Pauta Ayudantía 4

AYUDANTES: Adolfo Fuentes, Rodrigo Garay, Alejandra Jáuregui, María José Pérez y Mauricio Vargas

1 de octubre de 2011

1. Comentes

1. Cuando existe una restricción presupuestaria estamos en una situación subóptima pues el punto en que la TMS iguala a la relación de precios el consumidor no puede elegir la mejor combinación de bienes.

Respuesta
Falso. De no haber restricción de presupuesto, el consumidor podría acceder a cualquier canasta y escoger la mejor opción. Al haber una restricción de presupuesto el consumidor escoge la mejor canasta factible, es decir, escoge la mejor canasta dentro de las posibilidades lo cual por definición corresponde a una canasta óptima.

En términos generales, si las derivadas parciales de una función $U(x_1, x_2)$ cualquiera existen, entonces su diferencial esta dado por

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2$$

si nos mantenemos en la misma curva de indiferencia (combinación de valores que generan el mismo nivel de utilidad) se tendra que $dU = 0$ entonces

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 \tag{*}$$

La restricción de consumo dependerá del nivel de ingreso. Cuando se gasta todo el ingreso en consumir x_1 y x_2, a precios estrictamente positivos y sin posibilidades de contraer deudas, se tendrá que $I = p_1x_1 + p_2x_2$. Si graficamos todas las combinaciones que se pueden adquirir gastando todo el ingreso se obtiene una recta y si nos mantenemos en dicha recta cambian las combinaciones de x_1 y x_2 pero no el valor de I, entonces

$$dI = 0 = p_1dx_1 + p_2dx_2 \tag{**}$$

Asumiendo que $dx_1 \neq 0$ de la ecuacion (**) tenemos

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2}$$

Reordenando (*) para el caso de una solución interior se tiene

$$\frac{Umg(x_2)}{Umg(x_1)} = -\frac{dx_1}{dx_2}$$

Si combinamos estos dos resultados llegamos a

$$\frac{Umg(x_2)}{Umg(x_1)} = \frac{p_2}{p_1} \Leftrightarrow \frac{Umg(x_2)}{p_2} = \frac{Umg(x_1)}{p_1}$$

esto corresponde a la condición de optimalidad para una solución interior, en palabras corresponde a: "La utilidad marginal del último peso gastado en el bien uno, en el óptimo, es igual a la utilidad marginal del último peso gastado en el bien dos".

2. Siempre que existan dos bienes que nos otorguen igual utilidad marginal, estaremos indiferentes entre consumir cualquiera de ellos.

Respuesta
Falso. A partir del comente anterior se concluye que el consumidor elegirá aquel bien que entregue mayor utilidad por peso gastado. El óptimo se dará cuando las pendientes de ambas curvas (indiferencia y presupuestaria) se igualen, este es el punto de equilibrio, aquel que soluciona el problema de maximización del consumidor. Ambos bienes podrían tener la misma utilidad marginal pero sus precios podrían ser distintos.

3. Si la función de utilidad es una Cobb-Douglas cuyas curvas de indiferencia son convexas, entonces podemos verificar la convexidad de las curvas de indiferencia mediante el criterio de la segunda derivada.

Respuesta
Verdadero. Una Cobb-Douglas para dos bienes es una función de la forma

$$f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta \ , \ \alpha, \ \beta > 0$$

la forma algebraica de las curvas de indiferencia corresponde a

$$x_2(x_1) = \left(\frac{c}{x_1^\alpha}\right)^{1/\beta}$$

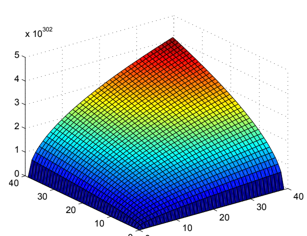
Un criterio útil para determinar si las curvas de indiferencia son convexas es mediante la primera y la segunda derivada. Si la curva de indiferencia es dos veces derivable, podemos tomar su segunda derivada y verificar que es mayor o igual a cero, de lo contrario la curva de indiferencia no será convexa. Entonces,

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{\alpha \cdot (c \cdot x^{-\alpha})^{1/\beta}}{\beta x} < 0$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial x_1^2} = \frac{\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot (c \cdot x^{-\alpha})^{1/\beta}}{x_1^2} > 0$$

del signo de la segunda derivada se concluye que las curvas de indiferencia son convexas.

