Guía Para el Control 3

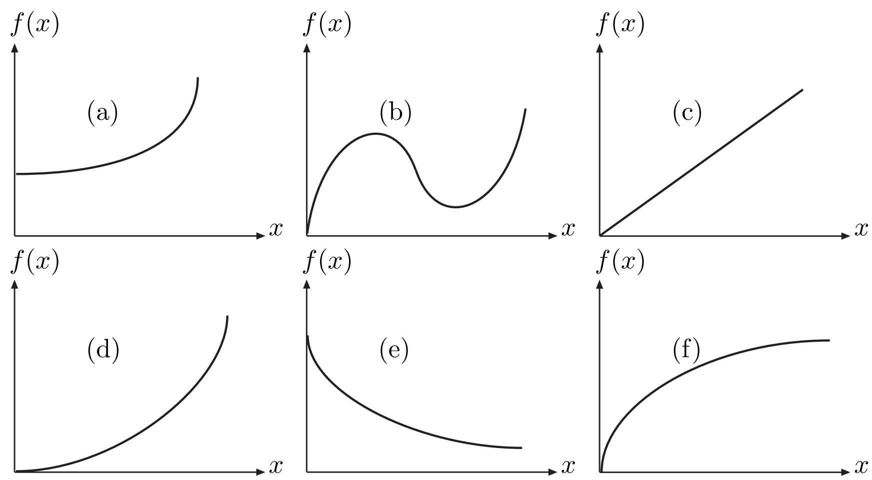
AYUDANTES: Adolfo Fuentes, Alejandra Jáuregui, Rodrigo Garay, María José Pérez y Mauricio Vargas

9 de octubre de 2011

1. Preguntas con Respuesta

Tecnología y funciones de producción

1. De los siguientes gráficos todos corresponden a funciones de producción excepto (e). Comente.



Respuesta
Recordar las tres propiedades de las funciones de producción:

- "De la nada, nada sale", es decir que $f(0) = 0$. Si no existe ningún input es imposible producir algo. Por lo tanto se descarta (a) y (e).
- Las funciones de producción son crecientes en el uso de cada uno de los factores. Esto es, siempre $PMg \geq 0$. Por más que aumentemos la cantidad de input la producción total siempre debe aumentar en una cantidad mayor o igual a 0, jamás disminuir. Por lo tanto se descarta que (b) sea una función de producción pues posee un tramo decreciente.
- La función de producción es cóncava, sin embargo esto es un supuesto para justificar que los retornos sean decrecientes . No obstante esta característica es sólo para poder encontrar un óptimo a través de la minimización de costos, pueden existir funciones como (d) que presenten retornos crecientes a escala.

En resumen sólo (c), (d) y (f) corresponden a funciones de producción, no obstante también se puede descartar (d) si nos restringimos a funciones de producción con retornos decrecientes.

2. Suponga que dos firmas distintas tienen funciones de producción $f_1(x_1, x_2)$ y $f_2(x_1, x_2)$ respectivamente. Si para todo (x_1, x_2) se tiene que

$$f_1(x_1, x_2) \leq f_2(x_1, x_2)$$

entonces la firma 2 es más eficiente que la firma 1.

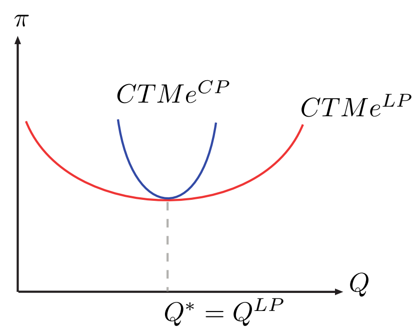
Respuesta
Falso. Se pueden producir dos productos distintos en, por ejemplo, calidad. Podemos estar hablando de firmas completamente diferentes.

3. El Chef de Avenida Portugal produce 6 litros de mote con huesillos con 2 unidades de mote y 4 de huesillos o 4 unidades de mote y 2 de huesillos. Entonces con 3 unidades de mote y 3 de huesillos puede producir 8 litros de mote con huesillos.

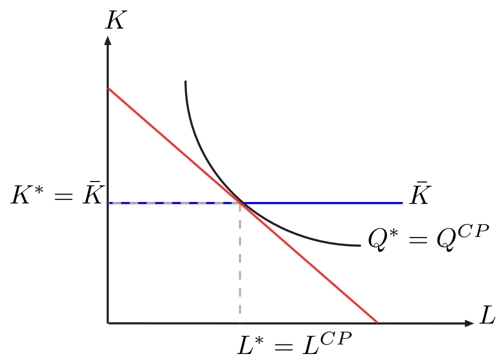
Respuesta
Incierto. Sabemos que se produce más, pero no necesariamente 8 litros.

4. Si nos encontramos en el corto plazo, la cantidad utilizada del factor fijo será la óptima desde la perspectiva del largo plazo, si y sólo la empresa tiene rendimientos constante a la escala.

Respuesta
Cuando existen rendimientos constantes a la escala, ocurre que la cantidad óptima de largo plazo es igual a la cantidad óptima de corto plazo, es decir



Entonces, dado que $Q^* = Q^{CP}$, tiene que ocurrir que el capital (fijo) de corto plazo debe ser igual al capital de largo plazo, así se cumple que la cantidad óptima de largo plazo es igual a la cantidad óptima de corto plazo.



5. En un proceso productivo, es posible tener un producto marginal decreciente en un factor y, aun así, rendimientos crecientes de escala.

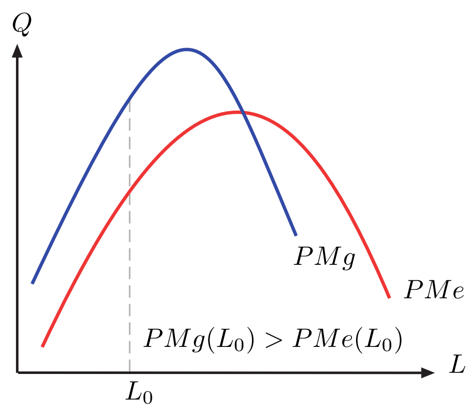
Respuesta
Verdadero, puesto que se trata de distintos análisis. Recordar que productividad marginal considera todo los demás factores constantes, mientras que en los rendimientos a escala todos varían.

Un ejemplo de esto sería:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x^{1/2}y^{3/2} \\
f(\lambda x,\lambda y) &= \lambda^2 x^{1/2}y^{3/2} \;\rightarrow\; \text{Rendimientos crecientes a escala} \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{3/2} \\
\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4}x^{-3/2}y^{3/2} \leq 0 \;\rightarrow\; \text{Productividad Marginal Decreciente}
\end{aligned}$$

6. Si se sabe que el producto marginal del trabajo es mayor que el producto medio, dado un nivel de empleo. Entonces, el producto medio debe ser creciente. Comente.

Respuesta
La condición se describe como $PMg(L_0) > PMe(L_0)$. Si el producto marginal es mayor que el producto medio del trabajo, entonces la incorporación de un trabajador más a las faenas, hace que en promedio todos produzcan más, por lo tanto, el producto medio del trabajo debe ser creciente en este nivel de trabajo.

