración -por aplicación de tercer-enunciados- de las ramificaciones deductivas de las hipótesis. Pero desde un estricto punto de vista epistemológico, esta congruencia es neutra puesto que no implica de ninguna manera una transferencia de la evidencia. La segunda modificación, por el contrario, es importante desde un punto de vista epistemológico pero no desde un punto de vista cognitivo: es sintomática de la debilidad, o de la fuerza, del corpus de las proposiciones iniciales de una teoría para asegurar el desarrollo estrictamente interno de una serie de demostraciones.

Por el contrario, si se examinan las dos demostraciones desde el punto de vista lógico, es decir, desde el aspecto de la validez del razonamiento, no hay ninguna diferencia que se pueda establecer entre ellas. Ambas ponen en juego de la misma manera el razonamiento deductivo, tal como la comparación de los dos grafos proposicionales siguientes permiten verlo.



[29] En la tradu e Hilbert, se añadió una figura al texto de la demostración

Figura 17. Demostración de la proposición 16: "En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos" (Euclides, 1990, p. 226-228). El texto de Euclides reproduce las cuatro conclusiones posibles que da el teorema 4 (bases iguales, igualdad de los triángulos e igualdad de los ángulos restantes) en las dos proposiciones antecedentes (dos lados iguales a dos lados, cada uno con cada uno, y un ángulo igual a un ángulo, el contenido por los lados iguales). En este grafo hemos conservado sólo la conclusión útil para el desarrollo del razonamiento. Los datos de partida corresponden a una construcción auxiliar. D.I y D.IIb se basan en la proposición 10. D.IIa, D.IIIa y D'.III se basan en el segundo postulado. Únicamente D.IIIb proviene de una constatación visual sobre la construcción efectuada. Recordamos que cada flecha representa un paso de razonamiento.

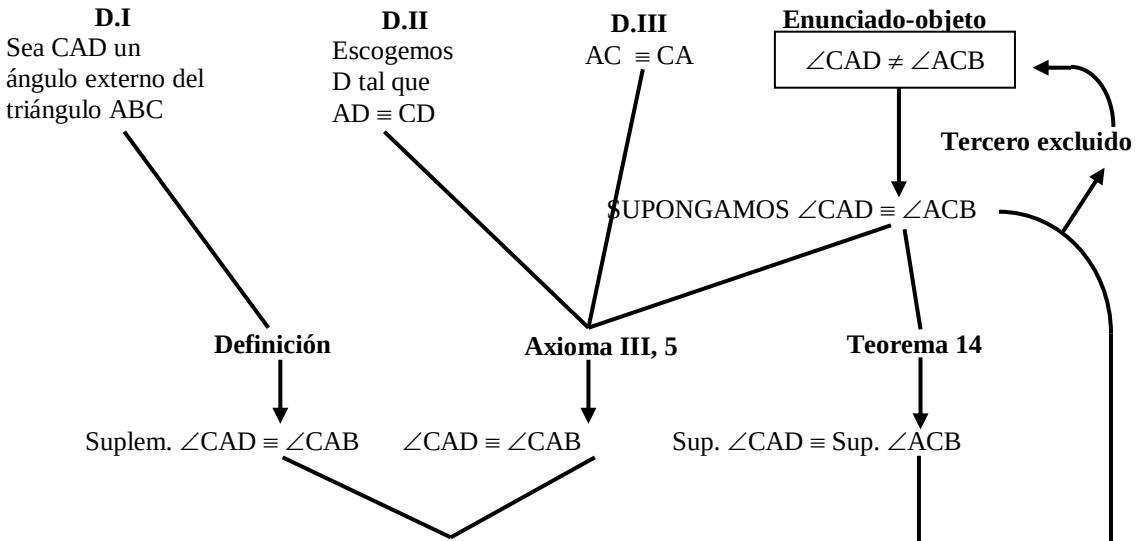


Figura 18. Demostración del teorema 22: "Un ángulo externo de un triángulo es mayor a cada uno de los dos ángulos no adyacentes" (Hilbert, 1971, p. 32-33). Hilbert recurre a dos razonamientos por el absurdo para eliminar dos de los tres casos posibles y concluye: *"Sólo subsiste la posibilidad..."*.
El axioma III, 4 plantea que "todo ángulo dado puede trasladarse en un plano dado, de un lado dado de una semirrecta dada y esto de manera única". El axioma I, 2 plantea que "no existe más de una recta a la cual pertenezcan dos puntos A y B".

Este examen de las demostraciones "prototípicas" nos permite dar una respuesta a la primera pregunta de todo análisis epistemológico del razonamiento en geometría: ¿la demostración excluye toda referencia a un modo de acceso intuitivo a los objetos? Si se examinan las proposiciones sobre las cuales se apoya el razonamiento en geometría, se encuentran las que toman un status operatorio de tercer-enunciado y las que toman un status de premisas. Éstas se dividen en dos grupos, las que resultan de un paso de razonamiento anterior y las que son tomadas como hipótesis. Hemos visto que entre estas últimas están las que son la aplicación de una posibilidad de construcción dada en una de las proposiciones iniciales de la teoría, y las que no lo son. La debilidad epistemológica de una demostración no puede deberse más que a la presencia de hipótesis que no son la aplicación de una proposición inicial[30] o que, siéndolo, son la simple descripción de un procedimiento de tratamiento puramente figural. Parece ser que este es el caso para la demostración de la proposición 4 de Euclides (proposición que tiene el status teórico de axioma en Hilbert: axioma III, 5), la cual establece la igualdad de dos triángulos cuando los dos lados de un triángulo son respectivamente iguales a dos lados de otro triángulo y los ángulos que forman respectivamente son iguales. En esta demostración la noción común 7 se utiliza como tercer-enunciado: "Las cosas congruentes

[30] En los problemas de geometría que se proponen a los alumnos, raramente las hipótesis son independientes de las figuras ya que con frecuencia sirven para construirla.

(εφαρμοζοντα) entre sí, son iguales entre sí". Esta proposición inicial y su aplicación ha dado lugar a muchas discusiones (Heath, 1956, p. 225-227), pues simplemente ratifica la constatación de un tratamiento puramente figural de *"mapping"*: la identidad de dos formas semejantes se establece cuando su superposición, efectuada material o mentalmente, conduce a confundirlas. En este caso, la debilidad de la demostración se sitúa en un plano superior. No concierne la demostración particular sino la constitución de las proposiciones iniciales antes de permitir derivar deductivamente todas las otras proposiciones.

Todo análisis epistemológico de la demostración que se basara en el esquema de una oposición de registros, oponiendo por ejemplo el "rigor" del razonamiento y la intuición, es decir, la "lectura"[31] de las figuras, no sólo desconoce la complejidad cognitiva de los tratamientos que constituyen la actividad geométrica, sino que lleva también a impases en el análisis epistemológico. La separación de los registros de tratamientos, que es una condición de la actividad geométrica, no implica ni su oposición ni la eliminación de uno en beneficio del otro, sino que, por el contrario, llama a su articulación. En efecto, en una demostración el contenido de algunas proposiciones, o a veces de todas, puede convertirse en el registro de las representaciones figurales. Esta posibilidad es intrínseca al discurso geométrico. Inversamente, si no hay articulación, se excluiría la posibilidad del papel heurístico de las figuras.

El papel heurístico de las figuras consiste en el hecho de que los tratamientos propiamente figurales permiten descubrir los tercer-enunciados principales que se pueden poner en juego y, eventualmente, determinar su orden de aplicación en la organización global del razonamiento deductivo. El papel heurístico de las figuras implica entonces una congruencia entre los tratamientos propiamente figurales y el desarrollo de un razonamiento válido. Entonces, es cognitivamente esencial la posibilidad de una articulación entre los dos registros. Esto no quiere decir que en caso de congruencia, ¡la demostración sea sólo la lectura del dibujo!, y eso por razones intrínsecas al registro de las figuras. En efecto, ninguna figura puede representar "las órdenes que constituyen las operaciones sino sólo el resultado de su efectuación": representar las operaciones "implica un discurso o una escritura que tenga las propiedades de un lenguaje" (Bresson, 1987, p. 939). A diferencia de un razonamiento que linealiza y selecciona, las figuras hacen aparecer para cada objeto el conjunto de sus relaciones con los otros objetos de la situación representada, incluso cuando no son pertinentes para la conducción del razonamiento.

Es importante ver con claridad que los dos aspectos constitutivos de una demostración, la validez del razonamiento y la verdad de las proposiciones sobre las cuales se apoya, provienen de dimensiones diferentes. Aristóteles separó los problemas relativos a estas dimensiones; *Analytica Priora* está consagrada al examen de la validez de los diferentes modos de silogismo y *Analytica Posteriora* a la pregunta sobre el valor epistémico y el valor de verdad de las premisas. Si uno se queda en una axiomática de estructura no formalizada, no se puede eliminar totalmente de las definiciones un modo de acceso intuitivo a los objetos definidos. En realidad, el problema de la aceptación o no de una proposición como definición, no se determina por el hecho de que su contenido presuponga o no un modo de acceso intuitivo. Nos encontramos pues con una pregunta

[31] Hablar de lectura de las figuras se presta a confusiones. Naturalmente, se puede decir "leer una figura" como se dice "leer un sentimiento en la cara". Pero este empleo metafórico oculta las diferencias de aprehensión y de tratamiento que separan a los registros lingüísticos, o los que ponen en juego unidades discretas, de los registros de representación exclusivamente analógicos.

que sobrepasa el marco de la geometría y el de las matemáticas: ¿qué es lo que comanda, regula y justifica la aceptación de una proposición como definición?

Criterios de aceptabilidad de una proposición como definición y tipos de definición

Cualquier proposición no puede pretender tener el status teórico de definición. Una definición tiene la función de permitir la identificación de objetos reales, o simplemente posibles, sin que haya ningún riesgo de confundirlo con otros objetos. Naturalmente *esta función cognitiva de identificación no se cumple de la misma manera si el objeto que debe ser discriminado pertenece* al universo del entorno, o si se inscribe en un conjunto complejo de observaciones, o incluso si está vinculado con la construcción de un modelo. Igualmente, el cumplimiento de esta función difiere según el *nivel discursivo de organización que se privilegia*: puramente semántico con la organización del léxico de una lengua, conceptual con la organización de una red de propiedades, teórico con la organización de proposiciones según un orden de derivabilidad deductiva. Según el caso, los criterios de identificación que se conservan y las pruebas de aceptabilidad de una proposición como definición, no serán los mismos. Deben distinguirse muy cuidadosamente cuatro tipos de definición que corresponden a cuatro recorridos cognitivos totalmente diferentes.

Las definiciones de tipo "proposición primitiva"

Las definiciones de tipo "proposición primitiva" son las que responden a la siguiente exigencia: de un corpus de proposiciones reconocidas como verdaderas, separan las proposiciones que, planteadas como primeras proposiciones, serán suficientes para derivar deductivamente todas las proposiciones de ese corpus. Naturalmente, estas primeras proposiciones pueden conducir a la demostración de proposiciones que no estaban en el corpus inicial. Las definiciones de este tipo deben, pues, responder a *un **criterio de anterioridad** en relación con un conjunto de otras proposiciones desde el estricto punto de vista de un orden de derivabilidad deductiva*. La característica de estas proposiciones primitivas es que proceden por condición suficiente y mínima. La mayoría de las proposiciones iniciales de la axiomática de los *Elementos* no cumplen este criterio. Esas no son definiciones primitivas. La comparación de las definiciones relativas a la recta con los axiomas de incidencia enunciados en los *Fundamentos de la Geometría*, por ejemplo, permite constatarlo:

> Una línea es una *longitud* sin anchura. Los *extremos* de la línea están conformados ***por*** puntos. Una línea recta es la que *yace por igual en relación **con los** puntos que están en ella*.[(N.T.)].(Euclides, 1990, def. 2, 3, 4)

> Existe una recta ligada a ***dos** puntos* dados A y B a la cual *pertenecen* esos dos puntos. No existe más de una recta a la cual *pertenezcan dos puntos*. En una recta hay al menos *dos puntos.* (Hilbert, 1971, I1, I2, I3).

El carácter no primitivo de la definición de la recta en los *Elementos* de Euclides aparece en el hecho de que describe una unidad figural, razón por la cual recurre a varias nociones. Más generalmente, el carácter no primitivo de una definición se expresa en la necesidad de introducir en las hipótesis de una de las demostraciones una proposición que no tiene su origen en el corpus inicial. Así, independientemente de cualquier otra consideración, la debilidad de la definición de ángulo dada por Euclides (definición 8) aparece en las demostraciones que implican una

---

(N.T.) Para la traducción de los textos de Euclides que el autor cita en francés, en términos generales, nos hemos acogido a la traducción al español de los *Elementos* publicada por Aguilar, 1970. Sin embargo, para este apartado hemos debido recurrir a una traducción literal del texto en francés como único modo de no perder las preposiciones que a Duval le interesa resaltar en negrilla.

comparación o una adición de ángulos: por ejemplo, las proposiciones 16 y 32. No tomar en consideración "las propiedades relativas al regionamiento del plano por el ángulo (interno o externo)" (Barbin, 1990, p. 74) conduce a Euclides a introducir en las hipótesis una proposición que expresa una constatación: en los grafos presentados en las figuras 15 y 17 anteriores, éstas son respectivamente las hipótesis D.IV, D.Vb y D.IIIb. *El* ***prueba de aceptabilidad*** *de una definición primitiva es que ella no introduce* ***ninguna debilidad en una u otra demostración*** *cuya cadena explicita el orden de derivabilidad deductiva de un conjunto de proposiciones.*

Las definiciones de tipo "proposición constructiva"

Las definiciones de tipo proposición constructiva son las que responden a la siguiente exigencia: determinar un objeto por la combinación de propiedades de manera que posea una propiedad no incluida en esta combinación, y que no haya ningún objeto posible que verifique esta combinación de propiedades sin que posea esa otra propiedad. La conjetura de Euler que atribuye al poliedro una relación constante entre el número de vértices, de aristas y de caras[32], ha llevado así a dar al poliedro una definición que es una proposición constructiva de todo poliedro posible y no simplemente una proposición descriptiva de algunos poliedros conocidos o familiares (Lakatos, 1984, p. 19-29, 52=53, 47). En estas definiciones, la determinación de un objeto no se hace en relación con un contexto o un universo dado, sino en relación con todo objeto concebible posible susceptible de verificar la combinación de propiedades seleccionadas. Las definiciones constructivas no provienen de una simple actividad de descripción de objetos existentes y conocidos, o del simple control del sentido de los términos empleados. Requieren, por el contrario, la búsqueda de casos posibles que puedan no tener ninguna relación con la familia de ejemplos que permiten inducir la definición. Suponen, pues, una cierta ruptura con los modos de proceder espontáneos de la descripción. Implican que se sale de todo marco de referencia. La característica de estas definiciones es que proceden por cuantificación universal. *Su prueba de aceptabilidad es la* ***resistencia al contra-ejemplo.***

El contra-ejemplo es presentado con frecuencia por los matemáticos como una forma de razonamiento (Glaeser, 1971, p. 108-112). En realidad la producción de un contra-ejemplo depende menos de una actividad de razonamiento que de un "stock" de representaciones cognitivas, o de conocimientos, de las cuales puede disponer el individuo. La parte de razonamiento en la producción de un contra-ejemplo es muy reducida. Consiste únicamente en un paso de razonamiento de tipo III: dado un enunciado A "que tiene un cuantificador universal", se establece su contradicción "encontrando" un elemento que pertenece al mismo conjunto que los objetos a los cuales refiere el enunciado A pero que no verifica la propiedad afirmada por A (Glaeser, 1971, p. 108). En efecto, todo el problema es "encontrar" ese elemento rebelde que "refute" la proposición presentada como definición o conjetura o bien llame a una rectificación. En efecto, no es suficiente presentar la contradicción de una proposición universal para que este paso de razonamiento sea un contra-ejemplo. Es necesario encontrar, y por tanto exhibir, un objeto que corresponde a esta proposición contradictoria. Este descubrimiento procede de un procedimiento cognitivo distinto al del razonamiento.

La producción de un contra-ejemplo, pues, no depende de la expansión discursiva de una proposición, sino de una aprehensión más discriminatoria de un conjunto de objetos. Si el individuo dispone de una campo de representaciones cognitivas suficientes para la proposición presentada, la producción del contra-ejemplo puede ser tan inmediato y tan trivial como la de un ejemplo que ilustra una proposición. Por ejemplo, sea la proposición: "*un* polígono que tiene los ángulos iguales es regular" (Glaeser, 1971, p. 112). El contra-ejemplo del rectángulo es tan familiar como el

[32] Vértices - Aristas + Caras = 2

ejemplo del cuadrado. No hay más razonamiento en la producción de uno que en la producción del otro. Si, por el contrario, el individuo no dispone de representaciones cognitivas suficientes, el descubrimiento puede ser aleatorio o incluso exigir una invención de "monstruos", es decir, una invención de objetos construidos para falsear la proposición. La integración de estos "monstruos" al campo de los conocimientos admitidos puede ser históricamente muy largo (Glaeser, 1971, p. 111). La historia de los contra-ejemplos sucesivos buscados para falsear la conjetura de Euler sobre los poliedros es una bella ilustración (Lakatos, 1984).

Los mecanismos de producción de un contra-ejemplo son, pues, análogos a los de la comprensión de un texto. Igual que para la comprensión de textos, es importante diferenciar dos planos, el relativo a su contenido cognitivo y el relativo a su forma de expresión, la organización redaccional del texto (Duval, 1991a, p. 166-171). De la misma manera, para comprender la producción de un contra-ejemplo es necesario distinguir el plano del contenido cognitivo y el muy reducido de un paso de razonamiento. Todo depende de su interacción. El papel del paso de razonamiento, en la producción de un contra-ejemplo, se reduce simplemente a un criterio de verificación en una exploración de todo el contenido cognitivo disponible por el sujeto. De esta manera, *el contra-ejemplo es en primer lugar una práctica semántica* como, por lo demás, se puede ver en la práctica de las conversaciones más comunes: ya sea a través de la simple mención de una excepción o a través de una aplicación auto-referencial de las expresiones empleadas por el interlocutor, el contra-ejemplo aparece como el modo de réplica más rápida y con mayor repercusión en la declaración del otro.

Las definiciones conceptuo-lexicales

Las definiciones conceptuo-lexicales son las que responden a la siguiente exigencia: describir un objeto de manera tal que se encuentre situado en relación con el conjunto de objetos diferentes que comparten con él por lo menos un rasgo común. Estas definiciones deben responder a ***un criterio de comparabilidad*** *en términos de semejanzas y de diferencias*. Dependen de un inventario y de una organización del campo semántico relativo al dominio de los objetos que presentan características genéricas comunes y diferencias específicas. Tales definiciones provienen de una actividad cognitiva en la cual los procedimientos de descripción y los de clasificación no son separables. Su elaboración contribuye a precisar, y a veces a modificar, la organización del campo semántico a partir del cual las definiciones son generadas.

