

# Pauta Ayudantía 1

AYUDANTES: Adolfo Fuentes, Rodrigo Garay, María José Pérez y Mauricio Vargas

27 de julio de 2011

## 1. Sistemas de Ecuaciones

1. ¿Qué es un sistema de ecuaciones?

### Respuesta

Un sistema de ecuaciones consiste en 2 o más ecuaciones de 2 o más incógnitas. En particular, diremos que el sistema es de  $2 \times 2$  si consiste en 2 ecuaciones con 2 incógnitas, y de  $3 \times 3$  si consiste en 3 ecuaciones con 3 incógnitas. En adelante nuestras incógnitas serán designadas por las últimas letras del alfabeto a menos que se indique lo contrario.

**Ejemplo 1.** Sistema de  $2 \times 2$

$$\begin{cases} ax + y = b \\ x - ay = 2b \end{cases}$$

Tenemos 2 incógnitas,  $x$  e  $y$ , mientras que  $a$  y  $b$  son coeficientes conocidos que podrían ser números, pero resolver con esos factores nos da la solución general para esa forma del sistema. Hay 2 ecuaciones y 2 incógnitas, es decir, el sistema es de  $2 \times 2$ .

**Ejemplo 2.** Sistema de  $3 \times 3$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 9 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

Notemos que la tercera ecuación del sistema tiene 2 incógnitas, pero en total entre las 3 ecuaciones contamos 3 incógnitas y el sistema es de  $3 \times 3$ .

2. ¿Qué significa resolver un sistema de ecuaciones?

### Respuesta

Resolver el sistema es encontrar los valores (literales o numéricos) de las incógnitas pero tiene también un significado **geométrico**. Resolver un sistema de  $2 \times 2$  es encontrar las coordenadas de intersección de las dos rectas representadas por las 2 ecuaciones, mientras que resolver un sistema de  $3 \times 3$  es encontrar las coordenadas del punto de intersección de los tres planos dados por las tres ecuaciones. Por las explicaciones anteriores dos rectas no siempre se cortan en un punto pues pueden también ser paralelas o coincidir, o que 3 planos no siempre concurren en un punto porque también pueden tener una recta común, o pueden coincidir completamente, o bien ser paralelos. Es decir, un sistema no siempre tiene solución única, es más, no siempre tiene solución.

El caso más simple de analizar gráficamente es el de sistemas de  $2 \times 2$  y lo veremos con ejemplos.

3. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - 7y = 8 \\ 2y - x = -3 \end{cases}$$

por el método de igualación.

**Igualación.** Consiste en tomar dos ecuaciones y en ambas despejar una variable, para luego igualar ambas ecuaciones. Esto se repite hasta llegar a una ecuación de una sola incógnita, para resolverla y sustituir en alguna ecuación, o repetir todo el proceso para despejar esta vez otra incógnita. Recuerden que no podemos inventar información para resolver el sistema.

**Respuesta**

Despejemos  $x$  en ambas

$$\begin{cases} x = \frac{7y+8}{3} \\ x = 2y + 3 \end{cases}$$

Luego,

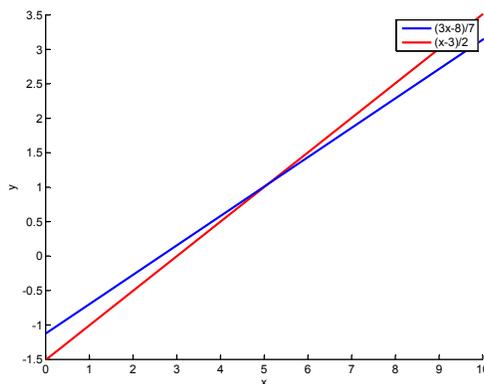
$$\frac{7y + 8}{3} = 2y + 3$$

donde resolviendo obtenemos  $y = 1$ . Ahora podríamos hacer algo similar a lo anterior, esta vez igualando  $y$  para obtener  $x$ . Pero es más rápido reemplazar  $y = 1$  en  $x = 2y + 3$ , obteniendo  $x = 5$ .