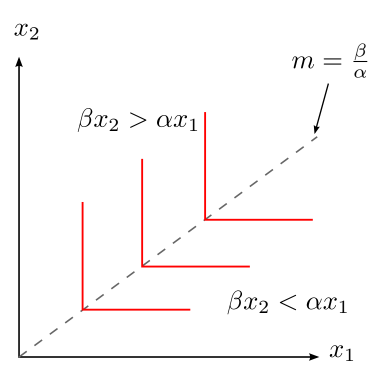


7. La tecnología Leontief (o de proporciones fijas) no tiene utilidad marginal.

Respuesta
Falso. La función Leontief corresponde a lo siguiente

$$U(x_1,x_2) = \text{mín}\{\alpha x_1, \beta x_2\} = \begin{cases} \alpha x_1 & \text{si} \;\; \alpha x_1 \leq \beta x_2 \\ \beta x_2 & \text{si} \;\; \alpha x_1 > \beta x_2 \end{cases}$$

Su gráfico corresponde a lo siguiente



Esta función no es diferenciable en todas partes y sus derivadas parciales no son continuas. Veamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad x_1 \leq x_2 \\ 0 & \text{si} \quad x_1 > x_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = \begin{cases} \beta & \text{si} \quad x_2 \leq x_1 \\ 0 & \text{si} \quad x_2 > x_1 \end{cases}$$

Entonces cuando aumenta la intensidad de uso de un factor que de antemano se utiliza en cantidades mayores que la del otro factor se concluye que la productividad marginal es cero. En el otro caso la productividad marginal es igual a α o β dependiendo de la combinación de factores.

Cuando tenga sentido, cuando cambia la intensidad de uso de un factor, digamos del factor x_1, la producción no necesariamente aumenta (cuando este cambio no alcanza para aumentar el nivel de producción), y en tal caso

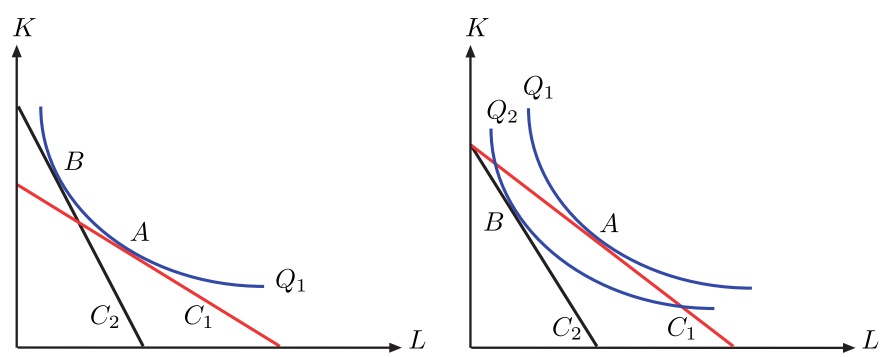
$$Pmg(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = 0$$

Para el caso del factor x_2 es análogo. En general, por este hecho la $TMST_{x_2,x_1}$ es infinita (luego no está bien definida para cualquier valor de (x_1, x_2)).

8. Si aumenta el precio del factor trabajo, las empresas representativas sustituirán hasta que para la última unidad del factor las productividades relativas sean similares al precio relativo del factor. Comente.

Respuesta

Bajo el supuesto de que el nivel de producción es constante (Q) y que los factores productivos son flexibles, entonces la firma para conservar su condición de la función de costo, sustituirá hasta que se cumpla la condición de equilibrio $TMST = \frac{w}{r}$, en la cual se minimiza el costo de largo plazo. En consecuencia si cambia el precio de los factores (aumento) se pasa del costo C_1 al costo C_2 ya que se debe cumpir la condición de equilibrio del páarrafo anterior, de esta manera se sustituye pasando del punto A al punto B, tal y como se observa en el gráfico de la derecha de la figura.



Sin embargo, si suponemos que el nivel de producción se puede ajusta hasta el punto de mantener el mismo nivel costo mínimo, exitirá efecto sustitución y efecto escala, por lo que la firma pasará del punto D al E del gráfico de la izquierda de la figura.

Costos y Oferta de la Firma

1. Cuando aumenta el precio de venta de un producto aumenta entonces la demanda de todos los factores de la firma también aumenta.

   Respuesta
   Incierto. Si aumenta el precio, aumenta la oferta y por lo tanto aumenta el uso de factores pero no necesariamente de todos los factores productivos. Se podría argumentar que la $TMST$ debería ser cero y por lo tanto el producto marginal de ese factor sería cero, lo cual no es posible. Sin embargo la condición $TMST_{x_1,x_2} = \frac{w}{r}$ provee una condición necesaria y no suficiente para la optimalidad técnica, dependiendo de la tecnología se puede aplicar esta condición.

   Por ejemplo, con una tecnología lineal no es posible aplicar $TMST_{x_1,x_2} = \frac{w}{r}$ para encontrar el óptimo. En el caso de solución única y según la relación de precios tendremos que las soluciones posibles son de esquina, ante lo cual se utiliza solamente un factor y si aumenta el precio de venta, siendo todo lo demás constante, solo aumenta la demanda de dicho factor.

2. Aperezco D-C Ltda. lanza un nuevo producto al mercado, las frutillas amarillas. Como buen administrador no se preocupa de minimizar costos ya que cree que las frutillas amarillas le entregan tanto valor al consumidor que la maximización de beneficio es lo que prima en este caso.

   Respuesta
   Las firmas competitivas deben preocuparse de la minimización de costos. En el caso de firmas competitivas minimizar costos es equivalente a maximizar beneficios ya que la firma competitiva no tiene poder sobre los precios y su objetivo persigue las utilidades económicas (beneficio monetario). En general todas las firmas, tengan o no fines de lucro, deberían velar por la minimización de costos ya que no es lo mismo desde un punto de vista técnico realizar la misma actividad con más o menos recursos o utilizando los recursos de manera eficiente. A modo de ejemplo el Hogar de Cristo, los Bomberos o un Techo Para Chile no se interesan en la maximización de beneficios como un objetivo de la organización pero si les conviene minimizar sus costos.

3. Un cambio similar en todos los precios de los insumos, traerá como resultado el desplazamiento de las curvas de costo de corto y largo plazo de una empresa individual.

   Respuesta
   Si ocurriera un desplazamiento de las curvas de costo, pero estas tendrán un comportamiento diferente en el corto y en el largo plazo. En el corto plazo, como uno de los factores es fijo, la curva de costo total, se desplaza pero también cambia de pendiente, lo mismo ocurre con las curvas de costo total medio y costo marginal.

   En el largo plazo, dado que ambos factores son fijos ocurre que la curva de costo total se desplaza con cambio de pendiente, pero la curva de costo medios y de costo marginal se desplazan paralelamente, esto ocurre porque en el largo plazo la cantidad óptima de uso de cada factor sera la misma (si los dos factores aumentan en la misma proporción).