El prueba de aceptabilidad de las definiciones conceptuo-lexicales se basa en la posibilidad de explicitar la organización semántica que subtiende la definición. Las representaciones en árbol son las más clásicas y más antiguas, pues la primera se remonta a Porfirio[33]. Tienen la ventaja de tener en cuenta las relaciones de hiponomia y de hiperonomia inherentes a todo léxico de lengua natural. Tales representaciones pueden construirse de dos maneras distintas. En una, cada pareja de propiedades contrarias que divide una propiedad de rango superior sólo interviene una vez y sólo aparecen en un nudo del árbol: este tipo de división es la que está en la base de la concepción aristotélica de la definición. Encuentra su realización ejemplar en la clasificación de las especies. En

[33] La búsqueda de las definiciones está en el centro mismo del pensamiento de Platón. Él fue el primero no sólo en haber mostrado que las definiciones están al comienzo de todo conocimiento, sino en haber descrito un procedimiento para establecerlas. Es la célebre diéresis descrita en *El Sofista* (218C-221D) y en *La Política* (262A-264A). La división de los conceptos es uno de los dos procedimientos del método dialéctico; el otro es la reunión de los conceptos en un solo concepto de orden superior, *Fedro* (265D-E), *Filebo* (16C-17A). La división platónica de los conceptos postula que la organización de un campo semántico y que toda clasificación se efectúa con base en una jerarquización. El árbol de Porfirio es una perfecta representación de la concepción platónica.

la otra, una misma pareja de propiedades contrarias puede intervenir varias veces y aparecer en diferentes nudos de un mismo nivel jerárquico: este tipo de división parece más apropiado que el precedente para dar cuenta de la descripción y de la clasificación de objetos para los cuales no es pertinente ningún criterio estricto de jerarquización (Eco, 1988, p. 87-101, 113-117). Naturalmente, se pueden introducir otras variaciones para construir un árbol, como por ejemplo, división por tricotomía y no por dicotomía.

Evidentemente, los árboles no son las únicas representaciones posibles de la organización de un campo semántico. Luego de las experiencias de Collins & Quillian sobre la memoria semántica (1969), se han multiplicado las representaciones en grafos de estructura más compleja y más flexible que los árboles. Pero aquí la ambición es más vasta: no se trata sólo de probar la aceptabilidad de las definiciones conceptuo-lexicales sino de tomar en consideración la comprensión del discurso en lengua natural.

Las definiciones características

Las definiciones características son las definiciones que entre las propiedades que entran en la descripción de un objeto, seleccionan la que permite identificarlo de manera más económica. Las definiciones características, entonces, deben responder a un criterio de contraste con los objetos semejantes o bien un criterio de alta frecuencia de distribución de la propiedad seleccionada. *Su* ***prueba de aceptabilidad es la rapidez de tratamiento*** *en las situaciones en que este objeto debe ser reconocido.* Lo que luego de las investigaciones de Rosch se llaman "prototipos", es un ejemplo de definición característica (1975): una categoría o una clase de objetos no se identifica ni por su diferencia específica como en las definiciones conceptuo-lexicales, ni por su combinación de propiedades como en las definiciones constructivas, sino por un objeto particular que toma valor de representante de todos los objetos de esa clase o por una propiedad de perceptiva destacable. La orientación de una figura "geométrica" en relación con las direcciones verticales u horizontales, es una propiedad perceptiva destacable que con frecuencia sirve para su reconocimiento automático. Las definiciones características entonces van a privilegiar las propiedades particulares, o las más frecuentes, de un objeto. Las caricaturas, por ejemplo, son la puesta en acto de un procedimiento implícito de definición característica. Los objetos de esta clase, entonces, serán más o menos fácilmente reconocidos como tales según su grado de proximidad en relación con ese representante o por la presencia de esa propiedad perceptiva destacable.

Estos diferentes tipos de definiciones provienen de actividades cognitivas heterogéneas. Basta comparar las pruebas de aceptabilidad para verificarlo. Algunas, sin embargo, presentan puntos comunes desde un punto de vista de la accesibilidad al objeto definido. Las definiciones que son constructivas y las que son características, tienen un acceso posible al objeto definido, bajo forma de ejemplo, independientemente del enunciado de la definición: este acceso se hace por lo general cambiando de registro de representación. *Las definiciones de tipo proposición primitiva y las conceptuo-lexicales, por el contrario, no tienen acceso a lo que es definido independientemente de la definición;* la comprensión sólo se puede hacer por la vía de una expansión discursiva que explore las posibilidades de la definición y, por tanto, quedándose en el mismo registro. Ahora bien, en lo que tiene que ver con las definiciones tipo proposición primitiva, esta expansión discursiva no puede hacerse de manera local a través de una verificación, un contra-ejemplo, una descripción o por su puesta en acto en una demostración, sino solamente de manera global, es decir, a través de una aprehensión de una organización deductiva de un conjunto de demostraciones en una teoría axiomatizada.

CONSECUENCIAS DIDÁCTICAS DE ESTOS ANÁLISIS EN EL APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN

Los problemas de geometría se presentan, por lo general, cuando los estudiantes se enfrentan por primera vez a la exigencia de una demostración. Lo que se pone en juego con esta exigencia sobrepasa ampliamente el marco de las matemáticas: comprender lo que es una demostración es importante no sólo para los aprendizajes matemáticos ulteriores, sino también para el desarrollo general de las capacidades de razonamiento y, en particular, para la diferenciación de los distintos modos de razonamiento.

Ahora bien, esta exigencia marca un abismo entre la minoría de alumnos que comprenden el funcionamiento y el aporte de una demostración y la mayoría que no llegan a comprenderlo. El acceso a la actividad de demostración constituye un umbral decisivo que, hasta el presente, parece que los profesores no han logrado que la mayoría de sus alumnos sobrepasen. ¿Cómo explicar esta diferencia que revela la exigencia de la demostración y la aparente impotencia de los profesores para reducirla? ¿Es posible un aprendizaje que haga fácilmente accesible a las mayoría de alumnos el funcionamiento de un razonamiento válido y la comprensión de las diferentes formas de razonamiento? ¿Cuáles serían las condiciones?

Los análisis precedentes, funcional, estructural, lógico y epistemológico han puesto en evidencia los tratamientos cognitivos complejos y heterogéneos que se esconden bajo la apariencia simple y homogénea de un razonamiento. En efecto, la lengua natural tiende a hacer uniforme la variedad de las formas de razonamiento e incluso a criticar otras formas de expansión discursiva como la explicación o la descripción (Duval, 1992). Pero contrariamente a toda similitud final de expresión, cada forma de razonamiento tiene unas operaciones de expansión discursiva específicas... y presenta una complejidad cognitiva particular. Entonces, deben desarrollarse aproximaciones didácticas específicas para cada una de estas formas: razonamiento deductivo, razonamiento por el absurdo, argumentación e incluso para esa forma tan sofisticada que es el silogismo aristotélico. Aquí nos limitaremos al caso de la demostración en geometría. En efecto, la demostración en geometría presenta la particularidad de parecer menos natural que la argumentación y constituir un real escollo para la enseñanza de las matemáticas. Un aprendizaje que se base en los aspectos superficiales de la expresión del razonamiento deductivo o en los aspectos heurísticos está destinado al fracaso puesto que desconoce la complejidad del funcionamiento cognitivo subyacente al razonamiento. Para la demostración, como para todas las otras actividades que no se adquieren de manera innata, *lo que finalmente parece simple e inmediato se forma a través del aprendizaje en paralelo de los tratamientos específicos de los diferentes registros de representación y en su progresiva coordinación.*

El umbral que se debe franquear: una triple diferenciación

Las razones de la incomprensión de la validez de un razonamiento y por tanto de lo que es una demostración, se basan en una triple indiferenciación que concierne las proposiciones y su organización en pasos de razonamiento.

La primera concierne la indiferenciación entre valor epistémico teórico y valor epistémico semántico de una proposición. La organización en pasos de deducción para las proposiciones que se consideran por fuera de su contexto de enunciación y cuyo "sentido" se reduce al componente simple de contenido, se hace entonces en función de su contenido y no en función de su status operatorio (cf. p. 228-230). De esto resulta que el valor epistémico teórico ya no se puede disociar del valor epistémico semántico, que queda dominante.

La segunda concierne la indiferenciación entre las dos utilizaciones posibles de un tercer-enunciado. Una exige que el tercer-enunciado tenga una organización que implique lo que hace posible la operación de extracción. La otra no requiere ninguna organización particular para el tercer-enunciado, sino que sólo hay una relación de justificación fundamentada en las relaciones semánticas interproposicionales de subsunción y de instanciación. Estos son los dos modos que diferencian la deducción (fig. 6 p. 244) y las inferencias discursivas (fig, 5, p. 243). La expresión lingüística, en razón de su exigencia discursiva de globalización, no marca explícitamente la diferencia radical que separa un funcionamiento algorítmico de un paso de deducción y un funcionamiento semántico propio a la justificación de una argumento. Esta segunda indiferenciación se acompaña de una lectura sincrética de los tercer-enunciados que tienen una organización implicativa: la no discriminación de un enunciado y de su recíproco no es más que una de las consecuencias de esta lectura sincrética.

La tercera indiferenciación concierne la existencia de dos niveles de organización en el razonamiento. La metáfora del "encadenamiento" con frecuencia empleada para caracterizar el razonamiento, refuerza esta indiferenciación: todo razonamiento es visto como un encadenamiento de proposiciones, obtenido por el empleo de conectivos. Destruir la diferencia de los dos niveles conduce a que se confunda la organización de las proposiciones en un paso con la de los pasos en un solo razonamiento, cuando la primera se hace con base en el status de las proposiciones y la segunda con base en el reciclaje de las conclusiones intermediarias. Acabar con esa diferencia igualmente lleva a que se ignore que los conectivos no juegan ningún papel en estos dos niveles de organización (cf. p. 246-247). Su empleo sólo crea una ilusión que distorsiona la comprensión del funcionamiento del razonamiento deductivo.

En tanto que los estudiantes no hayan llegado a esta triple diferenciación, no podrán comprender el funcionamiento propio de un razonamiento válido ni la fecundidad propia de un razonamiento válido, es decir, la transformación del valor epistémico de la conclusión en el sentido de lo apodíctico. *La presentación simple de una demostración en el registro de la lengua natural no permite descubrir este funcionamiento.* Esto por tres razones.

En primer lugar, la práctica común del discurso se apoya en inferencias semánticas (paso de tipo I) y obedece a restricciones de coherencia global para asegurar una continuidad temática, mientras que la demostración requiere de pasos de deducción (paso de tipo IV) que sólo obedecen a restricciones locales de reciclaje de las conclusiones intermediarias. En consecuencia, quien busque comprender la expansión discursiva del razonamiento deductivo de la misma manera como comprende la de una descripción o la de una explicación, o incluso de una argumentación, es decir, basándose en las competencias lingüísticas del locutor y del lector, se va a perder en una serie de proposiciones cuya organización discursiva, coherencia y beneficio se le escapan.

En segundo lugar, con frecuencia se recurre a marcas lingüísticas comunes, los conectivos, para expresar una demostración, una argumentación o una explicación: *porque, puesto que, ahora bien, pues, como, y, o, si ... entonces, en consecuencia*, etc. Ahora bien, el empleo de los mismos conectivos puede corresponder a funciones totalmente diferentes según se trate de una demostración, de una argumentación, de una explicación o de la aserción de una sola proposición: señalar el status operatorio de una proposición en un paso de deducción, señalar la "co-orientación" o la "contra-orientación" de dos proposiciones en relación con una tesis en el caso de una argumentación, expresar relaciones de dependencia entre fenómenos en el interior de un sistema en el caso de una explicación, o fusionar varias proposiciones en un solo enunciado en el caso de la formulación de una teorema (Duval, 1992, p. 56-58). ¿Cómo podría un alumno diferenciar estos distintos empleos si no ha percibido la heterogeneidad de los funcionamientos subyacentes a estos diferentes recorridos cognitivos?

Por último, más allá de las similitudes lingüísticas superficiales, está el fenómeno de la gran variabilidad redaccional posible para la expresión lingüística de una demostración. Basta dar una representación no discursiva (grafo proposicional, redes que se cierran en sí mismas...) de estos diferentes recorridos para ponerlo en evidencia. Textos muy diferentes pueden perfectamente expresar una demostración presentada en forma de grafo sin perjudicar la validez de la demostración (Duval & Egret, 1993). En estas condiciones, proponer normas redaccionales para exponer una demostración no hace más que reforzar la incomprensión, y hacer que los profesores constaten en los textos que los alumnos producen cuando se trata de una demostración, una regresión crónica relativa a la coherencia y la pertinencia de las aserciones.

El origen del desmoronamiento que tanta frecuencia se constata en los alumnos que se enfrentan a una demostración es esa considerable diferencia entre la expresión válida, y aparentemente simple, de una demostración en lengua natural y el funcionamiento cognitivo que realmente se pone en juego para realizarla. Y, como Aristóteles lo subrayó en su tratado sobre la teoría de la demostración, no es la expresión lo que permite descubrir el funcionamiento cognitivo del cual aquella expresa el resultado, sino que por el contrario, el acceso al funcionamiento es lo que permite comprender la expresión: "la demostración no está en el discurso exterior sino en el interior del alma".

Diversas aproximaciones didácticas al problema de la demostración

Con frecuencia se han desarrollado explicaciones y soluciones tan numerosas como variadas para salir del impase a que conduce la distancia entre la expresión de una demostración y el funcionamiento cognitivo subyacente. Se pueden categorizar en tres grupos. Los que privilegian el aspecto lógico del razonamiento, los que privilegian el aspecto epistemológico de los objetos a los cuales alude el razonamiento y el que privilegia el aspecto funcional de los recorridos del razonamiento.

La aproximación didáctica centrada en la lógica

En la base de las investigaciones y de las tentativas didácticas que privilegian la aproximación puramente lógica de la demostración hay dos nociones: la de "operación lógica" y la de independencia de la forma en relación con el contenido.

La primera noción tomó un valor explicativo con la teoría de Piaget, en particular con la obra dedicada al desarrollo del pensamiento formal en el adolescente (1955). Esta obra tuvo una importante influencia en las concepciones y en las elecciones didácticas para la enseñanza de las matemáticas en la educación media durante los años 1969-1974. La interpretación teórica que Piaget propuso sobre las conductas de los pre-adolescentes, observadas durante experiencias de física o química, establece la noción de "operación lógica" en una *correspondencia entre las operaciones intelectuales que provienen de una estructura que se caracteriza por la fusión de dos formas de reversibilidad (el grupo INRC), los operadores lógicos del cálculo proposicional y, como resultado, algunos conectivos lingüísticos.* Aunque Piaget afirmara la prioridad genética de las operaciones intelectuales sobre los operadores proposicionales, postuló sin embargo la correspondencia directa entre las primeras y los segundos. Y así, no sólo se justificó la enseñanza del cálculo proposicional desde la educación media, sino que se impuso una idea más general: ¡el aprendizaje de los operadores proposicionales y del empleo de los conectivos lingüísticos debería abrir las vías al razonamiento matemático! Ahora bien, hemos visto que el funcionamiento de un paso de deducción de ninguna manera se apoya en una "operación lógica": de una parte, no

intervienen los operadores proposicionales y, de otra, el empleo de los conectivos lingüísticos únicamente señala el status operatorio de cada proposición.

La segunda noción procede directamente de la oposición que los lógicos hacen entre la expansión discursiva propia al razonamiento (válido) y aquella, más familiar, propia a una explicación, a una descripción o a un relato: la primera se haría exclusivamente según la forma y la segunda según el contenido. En esta perspectiva, el problema didáctico principal consistiría entonces en alejar la atención de los alumnos del contenido y centrarla en la forma. Pero como en realidad no se pueden separar el contenido semántico y la forma en el registro de la lengua natural, sería necesario entonces neutralizar el contenido semántico proponiendo "razonar" con proposiciones absurdas: "es necesario conducir al alumno a que disocie en un razonamiento la forma lógica y el contenido semántico. El manejo de silogismos sobre textos extravagantes es un ejercicio importante para lograr este fin" (Glaeser, 1971, p. 104). Por otra parte, basta abrir cualquier manual o tratado lógico para ver en acto esta solución tanto para los silogismos como para la implicación. E incluso la mayoría de las investigaciones psicológicas sobre el razonamiento se comprometieron con esta oposición entre forma y contenido: ¡las experiencias consisten esencialmente en proponer, de una lado, encadenamientos absurdos o surrealistas de proposiciones que constituyen un razonamiento válido, de otro, encadenamientos semánticamente coherentes que constituyen uno no válido (Óleron, 1969, p. 37-39; Wason & Johnson-Laird, 1972, p. 43, 78-85; Johnson-Laird, 1983)! Entonces, para nada sorprende que este tipo de aproximación no pueda más que constatar la influencia del contenido sobre la conducción del razonamiento. Esto quizá muestre la ineficacia de la solución didáctica propuesta, pero no provee ningún principio de explicación de los procesos psicológicos subyacentes al razonamiento ni de las condiciones reales de su aprendizaje.

En realidad, desde un estricto punto de vista cognitivo, el aspecto lógico no puede separarse de los aspectos funcionales y estructurales. Entonces, es manifiesto que la distinción entre forma y contenido no concierne más que fenómenos superficiales, y que no se manifiesta en todos los tipos de pasos de razonamiento. Un razonamiento que sólo tome en consideración la forma, muy bien puede conducirse cognitivamente con la ayuda del contenido y a la inversa. Las distinciones pertinentes para identificar los procesos subyacentes a la producción como al reconocimiento de un razonamiento válido, son, de una parte, entre valor epistémico y valor lógico de verdad y, de otra, entre contenido de una proposición (la cual implica su valor epistémico) y status de esta proposición en la expansión discursiva.

La aproximación didáctica centrada en la epistemología

Las tentativas didácticas que privilegian la aproximación epistemológica de la demostración se oponen explícitamente a las precedentes. Por razones heurísticas y por razones de informatividad, alegan la prioridad del contenido de las situaciones matemáticas sobre cualquier aproximación lógica. En efecto, la demostración no debería separarse de la actividad matemática global en la cual se inserta. En este contexto, los recorridos del razonamiento sólo aparecen como un aspecto de la demostración, aspecto este que no es el más importante. Pues, la posibilidad de desarrollar un razonamiento depende en primer lugar del descubrimiento de las propiedades o de las relaciones que permitan justificar una aserción: es este descubrimiento lo que permite discernir las hipótesis necesarias para la demostración y escoger luego los tercer-enunciados que conduzcan a establecer la verdad. El discernimiento de las hipótesis constituye con frecuencia la fase decisiva en la búsqueda de una demostración. Y, como para la búsqueda de contra-ejemplos, este discernimiento depende tanto del campo de conocimientos de que el sujeto dispone, como de la aplicación de métodos, más o menos normalizados, de razonamiento. El aspecto razonamiento, en una demostración, sólo resulta importante cuando conduce a resultados novedosos, es decir, a resultados imprevisibles,

contrarios a la intuición o que escapan totalmente a esta. En este caso, heurística y razonamiento no son separables.

Para los que privilegian esta aproximación, el tropiezo de la enseñanza para la demostración estaría en el hecho de que su exigencia no se presenta en el contexto de la actividad matemática global que le da su sentido, es decir, su motivación intelectual. Más concretamente, las demostraciones sólo deberían introducirse en las situaciones matemáticas, con ocasión de problemas en los cuales la demostración desemboque en un resultado inesperado y que presente prolongaciones variadas e interesantes. ¡En tales situaciones la necesidad de la demostración se impondría naturalmente! Pero, antes que eso sea posible, es necesario desarrollar actividades preparatorias en situaciones matemáticas suficientemente "ricas" para que los alumnos tengan la oportunidad de descubrir y observar invariantes, combinaciones de relaciones, interacciones de restricciones que son esenciales para la aprehensión de los objetos matemáticos.

Esta concepción didáctica que se inspira de manera directa en la práctica de las matemáticas, como puede resultar obvio, es la que espontáneamente se ha ganado el favor de los matemáticos. Pero, en realidad, llega a rechazar que haya un problema específico en el aprendizaje de la demostración. De manera más precisa, esta concepción supone dos cosas:

- las diferentes tareas implicadas en la actividad matemática serían cognitivamente homogéneas,
- si estas tareas se presentan según un cierto orden bien escogido, la adquisición de competencias que permitirían las primeras, haría a los alumnos aptos para la adquisición de competencias que permitirían las siguientes.