**Solución:**

$$(x, y) = (5, 1)$$

y el gráfico del sistema es



4. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 2 \\ 3x + y - 2z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

por el método de igualación.

**Respuesta**

De la primera y la última ecuación obtenemos

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(2 + 3y + 5z) \\ x = z - y \end{cases}$$

igualamos y se obtiene  $5y + 3z = -2$ .

De la segunda y la última ecuación obtenemos

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(3 - y + 2z) \\ x = z - y \end{cases}$$

igualamos y se obtiene  $z - 2y = 3$ .

Por lo anterior se tiene

$$\begin{cases} 5y + 3z = -2 \\ z - 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{3}(2 + 5y) \\ z = 3 + 2y \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3}(2 + 5y) = 3 + 2y$$

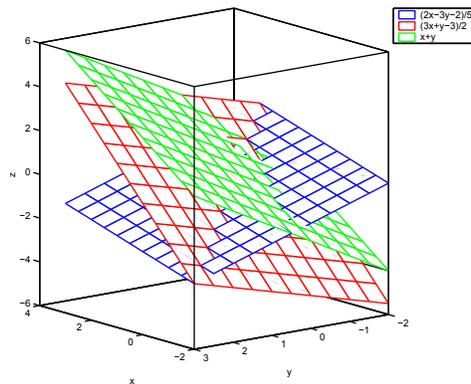
Resolviendo obtenemos  $y = -1$ . Reemplazando en alguna de las ecuaciones del sistema de  $2 \times 2$  anterior, por ejemplo en  $z - 2y = 3$ , obtenemos  $z = 3 + 2y = 3 - 2 = 1$ .

Con  $y = -1, z = 1$  reemplazamos en alguna de las ecuaciones del sistema de  $3 \times 3$  original. Por ejemplo reemplazando en  $x + y - z = 0$ , se obtiene  $x = 2$ .

**Solución:**

$$(x, y, z) = (2, -1, 1)$$

y el gráfico del sistema es



5. TAREA: Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y = 23 \\ x - 8y = 3 \end{cases}$$

usando el método de eliminación y además resuelva los sistemas anteriores por el método de eliminación.

**Eliminación:** Tomamos dos o más ecuaciones del sistema y las multiplicamos por algún factor conveniente (entero, fracción, positivo, negativo, etc pero nunca cero) de manera que al sumar estas igualdades término a término se elimine alguna incógnita o se obtenga una ecuación de primer grado con una sola incógnita que se supone, a estas alturas ya sabemos resolver.

**Respuesta**

Multiplicamos la segunda ecuación por  $-3$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 23 \\ -3x + 24y = -9 \end{cases}$$

Sumamos término a término obteniendo  $28y = 14$ , es decir  $y = \frac{1}{2}$ . Sustituyendo este valor en la segunda ecuación del sistema original se obtiene  $x = 7$ .

**Solución:**  $(x, y) = \left(7, \frac{1}{2}\right)$

Los demás problemas ya fueron resueltos y sólo cambia un poco el desarrollo.

## 2. Preguntas Cortas

1. La principal diferencia entre microeconomía y macroeconomía es que esta última utiliza mucha matemática y la primera es mucho más conceptual.

### Respuesta

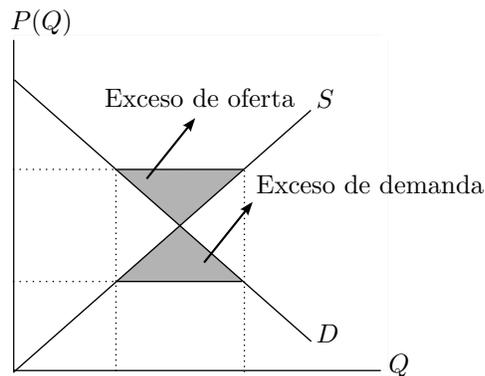
Falso. La microeconomía es una rama de la economía que estudia las interacciones que se dan entre los agentes de forma individual, centrándose en qué aspectos determinan el comportamiento de estos. Sus principales estudios son la teoría del consumidor y la teoría de la firma. Por otro lado, la macroeconomía estudia las interacciones de los agentes a nivel agregado, centrándose en analizar las tendencias y posibles intervenciones. Sus principales estudios son los efectos de la política fiscal y la política monetaria.