   Veamos un ejemplo: Imaginemos que estamos en el largo plazo, y sea:

   $$Q = L^{\alpha} K^{\beta} \ , \ \alpha + \beta = 1$$

   Luego, la condición de óptimo es

   $$\frac{PMg(x_1)}{PMg(x_2)} = \frac{w}{r}$$

Entonces

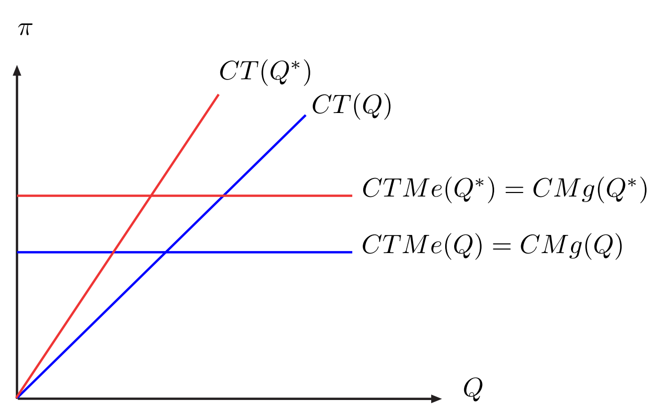
$$\begin{aligned}
\frac{w}{r} &= \frac{\alpha}{\beta}\frac{K}{L} \\
L^c &= Q\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{w}\right)^{\beta} \\
K^c &= Q\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{w}{r}\right)^{\alpha} \\
CT(Q) &= w^{\alpha}r^{\beta}q\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right) \\
CTMe(Q) &= w^{\alpha}r^{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right) \\
CMg(Q) &= w^{\alpha}r^{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Supongamos que el precio de los factores aumenta a w' y r' donde $w' = \varepsilon w$ y $r' = \varepsilon r$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{w'}{r'} = \frac{w}{r} &= \frac{\alpha}{\beta}\frac{K}{L} \\
(L^c)' = L^c &= Q\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{w}\right)^{\beta} \\
(K^c)' = K^c &= Q\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{w}{r}\right)^{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CT(Q)' &= \varepsilon w^{\alpha}r^{\beta}q\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right) = \varepsilon CT(Q) \\
CTMe(Q)' &= \varepsilon w^{\alpha}r^{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right) = \varepsilon CTMe(Q) \\
CMg(Q)' &= \varepsilon w^{\alpha}r^{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right) = \varepsilon CMg(Q)
\end{aligned}$$

Gráficamente:



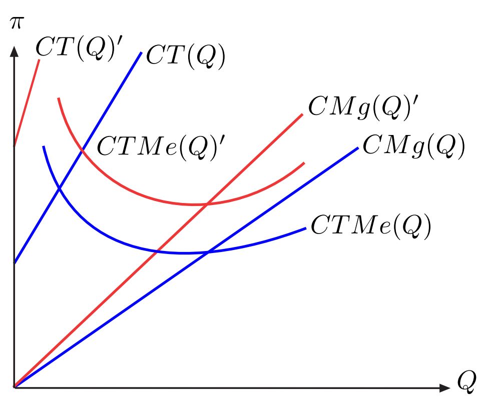
Si consideramos lo mismo pero para el corto plazo tendremos

$$\begin{aligned}
Q &= L^{\alpha}\overline{K}^{\beta} \\
L^{c} &= \frac{q}{\overline{K}^{\beta}} \\
CT(Q) &= wq^{1/\alpha}\left(\frac{1}{\overline{K}}\right)^{\beta/\alpha} + r\overline{K} \\
CTMe(Q) &= wq^{(1/\alpha)-1}\left(\frac{1}{\overline{K}}\right)^{\beta/\alpha} + \frac{r\overline{K}}{Q} \\
CMg(Q) &= \frac{1}{\alpha}wq^{(1/\alpha)-1}\left(\frac{1}{\overline{K}}\right)^{\beta/\alpha}
\end{aligned}$$

Supongamos que el precio de los factores aumenta a w' y r' donde $w' = \varepsilon w$ y $r' = \varepsilon r$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
(L^{c})' = L^{c} &= \frac{q}{\overline{K}^{\beta}} \\
CT(Q)' &= \varepsilon wq^{1/\alpha}\left(\frac{1}{\overline{K}}\right)^{\beta/\alpha} + \varepsilon r\overline{K} = \varepsilon CT(Q) \\
CTMe(Q)' &= \varepsilon wq^{(1/\alpha)-1}\left(\frac{1}{\overline{K}}\right)^{\beta/\alpha} + \frac{\varepsilon r\overline{K}}{q} = \varepsilon CTMe(Q) \\
CMg(Q)' &= \frac{\varepsilon}{\alpha}wq^{(1/\alpha)-1}\left(\frac{1}{\overline{K}}\right)^{\beta/\alpha} = \varepsilon CMg(Q)
\end{aligned}$$

Gráficamente:



4. Si una empresa tiene una función con retornos constantes a la escala entonces la curva de costos medios de largo plazo será constante, y el costo marginal será igual al costo medio. Comente.

Respuesta
Verdadero. Para fijar ideas supongamos que la función de producción es una Cobb-Douglas, entonces si sus retornos son constantes se cumplirá que

$$\alpha + \beta = 1$$

La condición de óptimo es

$$\frac{w}{r} = \frac{K}{L}$$

Ahora obtendremos las demandas condicionadas de factores:

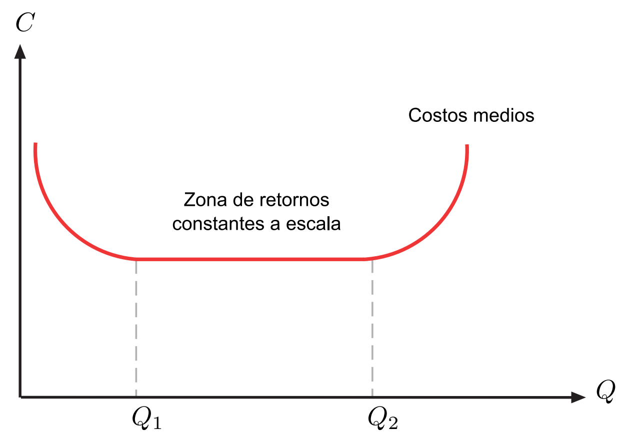
$$\begin{aligned}
Q &= L^{\alpha}K^{\beta} \\
Q &= L^{\alpha}\left(\frac{wL}{r}\right)^{\beta} \\
Q &= L\left(\frac{w}{r}\right)^{\beta} \\
L^{C} &= Q\left(\frac{r}{w}\right)^{\beta} \\
\text{Análogamente: } K^{C} &= q\left(\frac{w}{r}\right)^{\alpha}
\end{aligned}$$

Con esto obtenemos la función de costos:

$$\begin{aligned}
C &= wL^{C} + rK^{C} \\
C &= wQ\left(\frac{r}{w}\right)^{\beta} + rQ\left(\frac{w}{r}\right)^{\alpha} \\
C &= 2Q(w)^{\alpha}(r)^{\beta} \\
\Rightarrow \frac{C}{Q} = CMe &= \frac{2q(w)^{\alpha}(r)^{\beta}}{Q} = 2(w)^{\alpha}(r)^{\beta} \\
\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial Q} = CMg &= 2(w)^{\alpha}(r)^{\beta}
\end{aligned}$$

Como se puede ver en este procedimiento, cuando existen retornos constantes a escala, el costo medio es constante (no depende de la cantidad) y es igual al costo marginal.

