Pauta Ayudantía 5

AYUDANTES: Adolfo Fuentes, Rodrigo Garay, Alejandra Jáuregui, María José Pérez y Mauricio Vargas

27 de septiembre de 2011

1. Maximización de Utilidad

Suponga que un individuo posee un ingreso de I y que en el mercado que se encuentra existen dos bienes x e y, cuyos precios son P_x y P_y respectivamente. Se le pide:

1. Encuentre la decisión de consumo óptima (las demandas marshallianas) del consumidor si el individuo tiene una función de utilidad Cobb-Douglas de la forma:

$$u(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$$

Respuesta
Para maximizar este tipo de funciones debemos utilizar la condición de óptimo del consumir, es decir:

$$\begin{aligned} TMgSC_{x,y} &= TMgIM_{x,y} \\ \frac{UMg_x}{UMg_y} &= \frac{P_x}{P_y} \\ \frac{\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}} &= \frac{P_x}{P_y} \\ \frac{\alpha y}{\beta x} &= \frac{P_x}{P_y} \end{aligned}$$

De lo que se concluye que la proporción óptima[1] está dado por:

$$y^* = \frac{\beta P_x \cdot x}{\alpha P_y}$$

Si reemplazamos esta proporción en la restricción presupuestaria obtenemos:

$$\begin{aligned} I &= xP_x + yP_y \\ I &= xP_x + \left[\frac{\beta P_x \cdot x}{\alpha P_y}\right] P_y \end{aligned}$$

Donde si despejamos x obtenemos el consumo óptimo de este bien:

$$x^* = \frac{\alpha I}{(\alpha+\beta)P_x}$$

Por simetría podemos determinar que:

$$y^* = \frac{\beta I}{(\alpha+\beta)P_y}$$

Notar que las demandas dependen de la importancia relativa de los bienes, mostrando una cierta dependencia del consumo de ambos.

[1] Notar que los consumidores eligen proporciones de consumo y no valores absolutos. Por ejemplo: Quiero consumir el doble de morochas que de ramitas

2. Encuentre la decisión de consumo óptima del consumidor si el individuo tiene una función de utilidad de Sustitutos Perfectos de la forma:

$$u(x, y) = \alpha x + \beta y$$

Respuesta
Para esta función debemos analizar dos casos:

- Si la pendiente de la curva de indiferencia es mayor que la restricción presupuestaria.

$$TMgSC_{x,y} > TMgIM_{x,y}$$

- Si la pendiente de la curva de indiferencia es menor que la restricción presupuestaria.

$$TMgSC_{x,y} < TMgIM_{x,y}$$

Si se cumple el primer caso ($TMgSC_{x,y} > TMgIM_{x,y}$) entonces consumiremos sólo x, entonces reemplazamos en la restricción presupuestaria la condición de $y = 0$, obteniendo:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{I}{P_x} \\ y^* &= 0 \end{aligned}$$

Si se cumple el caso contrario ($TMgSC_{x,y} > TMgIM_{x,y}$) entonces sólo consumiremos y, entonces reempazamos en la restricción presupuestaria la condición de $x = 0$, obteniendo:

$$\begin{aligned} x^* &= 0 \\ y^* &= \frac{I}{P_y} \end{aligned}$$

Notar que en ambos casos las demandas de los bienes solo dependen de sus precios, dando la representación matemática a la perfecta sustitución

3. Encuentre la decisión de consumo óptima del consumidor si el individuo tiene una función de utilidad Leontief de la forma:

$$u(x, y) = \text{mín}[\alpha x; \beta y]$$

Respuesta
En este caso, sabemos que el óptimo estará dado por la proporción $\alpha x = \beta y$, por lo tanto, lo único que tenemos que hacer es reemplazar esto en la restricción presupuestaria. Entonces:

$$\begin{aligned} I &= xP_x + yP_y \\ I &= xP_x + \frac{\alpha x}{\beta} P_y \\ I &= x \left[P_x + \frac{\alpha P_y}{\beta} \right] \\ I &= x \left[\frac{\beta P_x + \alpha P_y}{\beta} \right] \\ x^* &= \frac{\beta I}{\beta P_x + \alpha P_y} \end{aligned}$$

Por simetría obtenemos:

$$y^* = \frac{\alpha I}{\beta P_x + \alpha P_y}$$

4. Encuentre la decisión de consumo óptima del consumidor si el individuo tiene una función de utilidad de la forma:

$$u(x,y) = \alpha \ln(x) + \beta \ln(y)$$

Respuesta
Para maximizar este tipo de funciones debemos utilizar la condición de óptimo del consumir, es decir:

$$\begin{aligned} TMgSC_{x,y} &= TMgIM_{x,y} \\ \frac{UMg_x}{UMg_y} &= \frac{P_x}{P_y} \\ \frac{\alpha y}{\beta x} &= \frac{P_x}{P_y} \end{aligned}$$

De donde se desprende que las demandas marshallianas son las mismas que bajo la función Cobb-Douglas. Esto se debe a que la función presentada arriba es una transformación monotónica creciente de la utilidad (se obtiene aplicando logartimo natural).