2. Cuando el precio máximo que un consumidor se dispone a pagar son \$500 por los chocolates, el precio de equilibrio es \$500.

### Respuesta

Falso. La condición de equilibrio es  $Q^S = Q^D$ . Si los consumidores están dispuestos a pagar hasta cierto precio, dicho precio corresponde a su precio de reserva.

Recordemos el siguiente gráfico



Los precios por sobre el precio de equilibrio generan que la cantidad ofertada sea mayor que la cantidad demandada. Los precios por debajo del precio de equilibrio generan que la cantidad ofertada sea menor que la cantidad demandada.

3. La función de oferta para un cierto bien asigna a cada precio el número de unidades del bien que los productores desearían vender a ese precio. Entonces, por definición es exactamente igual dejar el precio en función de la cantidad que la cantidad en función del precio en un gráfico de oferta y demanda.

### Respuesta

Lo que el comente dice respecto de la función de oferta es cierto pero no debemos olvidar que en economía trabajamos con la oferta inversa (simplemente se omite este "apellido" porque por convención se trabaja así), la cual a cada nivel de producción le asocia el menor precio al cual los productores estarían dispuestos a producir dicha cantidad.

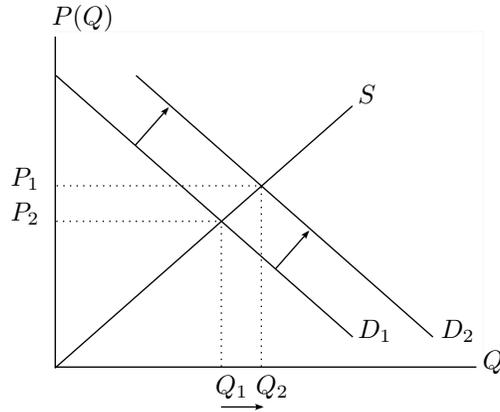
Podemos concluir que mientras mayor sea el precio de un bien los productores estarían dispuestos a vender una mayor cantidad. Es decir, se concluye que la función de oferta (inversa) tiene pendiente positiva. La función de oferta (no inversa) también tiene pendiente positiva.

Finalmente, debemos destacar que dejar una variable en función de otra cambia ligeramente la interpretación que damos a los gráficos pero, dada la función de demanda, se llega al mismo equilibrio con ambas formas tras despejar los precios o las cantidades tanto en la oferta como en la demanda.

4. El mercado de los completos en nada afecta al mercado de las hamburguesas.

**Respuesta**

Falso. Ambos bienes, en general, son sustitutos. Cuando el precio de los completos aumenta, la gente tenderá a dejar de consumir completos reemplazándolos por hamburguesas. Los consumidores demandarán más hamburguesas para cada precio dado. Gráficamente



5. Considere los siguientes datos sobre el precio del pan (datos hipotéticos):

Precio del kg. (en \$)	320	340	360	380	400	420
Oferta (en kg.)	8.000	8.500	9.000	9.500	10.000	10.500

Determine si esto corresponde a una función de oferta mediante los siguientes pasos:

- a) Determine si la relación entre ambas variables sigue una proporcionalidad directa.
- b) Obtenga la función que relaciona precio y cantidad y grafique esta función.
- c) Concluya.