Esto se puede ver gráficamente de la siguiente forma:

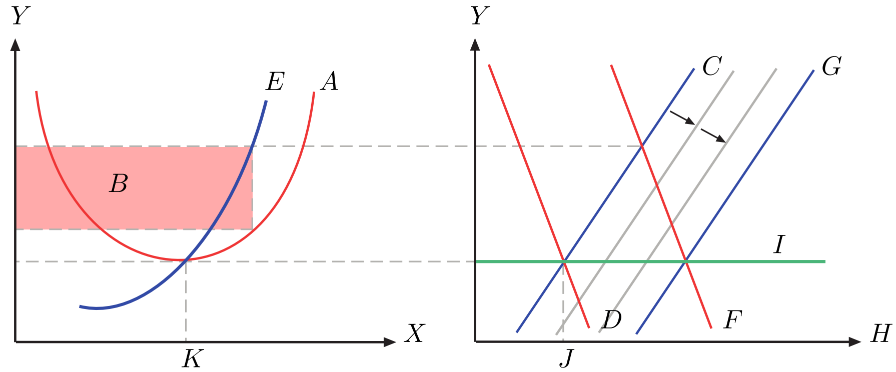


Entre Q_1 y Q_2 existen retornos constantes a escala, en este tramo, los costos medios son constantes, es decir al aumentar el tamaño de la escala (cantidad) no aumentan los costos.

5. La oferta de la industria bajo competencia perfecta, es completamente inelástica, aún cuando el precio de los insumos utilizados en la industria puedan variar debido a una expansión de la producción causado por un incremento en la demanda del bien.

Respuesta
Falso, porque la demanda de la industria en el largo plazo es infinitamente elástica, y esto ocurre aún cuando el precio de los insumos varíe por la expansión en la demanda del bien.

Si lo vemos paso a paso, ocurre lo siguiente: Si el aumento de la demanda no incrementa los precios de los insumos tenemos que este aumento en la demanda hace subir los precios, y por esta razón crea utilidades en las empresas, por lo que otras empresas deciden entrar al mercado, por lo que aumenta la oferta llegando hasta el punto de beneficio cero, por lo tanto en el mercado se tranza una mayor cantidad pero al mismo precio.

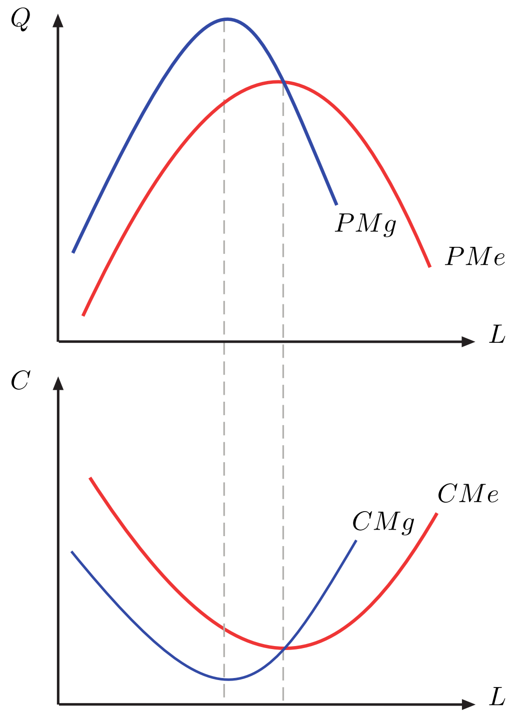


6. Si el costo medio variable es decreciente se debe a que en promedio producir unidades de un bien implica una menor utilización del factor trabajo. Comente.

Respuesta
Como el costo medio variable es inversamente porporcional a la productividad media, es decir,

$$CVMe = \frac{CV}{Q} = \frac{wL}{Q} = \frac{w}{PMe}$$

Entonces, si el costo medio variable es decreciente la productividad media es creciente, lo que nos indica que se utiliza, en promedio, mejor el factor trabajo.

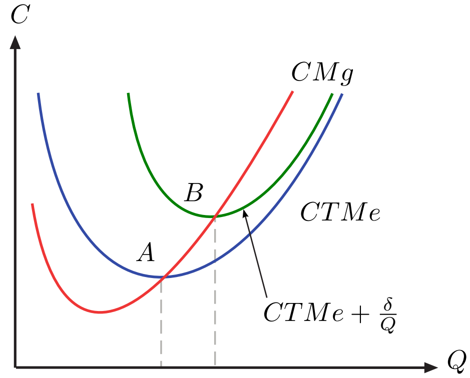


7. Si una empresa debe pagar una franquicia (impuesto anual), que es una cantidad fija e independiente de lo que se produzca, entonces la relación entre costo total medio y costo marginal se vera afectado, desplazando su intersección hacía la derecha. Comente.

   Respuesta
   Sabemos que en el corto plazo existirá un costo fijo, el cual no dependen de las unidades del bien que se produzcan, de manera que se debe cumplir que $CT(q) = CF + CV(q)$, por lo que el costo total medio debe cumplir con $CTMe = CFMe + CVMe$. De esta manera si los costos fijos aumentan en una cuantía fija (digamos δ), entonces el costo medio fijo aumenta proporcionalmente a las unidades que se producen, de manera que el nuevo costo tal medio sería

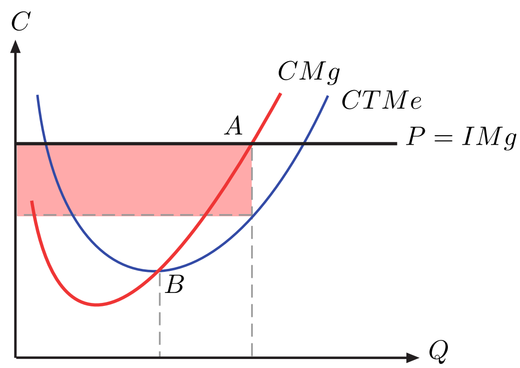
$$CTMe = CFMe + \frac{\delta}{Q} + CVMe$$

   con lo cual la interacción se mueve del punto A al punto B, con lo cual podemos concluir que a menos que el costo sea completamente inelástico, existe un desplazamiento a la derecha y hacia arriba.



8. La maximización de beneficios en el corto plazo garantiza que la producción siempre será al menor costo posible. Comente.

Respuesta
No necesariamente, ya que la maximización en el corto plazo se da cuando $CMg = IMgP$, lo cual puede entregar beneficios posisitivos, tal y como se observa en la figura.