El primer supuesto no resiste ni el menor análisis. En cuanto al segundo, no se tiene en pié frente a los hechos. Las tareas que por lo general se proponen para preparar la actividad de demostración, son tareas de construcción geométrica; éstas se proponen con el fin de subordinar tanto la aprehensión perceptiva de las figuras como su aprehensión operatoria a lo que hemos llamado una "aprehensión discursiva": la figura es aprehendida únicamente en función de las relaciones y las propiedades de los objetos matemáticos que se considera que la figura representa. Ahora bien, nadie, hasta el presente, ha podido mostrar la transferencia de los aprendizajes logrados en tareas de construcción a estrategias heurísticas ni a la comprensión de lo que es una demostración. El abismo a franquear después, parece casi tan grande como podía estarlo antes de ese aprendizaje. Dada la heterogeneidad cognitiva de las tareas, este resultado no es para nada sorprendente.

La aproximación didáctica centrada en la interacción social

Las investigaciones didácticas que privilegian la aproximación funcional de la demostración, toman en consideración aquello sin lo cual un razonamiento o una demostración dejan de cumplir su función de razonamiento ante cualquiera, a saber, "convencer". Un razonamiento o una demostración no prueba nada para alguien si no producen para esta persona un cambio o un refuerzo de la convicción en relación con una afirmación o una tesis. Ahora bien, las situaciones en las cuales el razonamiento cumple espontáneamente este papel son las situaciones sociales de discusión con un interlocutor o en un debate: en éstas, las objeciones y las contradicciones no sólo deben tomarse en consideración sino también rebasarse. El funcionamiento real del razonamiento no puede entonces disociarse de estas situaciones. El descubrimiento de lo que es una demostración sólo puede hacerse en la dinámica de tales situaciones. En realidad se trata de una **aproximación socio-funcional** del razonamiento.

Este análisis del razonamiento en términos de interacción social es muy antiguo. Se recuerda que Platón definía el pensamiento (διανοια) como un "diálogo del alma consigo mismo y al interior de sí misma" (*Sofista* 263e). Piaget fundamentó sus primeras interpretaciones de la génesis del

pensamiento lógico en el niño en una idea análoga, subrayando que él privilegiaba así el punto de vista de la psicología social: "el razonamiento lógico es una discusión con nosotros mismos, la cual reproduce interiormente los aspectos de una discusión real" (Piaget, 1967, p. 165, 163). El desarrollo del pensamiento lógico correspondería al pasaje de un pensamiento "egocéntrico" a una "inteligencia comunicada", que podría entonces resultar del juego de las interacciones sociales (Piaget, 1930, p. 63-67). La mayoría de las investigaciones de los últimos años sobre la demostración, realizadas en el campo de la didáctica de las matemáticas, se inscriben directamente en esta aproximación socio-funcional del razonamiento, aproximación que se ha reactualizado gracias a los trabajos de la escuela de Ginebra (Barbin, 1988, p. 614-616; Arsac, 1988, p. 251-255, 273-275).

A priori, tal aproximación resulta más seductora que las anteriores, ya que lleva a que se privilegie el punto de vista de los alumnos: se busca ponerlos en situaciones en las que las contradicciones, las discusiones y el examen de los argumentos que presentan, generen espontáneamente recorridos de razonamiento. Pero tal aproximación sufre de una insoslayable ambigüedad. Este tipo de actividad sólo puede desarrollar una forma específica de razonamiento, la argumentación. Ahora bien, el análisis estructural muestra que la argumentación, de una parte, y las formas de razonamiento implicadas en una demostración, de otra, provienen de funcionamientos discursivos totalmente diferentes (Duval, 1992). La práctica de una no permite de ninguna manera descubrir las otras. Esta aproximación no da ningún medio para sobrepasar los riesgos de confusión y escapar de las trampas que hemos señalado antes. La ausencia de una distinción explícita entre valor epistémico semántico y valor lógico de verdad, entre contenido y status operatorio, conduce a que se asimile una búsqueda de convicción consensual a una prueba de verdad.

A pesar de la diversidad, todas estas aproximaciones tienen dos puntos en común. El primero es una concepción muy unilateral y muy estrecha de lo que es la actividad de razonamiento. El razonamiento no puede ser asimilado ni a una conducta que tenga como propósito establecer o modificar una convicción, ni a la aplicación de esquemas lógicos canónicos ni tampoco a la aplicación de métodos heurísticos. Es sorprendente ver que el análisis del razonamiento nunca se ha llevado hasta el punto de poner en evidencia y clasificar los diferentes tipos posibles de pasos de razonamiento. No tiene sentido un análisis funcional del razonamiento si no se completa con un análisis estructural. Y, de la misma manera, un análisis lógico del razonamiento sigue siendo un análisis didácticamente ciego y estéril si no se asocia con un análisis estructural. El segundo punto común a estas aproximaciones es que mantienen la enseñanza y el aprendizaje en un marco general de encapsulamiento de los registros semióticos de representación. Con todo lo diferentes que sean las actividades propuestas en una u otra aproximación didáctica, comparten todas la misma selección que, *de facto*, viene a *privilegiar un registro semiótico en detrimento de los otros.* Las aproximaciones didácticas de la demostración son "mono-registro". Y esto representa otro importante factor del fracaso.

Restricciones cognitivas y tareas didácticas para un aprendizaje de la demostración

El punto decisivo en un aprendizaje de la demostración es *el descubrimiento de un paso de razonamiento válido, del cual el alumno mismo y sin recurrir a ningún control externo* (acuerdo de un interlocutor, consenso de una comunidad, conformidad a un esquema lógico...) *puede probar su validez.* ¿Cómo puede prepararse o favorecerse tal descubrimiento? Más concretamente, ¿en qué situación poner a los alumnos y cuáles tareas proponerles para que tal descubrimiento sea posible?

Antes que nada, es importante señalar que el único paso del cual el estudiante por sí mismo puede probar su validez sin que haya ningún control externo, es un paso de deducción (tipo IV). De

esta categoría se excluyen las inferencias semánticas y discursivas porque, evidentemente, su funcionamiento no conduce siempre a una única conclusión posible. El silogismo aristotélico, cognitivamente complejo y que no utiliza nunca un tercer-enunciado, también se excluye debido a que su lugar no está en las matemáticas. Entonces, el problema didáctico resulta ser el de saber cómo hacer para que los estudiantes descubran el funcionamiento de un paso de deducción. Como hemos visto, este descubrimiento depende de una triple diferenciación; así pues: ¿en qué situación poner a los alumnos y cuáles tareas proponerles para que se efectúe esta triple diferenciación?

En primer lugar, es importante que las proposiciones sean consideradas y organizadas entre sí según su status operatorio y no según su contenido. Ahora bien, el status de una proposición depende de su contexto de enunciación, el cual determina las relaciones posibles con otras proposiciones. *El status de una proposición en una expansión discursiva sólo se percibe realmente cuando se toma en consideración su contexto de enunciación.* Es necesario entonces proponer un medio de representación que ofrezca una aprehensión sinóptica de la organización de una paso de deducción, debido a que es esta organización la que constituye el contexto de enunciación del cual depende el status operatorio de las proposiciones. Además es necesario que este medio de representación permita evitar el riesgo de confusión con las inferencias semánticas o discursivas utilizadas en la argumentación; riesgo que parece inevitable si se está en el registro del discurso de la lengua natural. Por último, es necesario que este medio permita controlar que no haya error u olvido en la organización de los pasos.

El medio de representación que responde a estas tres restricciones didácticas parece que tiene que ser el grafo proposicional, al cual han recorrido diferentes investigaciones cognitivas o didácticas (Anderson, 1987, p. 112-115; cf. Guin *et al.* 1991, p. 21-25). Pero recurrir a este medio de representación no es suficiente. Es necesario tomar en consideración también la tarea propuesta, es decir, el tipo de tratamiento que se efectúa con la ayuda del grafo proposicional. En efecto, podría proponerse la construcción de un grafo con fines heurísticos o de organización deductiva del discurso (Duval, 1991b, p. 244-245). Para que la tarea sea verdaderamente una tarea de organización deductiva, es necesario dar *reglas de construcción centradas en el status de las proposiciones:* de las hipótesis sale una flecha pero nunca llega una; de un teorema sale una flecha y pueden llegar una o varias; de la conclusión que se debe demostrar jamás sale una flecha... Igualmente, es necesario que *la graduación de las selecciones de las respuestas se base en el lugar de las proposiciones en el grafo*, es decir en su status y no en la selección de teoremas que deben utilizarse para la demostración, o sea no en el contenido de las proposiciones. Esta tarea de organización deductiva requiere pues que los alumnos previamente hayan encontrado los teoremas y las definiciones que se van a poner en práctica en la demostración. En este momento del aprendizaje es necesario separar meticulosamente el descubrimiento de la organización deductiva de un conjunto de proposiciones y los métodos heurísticos. Así pues, esta tarea puede proponerse sólo después de una fase de búsqueda y de puesta en común con el profesor.

Tomar consciencia de que el tercer-enunciado funciona como operación de extracción y no simplemente como justificación, se logra verdaderamente sólo a través de esta misma tarea. Esta toma de consciencia consiste, en efecto, en ponerse en contra de **representaciones muy atractivas** y a favor de la no separabilidad de las dos partes de una relación implicativa en la comprensión de los tercer-enunciados, de la necesidad de una relación de sucesión entre las proposiciones, de la no distinción de los pasos de deducción en el interior de la demostración (Egret, 1989, p. 45-52). Hay representaciones que son polos muy atrayentes en razón de que proceden de las leyes y de las restricciones propias a la práctica del discurso en lengua natural: globalización descriptiva, linealidad de todo el discurso, continuidad temática entre todas las frases del texto.

La construcción de un grafo proposicional con la ayuda de algunas de las reglas que hemos indicado, permite poner en evidencia que estas últimas representaciones no se vincula el tercer-enunciado con las premisas; que aunque las premisas estén encadenadas, se toma en consideración una sola de éstas cuando son necesarias dos, o, incluso, que las hipótesis sólo se utilizan en el primer paso, etc. Así pues, las primeras representaciones de grafos, tanto de los alumnos como en los profesores, permiten poner en blanco y negro de manera contundente las representaciones que están ligadas a la práctica del discurso en lengua natural y que son fuentes de *quiprocuo* cuando se trata de comprender o de producir una demostración. Por lo general, estas representaciones no se detectan directamente en las fallas de la gran mayoría de textos de demostración producidos por los alumnos. La pobreza de los textos, su falta de organización o incluso notorias omisiones, se atribuyen por lo general a dificultades en la expresión escrita, a olvidos o a un malogrado intento de concisión. Con más seriedad se toma que haya un círculo vicioso (tomar la conclusión que debe ser demostrada como hipótesis) o la confusión entre un teorema y su recíproco. Pero este es un grave error de apreciación, *puesto que las omisiones del texto o su organización endeble son resultado de las mismas causas que tienen los círculos viciosos:* la no distinción entre la práctica ordinaria del discurso y el funcionamiento del razonamiento deductivo, y la predominancia exclusiva del contenido en la comprensión de las proposiciones.

En el aprendizaje de lo que es una demostración, el verdadero trabajo comienza después de la fase de búsqueda y puesta en común. La idea de que luego de eso no habría más que transcribir en algunas líneas lo que se ha explicado durante la puesta en común posterior a la fase de búsqueda, con el argumento de que todo ya ha sido prácticamente encontrado y expresado (oralmente), es falsa. Cuando uno se contenta con esta simple tarea de escritura, con frecuencia considerada como secundaria, se obtienen textos más o menos completos, más o menos bien ordenados. El profesor siempre puede reconocer en ellos elementos esenciales para la conducción de la demostración. Y podrá satisfacerse tanto más en cuanto encuentre marcas estilísticas convencionales en la redacción de una demostración. Si hay omisión de elementos importantes para un paso o incluso el salto de un paso, ausencia de marcación del status de las proposiciones, así como otras faltas que pudieran hacer dudar de la justeza de la demostración o de la comprensión del alumno, entonces, por lo general, se imputan a una debilidad de expresión en la lengua materna.

El registro en lengua natural es un registro de representación que refleja mal el funcionamiento específico del razonamiento deductivo, así como por lo general toda forma de expansión discursiva que implique una similitud externa entre las proposiciones (cap. II, tabla 3, p. 129). Así pues, es manifiesto que es necesario pasar por un registro de representación que permita poner en evidencia aquellas representaciones que están vinculadas con la práctica ordinaria del discurso y que también permita descubrir el funcionamiento del razonamiento deductivo.

Por último, es importante que los valores epistémicos teóricos se diferencien de los valores epistémicos semánticos y que estos últimos ya no se asimilen a los valores de verdad. Esta es la condición para que un razonamiento válido que pruebe "objetivamente" provoque "subjetivamente" la convicción. El trabajo de organización de las proposiciones entre sí en el registro de los grafos proposicionales es neutro frente a los dos componentes del "sentido" de las proposiciones: los valores epistémicos y los valores de verdad. El registro que permite explicitar estos componentes del sentido es el registro de la lengua natural puesto que es el único que permite cumplir la función metalingüística de reflexividad discursiva (cf. p. 133-134). Así pues, resulta igualmente necesaria la tarea de retorno a la expresión en lengua natural, la cual puede consistir en la simple descripción del grafo producido sin que haya ninguna consigna específica de redacción.

De esta manera los alumnos estarán en una situación totalmente distinta para escribir la demostración que en la tarea de redacción directa e inmediata. El trabajo de objetivación en el

registro de las redes les permite descubrir el funcionamiento de un paso de deducción y y que se trata de una organización discursiva diferente a la que es común en las argumentaciones, las explicaciones, las descripciones. Con un trabajo tal, no es sorprendente que los alumnos produzcan, con más facilidad y placer, textos por completo más explícitos que los que producían antes y que estén perfectamente estructurados (Duval, 1991b, p. 247-251). Pero, desde un punto de vista teórico, no es esta la característica más interesante de los textos así producidos; lo más interesante es el reemplazo de los conectivos lógicos o argumentativos por actitudes proposicionales para expresar la articulación lógica de las proposiciones en el interior de cada paso. En la descripción de un grafo, no hay nada que sugiera el empleo de actitudes proposicionales; éste se refleja en la comprensión del funcionamiento de un paso de deducción y en la comprensión de su aporte en el recorrido que se hace. Más precisamente, este empleo refleja la consciencia que se toma de que el funcionamiento de un paso se basa en el status previamente dado a las proposiciones, de que este status está asociado con un valor epistémico que puede ser diferente al espontáneamente dado al contenido, y la consciencia de que un paso confiere un valor epistémico nuevo a la proposición que se obtiene como conclusión.

Estas dos tareas pueden introducirse fácilmente en la enseñanza desde el grado 8º de la educación básica con ocasión de ejercicios o problemas de geometría (Egret, 1990). Unas diez sesiones pueden ser suficientes para lograr transformaciones decisivas tanto en los recorridos cognitivos como en las producciones de la mayoría de los alumnos de 13 a 15 años. La pregunta importante que suscita no sólo este tipo de intervención didáctica, sino también toda experiencia sobre el aprendizaje de la demostración, es relativa a la evaluación. ¿Cómo interpretar y evaluar las producciones de los alumnos, textos que pueden ir desde unas cuantas líneas hasta una página? ¿Cuáles son las marcas redaccionales que permiten inferir la comprensión de lo que es una demostración, o bien diagnosticar las representaciones que imposibilitan la comprensión? ¿Con cuáles criterios se puede juzgar la evolución de un alumno? E incluso, ¿es posible medir esta evolución? En todo caso hay una cosa cierta: no puede haber evaluación ni interpretación de los resultados de una experiencia sobre la demostración si no se dispone de un instrumento de análisis que permita comparar varios textos (o varios grafos)

Esta comparación puede concernir textos de un mismo alumno en momentos diferentes del aprendizaje, o textos de diferentes alumnos que están en condiciones distintas de aprendizaje. En efecto, no puede hacerse ninguna interpretación fiable con base en un solo texto, y para cada texto tampoco satisface una lectura ingenua sin ningún procedimiento controlable de interpretación.

EL ANÁLISIS DE LOS TEXTOS DE LOS ALUMNOS

A lo largo de las experiencias realizadas en la clase de la señora Egret, hemos elaborado una rejilla para el análisis de los textos de demostración. Esta rejilla está constituida por una lista de preguntas de escogencia binaria. Evidentemente, la formulación de las preguntas se deriva directamente del análisis cognitivo del funcionamiento del razonamiento deductivo expuesto en la segunda parte de este capítulo.

Tabla 3

Rejilla para un análisis diagnóstico de los textos de demostración de los alumnos

NOMBRE	FUNCIONAMIENTO DEL PASO DE DEDUCCIÓN	
	(carácter algorítmico de la utilización de los enunciados que tienen status de regla)	(status de contenido)

	1.1 Distinción de dos partes	1.2 Una premisa	1.3 Todas las premisas	1.4 Mención del paso que debe reiterarse	2.1 Premisa no pertinente	2.2 Hipótesis que deviene conclusión
Modelo	SI	SI	SI	SI	NO	NO
Problema 1						
Problema 2						

El encadenamiento de pasos (segundo nivel)		Marcas redaccionales Del razonamiento deductivo			
3.1 Vínculo del paso con el precedente	3.2 Conclusiones interproposic. Inutilizadas	4.1 Marcas de los status	4.2 Estabilidad de las marcas de los status	4.3 Llamado a una conclusión anterior	4.4 Marc. pasos ≠ Marc. status
SI	NO	SI	SI	SI	SI

A razón de una ficha por alumno y, en esta ficha, de una línea por problema, la aplicación de esta rejilla se constituye en una tabla de observación muy precisa[34]. En efecto, de un texto a otro (lectura por filas) se pueden observar, para cada uno de los aspectos del funcionamiento cognitivo (lectura por columnas), regularidades que reflejan una estabilidad de tratamiento, variaciones debidas al contexto particular de cada problema e inversiones que al comienzo de una nueva regularidad expresan una adquisición. Esta observación se puede realizar en un periodo de tiempo tan largo como se desee, e igualmente puede hacerse por fuera de cualquier experiencia o en el marco de experiencias totalmente diferentes a las que hemos presentado.

El análisis de los textos en una perspectiva diagnóstica se hace en tres fases. Primero es necesario segmentar el texto en unidades, luego se categorizan las unidades identificadas en función de la rejilla de preguntas y por último se interpretan los datos así recogidos.

La segmentación del texto

Las unidades de un texto de demostración son las proposiciones y los pasos de deducción. Es necesario comenzar segmentando el texto en "proposiciones". Este término debe entenderse en su acepción gramatical, con dos excepciones: las expresiones construidas con un participio presente y las que se introducen con locuciones como "en virtud de...", "gracias a..." también deben contarse como proposiciones. Luego se busca la eventual organización de estas proposiciones en pasos de deducción. Para distinguir los pasos de deducción, es necesario identificar las proposiciones que pueden tener un status de conclusión. Con frecuencia los alumnos marcan sus conclusiones con "pues", "entonces" o con un verbo de actitud proposicional ("concluyo que...", "pruebo que...", etc.). Pero también puede ocurrir que las conclusiones no estén explícitamente marcadas: pueden corresponder o a una proposición principal (en el sentido gramatical) o a una frase simple. Se impone entonces una pregunta previa: ¿hay al menos una proposición de apoyo para la conclusión

[34] La transformación de la rejilla de análisis en una tabla individual de observaciones fue realizada por F. Pluvinage.

dada? Las proposiciones de apoyo para la conclusión pueden tener status distintos: tercer-enunciado o premisas (hipótesis, conclusiones intermediarias anteriores).