Para fijar ideas, tomemos el caso de una Cobb-Douglas con parámetros $\alpha = \beta = 1$ y grafiquemos la función y las curvas de nivel



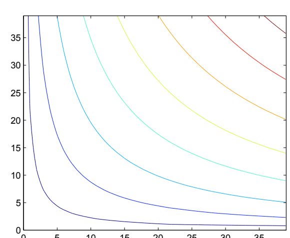


Figura 1: $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

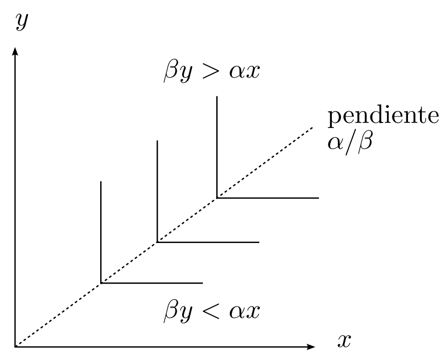
se observa que la función describe curvas suaves y esto en nada contradice que se pueda utilizar el criterio de la segunda derivada.

4. La función de utilidad Leontief (o de proporciones fijas) no tiene utilidad marginal.

Respuesta
Falso. La función Leontief corresponde a lo siguiente

$$U(x_1,x_2) = \text{mín}\{x_1,x_2\} = \begin{cases} x_1 & \text{si } x_1 \leq x_2 \\ x_2 & \text{si } x_1 > x_2 \end{cases}$$

Su gráfico corresponde a lo siguiente



Esta función no es diferenciable en todas partes y sus derivadas parciales no son continuas. Veamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}U(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \leq x_2 \\ 0 & \text{si } x_1 > x_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}U(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 \leq x_1 \\ 0 & \text{si } x_2 > x_1 \end{cases}$$

Entonces se concluye que la utilidad marginal en un caso es cero (cuando aumenta el consumo de un bien que de antemano se consume en cantidades mayores que la del otro bien). En el otro caso la utilidad marginal es igual a uno.

Cuando tenga sentido, cuando cambia la cantidad consumida de un bien, digamos del bien x_1, la utilidad no necesariamente aumenta (cuando este cambio no alcanza para aumentar el nivel de utilidad), y en tal caso

$$Umg(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1}U(x_1,x_2) = 0$$

Para el caso del bien x_2 es análogo. En general, por este hecho la TMS_{x_2,x_1} es infinita (luego no está bien definida para cualquier valor de (x_1,x_2)).

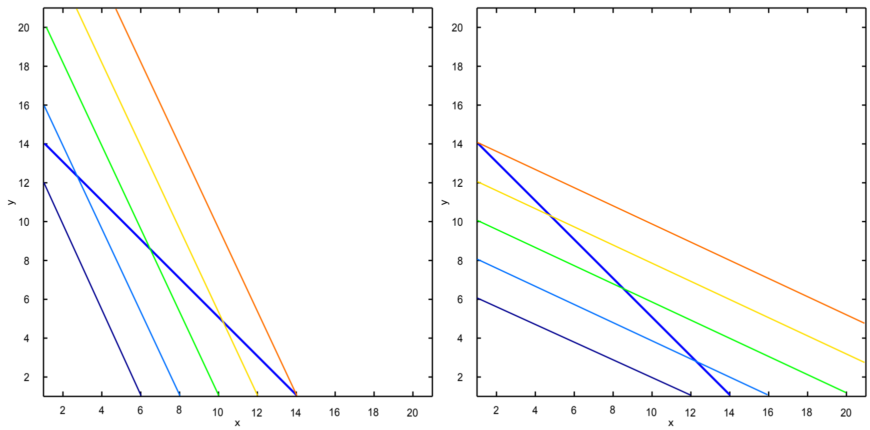
5. Para resolver el problema del consumidor basta con igualar la TMS_{x_2,x_1} con la relación de precios p_{x_2}/p_{x_1}.