2. Demandas, efecto sustitución e ingreso y elasticidades

Las preferencias del ídolo y periodista estrella Juan Carlos Bodoque por Cerveza Duff (x) y Apuestas de Caballos (y) son representables mediante la siguiente función de utilidad

$$U(x,y) = xy + x$$

INDICACIÓN. Asuma que **siempre** se cumple que $I > p_y$.

1. Encuentre la utilidad marginal de cada bien y exprese la demanda del bien y en función de del bien x y los precios de ambos bienes.

Respuesta
Las utilidades marginales corresponden a:

$$\begin{aligned} Umg(x) &= \frac{\partial}{\partial x} U(x,y) = y + 1 \\ Umg(y) &= \frac{\partial}{\partial y} U(x,y) = x \end{aligned}$$

Luego, debemos encontrar la $TMS_{y,x}$. Por definición

$$TMS_{y,x} = \frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}}{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}} = \frac{x}{y+1}$$

En el óptimo, cuando la solución es interior, tenemos que la $TMS_{y,x}$ es igual a la relación de precios

$$\begin{aligned} TMS_{y,x} &= \frac{p_y}{p_x} \\ \frac{x}{y+1} &= \frac{p_y}{p_x} \end{aligned}$$

con esto podemos despejar y y obtenemos el resultado

$$y(x) = \frac{p_x}{p_y} x - 1 = \frac{p_x x - p_y}{p_y} \qquad (*)$$

2. Plantee y resuelva el problema de maximización de utilidad para luego encontrar una expresión para las demandas marshallianas.

   Respuesta
   El problema es el siguiente

$$\begin{array}{cc} \max\limits_{x,y} & U(x,y) = xy + x \\ \text{sujeto a} & I = p_x x + p_y y \end{array}$$

   Para resolver el problema una forma es la siguiente: De lo obtenido en la parte (1) reemplazamos y por la expresión de la ecuación (*) en la restricción presupuestaria

$$\begin{aligned} I &= p_x x + p_y \frac{p_x x - p_y}{p_y} \\ I &= 2p_x x - p_y \end{aligned}$$

   en esto último despejamos x y se obtiene la demanda marshalliana de dicho bien

$$x^m(p, I) = \frac{I + p_y}{2p_x}$$

   Luego, como tenemos una expresión para y en función de x podemos reemplazar x^m en la ecuación (*)

$$y = \frac{p_x x^m - p_y}{p_y} = \frac{p_x}{p_y} \cdot \frac{I + p_y}{2p_x} - 1$$

   esto nos da la demanda marshalliana por el bien y que corresponde a

$$y^m(p, I) = \frac{I - p_y}{2p_y}$$

3. Plantee y resuelva el problema de minimización de gasto para luego encontrar una expresión para las demandas hicksianas (demandas compensadas).

   Respuesta
   El problema es el siguiente

$$\begin{array}{cc} \min\limits_{x,y} & p_x x + p_y y \\ \text{sujeto a} & xy + y = \overline{U},\ \overline{U} \text{ es constante} \end{array}$$

   Una forma de resolver es tomar la ecuación (*) y reemplazar y en la función de utilidad

$$\begin{aligned} U(x,y) &= x\frac{p_x x - p_y}{p_y} + x \\ U(x,y) &= \frac{p_x x^2 - p_y x + p_y y}{p_y} \\ U(x,y) &= \frac{p_x x^2}{p_y} \end{aligned}$$

   tengamos presente que el problema considera un nivel fijo de utilidad, es decir que el resultado inmediantamente anterior nos lleva a

$$\overline{U} = \frac{p_x x^2}{p_y}$$

a partir de esto despejamos x y se obtiene la demanda hicksiana por dicho bien

$$x^h(p, \overline{U}) = \sqrt{\frac{\overline{U} p_y}{p_x}}$$

Luego, para obtener la demanda hicksiana por el bien y podemos reemplazar x^h en la ecuación (*)

$$y = \frac{p_x x^h - p_y}{p_y} = \frac{p_x}{p_y}\sqrt{\frac{\overline{U} p_y}{p_x}} - 1$$

esto nos da la demanda hicksiana por el bien y que corresponde a

$$y^h(p, \overline{U}) = \sqrt{\frac{\overline{U} p_x}{p_y}} - 1$$

4. Calcule la cantidad demandada de ambos bienes y el nivel de utilidad si $I = a$, $p_x = b$ y $p_y = c$ con $a,\ b,\ c$ constantes estrictamente positivas.