Pueden observarse *dos tipos de pasos redaccionalmente diferentes:*

- los que presentan explícitamente la estructura ternaria, es decir, aquellos en los cuales el tercer-enunciado o se menciona o se cita,
- los que presentan explícitamente sólo una estructura binaria, es decir, aquellos en los cuales el tercer-enunciado no se menciona en absoluto (las proposiciones de apoyo se reducen a las premisas).

La diferencia entre estos dos tipos de pasos radica sólo a nivel redaccional. Explícita o implícitamente, los pasos de deducción deben reflejar el funcionamiento ternario. Un texto de demostración puede comportar algunos pasos de deducción explícitamente ternarios y otros implícitamente ternarios.

Aplicación de la rejilla de preguntas a las unidades del texto

El texto ya segmentado en pasos puede entonces analizarse con la ayuda de los siguientes grupos de preguntas:

El primer nivel de organización deductiva: preguntas relativas a la utilización de los enunciados que tienen status de tercer-enunciado y de las premisas

De una parte, se trata de ver si los tercer-enunciados se utilizan o no, según la operación de extracción. Las dos primeras preguntas sólo conciernen los pasos de deducción explícitamente ternarios.

- Cuando el tercer-enunciado se cita y no simplemente se menciona con un nombre ("teorema de..."), ¿las dos partes constitutivas están explícitamente indicadas (condiciones de entrada y conclusión)?
- ¿Al menos una de las premisas se da por la aplicación del tercer-enunciado utilizado (sea citado o mencionado)?
- ¿Se dan todas las premisas necesarias para la aplicación del tercer-enunciado utilizado?
- Cuando el tercer-enunciado debe aplicarse dos veces, ¿están señalados explícitamente los dos pasos de deducción o están confundidos en una globalización descriptiva?

De otra parte, se trata de ver si realmente se efectúa la distinción entre el contenido de una proposición y su status. Estas preguntas conciernen los pasos explícita o implícitamente ternarios.

- ¿Entre las premisas hay proposiciones no dadas en el enunciado (literalmente o por equivalencia semántica) o que no han sido probadas en un paso anterior?
- ¿Hay proposiciones dadas como hipótesis en el enunciado y que resultan con el status de conclusión?

El segundo nivel de la organización deductiva

Se trata de ver si todas las conclusiones (salvo el enunciado-objeto) se reciclan como premisas en un paso posterior.

- ¿Una de las premisas es la conclusión intermediaria de un paso de nivel inmediatamente anterior?
- ¿Hay conclusiones intermediarias que no se reutilizan como premisas?

La particularidad de los pasos de deducción implícitos es que el reciclaje de la conclusión (de un paso de nivel inmediatamente anterior) en proposición de entrada, puede hacerse sin ninguna referencia al hecho de que se acaba de obtener y, por tanto, sin necesidad de repetirla.

Las marcas redaccionales del razonamiento deductivo

Se trata de ver cuáles son los términos o las expresiones empleadas para marcar los diferentes status de proposición en el interior de un paso y para marcar la diferenciación de los pasos.

- ¿Dos de los tres tipos de status operatorios están marcados explícitamente por el empleo de una conjunción, por el empleo de verbos de actitud proposicional o por la mención de un status ("hipótesis", "teorema"...)?
- ¿Los marcadores empleados para al menos dos de los tres tipos de status se reutilizan de la misma manera en cada paso de deducción?

Además preguntas relativas a la toma de consciencia y a la objetivación de los recorridos efectuados:

- ¿Cuando una proposición intermediaria se retoma como proposición de entrada, se menciona que fue obtenida anteriormente?
- ¿Los marcadores empleados para señalar el pasaje de un paso a otro son diferentes a los empleados para marcar el status operatorio de las proposiciones en el interior de una paso de deducción?

La interpretación de las secuencias

Cada pregunta de cada uno de los grupos de preguntas se responde simplemente SI o NO, obteniendo así secuencias SI o NO (tabla 3).

Los grupos de preguntas para los cuales se registran deficiencias, indican la naturaleza precisa de las disfunciones observables a través de la producción de los textos de demostración. Sin embargo, la interpretación debe tener en cuenta las siguientes reglas:

Todos los grupos de preguntas no tienen el mismo peso: cada uno remite a un tipo de incomprensión específica. El grupo más importante tanto desde un punto de vista cognitivo como didáctico es el I: tiene que ver con la especificidad del funcionamiento de un paso de deducción en relación con cualquier otra forma de razonamiento. La interpretación de las secuencia de respuestas a este grupo también debe tener en cuenta las respuestas a las preguntas 2.1, 2.2, 4.1.

No deben confundirse las siguientes tres situaciones:

- *no hay ningún paso de deducción* que presente las características de un buen funcionamiento del recorrido,
- *no hay ningún caso que presente disfunciones de base,*
- *coexisten pasos que se dominan bien con otros que revelan disfunciones de base.* Con frecuencia se observan alumnos que efectúan correctamente un paso de deducción y luego (porque sin duda el esfuerzo es grande) los pasos siguientes son incorrectos.

La interpretación no puede ser la misma para estas tres situaciones.

Igualmente hemos elaborado una rejilla para el análisis de los grafos de demostración (Duval, 1990b, p. 15-20), que es útil sobretodo para interpretar los primeros grafos producidos por los alumnos y para observar las evoluciones. Sólo cuando se han sobrepasado algunas representaciones impregnadas de lenguaje natural es que puede introducirse la tarea de descripción.

CAPÍTULO VI
LA COMPRENSIÓN DE TEXTOS

το οραν... μαλιστα ποει γνωριξεις
ημας αυτη των αισθησεων και
πολλας δηλοι διαφορας
"Ver es el sentido que nos da la mejor
aprenhensión cognitiva y el que más pone
en evidencia las diferencias"
ARISTÓTELES, *Metafísica.*

Una demostración matemática ha de ser clara...
Quiero decir: cuando, mediante un cambio en
la notación, se clarifica una figura demostrativa
no clara, entonces se consigue de verdad
una demostración donde antes no había ninguna.
WITTGENSTEIN, *Observaciones*

La pregunta sobre la comprensión de textos es muy antigua. Primero fue planteada en términos de interpretación para todos los textos que socialmente habían tomado un valor normativo. La diversidad de situaciones en las que los textos se transmiten, crea particularidades cognitivas y lecturas diferentes en la medida en que las situaciones de los lectores se alejen del mundo de conocimientos y preocupaciones en los que hayan sido producidos los textos. Esta diversificación de las situaciones de lectura provoca la acumulación, al margen de los textos, de todos los comentarios a que dan lugar. Por tanto, la pregunta sobre la comprensión de textos se vinculó en primer lugar con el *fenómeno de la multiplicidad de sentidos posibles* que pueden discernirse en un texto. La pregunta sobre la comprensión de textos nació en el marco de este problema hermenéutico (Gadamer, 1965).

Esta pregunta tomó una nueva forma con la conjunción de dos eventos recientes. De una parte, el desarrollo de la inteligencia artificial y la aparición de las primeras modelizaciones programables de comprensión de texto con Schank (1972), Charniak (1972), Winograd (1972). De otra parte, la aparición de la enseñanza masiva, la prolongación de la escolaridad y la diversificación de los conocimientos a "adquirir", hizo evidente que aunque los alumnos aprendan a "leer" durante la primaria, no se garantiza la comprensión de los múltiples y variados textos que se les propone posteriormente. Así, la pregunta sobre la comprensión de textos se vinculó con el fenómeno de la *emergencia de un sentido durante la aprehensión* de una serie de palabras y frases. Esta pregunta, más reciente, remite a un problema cognitivo.

Es importante hacer una clara distinción entre el problema hermenéutico y el problema cognitivo de la comprensión de textos. El problema hermenéutico nace con la confrontación de las múltiples interpretaciones que la diversificación histórica y cultural de las situaciones de lectura engendra. Cada interpretación implica pues, una comprensión de texto. A su vez, el problema cognitivo tiene que ver con los procesos de elaboración de una comprensión durante la lectura, es decir, durante los primeros recorridos visuales que hace el lector. Ahora bien, estos procesos no solo son complejos, sino que no parecen funcionar de la misma manera para todos los textos. En particular, cuando la organización redaccional de un texto se aleja mucho de las formas de organización propias a los discursos orales espontáneos y cuando el texto no trata sobre conocimientos familiares, muy rápidamente las dificultades de comprensión pueden llegar a ser insuperables para muchos alumnos

y, en general, para muchos lectores. El problema cognitivo recubre un problema didáctico mayor. ¿Se puede llegar a una descripción de los procesos de elaboración de una comprensión durante la lectura, que permita inferir las condiciones de un aprendizaje de la comprensión de textos?

A pesar de la multiplicidad de trabajos sobre este tema, se dispone aún de pocos elementos de respuesta para esta "pregunta crucial" en la enseñanza (Fayol, 1989, p.14). Esta ausencia de resultados convincentes se debe en parte a una limitación en la aproximación teórica del problema de la comprensión de textos. En efecto, los modelos de comprensión están esencialmente centrados en el lector, en sus conocimientos, como si hubiera una competencia general y autónoma de lectura para todos los textos, olvidando todos los factores relativos a las características y a las variables redaccionales de los textos: los grados y los modos de explicación del contenido cognitivo del texto, las distancias mas o menos importantes entre la organización redaccional del texto y la organización discursiva de una elocución oral espontánea. Ahora bien, si la comprensión de textos resulta, como justamente se ha descrito, de "la interacción entre un lector y un texto", estas variables redaccionales del texto son tan importantes como las variables relativas al lector: la base de conocimientos de que dispone en relación con el contenido cognitivo del texto, la comprensión del vocabulario, su competencia para la decodificación sintáctica, etc. Sólo al nivel de la interacción entre estos dos tipos de variables es que verdaderamente se puede llevar a cabo un análisis de los procesos de comprensión de textos. Los diferentes tipos de interacción entre un lector y un texto, determinan, a su vez, situaciones de lectura diferentes.

Reconocer que el fenómeno de la comprensión de textos no puede separarse de la situación de lectura en la cual se produce, permite reconocer que los procesos que conducen a la comprensión no son del todo los mismos de una situación de lectura a otra. La diversidad de modelos propuestos hasta el presente reflejan en parte, por lo demás, la diversidad de procesos posibles (Duval, 1986). En realidad, si bien en toda situación de lectura se encuentra la necesaria realización de dos operaciones fundamentales, la segmentación y la recontextualización de las unidades segmentadas, el modo de efectuación de estas operaciones varía de una situación a otra. *La primera tarea del "inmenso trabajo a realizar en el plano teórico" (Fayol, 1989) debe basarse en la clasificación de las situaciones de lectura posibles, y en la identificación de los diferentes modos posibles de aquellas dos operaciones fundamentales.* La segunda tarea es mostrar cómo es posible una objetivación de estas operaciones, con frecuencia efectuadas de manera implícita. Es sólo a partir de una objetivación de estas operaciones y de sus diversos modos de efectuación que puede organizarse y realizarse un aprendizaje de la comprensión de textos. De la misma manera, una evaluación fiable y no subjetiva de la comprensión a partir de resúmenes o de respuestas a preguntas, requiere tal objetivación. Este capítulo está consagrado por entero a estas dos tareas.

Comenzaremos tratando de identificar los elementos que constituyen un texto de manera específica e irreductible. Los estudiosos de la gramática de los textos han puesto en evidencia la existencia de una organización que hace al texto irreductible a las frases que lo componen, y han analizado las diferentes marcaciones lingüísticas posibles a nivel de las frases. Sin embargo, todo el problema es saber cuál es la naturaleza de esta organización propia del texto: ¿es del orden lingüístico y por tanto se puede captar sólo a través de las marcas lingüísticas? ¿es del orden de los conocimientos y de las representaciones sobre el mundo y por tanto se puede captar en función de los esquemas cognitivos? O incluso, ¿ es del orden de las elecciones que producen el texto y por tanto se puede captar como una estrategia intencional de producción? Veremos que lo que generalmente se considera como la organización de un texto resulta, de hecho, de la interacción entre dos niveles de organización, uno relativo a los conocimientos expresados y el otro relativo a las estrategias fundamentadas prioritariamente en los criterios de objetivación y no de comunicación. La producción de un texto obecede a otros *feed-back* distintos a los de la palabra.

Llamaremos respectivamente estos niveles de organización como el **contenido cognitivo del texto** y su **organización redaccional.** La distinción de estos dos niveles permitirá definir las **variables redaccionales** de un texto, es decir, las variables relativas a la relación entre estos dos niveles de organización y los modos de explicitación redaccional del contenido cognitivo.

Podremos entonces abordar el punto decisivo en toda modelización de la comprensión de textos, el de la definición de las operaciones que necesariamente moviliza: la **segmentación** y la **recontextualización** de las unidades segmentadas. Veremos que estas dos operaciones no consisten en la aplicación de reglas de análisis lingüístico. La segmentación que se realiza en la comprensión de textos es de naturaleza diferente a la que se realiza cuando se analiza la lengua. Neisser ya había insistido fuertemente en este punto. La naturaleza de las unidades reconocidas durante la lectura "depende de la manera como el sujeto despliegue su atención". Esto aplica tanto para una palabra como para una frase tomada como un todo. No hay unidades que se puedan definir como unidades de base distinguibles previamente para todo acto de lectura. Los segmentos tomados como unidades de base durante la lectura son "segmentos funcionales" (Neisser, 1967, p. 183, 189). Y lo que aplica para la segmentación se impone de manera aún más evidente para la recontextualización de las unidades distinguidas. Presentaremos los diferentes modos posibles de efectuación de estas dos operaciones.

La combinación de estos diferentes modos permite definir diferentes procesos que conducen a la comprensión de textos, los cuales a vez pueden traducirse en conductas diferentes. La selección de uno u otro de estos procesos depende esencialmente de la **situación de lectura**. Esta está determinada fundamentalmente por los factores que modifican las interacciones posibles entre un lector y un texto. Los dos factores principales son, de un lado, la distancia entre el contenido cognitivo del texto y la base de conocimientos del lector y, del otro, la diferencia entre la organización propia al contenido cognitivo del texto y la organización redaccional del texto. Estas dos diferencias pueden variar considerablemente y así modificar radicalmente la situación de lectura. La situación más simple ocurre cuando estos dos tipos de diferencias están reducidos al mínimo; es la que se aproxima más a la comprensión del discurso oral cotidiano. *El problema de la comprensión de textos en la situación escolar surge cuando se aleja de la situación que llamaremos una práctica oral del texto, es decir, cuando surge una distancia significativa para uno de los dos factores.* Propondremos una primera clasificación de las situaciones de lectura, pues no todas las situaciones movilizan los mismos modos de segmentación del texto y de recontextualización de las unidades del texto.

Entonces llegaremos al punto "crucial" para todo modelo teórico: poder distinguir las condiciones de un aprendizaje de la comprensión de textos. Evidentemente, el modelo debe funcionar para los diferentes modos de segmentación y de recontextualización. Casi siempre estas operaciones son efectuadas de manera implícita. La condición previa para su aprendizaje debe consistir, pues, en una objetivación de las operaciones con la ayuda de procedimientos controlables. La ligazón tan fuerte que existe entre la diversidad de los registros de representación y la comprensión, conduce a buscar en las **representaciones no discursivas** el medio para objetivar uno u otro de los dos niveles de organización constitutivos de los textos (Duval, 1990b, 1991a). *En efecto, sólo las representaciones no discursivas permiten una aprehensión sinóptica, global y precisa de una organización textual cuyas partes o elementos están dados sólo en una linealidad que requiere una multitud de aprehensiones sucesivas.* Las representaciones no discursivas permiten reconstruir, ver y controlar la manera como cada frase se integra en el texto: "la comprensión de las frases como partes de un discurso es un proceso diferente a la comprensión de las frases consideradas aisladamente... Lo importante es la manera como una frase puede ser integrada semánticamente con las que la preceden." (Van Dijk et Kintsh, 1983, p. 32).

NECESIDAD DE UNA APROXIMACIÓN "TRANSLINGÜÍSTICA" DE LO QUE CONSTITUYE UN TEXTO

La noción de texto es una noción que parece ser familiar. De una parte, es la producción escrita, y no oral, del discurso. De otra, es lo que constituye el objeto de una práctica cultural y escolar fundamental: la lectura. Pero, a pesar de su evidencia cultural, esta noción de texto es muy difícil de delimitar.

El fracaso de toda definición lingüística de la noción de texto

Todas las definiciones que se han propuesto para la noción de texto recurren a la analogía de la frase. La necesidad de tal recurso no es nada sorprendente si se recuerda que la frase proviene del orden del discurso y no de la lengua:

> La frase, creación indefinida, variedad sin límite, es la vida misma del lenguaje en acción. Hemos concluido que con la frase se sale del dominio de la lengua como sistema de signos, y se entra en otro universo, el de la lengua como instrumento de comunicación, cuya expresión es el discurso... La frase pertenece al discurso. Incluso, es a través de éste que puede definirse: la frase es la unidad del discurso... Benveniste, 1966, p. 129-130.

Pero se ha probado que este recurso es un callejón sin salida. En efecto, la frase, en tanto que forma un acto completo de discurso (cf. p.111-112), y el texto en tanto que forma la unidad completa de un recorrido discursivo, pueden parecer muy próximos en virtud de este carácter de completitud, pero no pueden ser comparados porque no dependen de las mismas funciones discursivas. Tomar la frase como unidad de referencia para definir la noción de texto, no puede más que conducir a oponerlos sin dar criterios reales para distinguirlos. Para convencerse de esto es suficiente mirar la siguiente descripción que es enteramente negativa:

> La noción de texto no se sitúa en el mismo plano que el de la frase (o de la proposición, o del sintagma, etc.)... El texto puede coincidir con una frase como con un libro entero; se define por su autonomía y por su clausura (incluso si, en otro sentido, algunos textos no están "cerrados"); constituye un sistema que no se debe confundir con el sistema lingüístico pero que se debe poner en relación con él... Si se distinguen en la frase verbal sus componentes fonológico, sintáctico y semántico, también se los distinguirá en el texto, sin que sin embargo sus componentes estén situados en el mismo plano... Cada uno de sus aspectos tiene su problemática propia y funda uno de los grandes tipos de análisis de texto: análisis retórico, narrativo y temático. Ducrot y Todorov, 1972, p. 375-376.

La diferencia entre frase y texto está aquí descrita mediante la oposición lengua/discurso, y la frase es considerada sólo como una unidad del sistema lingüístico. De hecho, para definir la noción de texto, no se trataría de comparar el texto con la frase sino que es necesario determinar cómo la unidad de un recorrido discursivo puede estar expresado y marcado en una serie de actos completos de discurso, es decir, en una serie de frases o eventualmente en una sola.

El aporte de los primeros estudiosos de la gramática de textos fue su intención de tratar de resolver el problema de la especificidad textual de una serie de frases (Van Dijk, 1972). La idea que comanda los análisis es simple: de la misma manera que toda serie de palabras no forma una frase, toda serie de frases no forma un texto. Para que varias frases sucesivas formen un texto, es decir, se integren en una unidad total, es necesario que haya entre ellas una continuidad de propósito o de tema y que, de la una a la otra, el discurso progrese. Estas dos condiciones permiten definir la

coherencia del texto bien sea localmente entre dos frases sucesivas, o globalmente sobre el conjunto del texto e independientemente del orden de sucesión de las frases. Se puede así aislar un conjunto mínimo de reglas de coherencia (Charolles, 1978). Estas reglas procuran recoger marcas lingüísticas de repetición, de progresión, de no contradicción entre las frases: pronominalización, referencias deícticas, sustituciones lexicales, nominalizaciones, recuperaciones presuposicionales... Pero aún no se ha probado que estas reglas sean suficientes para restablecer un lazo entre dos frases sucesivas que permita percibirlas como formando un solo texto, o para mostrar el lugar de una frase en la organización del texto. Y esto por dos razones convergentes.