Respuesta
Falso. Una condición necesaria es

$$TMS_{x_2,x_1} = \frac{p_{x_2}}{p_{x_1}}$$

sin embargo, las condiciones necesarias no son suficientes. Una condición suficiente es que las curvas de indiferencia sean estrictamente convexas.

Un contraejemplo es la función de utilidad lineal. En el óptimo no se tiene la tangencia entre la tasa marginal de sustitución y la tasa marginal d intercambio de mercado. Para fijar ideas digamos que la restricción presupuestaria es $g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = 14$ mientras que la función objetivo es $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$. Cambiando ligeramente la situación del caso anterior, supongamos que ahora $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$. Se obtienen los siguientes gráficos respectivamente:



Del gráfico del lado izquierdo se concluye que la solución óptima se logra con $(x_1, x_2) = (0, 14)$ que genera un valor de la función objetivo igual a $f(x_1, x_2) = 28$ mientras que $(x_1, x_2) = (14, 0)$ también es factible pero genera un valor de la función objetivo igual a $f(x_1, x_2) = 14$. Las soluciones interiores, por ejemplo $(x_1, x_2) = (8, 6)$ generan un valor de la función objetivo menor a $f(x_1, x_2) = 28$ dada la restricción (no son óptimas).

Del gráfico del lado derecho se concluye que la solución óptima se logra con $(x_1, x_2) = (14, 0)$ que genera un valor de la función objetivo igual a $f(x_1, x_2) = 28$ mientras que $(x_1, x_2) = (0, 14)$ también es factible pero genera un valor de la función objetivo igual a $f(x_1, x_2) = 14$. Las soluciones interiores nuevamente no son óptimas.

Una situación distinta en que no hay solución única es cuando la función objetivo y la restricción son iguales, con lo cual cualquier solución interior es óptima y genera el mismo valor en la función objetivo que en los dos casos anteriores.

Finalmente, es importante mencionar que en el caso de que se tengan dos males (en el sentido económico), la curva de indiferencia asociada a estos es cóncava y toca las esquinas del gráfico. Para este caso, igualar la TMS a la relación de precios nos lleva a una combinación de bienes que es la peor de entre todas las posibilidades (analice esto último).

2. Matemático: Andrea, Hicks y Slutsky

Andrea Palominovich IV, más conocida como Andrea la Cruel, tiene una función de utilidad por el consumo de Cerveza Duff (x_1) y Buzz Cola (x_2) definida por

$$U(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

Inicialmente Andrea tiene 2 unidades del bien x_1 y 8 unidades del bien x_2 mientras que $p_{x_1} = 2$ y $p_{x_2} = 1$. Luego, debido a un cambio en la demanda producto de las fondas, el precio del bien x_1 baja a $p_{x_1} = 1$.

En base a esto encuentre lo siguiente:

1. Demandas marshallianas.

   Respuesta
   La condición de óptimo está dada por la igualación de la TMS a la relación de precios.

$$\begin{aligned} TMS_{x_2,x_1} &= \frac{p_{x_2}}{p_{x_1}} \\ \frac{Umg(x_2)}{Umg(x_1)} &= \frac{p_{x_2}}{p_{x_1}} \\ \frac{x_1}{x_2} = \frac{p_{x_2}}{p_{x_1}} &\Rightarrow x_1(x_2) = \frac{p_{x_2}}{p_{x_1}} x_2 \ , \ x_2(x_1) = \frac{p_{x_1}}{p_{x_2}} x_1 \end{aligned}$$