**Respuesta**

Siguiendo los pasos:

- a) Una forma conveniente es calcular la razón de cambio del aumento de precios y el cambio de cantidades. Es decir, debemos calcular

$$\frac{P_2 - P_1}{Q_2 - Q_1}$$

Si tomamos  $P_2 = 340$  y  $P_1 = 320$  las cantidades correspondientes son  $Q_2 = 8,500$  y  $Q_1 = 8,000$ , esto nos da una razón 1:25 (simplificando 20:500), es decir por cada una unidad que aumenta el precio aumenta en 25 unidades la cantidad. Luego, para cualquier incremento de precios tras calcular la razón de cambio obtenemos la misma constante de proporcionalidad. Concluimos entonces que la relación está dada por una recta y que no hay cambios de pendiente.

- b) De la parte anterior sabemos que la relación es lineal y deberíamos saber que la ecuación de una recta (con  $Q$  como variable independiente) es

$$P = mQ + n$$

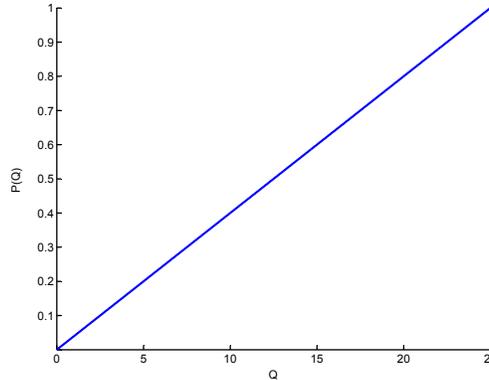
También de la parte anterior obtenemos que  $m = 1/25$ , entonces nos falta saber el valor de  $n$ . Cuando el precio es, por ejemplo, 360 tenemos

$$360 = \frac{1}{25} \cdot 9000 + n \Rightarrow 360 = 360 + n \Rightarrow \boxed{n = 0}$$

Entonces la función es

$$P = \frac{1}{25} \cdot Q$$

y el gráfico corresponde a una recta con pendiente positiva.



- c) De la parte anterior el valor  $n$  nos dice que si el precio es cero los productores ofrecen cero, en esto hay que ser cuidadosos con algunos valores de  $n$  que podrían generar, por ejemplo, precios negativos para cantidades positivas lo cual carece de sentido lógico y económico. El valor de  $m$  nos dice que si aumenta la cantidad entonces el precio aumentará. Ambos hechos nos permiten concluir que esta función refleja el comportamiento de la oferta, entonces es una función de oferta.

### 3. Equilibrio de mercado

**Problema 1.** En la ciudad de Springfield se produce Cerveza Duff. Los economistas de dicha ciudad que han estimado las funciones de oferta y demanda llegaron al siguiente resultado:

$$Q^S = \frac{P}{2} \quad \text{y} \quad Q^D = 36 - P$$

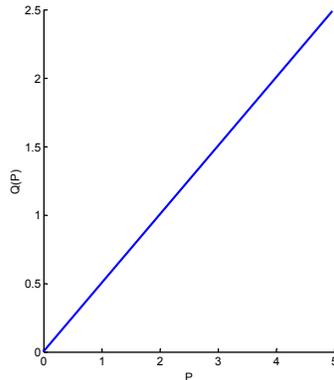
En base a estos datos determine:

1. Grafique la oferta con el precio en función de la cantidad y la cantidad en función del precio. ¿En qué difieren los gráficos?
2. Calcule la cantidad de equilibrio y en base a dicha cantidad encuentre el precio de equilibrio. Grafique el equilibrio dejando el precio en función de la cantidad.
3. ¿Qué se entiende por equilibrio? Explique brevemente.