La primera es la importancia de lo **implícito** en todo discurso en la lengua natural. Las formas de expansión discursiva que permite una lengua natural excluyen las que proceden simultáneamente por similitud externa y por similitud semiótica (cf. p.129). Esto significa que la continuidad de un discurso y, en consecuencia, la coherencia de un texto exige una actividad de inferencia que no depende sólo de las reglas propuestas de la lengua, es decir, de un registro de representación. Esta actividad de inferencia se debe apoyar en las leyes del "mundo representado" de donde provienen los estados, las acciones, los eventos denotados por las diferentes frases así como por sus relaciones enunciadas en el texto. Así pues, no pueden haber reglas de coherencia de un texto así como hay reglas de validez de un razonamiento. La actividad de inferencia debe entonces apoyarse en una base de conocimientos presupuestos por el redactor del texto.

La segunda es la **exigencia de coherencia cognitiva.** Incluso en ausencia de lo implícito, para constituir un texto, las frases que están vinculadas entre sí por marcas lingüísticas deben corresponder a una relación, en el mundo representado, de los hechos que ellas denotan (Carolles, 1978, p. 29-31). Esto quiere decir que el recurso a marcas lingüísticas que indican una relación entre las frases (conectores, pronominalizaciones, referencias deícitcas contextuales...) no bastan para asegurar la coherencia y, en consecuencia, para integrar una serie de frases en la unidad de un texto. Dicho de otra manera, el encadenamiento de las frases debe también ser conforme con los datos de una base de conocimientos que se presupone común al redactor del texto y a sus lectores potenciales. En definitiva, la coherencia de un texto no puede ser verificada sólo en el plano lingüístico.

Entonces, no parece posible dar cuenta de lo que hace que una serie de frases sea un texto y no una disparatada yuxtaposición, sin simultáneamente hacer un llamado a los datos que provienen de dos esferas radicalmente diferentes: de una parte, el sistema lingüístico de una lengua y, de otra, un mundo representado cuyas leyes de coherencia son independientes de las propuestas en el sistema lingüístico. Para dar cuenta de la coherencia de un texto, los estudiosos de la gramática de los textos están obligados a conjugar reglas de expansión discursiva, propias a las lenguas naturales, y conocimientos relativos al mundo representado.

Se ve enseguida el problema que plantea la especifidad textual de una serie de frases. Depende de la dualidad lengua/mundo, que los estudiosos de la gramática ha puesto en evidencia[35]. La

---

[35] Esta dualidad hace **la frase una unidad ambivalente**. La frase puede ser considerada como una ***unidad de la lengua*** y, en este caso, para tener sentido le basta respetar las *reglas sintácticas de concatenación* de unidades que provienen de un nivel de organización menos complejo. También puede ser considerada como una ***unidad de discurso***, o como un texto, y en este caso, para tener sentido es suficiente que *exprese conocimientos verdaderos en un mundo dado.* Este segundo punto de vista es el que Benveniste privilegió: "con el signo, se logra la realidad intrínseca de la lengua; con la frase se está vinculado con las cosas externas de la lengua..." (1974, p.225). De esto resulta que se considere la frase como una representación que cumple la función apofántica de expresión de enunciado completo.
Pero si toda frase puede ser discursivamente considerada como un enunciado completo, no por eso forma un texto. Hay frases cuyo sentido puede variar con la situación en que son enunciadas, o con el cambio contextual de otras frases. Una frase cuyo sentido puede ser modificado, no constituye un texto por sí misma. Hay frases cuyo sentido no varía con

descripción negativa propuesta por Ducrot y Todorov se centró en esta dualidad, aunque uno de sus componentes no fuera verdaderamente designado. Este "plano sobre el cual se sitúa el texto", para retomar los términos de su descripción, y que no es el plano lingüístico de la frase, puede ser identificado como el del contenido cognitivo: es sólo en este plano "por fuera de la lengua" que la "autonomía y el cierre" característicos de los textos pueden definirse. Todo el problema es entonces saber cómo este plano del contenido cognitivo, que no debe ser "confundido" con el sistema lingüístico, se encuentra efectivamente "puesto en relación con él". El texto se constituye en la interacción de estos dos planos. Y, a este título, es irreductible a uno u otro plano.

Yuxtaponiendo las reglas propias a cada uno de estos planos, *las reglas de "coherencia textual" no permiten captar la interacción entre los dos planos: mantiene separado lo que depende del empleo de la lengua y lo que proviene de la organización de los conocimientos movilizados*. Para darse cuenta de esto, basta con preguntarse sobre la manera como está determinado y puede ser descrito lo que refleja la interacción entre los dos planos, la organización del texto: ¿está determinada por un empleo gramaticalmente correcto de todas las posibilidades de relación interfrases que una lengua ofrece (conectores, términos con función anafórica, nominalizaciones...) o por el respeto de las relaciones propias al mundo que el texto evoca o en el cual se sitúa? De hecho, lo que constituye la organización de un texto no está determinado por ninguno de estos aspectos. De un lado, como veremos mas adelante, la organización de un texto puede por completo no ser congruente con la organización de los conocimientos que moviliza. Por tanto, la organización no le es reductible. De otro lado, el empleo de marcas lingüísticas de ligazón interfrases no es ni necesario ni suficiente para organizar una serie de frases en un todo coherente, a pesar de que facilita la aprehensión. No es necesario puesto que todas las marcas de ligazón pueden estar implícitas sin que la unidad del texto y su coherencia se destruyan. Y no es suficiente puesto que la organización textual debe respetar una exigencia de coherencia cognitiva. Para captar la interacción entre el plano propiamente lingüístico y el del contenido cognitivo, es necesario recurrir a otra noción, la de redacción. La organización del un texto es una **organización redaccional** (Duval, 1986, p.3, 66).

Texto y organización redaccional

El interés de la noción de redacción está en que permite diferenciar la producción de un texto de la del discurso oral. Se aplica, en efecto, a todo proceso de producción discursiva que presenta la particularidad de poder funcionar por *feed-back*, es decir, de poder transformar recurrentemente la expresión producida. Se obtiene así un discurso que se aleja progresivamente del discurso oral espontáneamente producido, en sus características de organización, de explicitación, de precisión y de conectividad. Un texto es una forma de discurso más complejo y más denso que toda otra forma socialmente producida en tiempos reales.

Es pues inherente al proceso de redacción provocar la existencia de varias versiones o de varios estratos de redacción. Las "variantes" de un texto son los excedentes no absorbidos, y preciosos para la crítica literaria. Bajo este punto de vista, *todo texto aparece como la versión seleccionada que marca una interrupción en un proceso de redacción que podría continuarse.* Y en tanto que versión seleccionada, todo texto puede ser comparado con las otras versiones entre las cuales fue

---

la situación o con el contexto, por ejemplo, las que combinan una operación de predicación y un acto ilocutorio de aserción. La autonomía y el cierre de una frase depende pues de operaciones discursivas por las cuales cumple la función apofántica.

preferido[36]. La noción de redacción lleva pues a considerar el texto en relación con su producción y, bajo este aspecto, la **variabilidad redaccional** aparece como el fenómeno esencial para aproximarse a la especificidad de los textos.

Este fenómeno de variabilidad redaccional se impone de manera evidente en la producción de un texto por un individuo. Pero, a menos que se reduzca la redacción a un simple proceso psicológico, se ve que este fenómeno concierne igualmente a los diferentes textos escritos por distintos individuos sobre el mismo tema. En efecto, estos textos diferentes pueden ser comparados entre sí y, eventualmente, ser seleccionados por los lectores desde el punto de vista de su comprensibilidad, de su completitud, etc., como si se tratara de versiones diferentes. Sean de un mismo autor o de diferentes autores, estas versiones presentan necesariamente *un* ***invariante*** *que llamaremos* ***el contenido cognitivo del texto***. La noción de variación redaccional tiene por correlato la de contenido cognitivo de un texto. Luego de Schank (1972), el contenido cognitivo de un texto se define generalmente como el conjunto de los conocimientos que son necesarios para la comprensión del tema tratado, independientemente de los que el texto movilice o presente. Dicho de otra manera, el contenido cognitivo está definido en referencia a los conocimientos de que dispone un experto sobre el tema tratado. Tal aproximación de esta noción puede ser técnicamente útil cuando se trata de explicitar en qué consiste el contenido cognitivo de un texto. Pero, como se puede ver a través de las modelizaciones propuestas por Schank, puede conducir a olvidar el plano lingüístico, es decir, a olvidar la especificidad de un texto. *Entonces, el contenido cognitivo de un texto debe ser definido en tanto que invariante de un conjunto de variaciones redaccionales, potenciales o efectivamente realizadas en diferentes versiones.*

En efecto, es importante no asimilar el contenido cognitivo de un texto y ***la base de conocimientos de un lector.*** Según la base de conocimientos de los lectores, un mismo texto puede aparecer redaccionalmente suficiente o insuficiente para la comprensión de su contenido cognitivo. El texto en el cual Julio Verne explica por qué Philéas Fogg tiene un día menos de los que pensaba para darle la vuelta al mundo, es un ejemplo revelador (Duval, 1991a). La diferencia en extremo variable que existe entre el contenido cognitivo de un texto y la base de conocimientos que su organización redaccional supone en los lectores potenciales, constituye uno de los mayores problemas para la escogencia de textos para las diferentes materias enseñadas, y en particular para las clases de francés y de matemáticas. El nivel y el conjunto de conocimientos de los que pueden disponer los lectores no son los mismos para los alumnos de 6º, de 9º o de 11º. Dicho de otra manera, nunca se puede decir si una serie de frases forma o no un texto aceptable sin tomar como referencia una base de conocimientos determinada. Esta base puede ser la de un experto en lo relativo al contenido cognitivo del texto o, por el contrario, ser la de un novato que no dispone de ningún conocimiento relativo a ese contenido cognitivo. Los criterios de aceptabilidad, pues, no serán los mismos según la base escogida. Además, en relación con estos criterios sólo se puede decir que un texto es mas o menos bien redactado. Ninguna regla de coherencia textual puede ser suficiente para decidir si una serie de frases constituye o no un texto. A este título, no son comparables ni con las reglas sintácticas que permiten decir si una serie de palabras está correctamente formada o no, es decir, si forma o no una frase aceptable en una lengua dada, ni con los esquemas lógicos que permiten decir si una serie de proposiciones forma o no un razonamiento válido.

---

[36] Quizá no es inútil recordar aquí un ejemplo clásico: la célebre descripción de la noche en los bosques americanos por Chateaubriand dio lugar a siete versiones públicas, desde la del *Ensayo sobre las revoluciones* hasta la de las *Memorias de ultratumba*.

Ahora es necesario analizar de manera más precisa en qué es que consisten las variaciones redaccionales. La transformación de una primera expresión o de una primera versión por *feed-back* no es del orden lingüístico. Esencialmente, no se trata de corregir las "faltas en francés" o de hacer correctas las frases que no lo eran. Mas bien se trata de transformar una versión dada jugando con la relación entre lo que está explícito y lo que permanece implícito, o jugando en el orden de la tematización. Las variaciones redaccionales conciernen esencialmente la manera como se explicita un contenido cognitivo. Se puede observar un ejemplo muy elemental de variación redaccional a partir del enunciado del siguiente problema:

El lunes en la tarde Pedro recibió 879 francos de Juan. Luego fue a un almacén a hacer compras importantes. En la noche contó su dinero y encontró que tenía 474 francos menos que en la mañana. ¿Cuánto gastó en sus compras?

Después de la lectura, e incluso de la relectura, los alumnos de 6º proponen la respuesta

$$849 - 475 = 374$$

y no ven que es falsa. Al constatar el error persistente de los alumnos buenos en este problema ultra-simple, los profesores de matemáticas no vacilan en mejorar la redacción del enunciado y proponen la siguiente versión:

El lunes en la mañana Pedro **sale con dinero**. En la tarde recibe 879 francos de Juan... En la noche ... él tenía 475 francos menos que en la mañana...

La modificación propuesta se concreta en añadir una primera frase al enunciado precedente. Combina dos variaciones redaccionales: una que explicita la información mencionada en la expresión "475 francos menos que en la mañana" a través de la unidad apofántica "Pedro salió con dinero", y otra que restablece el orden de las marcas temporales ("lunes en la mañana... lunes en la tarde... lunes en la noche..."). *Este ejemplo permite ver una diferencia importante entre lo que es el objeto de una tematización en una unidad apofántica (frase o "proposición" según la acepción gramatical del término) y lo que es el objeto de una mención en una expresión que designa un objeto de referencia o un predicado.* Consideraremos como **redaccionalmente explícito**, en relación con la actividad de comprensión, lo que es el objeto de una tematización en una actividad apofántica. Lo que solamente es el objeto de una mención no puede ser considerado como implícito, pero tampoco puede ser considerado como redaccionalmente explícito. Lo consideraremos como **redaccionalmente mencionado.**

Así pues, se pueden distinguir *tres factores de variación redaccional en un texto.*

El primero es relativo a la escogencia de elementos (objetos, relaciones, estados de hecho...) que son explicitados, es decir, que son o nombrados con una expresión que cumple una función referencial, o tematizados a través de una expresión que cumple una función apofántica (frase). Así, el célebre pasaje de Julio Verne que explica la ganancia de un día en la vuelta al mundo, hace explícitos muchos elementos del contenido cognitivo (Duval, 1991a, p. 178).

El segundo, más trivial, es relativo a la escogencia de las expresiones referenciales o apofánticas para tematizar los elementos que se quiere explicitar.

El tercero concierne el orden de presentación de los elementos explicitados. Este orden es evidentemente un orden de tematización que se refleja en el orden de sucesión de las frases. Pero concierne también los elementos que, en cada frase, son explicitados a través de una expresión referencial y que por tanto están en una posición de sujeto gramatical del verbo principal. Al nivel del texto, y no solo de la frase, esta posición constituye el anclaje redaccional. De una frase a la siguiente, el anclaje redaccional puede seguir siendo el mismo o cambiar, según las expresiones

referenciales que designan o no el mismo objeto. Un cambio de anclaje redaccional forza a una descentración referencial durante la lectura. Es muy fácil de medir la descentración referencial de un texto (Duval, 1981, p. 17-19). Los textos que presentan una tasa baja de descentración referencial son más fáciles de leer que los textos que presentan una tasa alta.

Estos tres factores de variación determinan lo que llamaremos ***la organización redaccional de un texto.*** Esta organización puede ser modificada según esos factores, sin que se modifique el contenido cognitivo. Se obtiene así una nueva versión del texto que puede ser redaccionalmente diferente, teniendo el mismo contenido cognitivo. Como puede verse, tal modificación implica exigencias y restricciones del orden cognitivo y no lingüístico. Una modificación tal se puede imponer cada vez que un texto no es recibido como se esperaba que fuera comprendido por el lector. Por ejemplo, el texto de Julio Verne que explica la ganancia de un día en una vuelta al mundo yendo hacia el este, es suficiente para comprender plenamente el fenómeno, y sin embargo, por lo general, no lo comprenden no sólo por los colegiales sino tampoco los universitarios. Se puede modificar la organización redaccional explicitando más los elementos de su contenido cognitivo y siguiendo un orden diferente de presentación - primer y tercer factor- de manera que se obtenga otra organización redaccional más accesible para la mayoría de los lectores (Duval, 1991a, p. 175). Se obtiene así otra versión que es un texto diferentes pero que tiene estrictamente el mismo contenido cognitivo. Los ejercicios escolares de síntesis de textos o resúmenes son un ejemplo familiar de tareas de modificación redaccional.

Esta noción de organización redaccional es fundamental para describir y analizar la cohesión que hace de un conjunto de frases un texto. Su especificidad es implicar grados de libertad en la explicitación de un contenido cognitivo: *estos grados de libertad aparecen a través de el fenómeno de variabilidad redaccional, el cual resulta del proceso de transformación por feed-back de un producción discursiva dada.* La organización redaccional de un conjunto de frases en un texto, por tanto, es relativa a un contenido cognitivo. Esto quiere decir que la organización redaccional es dependiente del contenido cognitivo explicitado y no está determinada por un conjunto de reglas de tipo gramatical. El proceso redaccional de explicitación de un contenido cognitivo depende de varios factores no lingüísticos, en el primer lugar de los cuales es necesario colocar la base de conocimientos presupuestos para todo lector potencial.

Resulta pues que la "escogencia" que se haga para explicitar un contenido cognitivo, la organización redaccional, se sitúa más allá de la dualidad de los dos planos, lengua y mundo, necesariamente presentes en un texto: la escogencia constituye su "puesta en relación". Sin embargo, en esta puesta en relación *hay una predominancia de las representaciones y de las exigencias propias al contenido cognitivo tratado sobre las que son propias a la lengua.* Al menos para todos los textos que provienen de una forma de expansión discursiva natural o de una forma de expansión discursiva cognitiva (tabla 3, p. 129). La única categoría de texto en la que esta predominancia se encuentra neutralizada es aquella en la cual la forma de expansión discursiva es lexical. Pero esta categoría sólo constituye una pequeña parte del conjunto de textos "literarios", la cual es sólo una parte de los textos que se proponen a los alumnos a lo largo de su escolaridad. No puede pues constituir un contraejemplo. Además, se podría mostrar que esa categoría no basta por sí misma para desarrollar un texto. Esta predominancia del contenido cognitivo sobre el plano del sistema de la lengua puede explicarse, además, con una razón muy simple. En el plano de la lengua sólo se pueden definir reglas de conformidad y no reglas de tratamiento que permitan una expansión discursiva. Ahora bien, la aplicación de las reglas de conformidad es solo local, mientras que la organización de un texto no se aprehende primero localmente sino de manera global; es la representación del contenido cognitivo a explicitar lo que comanda la organización redaccional.

LOS PROCESOS DE LA COMPRENSIÓN DE TEXTOS

Para analizar de manera precisa lo que abarca la comprensión de un texto, en primer lugar es importante *disociar los procesos de la comprensión de un texto y la práctica de la lectura corriente.* Por práctica de lectura corriente entendemos un recorrido visual único y regular del texto, sin detenciones prolongadas y sin vueltas atrás. Un recorrido tal puede ser suficiente, o considerado como tal, para comprender un texto. Pero este no es el caso para todos los lectores y para todos los textos: las detenciones prolongadas, las vueltas atrás, varios recorridos, incluso una actividad de información o de tratamiento al margen de estos recorridos, resultan necesarios a veces. Esto depende de las situaciones de lectura. Independientemente de que la comprensión de un texto sea simultánea con su lectura corriente o no, los procesos de comprensión del texto se basan siempre en dos operaciones fundamentales: la segmentación del texto en unidades y la recontextualización de las unidades segmentadas.

Las dos operaciones fundamentales en la comprensión de un texto

La segmentación

Puede parecer paradójico plantear que la segmentación del texto en unidades sea la primera operación del proceso de comprensión. En efecto, todo texto presenta e impone una segmentación visual del discurso, tanto por los espacios en blanco como por la puntuación. El texto aparece pues como un conjunto segmentado en unidades que provienen de dos niveles diferentes y jerarquizados: las palabras y las frases. Mas bien parecería que la primera operación debiera consistir en la integración de la serie de palabras, es decir, de las unidades que provienen del universo de la lengua, en unidades que además de provenir del universo de la lengua lo hacen del universo del discurso, es decir, en frases (Benveniste, 1966, p. 130-131). Esto parece evidente si se identifica el análisis de los procesos de comprensión con aquellos de la práctica de la lectura corriente. La aprehensión de una frase supone, en efecto, la integración en la memoria a corto plazo de la serie de palabras percibidas por fijaciones oculares sucesivas. ¿Pero esta integración es constitutiva del proceso de comprensión? Ciertamentel, numerosos trabajos psicológicos sobre el recuerdo y la comprensión de frases, han subrayado las correlaciones entre la comprensión y las performances del recuerdo. ¿Pero esto es suficiente para afirmar que hay prioridad de la operación de integración sobre la de segmentación?