   La restricción presupuestaria está dada por $I = p_{x_1} x_1 + p_{x_2} x_2$ y podemos reemplazar una variable a la vez para obtener la demanda marshalliana

$$1) \ I = p_{x_1} x_1 + p_{x_2} x_2 = p_{x_1} x_1 + p_{x_2} \cdot \frac{p_{x_1}}{p_{x_2}} x_1 = 2 p_{x_1} x_1 \ \Rightarrow \ \boxed{x_1^m(p_{x_1}, I) = \frac{I}{2p_{x_1}}}$$

$$2) \ I = p_{x_1} x_1 + p_{x_2} x_2 = p_{x_1} \cdot \frac{p_{x_2}}{p_{x_1}} x_2 + p_{x_2} x_2 = 2 p_{x_2} x_2 \ \Rightarrow \ \boxed{x_2^m(p_{x_2}, I) = \frac{I}{2p_{x_2}}}$$

2. Canasta óptima a precios iniciales y luego a precios finales.

   Respuesta
   A precios iniciales, dada la dotación de recursos, tenemos que el ingreso corresponde a

$$I_1 = p_{x_1} x_1 + p_{x_2} x_2 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 8 = 12$$

   Luego reemplazamos los precios y el ingreso en las demandas marshallianas

$$x_1^i(p_{x_1}, I) = \frac{I}{2p_{x_1}} = \frac{12}{4} = 3 \ , \ x_2^i(p_{x_2}, I) = \frac{I}{2p_{x_2}} = \frac{12}{2} = 6$$

   A precios finales, dada la dotación de recursos, tenemos que el ingreso corresponde a

$$I_2 = p_{x_1} x_1 + p_{x_2} x_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 8 = 10$$

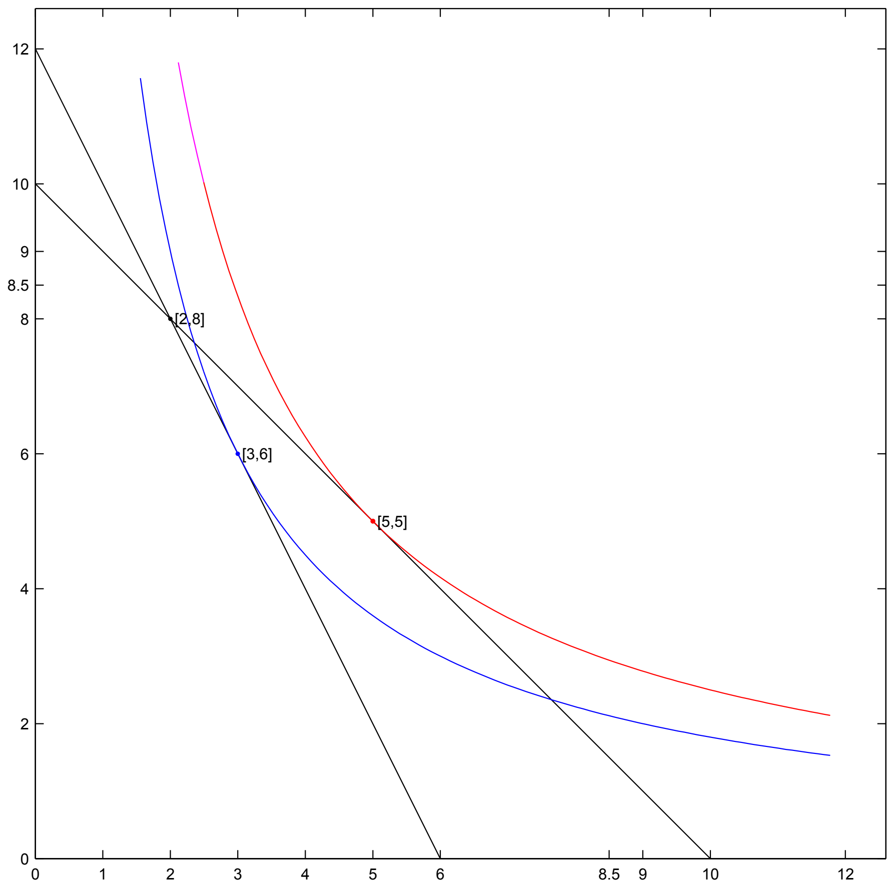
   Luego reemplazamos los precios y el ingreso en las demandas marshallianas