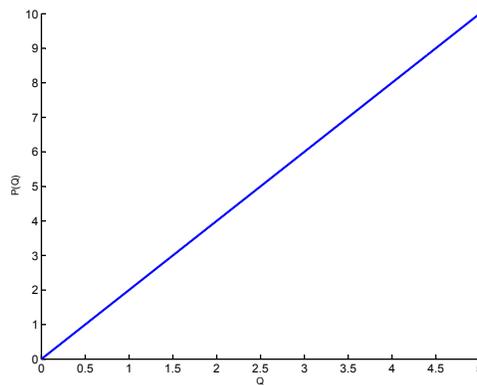
TAREA: Considere que en la ciudad hay 15 firmas que producen la Cerveza Duff. De esas firmas hay 10 que son idénticas y tienen una función de oferta  $q_1^S = \frac{P}{40}$  y 5 firmas distintas a las anteriores pero idénticas entre ellas que tienen una función de oferta  $q_2^S = \frac{P}{20}$ . La curva de demanda por cervezas es  $Q^D = 36 - P$ . Encuentre la curva de oferta agregada. Además grafique la oferta agregada y la de cada tipo de firmas según precio en función de cantidad y cantidad en función de precio.

**Respuesta**

1. Graficando con la cantidad como variable dependiente tenemos  $Q(P) = P/2$



Graficando con el precio como variable dependiente tenemos  $P(Q) = 2Q$



La interpretación de la pendiente es distinta en los dos gráficos. Es fundamental distinguir que ambos gráficos no son lo mismo. El gráfico de cantidad en función del precio asigna a cada precio el número de unidades del bien que los productores desearían vender a ese precio. Por otra parte, el gráfico de precio en función de la cantidad asigna a cada cantidad el precio mínimo al que los productores estarían dispuestos a producir dicha cantidad.

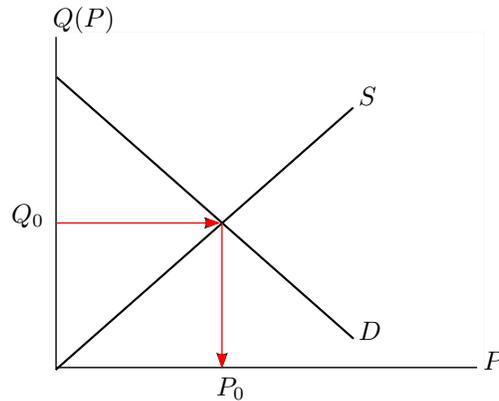
2. Para encontrar el equilibrio aplicamos la condición  $Q^S = Q^D$

$$Q^S = Q^D \Rightarrow 36 - P = \frac{P}{2} \Rightarrow \boxed{P = 24}$$

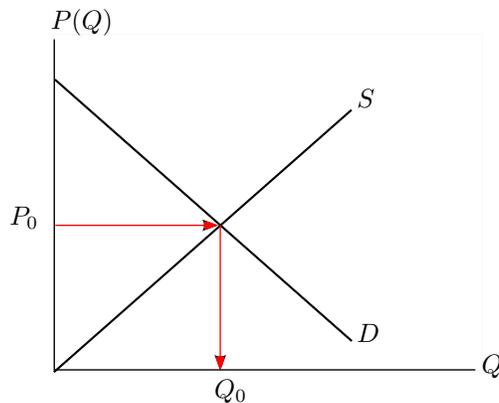
con este precio la cantidad de equilibrio se encuentra reemplazando en la función de oferta o en la función de demanda (es indiferente), por efectos de interpretación nos quedaremos con la oferta

$$Q^S = \frac{P}{2} \Rightarrow \boxed{Q^S = 12}$$

Cuando igualamos cantidades, dejamos todo en función de precios que tras reemplazar en la oferta o en la demanda nos queda la cantidad de equilibrio. Gráficamente



Graficando con el precio como variable dependiente



3. La noción de equilibrio en economía es muy importante y requiere aclarar bien algunos conceptos. En general, se podría pensar que equilibrio es  $Q^S = Q^D$  lo cual es un concepto inacabado. El hecho de que las cantidades ofertadas y demandadas se igualen es la consecuencia del equilibrio. Pero, ¿Qué es equilibrio? Aún no lo hemos respondido porque partimos de la consecuencia y no de la causa.

La teoría plantea que existe equilibrio competitivo en un mercado (por ejemplo en el mercado del trabajo, del pan, del petróleo, etc.) si existe un precio en ese mercado (es decir por la mercancía en cuestión que se transa en dicho mercado) tal que no hay exceso de demanda pero que eventualmente podría haber exceso de oferta.