Es bien sabido muchos alumnos de 6º que "saben leer" tienen grandes dificultades para segmentar las frases de manera que puedan distinguir las unidades de significación que las constituyen o las unidades de información que las frases articulan. Su sentido forma un todo no repartible en la articulación de varias informaciones. Basta con solicitarles que subrayen en un texto el pasaje que formula la información que responde a un pregunta planteada, para descubrir estas dificultades en la segmentación, incluso en clases superiores a 6º. Con mucha frecuencia, los alumnos subrayan mucho mas que el segmento del texto que corresponde a la información solicitada: subrayan la frase entera e incluso varias frases. Esto no es nada sorprendente: "no es una adición de signos lo que produce el sentido, por el contrario, es el sentido (la "intención"), concebido globalmente, lo que se realiza y se subdivide en "signos" particulares, que son las palabras" (Benveniste, 1974, p.64).

La importancia de la operación de segmentación aparece con la constitución de los primeros modelos de comprensión. Estos ponen en evidencia la necesidad de descomponer los textos en unidades que no sean ni las palabras ni las frases, pero sí unidades textuales de información. Hay tres tipos de procedimientos que permiten distinguir estas unidades en el texto: la segmentación

cognitiva, la segmentación proposicional y la segmentación funcional. En los modelos de comprensión han sido tomadas en consideración sobretodo las dos primeras: la segmentación cognitiva después de Schank (1972), fundamentada en una teoría de dependencia conceptual, y la segmentación proposicional después de Kintsch (1972, 1974), fundamentada en una teoría de la representación de la significación en la memoria, o más precisamente en una teoría de la organización de la memoria relativa al léxico de las lenguas naturales. La segmentación funcional parece más difícil de modelizar, al menos en la perspectiva de la inteligencia artificial. Parece tener que implicar, en efecto, una discriminación de unidades en relación con las funciones que cumplen en la organización del texto o en la elaboración del discurso. Dicho de otra manera, parece ser que la segmentación funcional no se puede efectuar independientemente de una operación de recontextualización. Sin embargo, este tipo de segmentación se impone para describir la comprensión de textos que desarrollan modos de expansión discursiva propios a las lenguas naturales: la argumentación, la ironía... (Grimes, 1975; Grize, 1977, 1983).

La ***segmentación cognitiva*** se efectúa a partir de una lista de preguntas, cuyas respuestas delimitan, cada una, una unidad de información textual que debe buscarse en el texto. En la primera representación del modelo de Schank, directamente inspirada en la gramática del caso de Fillmore (1968), esta lista de preguntas tenía como fin la constitución de una representación completa de la acción, o de la situación, expresada por el verbo principal de la frase. Este principio de segmentación rebasa los textos, recurriendo a representaciones completas de situaciones de la vida común, llamadas "scripts" o "escenarios" (Schank et Abelson, 1977). La lista de preguntas se deriva de estas representaciones completas. Entonces, la segmentación cognitiva se basa por completo en representaciones que son independientes de la expresión lingüística y del grado de explicitación redaccional. Conduce a olvidar las unidades de información explícitamente dadas en el texto, que no responden a ninguna de las preguntas relativas a los esquemas conceptuales de acción o de situación. La segmentación cognitiva es selectiva y extrínseca a la organización redaccional del texto.

La ***segmentación proposicional***, al contrario, se efectúa como una codificación independientemente de toda referencia a un contenido cognitivo determinado. Las unidades textuales de información están definidas como "proposiciones", según la acepción lógica del término, es decir, como "predicados en n lugares". Las reglas determinan a priori una correspondencia entre la naturaleza de las palabras, de una parte, y uno de los dos términos constitutivos de la proposición, el predicado y su argumento (o sus argumentos), de la otra. La operación de segmentación proposicional que toma en consideración sólo criterios morfo-sintácticos, es una operación que no deja escapar ninguna de las indicaciones lingüísticas dadas por la redacción del texto.

La segmentación proposicional puede parecer más cercana al texto que la segmentación cognitiva. Parece también congruente con la segmentación visual del texto. Pero siempre tropieza con una seria dificultad (Duval, 1986, p. 11, 20-26): tiende a la escogencia de reglas de correspondencia que conducen a suprimir todas las unidades apofánticas de estructura remática en provecho de las de estructura funcional y, así, borrar toda diferencia entre las unidades que cumplen una función discursiva referencial y las que cumplen una función discursiva apofántica (cf. p. 114-119). La consecuencia es una atomización del texto en una lista de determinaciones semánticas. Determinar las proposiciones principales (las "macro-proposiciones") y organizar el texto a partir de esta lista llega a ser, entonces, una tarea irresoluble.

La ***segmentación funcional*** se efectúa a través del reconocimiento de las operaciones discursivas que se cumplen en la producción del discurso: espontaneidad y entonación si se trata de una producción en tiempo real, redacción si se trata de un texto. Las unidades textuales de

información son los segmentos del discurso, o del texto, que resultan de estas operaciones. Naturalmente, el reconocimiento de las operaciones discursivas depende del punto de vista adoptado para analizar la producción del discurso. No serán las mismas operaciones que se reconocerían si se considerara la producción del discurso en relación con los efectos observados en su destinatario, como en una aproximación retórico o incluso pragmática (Perelman, 1958; Grimes, 1975...), o si se considerara esta producción en relación con las funciones internas constitutivas de todo discurso (Grize, 1983). Evidentemente, es este segundo punto de vista el que se impone prioritariamente cuando se tratan de analizar las operaciones fundamentales del proceso de comprensión de textos. Hemos visto que hay cuatro funciones discursivas, de las cuales cada una puede cumplirse a través de diferentes operaciones o de una combinación de estas operaciones (capítulo II). Dos de estas operaciones se revelan particularmente importantes para segmentar el texto de manera que se pueda poner en evidencia su organización redaccional: la función referencial y la función apofántica. El reconocimiento de las operaciones propias a estas dos funciones, permite identificar dos tipos de unidades de texto desde un punto de vista estrictamente redaccional: las que están mencionadas en la redacción y las que están implícitas en la redacción; en las dos últimas partes del capítulo presentaremos los principios y ejemplos de aplicación.

La recontextualización de las unidades

No basta con discriminar todas las unidades de información explícitamente movilizadas en un texto; es necesario captar las conexiones que las unen en una totalidad. Llamaremos recontextualización a esta segunda operación.

Contrariamente a lo que evoca este término cercano al de "contexto", la recontextualización no es la operación inversa a la segmentación, es decir, la que nos haría volver a la organización literal del texto tal como fue dado en la segmentación visual de las expresiones lingüísticas y aprehendido en el acto de lectura. En efecto, reubicar una palabra o una frase en su contexto, es tomar en cuenta las palabras, o las frases, que son *vecinas según el orden lineal de ocurrencia en el texto.* Ahora bien, la operación de recontextualización inherente al proceso de comprensión no reubica las unidades segmentadas junto a sus vecinas de ocurrencia, sino en un *conjunto de conocimientos relativos al tema tratado o en una red de relaciones propia a la organización redaccional de texto.* Este conjunto y esta red constituyen la totalidad integrada del texto. Al integrar las unidades segmentadas en una de estas redes, la recontextualización provoca una deslinealización en relación con la aprehensión sucesiva que impone la aprehensión ligada al acto de lectura. Es esta operación de recontextualización la que determina las múltiples inferencias que requiere la comprensión de un texto para suplir las omisiones o para hacer desaparecer las ambigüedades encontradas durante la lectura. Esta actividad de inferencia que ocupa un lugar central en todos los modelos de comprensión de textos, es realidad no es más que una de las manifestaciones de la operación de recontextualización (Duval, 1986, p. 44-48).

De la misma manera como existen diferentes formas de segmentación según el procedimiento optado, existen diferentes procedimientos de recontextualización. Se distinguen esencialmente por el aspecto de la totalidad integrante que se privilegia para recontextualizar las unidades que resultan de la segmentación. Aquí, retendremos sólo dos formas de recontextualización: una puramente cognitiva y otra redaccional.

La ***recontextualización cognitiva*** moviliza esencialmente los conocimientos relativos a las situaciones, a los objetos o a las preguntas que el texto evoca, o que trata, independientemente de lo que la redacción del texto explicita. El conjunto de conocimientos movilizados es independiente de la organización redaccional del texto. Dicho de otra manera, el texto es comprendido sólo a partir de lo conocido sobre el tema que evoca o trata. En el modelo de Schank, la operación de

recontextualización es la que constituye la operación central del proceso de comprensión. En efecto, las preguntas que permiten la segmentación cognitiva están organizadas en una red que representa los componentes y la estructura de una acción o de una situación. Hay tantas redes como tipos de acción o tipos de situación. La lectura de un texto hace apremiante una o varias de estas redes. Cada red determina las relaciones entre los lugares que pueden ocupar los segmentos del texto, permitiendo así la *efectuación simultánea de las operaciones de segmentación y de recontextualización.* En efecto, cada lugar vacío corresponde a una información a buscar en el texto, y una vez encontrada, es *ipso facto* puesta en relación con las otras informaciones. Las informaciones faltantes o implícitas se descubren y sitúan de la misma manera. La recontextualización cognitiva corresponde a la activación de un esquema interpretativo que es movilizable por todo un conjunto de textos y en todas las situaciones de lectura en que la diferencia entre el contenido cognitivo del texto y la base de conocimientos del lector es poco importante.

La ***recontextualización redaccional*** es la operación que explicita todas las relaciones que tienen entre sí las unidades discriminadas por segmentación funcional. La segmentación funcional lleva a discriminar dos tipos de unidades, las unidades apofánticas y las unidades vinculadas a la designación de objetos y de predicados, cuyas relaciones son múltiples y variadas: anáfora, co-referencia, oposición (antinomia, contradicción), sinonimia, modelización (*de dicto* o *de re*), dependencia discursiva... (Duval, 1986, p. 76-79). El conjunto de estas relaciones constituye la organización redaccional del texto. Enseguida se ven las dos mayores diferencias entre la recontextualización redaccional y la recontextualización cognitiva. La recontextualización redaccional es interna al texto, y sólo puede efectuarse luego de la operación de segmentación, lo cual quiere decir que es independiente del contenido cognitivo del texto.

La comprensión de un texto se basa siempre en dos operaciones fundamentales: su segmentación en unidades y la recontextualización de las unidades obtenidas por segmentación. Pero la efectuación de estas dos operaciones puede tomar formas diferentes. La combinación de las diferentes formas de segmentación y de recontextualización da la manera de clasificar los variados modelos de comprensión de textos que han podido elaborarse (Duval, 1986, p. 32). Tal combinación también permite analizar la diversidad efectiva de los recorridos hermenéuticos observables en las explicaciones y en los comentarios del texto. Nuestro propósito en este capítulo no es estudiar el problema hermenéutico de la interpretación de un texto, sino el problema cognitivo de la comprensión del texto, que es primordial para la didáctica; nos limitaremos pues a las dos combinaciones fundamentales para el aprendizaje y para el control de los recorridos de la lectura.

Dos procesos inversos de comprensión de textos

Desde el punto de vista de un aprendizaje de la comprensión de textos, es esencial distinguir los dos niveles de organización que constituyen un texto como texto, y movilizar explícitamente las formas de segmentación y de recontextualización que les son específicas: segmentación funcional y recontextualización redaccional, segmentación y recontextualización cognitivas. Estas formas caracterizan dos procesos de comprensión que son inversos entre sí. Uno conduce a desintegrar la organización redaccional del texto, en tanto que esta organización permite acceder al contenido cognitivo del mismo. El otro parte de una base de conocimientos que corresponden al contenido cognitivo del texto, la cual provee los esquemas para desintegrar la organización redaccional del texto, para anticipar el desarrollo, o para rápidamente identificar su aporte. Por analogía con otros recorridos de conocimiento, respectivamente llamaremos "inductivo" y "deductivo" a estos dos procesos. Son muy diferentes entre sí, tal como lo muestra la siguiente comparación:

Tabla 1

Comparación de los dos procesos de comprensión de un texto

Proceso "inductivo" de comprensión	Proceso "deductivo" de comprensión
1. Segmentación funcional: Las unidades son determinadas en relación con las funciones dicursivas (referencial, apofántica y metalingüística). Es tomado en cuenta el texto en la totalidad de sus construcciones y de sus marcas sintácticas. *Esta forma de segmentación, diferente de la segmentación visual de la forma escrita del texto, es* ***sistemática*** *e* ***independiente del contenido cognitivo.***	**1. Segmentación cognitiva:** Las unidades están determinadas como elementos de respuesta a una "rejilla" de preguntas. Esta respuesta puede estar constituida por una palabra, un sintagma o una frase. También puede no encontrarse la respuesta en el texto. No hay necesidad de entrar en el detalle de la construcción sintáctica de cada frase. Pueden ser suficientes los procesos visuales de reconocimiento por *matching* con las preguntas, o por complementación asociativa. *Esta forma de segmentación es* ***selectiva*** *y* ***dependiente*** *del contenido cognitivo.*
2. Recontextualización redaccional: Las diferentes relaciones que cada unidad discriminada puede tener con otras también discriminadas, son explicitadas con base en relaciones semánticas entre las expresiones y en vínculos discursivos marcados por conectores argumentativos o temporales. *Esta forma de recontextualización es* ***selectiva.*** ***Depende de un postulado de conectividad textual****, según el cual cada frase tiene al menos un vínculo interno o externo con al menos otra frase del texto (Duval, 1986, p. 76-82).*	**2. Recontextualización cognitiva:** Las unidades discriminadas estan integradas en una organización de conocimientos relativos al "mundo" descrito o evocado en el texto. Para que la recontextualización cognitiva sea posible, esta organización debe hacer ya parte de la base de conocimientos del lector. *Esta forma de recontextualización es* ***sistemática.*** ***Es independiente de la organización redaccional.***

La comprensión de un texto depende de uno de estos dos procesos o de su interacción. Un texto incomprensible es un texto en el cual o ninguno de estos dos procesos puede desarrollarse por completo o su interacción conduce a conflictos o a incompatibilidades.

Naturalmente no puede considerarse completo este análisis de los procesos que subyacen al fenómeno de la comprensión de textos, pues plantea y deja en suspenso la cuestión de su selección. En efecto, ninguno de los procesos toma el mismo nivel de organización como referencia normativa para la determinación del sentido del texto. El proceso inductivo está centrado en la organización redaccional y el proceso deductivo lo está en un conjunto de conocimientos que sobrepasan ampliamente lo que el texto moviliza o explicita. Intuitivamente esto quiere decir que una *comprensión que depende sólo del proceso inductivo* es una comprensión que se limita a lo que el texto explicita de las situaciones, los fenómenos o los problemas que son tratados, sin que implique una real comprensión de las situaciones, de los fenómenos o de los problemas en sí mismos. Al contrario, una *comprensión que dependa sólo del proceso deductivo* es esa comprensión real de los fenómenos o de los problemas que el texto trata, pero en la cual la comprensión de la manera como el texto los explicita es secundario. Y una *comprensión que dependa de la interacción de estos dos procesos* es una comprensión evolutiva, es decir, que provoca una modificación sea en la

comprensión de la organización del texto o bien en la de las situaciones, los fenómenos o los problemas que el texto trata. *La comprensión evolutiva es la que permite un aprendizaje a través de la lectura*.

La pregunta que se plantea es entonces la de conocer lo que determina la selección de los procesos de comprensión durante la lectura. Se podría creer que eso depende directamente del lector, de lo que él busca en la lectura del libro que él escogió. Esto sería olvidar la importancia de la base de conocimientos de que dispone el lector para relacionarse con el texto que lee. Según esta base de conocimientos le de o no una comprensión previa del contenido cognitivo del texto, la situación de lectura cambia totalmente. La selección de uno de los dos procesos de comprensión o de su interacción, depende en primer lugar de la situación de lectura.

COMPRENSIÓN DE TEXTOS Y SITUACIÓN DE LECTURA

La comprensión de un texto es un fenómeno que está sometido a importantes variaciones. Para un mismo sujeto o un mismo lector, la comprensión puede presentar diferencias considerables en exigencias o en logros. Todos sabemos que hay textos "fáciles de leer", otros que por el contrario con "difíciles" y otros más que no se dejan "leer" a pesar del interés que se pueda tener por el tema tratado. Igualmente, la comprensión de un mismo texto puede variar de un lector a otro. Los conocimientos prerrequisitos de un texto, son una de las restricciones fundamentales que debe tomar en consideración el profesor para determinar si puede ser propuesto a los alumnos de un tal nivel de escolaridad o para saber a partir de qué nivel de escolaridad puede proponerse el texto. Esta restricción no se impone sólo en las disciplinas científicas para los textos especializados, sino también en la enseñanza del francés para los textos llamados "generales" o "literarios".

Estas variaciones que afectan la comprensión del texto y que hacen que la lectura no sea una actividad homogénea, no tienen nada de accidentales o de aleatorias. Dependen de parámetros que pueden describirse con precisión. Llamaremos **situación de lectura** al conjunto de parámetros que juegan simultáneamente en la selección de un proceso de comprensión, en la exigencia de su efectuación y en sus logros. Teóricamente son dos los parámetros que fundamentalmente juegan en la situación de lectura. El primero, intrínsecamente ligado a la redacción del texto, tiene que ver con el grado y el modo de explicitación del contenido cognitivo en la organización redaccional. El segundo, ligado al lector, tiene que ver con la base de conocimientos de que él dispone en relación con el contenido cognitivo del texto. Estos dos parámetros determinan diferentes situaciones de lectura. Ahora bien, el punto interesante es que hay algunas situaciones que no permiten más que un proceso inductivo, otras que favorecen de manera cuasi-automática un proceso deductivo y otras que requieren de la interacción de los dos procesos. Tomar en consideración la situación de lectura es entonces esencial para evaluar los resultados de la comprensión de un texto o para estimar las competencias de un lector.

Los dos parámetros constitutivos de una situación de lectura

El primer parámetro tiene que ver con la variabilidad redaccional inherente a la producción no importa de qué texto. Hemos visto que la variabilidad redaccional se basa en la escogencia de elementos del contenido cognitivo que son explicitados, en su orden de presentación así como en la escogencia de las expresiones lingüísticas para designarlos. De esto resulta que la organización particular que constituye la redacción de un texto puede explicitar mas o menos el contenido cognitivo. El grado de explicitación y la importancia de los elementos que se han dejado implícitos, van pues a jugar en el fenómeno de comprensión. Así, el segundo enunciado del problema aditivo presentado antes (p. 335) da lugar a muchos menos errores de comprensión que el primer

enunciado, porque en el segundo un elemento de información importante está redaccionalmente explícito y no sólo redaccionalmente mencionado. Además, el lugar de explicitación de ese elemento de información en la organización redaccional del segundo enunciado corresponde al lugar de este elemento en el desarrollo de la situación descrita. Mejor dicho, en el segundo enunciado la organización redaccional corresponde a la organización del contenido cognitivo del texto. Diremos que en este caso hay congruencia entre la organización redaccional y la organización propia al contenido cognitivo. En el primer enunciado, por el contrario, no hay congruencia.