$$x_1^f(p_{x_1}, I) = \frac{I}{2p_{x_1}} = \frac{10}{2} = 5 \ , \ x_2^f(p_{x_2}, I) = \frac{I}{2p_{x_2}} = \frac{10}{2} = 5$$

3. Calcule la utilidad que se obtiene a precios iniciales y a precios finales. ¿Cuál situación es preferible?

Respuesta
La canasta inicial es $(3, 6)$ y la utilidad correspondiente es $U(x_1^i, x_2^i) = 18$. La canasta final es $(5, 5)$ y la utilidad correspondiente es $U(x_1^f, x_2^f) = 25$. Luego, seria preferible la situación final porque la variación de utilidad es positiva ($\Delta U = U^f + U^i = 7$).

4. Grafique ambas restricciones presupuestarias y las curvas de indiferencia que pasan por los óptimos finales e iniciales.



5. Efectos sustitución y efecto ingreso, debido al cambio en precios, utilizando el método de Slutsky.

Respuesta
Debemos tener presente que ambos efectos se aplican al bien x y no al bien y ya que el precio de este último no cambia.

La restricción presupuestaria inicial es $RP_i : \ 2x_1 + x_2 = 12$ mientras que la restricción final es $RP_f : \ x_1 + x_2 = 10$. Con la restricción inicial se pueden consumir las canastas $(6, 0)$, $(0, 12)$ y $(3, 6)$ que es la canasta óptima a precios iniciales. Con la restricción final se pueden consumir las canastas $(10, 0)$, $(0, 10)$ y $(5, 5)$ que es la canasta óptima a precios finales.

Luego, tenemos que la restricción presupuestaria inicial pasa por el punto $(3, 6)$ y se intersecta con la restricción inicial en el punto $(2, 8)$, para obtener esto último debemos igualar ambas restricciones:

$$x_1 + x_2 - 10 = 0 \text{ y } 2x_1 + x_2 - 12 = 0$$

podemos restar ambas ecuaciones para eliminar x_2, entonces

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 - 10) - (2x_1 + x_2 - 12) = 0 \;&\Rightarrow\; (x_1 - 2x_1) + (x_2 - x_2) + (-10 + 12) = 0\\ &\Rightarrow\; -x_1 + 2 = 0\\ &\Rightarrow\; \boxed{x_1 = 2}\end{aligned}$$

reemplazamos en cualquiera de las dos restricciones para obtener x_2, si reemplazamos en la restricción final se tiene

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - 10 = 0 \;&\Rightarrow\; 2 + x_2 - 10 = 0\\ &\Rightarrow\; x_2 - 8 = 0\\ &\Rightarrow\; \boxed{x_2 = 8}\end{aligned}$$

Nos falta encontrar una curva de indiferencia tangente a una recta paralela a la recta que pasa por el punto $(5, 5)$. Luego, debe existir una recta que pasa por el punto $(3, 6)$ y tiene la misma pendiente que la restricción presupuestaria final. Es decir, debe existir una recta de la forma $x_1 + x_2 = c$. Para obtener el valor de c reemplazamos directamente

$$x_1 + x_2 - c = 0 \;\Rightarrow\; 3 + 6 - c = 0 \;\Rightarrow\; 9 - c = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{c = 9}$$