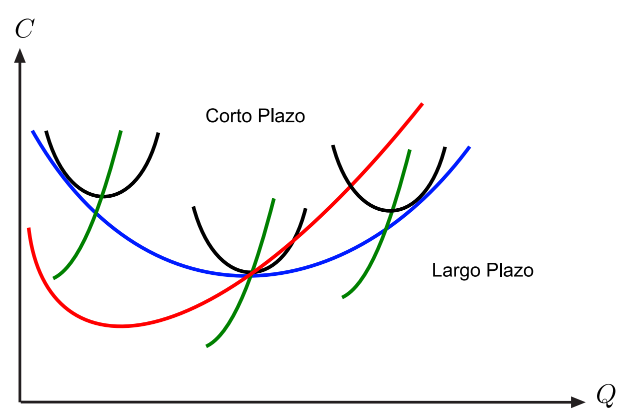
Esta condición de equilibrio se da en el punto A de la figura, donde el costo medio es mayor que al encontrarse en el punto B. Por lo que, no se asegura producción a costo mínimo, a menos que

$$CVMe = CMg = IMg = P$$

en tal caso la firma obtendría beneficios nulos y posiblemente se encuentre en el mercado, bajo condiciones de largo plazo. Sin embargo, desde el punto de vista del largo plazo si se garantiza la minimización de los costos, ya que la función de costo en largo plazo se define como la minimización en la combinación lineal en el pago de los factores a un nivel de producción determinado.

9. La forma de las curvas de costos medio de largo plazo se debe a la existencia a que la tecnología presenta rendimientos crecientes, constantes y decrecientes a la escala. Comente.

Respuesta
Los tipos de rendimiento de escala pueden explicar la forma de la curva de costo y en base a esto determinar la curva de costo medio, sin embargo, no son las únicas causas que pueden determinar dicha curvatura, como por ejemplo, los cambios tecnológicos, cambios en las preferencias, etc.Por esta razón cuando se busca una relación entre costo y producción hablamos de economías y deseconomías en la producción.



2. Preguntas Propuestas

1. En un proceso productivo, es posible tener un producto marginal decreciente en un factor y, aun así, tener rendimientos crecientes crecientes de escala.

2. Una empresa siempre producirá donde la productividad marginal este creciendo, dado que de esta forma se asegurará de estar maximizando beneficios.

3. Una empresa cerrará, en el corto plazo, en el caso en el cual el precio de mercado de su producto sea menor que el costo fijo por unidad de producto, ya que en este caso está sufriendo pérdidas, mientras que en el largo plazo lo haría si el precio es menor al costo medio mínimo.

4. Como en el largo plazo las empresas en competencia perfecta tienen beneficios iguales a cero, entonces están indiferentes entre tener la empresa o no, ya que la finalidad de los hombres de negocios es ganar dinero.

5. La función de costo me indica cuánto es el monto en dinero que me cuesta producir una cantidad dada cualquier combinación de insumos.

6. La firma contratará un factor hasta el punto donde el valor producto marginal de contratar la última unidad de ese factor sea igual al salario de mercado que le debe pagar a este.

7. Un economista es consultado acerca de la posible imposición de un impuesto a las firmas productoras de autos. Este dice que lo más conveniente es poner un impuesto a las utilidades pues de esta forma no variará la producción y no habrá costos en términos de eficiencia. Otro economista comenta que lo mejor es un impuesto al precio de venta pues de esta forma no variará la contratación de los factores. Comente. ¿Qué podrá fallar en la proposición del primer economista?

8. La oferta de la firma será la curva de costo marginal, ya que en este punto hace máximo su beneficio.

3. Ejercicios con respuesta

Problema 1. El rey del mote con huesillos utiliza mote (x_1) y huesillos (x_2) en su producción. Se sabe que la función de producción está dada por

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

el precio de x_1 es w_1, el de x_2 es w_2 y el producto que elabora se transa a un precio p.

1. Plantee y resuelva el problema de maximización de beneficios que resuelve la firma, si su variable de decisión es la cantidad de insumos a utilizar. Obtenga las demandas para cada factor.

   Respuesta
   El problema que enfrenta la firma, corresponde a la maximización de beneficios (la diferencia entre los ingresos y costos totales percibidos por la firma):

   $$\max_{x_1, x_2} \pi = p \cdot f(x_1, x_2) - w_1 x_1 - w_2 x_2$$

   Las condiciones de primer orden corresponden a:

   $$p \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} = w_1$$
   $$p \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} = w_2$$

   y sabemos que

   $$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$
   $$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}}$$

   Luego, resolviendo se obtiene que

   $$p \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1}} = x_2$$

   con lo cual las demandas de factores son:

   $$x_1^* = \left(\frac{p}{2w_1}\right)^2$$
   $$x_2^* = \left(\frac{p}{2w_2}\right)^2$$

2. Obtenga la función de oferta de la firma.

   Respuesta
   La función de oferta de la firma corresponde a la función de producción, en donde se ha reemplazado la demanda por factores productivos. Esto es:

   $$f(x_1^*, x_2^*) = \frac{p}{2w_1} + \frac{p}{2w_2}$$

3. Determine la función de beneficios de la empresa.

   Respuesta
   La función de beneficios de una firma se obtiene sustituyendo la oferta de la firma y la demanda por factores productivos en la expresión para los beneficios:

$$\pi = p \cdot \left(\frac{p}{2w_1} + \frac{p}{2w_2} \right) - w_1 \cdot \left(\frac{p}{2w_1} \right)^2 - w_2 \cdot \left(\frac{p}{2w_2} \right)^2 = \frac{3(w_1 + w_2)p^2}{8w_1w_2}$$

4. A partir de la función de producción, calcule la elasticidad de sustitución.

   Respuesta
   Una forma de calcular la elasticidad de sustitución es mediante la igualdad

$$\sigma = -\frac{d\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\ln(TMST_{x_1,x_2})}$$

   Entonces

$$\sigma = \frac{d\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\ln\left(\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}\right)} = \frac{d\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\left(\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{0,5}\right)} = \frac{d\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right)} = \frac{1}{2}\frac{d\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} = 2$$

5. Explique el resultado de la parte 4.

   Respuesta
   Como $\sigma > 1$ se tiene una gran facilidad de sustitución entre factores. Esto es coherente con la forma funcional de la tecnología, la cual se asemeja a la de perfectos sustitutos (de hecho es una función cuasilineal).

6. Determine los retornos a escala de la tecnología.

   Respuesta
   Una forma es determinar el grado de homogeneidad de la función siempre y cuando la función sea homogénea. Es decir,

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1, \lambda x_2) &= \sqrt{\lambda x_1)} + \sqrt{\lambda x_2)} \\ &= \sqrt{\lambda}(\sqrt{x_1)} + \sqrt{x_2)}) \\ &= \sqrt{\lambda} f(x_1, x_2) \end{aligned}$$

   entonces la tecnología es homogénea de grado menor a uno y en consecuencia presenta retornos decrecientes a escala.