   Respuesta
   Por enunciado tengamos presente que $I > p_y \quad \Rightarrow \quad a > c$. Luego, para obtener lo pedido reemplazamos directamente en las demandas marshallianas y en la función de utilidad. Todos los cálculos son directos salvo el nivel de utilidad. Tenemos

$$\overline{U} = \frac{(a+c)}{2b} \cdot \frac{(a-c)}{2c} + \frac{a+c}{2b} = \frac{a^2 - c^2}{4bc} + \frac{a+c}{2b}$$

   Luego

$$\begin{aligned} x^m &= \frac{a+c}{2b} \\ y^m &= \frac{a-c}{2c} \\ \overline{U} &= \frac{a^2 - c^2}{4bc} + \frac{a+c}{2b} \end{aligned}$$

5. ¿Impondría alguna restricción sobre los parámetros en base al resultado anterior?

   Respuesta
   En el caso de x tenemos que la cantidad siempre será positiva.

   En el caso del bien y tenemos que $a - c$ podría ser negativo pero sabemos que $a > c$ y no aparece este inconveniente.

   En el caso de la utilidad, por el hecho de que hay una resta en la primera fracción, podría obtenerse un valor negativo en caso de que

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - c^2}{4bc} + \frac{a+c}{2b} &< 0 \\ a^2 - c^2 + 4bc\frac{a+c}{2b} &< 0 \\ a^2 - c^2 + 2c(a+c) &< 0 \\ a^2 - c^2 + 2ac + 2c^2 &< 0 \\ a^2 + 2ac + c^2 &< 0 \\ (a+c)^2 &< 0 \\ a + c &< 0 \end{aligned}$$

De esto tenemos que si $a + c \geq 0$ entonces la utilidad toma valores no negativos. Luego, como ambos valores son positivos la utilidad toma valores estrictamente positivos y entonces no debemos imponer más restricciones.

6. Considere que el precio del bien y aumenta de $p_y^i = c$ a $p_y^f = d$. Calcule las variaciones en el consumo de ambos bienes y determine el efecto sustitución y efecto ingreso del bien x.

Respuesta

Para las demandas marshallianas tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} x_i^m &= \frac{a+c}{2b} & \rightarrow \qquad x_f^m &= \frac{a+d}{2b} \\ y_i^m &= \frac{a-c}{2c} & \rightarrow \qquad y_f^m &= \frac{a-d}{2d} \end{aligned}$$

Luego calculamos la variación en la cantidad demandada de cada bien

$$\begin{aligned} \Delta x^m &= \frac{a+d}{2b} - \frac{a+c}{2b} \\ \Delta y^m &= \frac{a-d}{2d} - \frac{a-c}{2c} \end{aligned}$$

Para determinar el efecto sustitución debemos determinar el cambio en las demandas hicksianas

$$x_i^h = \sqrt{\frac{\overline{U}c}{b}} \qquad \rightarrow \qquad x_i^h = \sqrt{\frac{\overline{U}d}{b}}$$

Entonces la variación corresponde a

$$\Delta x^h = ES = \sqrt{\frac{\overline{U}d}{b}} - \sqrt{\frac{\overline{U}c}{b}}$$

Finalmente, el efecto ingreso corresponde a la diferencia entre el efecto total y el efecto ingreso

$$\begin{aligned} ET &= ES + EI \\ EI &= ET - ES \\ EI &= \Delta x^m - \Delta x^h \\ EI &= \frac{a+d}{2b} - \frac{a+c}{2b} - \sqrt{\frac{\overline{U}d}{b}} - \sqrt{\frac{\overline{U}c}{b}} \end{aligned}$$

7. Calcule la elasticidad precio, elasticidad ingreso y elasticidad precio cruzada del bien y.

Respuesta

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y,p_y} &= \frac{\partial y^m}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{y^m} \\ &= \frac{-2p_y - 2(I - p_y)}{4p_y^2} \cdot \frac{p_y}{y^m} \\ &= \frac{-2I}{4p_y} \cdot \frac{1}{y^m} \\ &= \frac{-2I}{4p_y} \cdot \frac{2p_y}{I - p_y} \\ &= \frac{-I}{I - p_y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y,I} &= \frac{\partial y^m}{\partial I} \cdot \frac{I}{y^m} \\ &= \frac{1}{2p_y} \cdot \frac{I}{y^m} \\ &= \frac{I}{2p_y} \cdot \frac{2p_y}{I - p_y} \\ &= \frac{I}{I - p_y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y,p_x} &= \frac{\partial y^m}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{y^m} \\ &= 0 \end{aligned}$$