Ahora podemos aplicar directamente la condición de óptimo

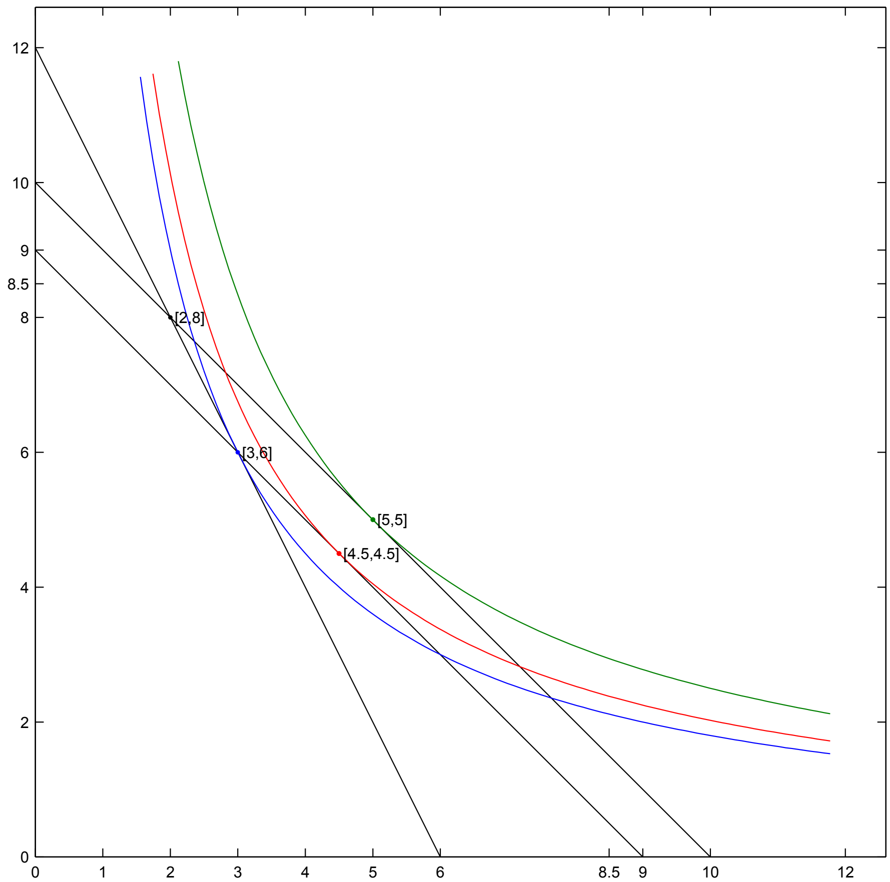
$$\begin{aligned}TMS_{x_2,x_1} &= \frac{p_{x_2}}{p_{x_1}}\\ \frac{Umg(x_2)}{Umg(x_1)} &= \frac{p_{x_2}}{p_{x_1}}\\ \frac{x}{y} &= \frac{p_{x_2}}{p_{x_1}}\\ \frac{x}{y} &= 1\end{aligned}$$

Dado que la recta que buscábamos es $x_1 + x_2 = 9$ tenemos que $2x_1 = 2x_2 = 9$ por condición de óptimo. En consecuencia la curva de indiferencia es tangente a la recta encontrada en el punto $(4,5; 4,5)$.

Finalmente, el efecto total corresponde a la diferencia en el eje x entre el punto $(3, 6)$ y $(5, 5)$ por lo que su valor corresponde a $|ET| = 2$. Este se separa en:

- Efecto sustitución: Corresponde a la diferencia en el eje x entre el punto $(3, 6)$ y $(4,5; 4,5)$ por lo que su valor corresponde a $|ES| = 1,5$.
- Efecto ingreso: Corresponde a la diferencia en el eje x entre el punto $(4,5; 4,5)$ y $(5, 5)$ por lo que su valor corresponde a $|EI| = 0,5$.

El gráfico nos queda de la siguiente forma:



[2,8]
[3,6]
[5,5]
[4.5,4.5]
12
10
9
8.5
8
6
4
2
0
0
1
2
3
4
5
6
8.5
9
10
12