7. Explique los resultados de la parte 6.

   Respuesta
   Si los retornos son decrecientes a escala quiere decir que no es conveniente aumentar la intensidad de uso de todos los factores. En otras palabras, lo más conveniente es determinar un plan de producción que contemple una escala pequeña de producción pues mientras mayor sea el nivel de producción tenemos que los rendimientos de los factores son crecientes a tasa decreciente.

Problema 2. Suponga que la tecnología accesible de la empresa RG y Asociados para producir el bien y está representada por la función de producción $y = 2x_1^{1/2}x_2^{1/4}$ donde x_1 y x_2 indican, respectivamente, las cantidades del factor 1 y factor 2 utilizadas en la producción del bien x. Si en este mercado opera una empresa competitiva:

1. Obtenga y represente gráficamente la senda de expansión de la producción de la empresa RG y Asociados.

Respuesta

Debemos plantear y resolver el problema de minimización de costos que corresponde a lo siguiente:

$$\min_{x_1,x_2} \quad C = w_1x_1 + w_2x_2$$
$$\text{s.a} \quad y = 2x_1^{1/2}x_2^{1/4}$$

$$\text{Isocostos: } \overline{C} = w_1x_1 + w_2x_2$$
$$\text{Pendiente de Isocostos: } \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\overline{C}} = -\frac{w_1}{w_2}$$

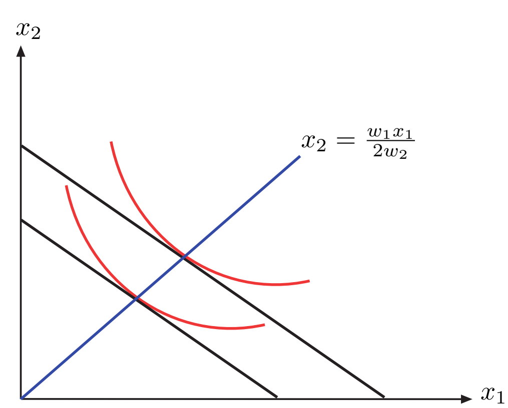
$$\begin{aligned}
TMST_{2,1} &= \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\overline{y}} = -\frac{\partial y/\partial x_1}{\partial y/\partial x_2} = -\frac{PMg_1}{PMg_2} = -\frac{x_2^{1/4}x_1^{-1/2}}{\frac{1}{2}x_1^{1/2}x_2^{-3/4}} \\
TMST_{2,1} &= -\frac{2x_2}{x_1} \rightarrow \text{Pendiente de la Isocuanta} \\
\frac{|TMST_{2,1}|}{\partial x_1} &< 0
\end{aligned}$$

Si igualamos las pendientes:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\overline{C}} &= \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\overline{y}} \\
\Rightarrow -\frac{w_1}{w_2} &= -\frac{2x_2}{x_1} \\
\Rightarrow x_2 &= \frac{w_1x_1}{2w_2}
\end{aligned}$$

Entonces la pendiente es

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{w_1}{2w_2}$$



2. Determine las funciones de demanda condicionada de factores y la función de costes a lo largo plazo de RG y Asociados. ¿Cuál es la expresión de dicha función de costes si los precios de los factores son, respectivamente, $w_1 = 2$ y $w_2 = 1$?

Respuesta
Del óptimo calculado en (a) sabemos que:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{2x_2}{x_1} \ \Rightarrow \ x_2 = \frac{x_1 w_1}{2w_2} \ , \ x_1 = \frac{2x_2 w_2}{w_1}$$

Reemplazando en la restricción (uno a la vez):

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= 2x_1^{1/2}\left(\frac{x_1 w_1}{2w_2}\right)^{1/4} \\
\frac{\overline{y}}{2} &= x_1^{3/4}\left(\frac{w_1}{2w_2}\right)^{1/4} \\
x_1^c &= \left(\frac{\overline{y}}{2}\right)^{4/3}\left(\frac{2w_2}{w_1}\right)^{1/3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= 2\left(\frac{2x_2 w_2}{w_1}\right)^{1/2} x_2^{1/4} \\
\frac{\overline{y}}{2} &= \left(\frac{2w_2}{w_1}\right)^{1/2} x_2^{3/4} \\
x_2^c &= \left(\frac{\overline{y}}{2}\right)^{4/3}\left(\frac{w_1}{2w_2}\right)^{2/3}
\end{aligned}$$

Ahora si reemplazamos x_1^c y x_2^c en la función de costos:

$$\begin{aligned}
C &= w_1 x_1 + w_2 x_2 \\
C &= w_1\left(\frac{\overline{y}}{2}\right)^{4/3}\left(\frac{2w_2}{w_1}\right)^{1/3} + w_2\left(\frac{\overline{y}}{2}\right)^{4/3}\left(\frac{w_1}{2w_2}\right)^{2/3} \\
C &= \left(\frac{\overline{y}}{2}\right)^{4/3}\left[(2w_2)^{1/3}(w_1)^{2/3} + (w_1)^{2/3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}(w_2)^{1/3}\right] \\
C^{LP} &= \left(\frac{\overline{y}}{2}\right)^{4/3}(w_1)^{2/3}(w_2)^{1/3}\left[(2)^{1/3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right] \\
C^{LP} &= \left(\frac{\overline{y}}{2}\right)^{4/3}(w_1)^{2/3}(w_2)^{1/3}\left[(2)^{1/3}\frac{(2)^{2/3}}{(2)^{2/3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}\right] \\
C^{LP} &= \left(\frac{\overline{y}}{2}\right)^{4/3}(w_1)^{2/3}(w_2)^{1/3}\left(\frac{3}{(2)^{2/3}}\right)
\end{aligned}$$

Como $w_1 = 2$ y $w_2 = 1$, entonces:

$$C^{LP}(w_1, w_2, x) = c^{LP}(x) = 3\left(\frac{\overline{x}}{2}\right)^{4/3}$$

Suponga que en el corto plazo RG y Asociados posee el factor x_2 fijo en 16.

3. Determine las funciones de demanda condicionada de factores y la función de costes a corto plazo. ¿Cuál es la expresión de dicha función de costes si los precios de los factores son, respectivamente, $w_1 = 2$ y $w_2 = 1$?

Respuesta

$$\begin{aligned} \min_{x_1} \quad & C = w_1 x_1 + 16 w_2 \\ \text{s.a} \quad & y = 2x_1^{1/2}(16)^{1/4} = 4x_1^{1/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{y} = 4x_1^{1/2}$$
$$\Rightarrow x_1^c = \left(\frac{\overline{y}}{4}\right)^2$$

Entonces:

$$\begin{aligned} C^{CP}(w_1, w_2, x) &= w_1 x_1^c + 16 w_2 \\ C^{CP}(w_1, w_2, x) &= w_1 \left(\frac{\overline{y}}{4}\right)^2 + 16 w_2 \end{aligned}$$

Como $w_1 = 2$ y $w_2 = 1$, entonces:

$$C^{CP}(w_1, w_2, x) = \frac{\overline{y}^2}{8} + 16$$

Problema 3. Suponga que la empresa Aperezco D-C Ltda. produce frutillitas y opera en un mercado competitivo. Sus costes de producción de corto plazo están dados por la función $C(y) = y^3 - 6y^2 + 20y + 50$, siendo y su nivel de producción.