Entonces, dejando de lado el caso en que exista exceso de oferta, en la economía (varios mercados que se interrelacionan) decimos que un equilibrio competitivo es una "colección" o mejor dicho un conjunto de precios (uno para cada mercancía) tales que la cantidad ofertada de cada bien (por los productores) es igual a la cantidad demandada de cada bien (por los consumidores). El equilibrio competitivo, en un sentido bien preciso, es eficiente.

Desarrollo de la *tarea*: Para las primeras 10 firmas tenemos

$$Q_1^S = 10q_1^s = \frac{10P}{40} = \frac{P}{4}$$

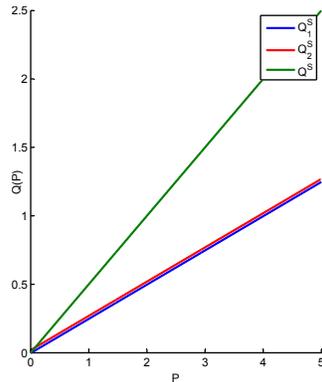
Para las otras 5 firmas tenemos

$$Q_2^S = 5q_2^s = \frac{5P}{20} = \frac{P}{4}$$

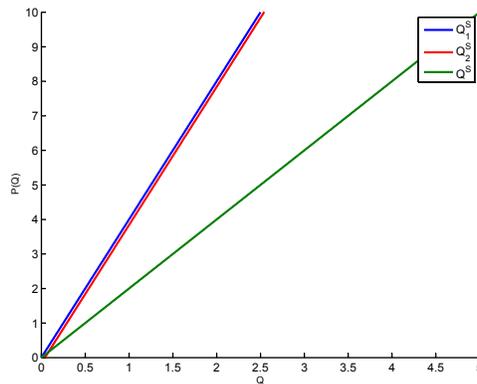
La cantidad total que ofertan es

$$Q^S = Q_1^S + Q_2^S = \frac{P}{4} + \frac{P}{4} = \frac{P}{2}$$

Graficando con la cantidad como variable dependiente



Graficando con el precio como variable dependiente



**Problema 2.** En el país de 31 Minutos las curvas de oferta y demanda por sopaipillas están dadas por

$$P^S = 2Q + 20 \quad \text{y} \quad P^D = 300 - 5Q$$

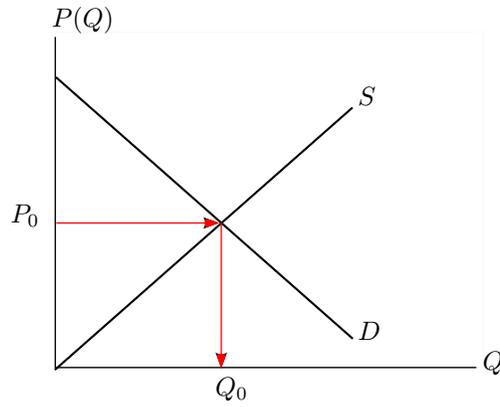
En base a estos datos calcule el precio de equilibrio y explique su resultado. ¿Qué sucede si  $P = 120$ ?

**Respuesta**

Lo que puede confundir es que no aparecen las cantidades en función del precio. La condición que debemos aplicar es  $P^S = P^D$ , es decir

$$2Q + 20 = 300 - 5Q \Rightarrow \boxed{Q = 40}$$

y en base a esto podemos reemplazar en la oferta para llegar al precio de equilibrio que es  $P = 100$ . Cuando igualamos precios, dejamos todo en función de cantidades que tras reemplazar en la oferta o en la demanda nos queda el precio de equilibrio. Gráficamente



Si  $P = 120$  la cantidad demandada es  $Q^D = 36$  y la cantidad ofertada es  $Q^S = 50$ . Es decir, hay un exceso de oferta (ver el gráfico del comentario 2.)