La congruencia y la no congruencia entre la organización redaccional y el contenido cognitivo son los principales valores del parámetro redaccional. Intuitivamente, congruencia y no congruencia caracterizan el grado de "claridad" de un texto. Para una clase de textos muy rudimentarios, como los enunciados de problemas aditivos, estos valores pueden determinarse con gran precisión (R. Damm, 1992, p. 51-53). Este análisis puede extenderse a todos los enunciados de problemas de matematización, como los problemas de conversión cantidad-proporción o los problemas de mezcla, que con frecuencia plantean dificultades de comprensión incluso en 10º grado (W. Damm, 1991). Igualmente, éste análisis puede aplicarse a textos más amplios y más complejos (Duval, 1991a, p. 173-178).

El segundo parámetro alude a la relación que existe entre la base de conocimientos del lector y el contenido cognitivo del texto que se lee. La base de conocimiento de que dispone el lector puede hacer que él tenga una comprensión del contenido cognitivo implícita o explícitamente movilizado por la redacción del texto, o puede que no le permita esta comprensión. La familiaridad con el contenido cognitivo del texto o, por el contrario, la novedad de ese contenido, son los dos valores principales de este parámetro de posición del lector. El pasaje de Julio Verne que explica por qué Philéas Fogg tenía un día menos de los que pensaba para darle la vuelta al mundo, es un texto que permite observar la importancia de este parámetro de posición del lector. Generalmente este parámetro se revela de manera más prominente para los textos especializados, o de carácter científico, que para todos los otros textos. Pero no es de desatender en estos otros textos, sean artículos de revista o textos literarios.

Evidentemente, estos dos parámetros son independientes entre sí, puesto que el primero concierne la relación entre el contenido cognitivo del texto y la organización redaccional mientras que el segundo concierne la relación entre ese contenido cognitivo y la base de conocimientos del lector. La combinación de sus valores principales permite distinguir y clasificar las diferentes situaciones de lectura en las cuales puede encontrarse un lector.

Clasificación de las situaciones de lectura

Limitándonos a los valores de congruencia y de no congruencia para el parámetro redaccional, y a los de familiaridad y de novedad para el parámetro de posición del lector, podemos definir cuatro situaciones - tipo de lectura.

Tabla 2
Las cuatro situaciones - tipo de lectura

TEXTO: correspondencia entre
la organización redaccional y el contenido cognitivo

	Congruencia	**No congruencia**

LECTOR: su base de conocimientos le hace el contenido del texto	**Familiar**	**I.** Situación trivial, *sin* riesgo de error	**II.** Situación trivial, *con* riesgo de error
	Nuevo	**III.** Situación normativa para un aprendizaje que exige tratamientos al margen del texto	**IV.** Situación que exige una búsqueda o un aprendizaje independientemente del texto

Ahora podemos ver cómo estas diferentes situaciones de lectura llevan a movilizar uno de los dos procesos de comprensión o su interacción. En las situaciones en que hay ya una comprensión del contenido cognitivo (situaciones I y II), es suficiente el proceso deductivo. En las situaciones en que, por el contrario, no hay esta comprensión del contenido cognitivo (situaciones III y IV), el proceso inductivo es el único posible: en estas situaciones, la recontextualización redaccional permite una primera adquisición del contenido cognitivo presentado por el texto. En las situaciones en que no hay congruencia entre la organización redaccional y el contenido cognitivo (situaciones II y IV), el proceso inductivo es necesario para controlar. En las situaciones en que, al contrario, hay congruencia (situaciones I y III), no es necesario un control del proceso deductivo por el proceso inductivo.

Los comportamientos de lectura no pueden ser los mismos en cada una de estas situaciones.

En la situación I, es suficiente un recorrido rápido y único del texto, sin volver atrás. *La comprensión del texto se produce simultáneamente con su recorrido visual.* Incluso, el lector puede lograrlo con un simple recorrido "en diagonal" del texto. En esta situación, no es obligatorio leer todo para comprender el texto y, de otro lado, no es necesario tener un cierto dominio sintáctico y semántico de la lengua. Esta situación es la que antes hemos llamado "práctica oral del texto". En esta situación, la comprensión del texto está sometida a las mismas condiciones que la comprensión de la palabra de otro durante una conversación, y el texto no debe presentar una organización que lo aleje mucho de la del discurso oral. En esta situación pues, la actitud del lector frente al texto es la misma que la del que escucha frente a lo que entiende. Esta actitud puede observarse fácilmente en alumnos de 6º y de 7º: para responder a las preguntas sobre un texto que acaban de leer y que tienen aún frente a sí, la mayoría de ellos no vuelven al texto, incluso cuando no saben responder, sino que prefieren preguntarle al profesor.

En la situación II, durante el recorrido visual la no congruencia puede provocar dudas, incomprensiones locales, necesidad de precisión. Por razones de control, esto puede exigir regresos en el texto. Pero la familiaridad con el contenido cognitivo puede conducir al lector a contentarse con la simple "práctica oral del texto" como en la situación I. De aquí, entonces, los riesgos de errores que resultan de omisiones, es decir, de una segmentación insuficiente del texto, o de interpretaciones erróneas, es decir, de recontextualizaciones no pertinentes de algunos elementos de información. La lectura del primer enunciado del problema aditivo por parte de alumnos de 6º, ya mencionado, es un bello ejemplo de esta situación II.

En la situación III, se está en la situación totalmente inversa a la I. En la ausencia de una base de conocimientos que tenga familiaridad con el contenido cognitivo del texto, el único proceso susceptible de ser movilizado es el inductivo. Se trata, en efecto, de llegar a una aprehensión de la organización redaccional del texto tal, que dé acceso al contenido cognitivo. En esta situación, el lector debe seguir atentamente el desarrollo del texto y eventualmente retroceder a ciertos pasajes. Por tanto, la comprensión del texto no puede obtenerse de manera simultánea con un recorrido

visual del único e ininterrumpido. La puesta en acto sólo del proceso inductivo de comprensión implica un cierto dominio sintáctico y semántico de la lengua para tener una oportunidad de acceder a la comprensión del texto (Duval *et al.*, 1987, p. 46-51, 63-64). Pero este dominio no es suficiente. Son necesarios tratamientos paralelos al margen del texto: consulta de otros textos, subrayados, recurrir a otros registros de representación como la transcripción de ciertos pasajes en un esquema... Estos tratamientos pueden permitir después el inicio del proceso deductivo de comprensión. Esta situación exige una ruptura con la actitud que la situación I tiende a desarrollar.

En la situación IV, en razón de la no congruencia entre la organización redaccional y el contenido cognitivo, la aprehensión de la primera no permite el acceso del segundo. No hay el deslizamiento imperceptible y espontáneo que se produce en las situaciones I y III, entre la comprensión de lo que el texto enuncia de una situación, de un fenómeno o de una pregunta, y la comprensión de la situación, del fenómeno o de la pregunta. Con frecuencia es necesario un trabajo que se dirija directamente al contenido cognitivo del texto y que se efectúe independientemente del texto a comprender, para que el texto llegue a ser "accesible", como en el caso del texto del Jules Verne ya evocado (Duval, 1991a, p. 181-185).

La distinción de estas diferentes situaciones de lectura es en extremo importante para todo lo que concierne a la evaluación de la comprensión de un texto. Para evaluar la comprensión de un texto en un lector, se puede recurrir a técnicas muy diferentes: pruebas de memoria, cuestionarios de comprensión, test, resúmenes, comentarios. Con frecuencia se privilegian las tres primeras porque se prestan mejor que las dos últimas a una manipulación de variables, a una identificación verificable de las respuestas aceptables y a una cuantificación de los datos recogidos. Naturalmente, estas diferentes técnicas no remiten al lector a las mismas tareas, no suministran el mismo tipo de datos y, en consecuencia, no pueden fundamentar conclusiones del mismo alcance en lo que concierne a la comprensión de un texto (Duval, 1986, p. 91-105; 1991a, p. 182-191; Duval *et al.*, 1987). No se evalúa lo mismo en un prueba de memoria que en un cuestionario de comprensión o en un test.

Estas importantes diferencias, que hasta el presente han sido poco estudiadas en cuanto a su efecto sobre lo que esefectivamente evaluado, no son las únicas a tener en cuenta. En efecto, cualquiera que sea la técnica optada, toda evaluación de comprensión se hace en una situación de lectura. Ahora bien, los procesos de comprensión movilizados en las diferentes situaciones no son los mismos y no tienen el mismo costo. *Esto quiere decir, por ejemplo, que con base en los datos recogidos en una situación de lectura corriente (situación I), no se puede inferir o diagnosticar nada en relación con las competencias del lector para la situación de lectura III.* Ahora bien, por razones de aprendizaje, las exigencias escolares de práctica de la lectura ponen a los alumnos indistintamente en las situaciones de lectura I, II, III y IV. Y, por razones de simplicidad en lo que concierne a la base de conocimientos, los modelos de comprensión se limitan, de hecho, a la situación I (Duval, 1986).

La evaluación de la comprensión de textos ocupa, bajo diversas formas, un lugar importante en los cursos escolares. Igualmente juega un papel importante en los procedimientos de validación de los modelos de comprensión. No tiene sentido entonces que se base en una débil interpretación de los datos recogidos. La determinación de la situación de lectura es uno de los componentes esenciales de todo dispositivo de interpretación, cualquiera que sea la técnica utilizada para evaluar la comprensión de un texto por parte de un lector.

REPRESENTACIONES NO DISCURSIVAS DE LOS TEXTOS Y "APRENDIZAJE" DE LAS OPERACIONES DE SEGMENTACIÓN Y DE RECONTEXTUALIZACIÓN

La posibilidad de un aprendizaje de la comprensión de textos es uno de los mayores problemas de la enseñanza. No sólo en los cursos de francés, sino también en las otras disciplinas en las que se requiere la capacidad de los alumnos para leer textos y para extraer información útil. Este problema se hace más agudo en tanto las situaciones de lectura en las que se encuentran los alumnos con más frecuencia no son la I, sino indistintamente las situaciones II, III e incluso IV. La variedad de los textos propuestos a los alumnos, en efecto, es considerable. De una parte, hay variedad de materias (francés, matemáticas, historia, geografía, economía...) y, de otra, en cada materia hay diversidad de géneros de texto y de estilos de redacción. El problema de un aprendizaje de la comprensión de textos es pues el de la posibilidad de comprender los textos en todas las situaciones de lectura y no sólo en la situación de práctica oral del texto.

Evidentemente, sería vano intentar un aprendizaje que sea específico a cada una de las situaciones de lectura, dado que éstas varían de un lector a otro, y de un texto a otro. Por el contrario, el aprendizaje debe basarse en lo que es común a todas estas situaciones, es decir, en las dos operaciones de segmentación y de recontextualización constitutivas de los procesos de comprensión. El problema de un aprendizaje de la comprensión de textos es en primer lugar el de aprender a segmentar un texto en unidades textuales de información y a recontextualizar las unidades segmentadas. Un tal aprendizaje sólo es posible a través de un cambio de registro de representación.

Necesidad de un cambio de registro

La necesidad de un cambio de registro para un aprendizaje de la comprensión de textos se impone por dos razones.

La primera se basa en la necesidad de salir del círculo vicioso didáctico que consiste en explicar el propósito, el sentido o la organización de un texto a través de un discurso, oral o escrito, que lo parafrasea, lo comenta o lo analiza. Dicho de otra manera, se explica el discurso de un texto con otro discurso. Esta relación de explicación que se establece directamente entre dos discursos postula dos cosas. De una parte, que si hay dificultades de comprensión con el discurso explicado, no las habría con el discurso que explica. De otra, la discurso que explica "comunicaría" los procedimientos o los conocimientos que servirían para comprender otros textos. Estos dos postulados son lo menos discutibles. Si se los admitiera, quedaría tapado el problema de la relación misma que vincula los dos discursos: *¿cómo, a partir del texto que se quiere comprender, se produce el discurso que lo explica y cómo se puede controlar la pertinencia o la exactitud del discurso explicativo?* Estas son las dos preguntas decisivas para un aprendizaje de la comprensión de textos. La pregunta sobre el control de la pertinencia o sobre la exactitud del discurso explicativo, se plantea cada vez que se tratan de justificar las respuestas a un cuestionario sobre el texto, o justificar la selección que se hace en un resumen. El resultado es que el discurso explicativo viene simplemente a reemplazar el texto a comprender, y que no favorece ninguna transferencia para la lectura y la comprensión de otros textos.

La segunda razón es que *la comprensión de un discurso* (relato, razonamiento, descripción, explicación...) *implica su aprehensión sinóptica*. Wittgenstein fue el primero en poner en evidencia esta condición a propósito de la demostraciones y de los cálculos: el recurso a notaciones relativas

sólo a los elementos primitivos de una construcción provoca, para los objetos construídos, una extensión de expresiones tal, que se hace imposible tener una "mirada de conjunto" del desarrollo de la demostración o del cálculo efectuados y, en consecuencia, se hace también imposible comprenderlos (!983, p. 137-149). Para la comprensión de textos, el obstáculo mas importante no es la extensión, sino la linealidad semiótica inherente a todo discurso y, en consecuencia, a todo texto: esta linealidad impone una aprehensión parcial y sucesiva de las unidades discriminadas (series de caracteres separados por blancos o unidades obtenidas por diferentes formas de segmentación). Ahora bien, la operación de recontextualización no puede efectuarse sin una aprehensión sinóptica de la organización, redaccional o cognitiva, en la cual las unidades obtenidas por segmentación deben encontrar su lugar. Es esta aprehensión sinóptica lo que permite que no se restrinja la aprehensión de cada unidad a su vecindad según el orden lineal de ocurrencia, sino que se puedan percibir las relaciones con otras unidades más distantes.

Por estas dos razones el pasaje del texto a comprender al discurso que lo explica o que lo analiza, no puede ser directo, es decir, no puede permanecer arraigado en el mismo registro de representación. Este pasaje exige el rodeo explícito por una representación no discursiva que sirva de representación intermediaria entre el texto a comprender y el discurso que lo explica. Es sólo a través del trabajo que exige tal rodeo que se puede lograr un aprendizaje de la comprensión de textos.

¿Cuáles representaciones no discursivas de textos?

Hemos visto que hay dos procesos de comprensión de textos. Las representaciones intermediarias no pueden ser las mismas para estos dos procesos. En efecto, en el proceso deductivo hay una organización propia al contenido cognitivo, independiente de la organización redaccional, que predetermina de alguna manera la segmentación y la recontextualización: estas dos operaciones se encuentran estrechamene asociadas. Por el contrario, el proceso inductivo no tiene una organización disponible antes de la lectura que predetermine las operaciones de segmentación y de recontextualización. La primera debe efectuarse sistemáticamente y la segunda, encaminada a explicitar la red de relaciones que existen entre todas las unidades del texto, no puede hacerse más que progresivamente. En la perspectiva de un aprendizaje de las operaciones de segmentación y de recontextualización, es pues muy importante distinguir las representaciones que estarán directamente *centradas en el contenido cognitivo* y las que estarán directamente *centradas en la organización redaccional.* Las primeras van a privilegiar la recontextualización cognitiva y las segundas la segmentación funcional. Estas representaciones no presentan las mismas propiedades y no favorecen los mismos tipos de tratamiento ni la misma actividad de conversión.

Las represenciones no discursivas centradas en el contenido cognitivo

Las representaciones centradas en el contenido cognitivo son las que representan las relaciones entre los objetos, los estados, las acciones, los conceptos... Las redes semánticas, los escritos, los escenarios desarrollados luego de los trabajos de Quillian y de Schank son representaciones de este tipo. Estas representaciones pueden promover registros semióticos diferentes: redes, esquemas, diagramas...

La característica de estas representaciones es que siempre son relativas a un contenido cognitivo determinado. Dicho de otra manera, sólo pueden ser utilizadas para textos que tienen el mismo contenido cognitivo o para aquellos cuyos contenidos cognitivos se solapan parcialmente. Esta

especificación de las representaciones limita, pues, su campo de utilización a los textos que tratan el mismo tema. Conduce a multiplicar las representaciones con los cambios del contenido cognitivo. Además, no puede haber ningún procedimiento común para construir estas representaciones. La elaboración y la escogencia de las estas representaciones depende cada vez del contenido cognitivo que se trata de representar.

Contrario a lo que se podría creer, esta especificación no constituye un handicap para el aprendizaje de la comprensión de textos. La lectura documental, o la de textos especializados, con frecuencia exige la movilización del procedimiento deductivo, es decir, una segmentación y una recontextualización cognitivas. Un caso particularmente interesante, e igualmente importante para el profesor, es el de los enunciados de problemas llamados de "matematización". Estos son redactados para hacer aplicar un tratamiento matemático determinado (operaciones de adición o de sustracción, conversión de una cantidad en una proporción, sistema de ecuaciones del primer grado...) a una situación extra-matemática del entorno económico, social o físico. La descripción que el enunciado da de la situación escogida debe suministrar todas las informaciones necesarias para plantear el tratamiento matemático a aplicar. Dicho de otra manera, algunas expresiones del enunciado deben poder ser convertidas en operaciones, semánticamente neutras, con base en números o en variables. *El contenido cognitivo de los enunciados de problemas de matematización está constituído por el tipo de tratamiento matemático a aplicar.* Sólo puede variar la escogencia de las informaciones necesarias para plantear el tratamiento y la manera de explicitarlas. Enunciados de problemas muy diferentes pueden entonces tener el mismo contenido cognitivo si su resolución depende de la aplicación del mismo tratamiento. Ahora bien, incluso cuando las técnicas puramente matemáticas han sido adquiridas, la comprensión de los enunciados puede seguir creando importantes dificultades. Así, basta con efectuar ciertas variaciones redaccionales en el enunciado, sin cambiar nada al tratamiento que da la solución, para que los logros suban o caigan espectacularmente. Representaciones no discursivas centradas en el contenido cognitivo de los enunciados, pueden entonces revelarse como un instrumento potente de aprendizaje por la comprensión del enunciado.

El ejemplo más elemental es el de la comprensión de enunciados de problemas aditivos. Numerosos estudios, luego del trabajo de G. Vergnaud (1976), han puesto en evidencia que pueden encontrarse dificultades más allá de la escuela primaria, hasta el 7º grado. Esto en gran parte depende de la congruencia o del grado de no congruencia para la conversión "texto→escritura de la ecuación numérica". Y como la congruencia y la no congruencia dependen de las variaciones redaccionales, es necesario entonces tener una representación que esté centrada en el contenido cognitivo del enunciado del problema y que permita seleccionar todas las informaciones pertinentes para escribir las operaciones a efectuar y para interpretar correctamente el resultado. Naturalmente, tal representación debe ser específica al contenido cognitivo y no debe comportar aspectos ilustrativos relativos a la situación extra-matemática evocada en el enunciado. Se intentó una experiencia de enseñanza en este sentido en los grados 4º y 5º (R. Damm, 1992), que se basó esencialmente en la apropiación de una representación elaborada para el contenido cognitivo de problemas aritméticos. Rápidamente se obtuvo un aumento considerable de éxitos, en comparación con los logros registrados antes de la experiencia y con los resultados registrados en otros estudios sobre los mismos problemas. Este aumento se constató con categorías de problemas considerados como los más difíciles. La importancia de la adquisición hecha fue confirmada un año más tarde. Además, la misma experiencia replicada en una clase en Brasil, permitió observar un aumento análogo. El aporte de una experiencia tal sobrepasa, naturalmente, el dominio particular de los problemas aditivos. *La experiencia mostró la posibilidad de un aprendizaje del proceso deductivo de comprensión de textos.*

En la actualidad hay investigaciones en curso para obtener resultados análogos con otro tipo de problemas, como problemas de conversión cantidad-proporción, problemas de mezcla (W. Damm, 1991), planteamiento de ecuaciones (Cordier, 1992), Evidentemente, el punto importante en estas investigaciones es la determinación de la representación intermediaria: independientemente de todo texto particular, esta representación debe poder aplicarse a todos los textos que tengan como invariante el contenido cognitivo representado. Estas representaciones intermediarias luego podrán extenderse a textos más largos y más complejos, para los cuales la tarea principal no es una tarea de conversión. En este caso es necesario recurrir a una representación de la organización propia al contenido cognitivo.