1. Obtenga la curva de oferta a corto plazo de Aperezco.

Respuesta

$$\max_y B(y) = I(y) - C(y) = py - C(y)$$

Se calcula el costo marginal:

$$CMg = \frac{\partial C(y)}{\partial y} = 3y^2 - 12y + 20$$

Se calcula el costo variable medio:

$$CVMe = \frac{y^3 - 6y^2 + 20y}{y} = y^2 - 6y + 20$$

La producción que minimiza el costo variable medio se obtiene:

$$\frac{\partial CVMe}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(y^2 - 6y + 20)}{\partial y} = 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$$

Por lo tanto el minimo de los costos variables medios es:

$$CVMe^{\text{mín}} = CVMe(y = 3) = 3 \cdot 3 - 6 \cdot 3 + 20 = 11$$

Además la curva del coste marginal corta a la curva del coste medio variable en su mínimo:

$$CMg(y = 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 - 12 \cdot 3 + 20 = 11$$

Igualando el precio al coste marginal, se obtiene la cuerva inversa de oferta, que expresa el precio en función de la producción:

$$p = 3y^2 - 12y + 20 \text{ con } y \geq 3$$

Despejamos la producción en función del precio, obtenemos la oferta de la empresa, si:

$$y^s(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 11 \\ \dfrac{12 + \sqrt{144 - 12(20 - p)}}{6} & \text{si } p \geq 11 \end{cases}$$

Luego obtenemos el costo medio de la empresa:

$$CMe = \frac{y^3 - 6y^2 + 20y + 50}{y} = y^2 - 6y + 20 + \frac{50}{y}$$

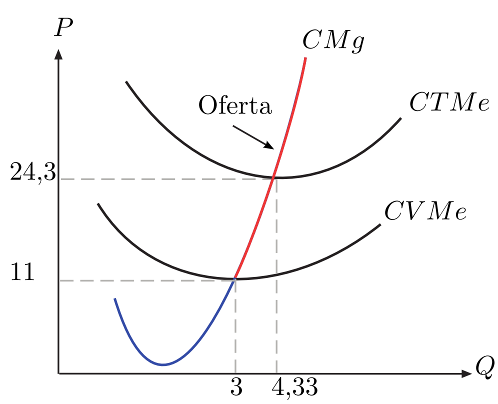
El nivel de producción que minimiza el coste medio se obtiene, de la siguiente manera:

$$\frac{\partial CMe}{\partial y} = 2y - 6 - \frac{50}{y^2} = 0 \Rightarrow y = 4{,}33$$

Para el nivel de producción $y = 4{,}33$ el coste medio mínimo y coincide con el coste marginal:

$$CMe^{\text{mín}} = CMe(y = 4{,}33) = 24{,}3 = CMg(y = 4{,}33)$$

Gráficamente, la curva de oferta de la empresa coincide con el tramo de la curva de coste marginal que queda por encima de la curva de coste variable medio.



2. Suponga que el precio del producto es $P = 20$. Calcule la producción y el beneficio de equilibrio de Aperezco.

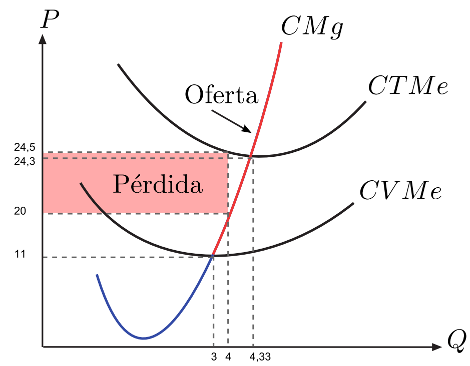
Respuesta
Para un $p = 20$, la cantidad ofrecida por la empresa competitiva será:

$$y^s(p = 20) = \frac{12 + \sqrt{144 - 12(20 - 20)}}{6} = 4$$

El beneficio será de:

$$B(y) = py - C(y) = 20(4) - (4^3 - 6(4^2) + 20(4) + 50) = -18$$

Como se pueden dar cuenta la empresa obtiene pérdidas en el corto plazo porque los ingresos que obtiene no le permiten cubrir los costes totales. Sin embargo, la empresa no cerrará porque los ingresos obtenidos superan a los costes variables. Los beneficios que obtiene produciendo cuatro unidades son superiores a los de no producir, ya que en este caso obtendría una pérdida de cincuenta unidades.



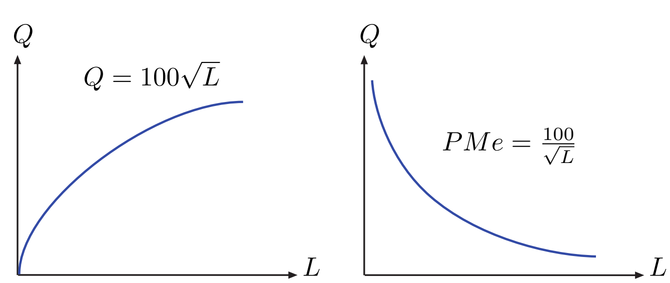
Problema 4. La recolección artesanal de almejas en la playa de Chigualoco sólo requiere factor trabajo. El número de almejas extraídas por hora (Q) viene dada por:

$$Q = 100\sqrt{L}$$

Donde L corresponde al factor trabajo por hora.

1. Dibuje en un gráfico la relación entre Q y L.

Respuesta



2. ¿Cuál es la producción media del trabajo en la playa de Chigualoco? Dibuje esta relación y demuestre que la productividad marginal del trabajo disminuye cuando aumenta la utilización del factor trabajo.

   Respuesta
   El producto medio, correponde a la pendiente de la línea trasada desde el origen a cualquier punto sobre la función de producción, lo cual correspnde a:

   $$PMe = \frac{Q}{L} = \frac{100\sqrt{L}}{L} = \frac{100}{\sqrt{L}}$$

   De manera que el producto medio se representa como el gráfico de la izquierda de la figura anterior.

3. Demuestre que la productividad marginal del trabajo en esta playa está dado por:

   $$PMgL = \frac{50}{\sqrt{L}}$$

   Dibuje esta relación y demuestre que Productividad Marginal del Trabajo es menor que la Productividad Media del Trabajo, para todos los valores de L. Explique por qué es así.

   Respuesta
   Para determinar el producto marginal con respecto al trabajo tenemos que:

   $$\begin{aligned} PMgL &= \frac{\Delta Q}{\Delta L} \\ &= \frac{Q_1 - Q_0}{L_1 - L_0} \\ &= \frac{100\sqrt{L_1} - 100\sqrt{L_0}}{(\sqrt{L_1} - \sqrt{L_0}) - (\sqrt{L_1} + \sqrt{L_0})} \\ &= \frac{100}{\sqrt{L_1} + \sqrt{L_0}} = \frac{100}{2\sqrt{L}} = \frac{50}{\sqrt{L}} \end{aligned}$$

   Es claro que la productividad marginal es menor que la productividad media, entonces dado que

   $$PMg = \frac{50}{\sqrt{L}} < \frac{100}{\sqrt{L}} = PMeL$$

   para todo L, entonces agregar un trabajador más, en promedio se obtiene mayor producción. Este fenómeno puede explicarse por la extensión de la playa, ya que debido a ésto la incorporación de un trabajador más tiene un costo marginal muy bajos y no altera significativamente la productividad media de los demás.

Problema 5. Suponga que en un mercado competitivo la empresa Don Pachá produce un bien que tiene una función costo total definida por $C(Q) = 100 + Q^2$, donde Q es el nivel de producción. El coste marginal de producción es $2Q$ y el costo fijo es de \$100. Por otro lado, se sabe que el precio del bien es de \$60.

1. ¿Cuántas unidades deberá producir esta empresa de manera tal que sus beneficios sean máximos?

   Respuesta
   La condición de equilibrio para la maximización de los beneficios es costo marginal igual ingreso marginal. Sin embargo, como es una sola firma, el ingreso marginal debe ser igual al precio de mercado, por lo tanto, se debe cumplir que

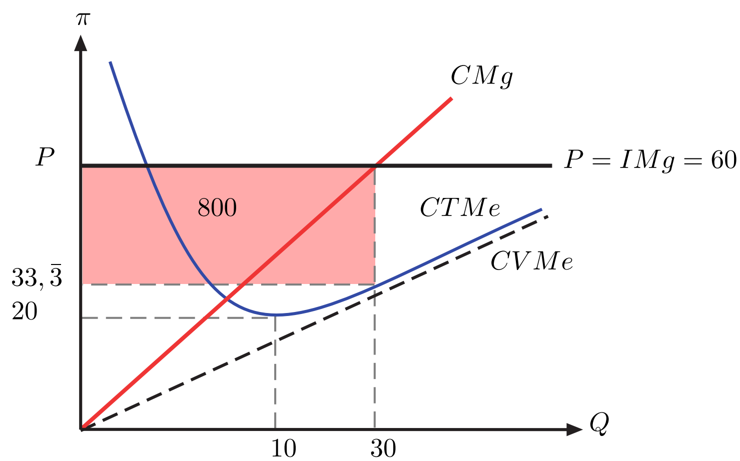
   $$\begin{aligned} CMg &= IMg = P = 60 \\ 2Q &= 60 \\ Q^* &= 30 \end{aligned}$$

2. Determine el nivel máximo de beneficio para esta empresa y represente gráficamente el área comprendida por este beneficio.

   Respuesta
   Se sabe que el ingreso es $P \cdot Q$, mientras que la función de costo corresponde a $C(Q) = 100 + Q^2$. De esta manera el beneficio de la firma corresponde a

$$\pi(Q) = P \cdot Q - 100 - Q^2$$

   De esta manera el beneficio máximo corresponde a $pi_M(Q = 30) = 800$, el cual se encuentra en el área pintada de la figura.



3. Determine el rango de precios para los cuales la empresa producirá una cantidad positiva y además represente gráficamente esta condición.

   Respuesta
   Suponiendo que esta firma considera estar en el mercado si sus beneficios resultan positivos, entonces, el rango de precios irá desde su beneficio igual a cero (es decir, $CTMe = CMg = P$), a cualquier precio que le genere beneficio positivo. Por lo tanto, el rango de precios corresponderá a $P \geq 20$.

   Ahora, si suponemos que la firma producirá hasta el punto en que puede cubrir sus costos fijos, con la esperanza de revertir esta condición en el futuro, entonces el rango de precios será $P \geq 0$.

4. Ejercicios Propuestos

1. Suponga una empresa que posee la siguiente función de producción:

$$Y(L, K) = K^{1/3} L^{2/3}$$

   Resuelva lo siguiente considerando como cierto: $w = 25$, $r = 400$ y la producción deseada es de $Y = 650$.

   a) Encuentre las funciones de demanda condicionada de factores; la función de costos en el largo plazo y la función de costo marginal.

   b) Calcule y grafique el equilibrio.

   Ahora asuma que se encuentra en el corto plazo, y que solo dispone de una cantidad fija de capital igual a $K = 250$.

c) Encuentre la función de costos y la función de demanda condicionada de trabajo.

d) Calcule y grafique el equilibrio de corto plazo.

2. Considere una función de producción de la forma:

$$Y(L,K) \quad = \quad \text{mín}\left\{\frac{K}{\alpha};\frac{L}{\beta}\right\}$$

a) Encuentre, grafique y explique las funciones de productividad media y marginal, para uno de los factores (el otro es análogo).

b) Encuentre las funciones de demandas condicionadas de factores.

c) Encuentre la funciones de costo; de costos medios y de costos marginales.

3. Suponga que la empresa Intro a Micro S.A tiene la siguiene función de producción:

$$Y \quad = \quad K^{1/2}L^{1/2}$$

Donde Y es el producto, K el stock de capital y L la mano de obra. Suponga que el trabajo recibe un salario w y el capital un salario r.

a) Calcule las demandas condicionadas.

b) Obtenga la función de costos.

c) Obtenga de la función de costos anterior, las demandas condicionadas para esta firma.

d) Obtenga la función de producción dadas las demandas encontradas en el punto anterior.

e) Obtenga las curvas de costo marginal y medio. ¿Qué características poseen estas?

4. Suponga que la empresa de calcetines PT posee la siguiente función de producción:

$$Y \quad = \quad K^{1/4}L^{1/4}$$

El salario del trabajo (L), viene dado por w y el del capital (K) viene dado por r.

a) Plantee el problema de optimización al que se ve enfrentada la firma.

b) Obtenga las demandas derivadas por los factores trabajo y capital.

c) Muestre que ante un aumento tanto de los salarios como del precio al que se vende el producto estas demandas no variarán.

5. Suponga la siguiente función de costos para la empresa Fideos Biancini:

$$CT \quad = \quad 150 + 8x + 3x^2$$

a) ¿A qué nivel de producción el costo medio variable es igual al costo marginal?

b) Si el precio de mercado es 10, ¿Cuánto produce?, ¿Por qué no produce al costo medio mínimo?

6. Suponga que la empresa Fumarola S.A posee la siguiente función de producción:

$$y = \text{mín}\{\alpha L; \beta K\} \tag{1}$$

Donde L es el trabajo y K el capital y los precios de los factores son w y r respectivamente.

   a) Grafique la función de producción.
   b) Encuentre las demandas condicionadas por cada factor.
   c) Encuentre la función de costos.
   d) Para fijar ideas suponga que $\alpha = 20$ y $\beta = 1$. En base a estos parámetros explique cuál es la proporción óptima de factores y porqué las funciones de mínimos se conocen como tecnologías de proporciones fijas.

7. Considere la siguiente función de producción:

$$y = \alpha L + \beta K$$

   a) Grafique la función de producción.
   b) Encuentre las demandas condicionadas por cada factor.
   c) Encuentre la función de costos.