Representaciones centradas en la organización redaccional

Las representaciones centradas en la organización redaccional son las que representan las relaciones entre las unidades del texto, conservando sus relaciones de vecindad o de distancia según el orden lineal de ocurrencia de estas unidades en el texto. *Una representación centrada en la organización redaccional implica, de hecho, la superposición de dos representaciones:* **una que hace aparecer la segmentación del texto en unidades,** pero que conserva el lugar de estas unidades en el texto, y **la otra que muestra las relaciones entre estas unidades, independientemente de su lugar en el texto.** Las representaciones centradas en la organización redaccional han sido muy poco exploradas hasta el presente. Es quizá en los trabajos de J.B Grize donde se encuentra la primera puesta en acto de representaciones de este tipo (Grize, 1983, p. 144; Grize et Piérault-Le-Bonniec, 1983, p. 154, 188). Generalmente las investigaciones sobre la comprensión de textos provilegian las representaciones centradas en el contenido cognitivo. Sin embargo, las representaciones centradas en la organización redaccional presentan una propiedad interesante en relación con las representaciones centradas en el contenido cognitivo: pueden ser construidas a través de un procedimiento común para todos los textos, independientemente de su contenido cognitivo. Permiten pues un aprendizaje del proceso inductivo de comprensión que se puede aplicar no importa a qué texto, no importa sobre cuál tema.

Pueden haber diferentes tipos de representaciones centradas en la organización redaccional. Esto depende esencialmente de la forma de segmentación adoptada, funcional o proposicional. Además, para la segmentación proposicional, hay dos criterios posibles para determinar las proposiciones: predicativo o remático. No se discriminan las mismas unidades según el criterio seguido. Pero, cualquiera que sea la forma de segmentación escogida, es importante que las unidades segmentadas estén organizadas tabularmente (Grimes, 1975, p. 82-91). Para efectuar esta disposición tabular, hemos adoptado las siguientes tres reglas que ilustraremos en la última parte de este capítulo:

- una línea por frase.
- una columna por unidad,
- las unidades del mismo tipo y que no pertenecen a la misma frase deben encontrarse en la misma columna.

Estando el texto organizado así tabularmente, es posible construir la red de relaciones entre las diferentes unidades, utilizando las relaciones semánticas y los conectores. Para construir esta red, hemos adoptado la siguiente regla: a priori se supone que el texto es coherente y redaccionalmente suficiente; cada línea debe estar unida a por lo menos otra línea del texto, por medio de al menos uno de los elementos.

Hasta tanto no se cumpla esta condición, debe perseguirse la búsqueda de las relaciones entre las unidades de las diferentes líneas (Duval, 1986, p. 79-88; 1990, p. 162-164). La construcción de esta red corresponde a la operación de recontextualización redaccional.

Una representación no discursiva de la organización redaccional conjuga pues la construcción de una red sobre una segmentación tabular del texto. Tal representación constituye un verdadero instrumento de trabajo sobre un texto. La utilización de este instrumento comporta reglas y la producción de la representación siempre puede controlarse independientemente de la comprensión intuitiva y subjetiva que se puede tener del texto. Además, una representación tal permite una aproximación más comunicable y más controlable de todas las tareas didácticas relativas a la comprensión de un texto: producir y evaluar resúmenes, determinar el campo de las cuestiones de comprensión posibles en un texto, proporcionar criterios para determinar las respuestas aceptables (Duval, 1986, p. 95--103).

REPRESENTACIONES DE LA ORGANIZACIÓN REDACCIONAL DE UN TEXTO

Hemos escogido dos textos para mostrar cómo se construyen las representaciones centradas en la organización redaccional y cómo éstas permiten analizar y explicar un texto.

El primero es el texto que J.B. Grize utilizó para elaborar una de las primeras representaciones de la organización redaccional (Grize, 1983, p. 137-145). Lo que nosotros vamos a proponer es ligeramente diferente ya que, de un lado, no realizamos la misma forma de segmentación y, del otro, no limitamos la construcción de la red de relaciones únicamente a las conexiones argumentativas y temporales explícitamente marcadas en el texto. El segundo es un texto propuesto por un profesor de francés en el marco de un grupo de trabajo que reúne a profesores de francés y de matemáticas.

La elaboración y la utilización de la representación redaccional se presentará en dos fases para cada uno de los textos:

- segmentación por disposición tabular del texto
- recontextualización por construcción de la red de relación.

La observación y la descripción de la representación así obtenida, permite explicar el recorrido del texto, producir y evaluar resúmenes del texto, controlar o justificar la exactitud de las respuestas a preguntas de comprensión (Duval, 1986, p. 95-98). Sin embargo, introduciremos una variante para el segundo texto. Codificaremos la forma lingüística de las unidades textuales de información con una expresión simbólica, de manera que, en un segundo tiempo, sólo se tengan las expresiones simbólicas. Recordemos que J.B. Grize efectúa de entrada esta sustitución de las expresiones lingüísticas por expresiones simbólicas. Pero por razones psicológicas de memorización y por razones didácticas relativas a la necesidad de favorecer la articulación de los diferentes registros movilizados, parece fundamental que se conserven las expresiones lingüísticas del texto.

Primer texto: representación no codificada de la organización redaccional

> Los manuales representan el Terror como el intrumento necesario para la defensa nacional, sin embargo, felicitan a los dantonianos por haber querido suprimir las leyes de excepción. Aquellos habrían caído, al parecer, víctimas de su generosidad y de su clemencia. Pero si el terror, que jugó en esa crisis el mismo papel que nuestro estado de sitio, fue indispensable para la victoria, ¿cómo alabar sin contradicción a los que sólo quisieron liberar a Francia? Los manuales se salen del apuro a través de una *distinción* cronológica. Explican que Danton y sus amigos solicitaron que aflojara el terror sólo cuando resultó inútil, luego de las victorias sobre el enemigo reportadas desde el interior y el exterior. Esta explicación no resiste el examen. Basta con un buen calendario para darse cuenta de ello.
>
> La Verdad es que los dantonianos combatieron el Terror incluso antes de que estuviera definitivamente organizada;...
>
> A. Matthiez *Autour de Danton*, Grize, 1983, p. 137.

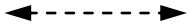
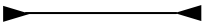
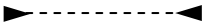
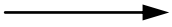
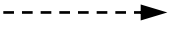
Para segmentar este texto, se lo dispone tabularmente según las dos reglas indicadas antes: una línea por frase y dos columnas por proposición gramatical. Las proposiciones se ponen bajo la forma argumento-"superpredicado". Prácticamente, esto quiere decir que el verbo "ser" se omite y que los verbos distintos a los que expresan una actitud proposicional se ponen en infinitvo. Se reserva una primera columna para todos los conectores que unen dos frases entre sí. Para este texto, hemos seguido la paráfrasis de Grize que escinde la primera frase en dos frases coordinadas: "los manuales representan... y, sin embargo, felicitan..." (Grize, 1983, p. 138). Obtenemos así la siguiente primera representación (figura 1).

La representación del texto citado lleva pues a disponerlo en cinco columnas: la primera para los conectores argumentativos que unen dos frases, las dos siguientes para las proposiciones principales o independientes y las dos últimas para las proposiciones que completan. Esta disposición tabular lleva pues a distinguir tantas unidades como casos cumplidos que la tabla comporte. Sin embargo, hemos separado los super-predicados que tienen dos conectores temporales (en mayúscula). Para otros textos, pueden ser necesarias siete o nueve columnas.

Ahora es posible materializar las diferentes relaciones que existen entre las unidades así distinguidas. Aquí nos limitaremos a las relaciones más generales. Es esencial distinguir las

relaciones que pueden establecerse entre la base de conocimiento de la lengua únicamente y las que deben inferirse bajo el postulado de conectividad textual. Se observará que según este principio, las relaciones son propias al texto. Así, las relaciones de equivalencia entre los super-predicados "querer la supresión de las leyes de excepción", "solicitar el aflojamiento del terror", 'combatir el terror", "querer liberar a Francia", son internas a la organización redaccional del texto. Aparecen en este texto como cuatro expresiones que designan la actitud y el empeño de los dantonianos.

Tabla 3
Relaciones utilizadas para representar la organización redaccional

Relaciones entre las unidades	establecidas con base en la lengua: sintaxis y léxico	Inferidas para justificar la coherencia y la cohesión redaccionales (postulado de conectividad textual)
Equivalencia referencial, sinonimia		
Oposición		
Remisión o dependencia		

Mirando esta representación de la organización redaccional del texto, es relativamente fácil ver el funcionamiento de la argumentación desarrollada por el autor.

Evidentemente, tiene dos partes: por una parte, la presentación de la tesis de los manuales y el argumento que la justifica y, por la otra, la refutación de esta tesis. Por el contrario, es menos evidente darse cuenta con precisión del contenido de estas dos partes. Lo interesante de esta representación de la organización redaccional es:

En efecto, se puede ver que la tesis de los manuales está dada en **1'** y repetida en **4"**: el terror es necesario para la defensa nacional. *El argumento de los manuales a favor de esta tesis está dado en dos proposiciones separadas que se deben reagrupar en* **1'** y **6'** (flecha ↔ para los argumentos y misma flecha punteada para las super-predicados): "incluso los dantonianos que estaban contra el terrror (**2'**) sólo lo combatieron después de la victoria sobre el enemigo (**6'**)"

Se puede ver la refutación de la tesis de los manuales que hace Matthiez; ésta procede en tres tiempos:

- En primer lugar hay una *reorganización del discurso de los manuales*, de una parte, por la introducción de una contradicción entre **1'** y **2'** (operación realizada en **4**: como... **4' = 2'** si **4" = 1'**) y, de otra parte, por la presentación de **6'** como un medio para escapar de esta contradicción (operación realizada en **5** y en **6**),
- Luego hay una refutación de **6'**, es decir, del medio utilizado por los manuales para escapar a la contradicción, oponiéndole **9'** (**8** es la justificación de **9': 8** ↔ "la verdad es que..."),
- Y por último, *las consecuencias no desarrolladas* de esta reorganización de la tesis y de la refutación de **6'**. Dado que no puede escapar a la contradicción y que **2'** está reforzada por **9'** y **1',** *quiere decir que la tesis de los manueales no* ***puede ser más que falsa.***

Esta representación redaccional igualmente permite observar algunas características que se encuentran en la mayoría de las argumentaciones.

- El enunciado-objetivo de la argumentación ("**1'** es falso") está implícito
- Hay la confrontación explícita de dos puntos de vista opuestos (el de los manuales y el del presentador de su tesis),
- *La explicitación de los valores epistémicos sólo se hace para las proposiciones que provienen del punto de vista de los manuales* (**2, 3, 4**), es decir, para el punto de vista discutido y refutado por el que argumenta; la única explicitación de un valor epistémico relativo a una proposición propia del autor está hecha en términos de valor lógico de verdad (**9**),
- El razonamiento procede introduciendo una contradicción interna en el punto de vista de los manuales (**4**), luego una oposición entre la explicación de los manuales (**6-6'**) y la verdad cronológica (**9-9'**)
- Hay *continuidad temática y referencial* entre todas las frases ("contra el terror", "dantonianos", "manuales") y esta continuidad se ve *columna por columna*
- Se retoma la misma proposición en **2', 4', 6' y 9'a**, la cual también es considerada en contextos diferentes.

Segundo texto: representación codificada de la organización redaccional

La conquista del espacio

> Tres hombres, luego de tres días, dan vueltas alrededor de la luna; no quiero saber si son americanos o rusos: son hombres. ¿Quién no sentiría, de buenas a primeras, un sentimiento de entusiasmo soñando con la maravillosa proeza que está por cumplirse y que magnifica aún más la idea que se ha tenido del "mono desnudo"que es el "homo sapiens"? ¿Quién no admiraría el coraje, la resolución, la intrepidez de estos violadores de un azul virgen, de estos viajeros sin precedentes? ¿Y cómo, a través de ellos, no se quisiera hacer homenaje a los sabios, a los ingenieros, a los técnicos, quienes, por el rigor de sus cálculos, por el cuidado y la ingeniosidad de sus preparativos, por la cualidad de los instrumentos que ellos han creado, hicieron posible la increible aventura?

Pero, con el riesgo de escandalizar a algunos, no ocultaré que, por mi parte, me siento obligado a poner una sordina a mi aplauso. Pues es oportuno preguntarse si verdaderamente a propósito de las más preciosas cualidades morales e intelectuales del hombre se han llevado a cabo tales hazañas... Considero que el fabuloso, el maravilloso esfuerzo prodigado para llevar a cabo el viaje alrededor de la luna es desmesurado en relación con las consecuencias que se pueden lograr sea en el plano especulativo o en el de la aplicación práctica. Considero que hay sobre nuestra tierra una infinidad de cosas por hacer que merecerían tener prioridad sobre lo que orgullosamente se llama la exploración del cosmos.

> En tanto permanezcamos desarmados contra el cáncer, en tanto que las enfermedades que podrían ser vencidas aún estar por vencer, en tanto que la mayoría de terrestres padezcan miseria, hambre y sigan en la ignorancia, en tanto que no hayamos resuelto el problema de la superpoblación y del subdesarrollo, en tanto que los ancianos y los inválidos, de todas partes, carezcan de lo necesario, en tanto que nuestro pequeño globo no sea habitable para todos, en tanto que reinen la injusticia social, la violencia, el racismo, el fanatismo en un mundo mezquinamente dividido en patrias, en tanto no haya sido instituído un gobierno mundial que prevenga los riesgos de guerra y nos de garantía contra el genocidio atómico, yo pensaré que

dar vueltas alrededor de la luna es un lujo que podría esperar y que es, para hablar como Chamfort, tener los encajes antes de tener las camisas.
Jean Rostand *Discurso* del 24 de diciembre de 1968.

Las dos figuras que siguen (figuras 3 y 4) dan la representación de una segmentación tabular del texto, y de la organización redaccional. Para codificar las unidades distinguidas, adoptaremos las siguientes convenciones:

- Los super-predicados están escritos con letras mayúsculas y los argumentos con letras minúsculas. Un predicado puede tener uno o varios argumentos.
- Se retoman las mismas letras si se trata de los mismos super-predicados o de los mismos argumentos, *pero tienen un índice diferente si las expresiones lingüísticas que ellas codifican son diferentes.* Esta convención permite notar las expresiones contextualmente equivalentes.
- La cuantificación, la negación y las enumeraciones están marcadas por símbolos específicos: $\exists$, $\forall$, $\neg$, $\sum$.
- i es una variable de individuo y j una constante. La variable está acompañada de un símbolo de cuantificación.

La expresión lingüística de cada unidad textual distinguida está duplicada con una expresión simbólica. Hemos añadido algunas relaciones propias a las unidades de la línea 5, para justificar la excogencia de las expresiones simbólicas.

De inmediato se ve el beneficio de introducir una notación simbólica: permite una reducción de todas las expresiones sinónimas o contextualmente equivalentes. Esta reducción se obtiene suprimiendo todos los índices. Así, las frases 2, 3, y 4 se encuentran reducidas a un solo enunciado. Entonces se puede seguir fácilmente todo el recorrido argumentativo que consiste en un deslizamiento progresivo del enunciado **2 3 4** a la afirmación **9**.

Para efectuar este deslizamiento el autor efectúa implícitamente tres operaciones discursivas:

- transforma el enuncias **234** en un enunciado equivalente (sustitución del "$\forall$i Ai" no implícita en el texto en "no $\exists$i Ai"), lo que permite iniciar una primera restricción en **5** ("L no Aj" opuesta a "$\forall$i Ai").
- Considera que la admiración, el entusiasmo suscitado por la hazaña y el homenaje rendido a los autores de la hazaña (predicado **A** en **234** y **5**) implican el valor de la hazaña como objetivo (predicado **V** en **6, 78,9**).
- El hecho enunciado en **1** estando **Eh** y el contenido de la admiración enunciada en **234** estando **qhE**, el autor tiene cuidado de hacerles restricciones, en **6** y **78**, sobre **qE** y sobre a **hE**. Mejor dicho, no manifiesta ninguna reserva sobre los autores de la hazaña, sino sólo sobre el valor y la importancia que se les da.

Este deslizamiento permite pasar progresivamente y sin tropiezos del enunciado **234** a su negación en **9.**

Papel de las representaciones no discursivas en el aprendizaje y en el análisis de la comprensión de textos

Aún no disponemos de experiencias de aprendizaje que se basen en la utilización sistemática de estas representaciones. En efecto, las representaciones centradas en la organización redaccional de un texto, son mucho más delicadas de introducir que las representaciones centradas en el contenido cognitivo o que las que están destinadas a tomar conciencia de la organización deductiva de un discurso. La razón no es, como podría creerse, su complejidad; ésta no es más que aparente, pues su construcción depende de pocas reglas. Por el contrario, se basa en que su utilización está intrínsecamente ligada a una conversión activa del texto hacia la representación no discursiva, y no de la representación no discursiva hacia el texto, como es el caso en los grafos proposicionales (cf. P. 312-315) o en la utilización de representaciones del contenido cognitivo. Este tipo de conversión es en realidad la más difícil de todas (cf. P. 85). Además está el hecho de que toda actividad que conmina a un registro no discursivo, aún es percibido por la gran mayoría de los profesores de francés como una actividad extraña a la práctica de su disciplina. Así, tanto desde un punto de vista cognitivo como desde un punto de vista didáctico, para la comprensión de textos es necesario tomar en consideración la variedad de los registros de representación y su coordinación, en la medida en que los textos, y no sólo los textos científicos, resultan de una interacción entre dos niveles de organización. En efecto, un aprendizaje centrado en el proceso inductivo de comprensión es necesario no sólo para las situaciones de lectura III y IV, sino también para la situación I, la de lectura corriente. Basta con observar las dificultades de muchos alumnos, en situación I, para segmentar un texto, para resumirlo o incluso para responder a preguntas no triviales de comprensión.

Pero el papel de las representaciones no discursivas no debe observarse únicamente en relación con la organización de las situaciones de aprendizaje. Igualmente son ineludibles para la evaluación, se haga en el marco escolar o en el de una experimentación científica. En estos dos marcos, se toma un medio de control objetivo de las decisiones de sentido o de interpretación, para evaluar la comprensión que un lector puede tener de un texto. Tales evaluaciones siempre se hacen con base en pruebas de resumen, en respuestas a preguntas, en síntesis del texto, e incluso con base en la memoria... Ahora bien, una representación no discursiva justamente permite generar resúmenes, justificar o rechazar una respuesta a una pregunta, estimar la centralidad o la marginalidad de lo que se recuerda (Duval, 1986, p. 83-88, 95-98). Y como la elaboración de la representación obedece a reglas precisas, el procedimiento de decisión sobre el sentido o la interpretación, es completamente explícito. Se puede discutir la escogencia de las reglas para elaborar una representación no discursiva. Esta discusión, de hecho, se basará en lo que es un texto y en los procesos de su comprensión más que en las maneras de interpretar tal o tal texto en su singularidad. Pero una vez se admiten las reglas de representación, las representaciones producidas a partir de esas reglas no son ya objeto de discusión: sirven de medio de objetivación de la comprensión que tiene un sujeto sobre un texto, así como medio de control para las decisiones de evaluación que él puede tomar.