

Chapter Title: RESISTENCIA DE MATERIALES Y DISEÑO ESTRUCTURAL

Book Title: Fundamentos de ingeniería estructural para estudiantes de arquitectura

Book Subtitle: Tercera edición

Book Author(s): Rafael Riddell C. and Pedro Hidalgo O.

Published by: Ediciones UC. (2015)

Stable URL: <https://www.jstor.org/stable/j.ctt1bhkq3k.5>

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at <https://about.jstor.org/terms>



JSTOR

Ediciones UC is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Fundamentos de ingeniería estructural para estudiantes de arquitectura*

III.

RESISTENCIA DE MATERIALES Y DISEÑO ESTRUCTURAL

3.1 Introducción

El objetivo del diseño estructural es proveer una estructura segura y económica para satisfacer una necesidad específica: vivienda, hospital, infraestructura de transporte, o una planta industrial, entre infinitos ejemplos. Por seguridad se entiende la capacidad resistente de la estructura para servir sin fallas durante su vida útil. El aspecto económico interviene porque siempre puede haber soluciones alternativas, y para cada una de ellas hay un óptimo de costo mínimo, al que se procura llegar.

En su concepción más amplia el proceso de diseño estructural consta de tres etapas:

- Estructuración
- Análisis
- Dimensionamiento

La estructuración comprende la definición de la forma, o tipo estructural, incluyendo el material a usar. Por ejemplo, un edificio de hormigón armado se puede estructurar en base a marcos, en base a muros, o a una combinación de ambos; en cada uno de estos casos hay que optar entre alternativas, por ejemplo, en el caso de estructura de marcos habrá que definir cuántas columnas tendrá cada plano resistente, es decir, el espaciamiento entre ellas. En el caso de un puente, puede estructurarse como un reticulado de acero, un arco de hormigón armado, una losa sobre vigas de hormigón pretensado, una losa sobre vigas de acero o una infinidad de alternativas que dependen principalmente de la luz a cubrir. En todo caso, la estructuración que prevalecerá en definitiva será aquella que, satisfaciendo todas las condiciones de seguridad y funcionalidad de la obra, tenga el mínimo costo.

El análisis comprende la modelación de la estructura y el cálculo de deformaciones y esfuerzos internos de sus elementos. Hasta este punto, en este texto, todos los esfuerzos

se han concentrado en establecer conceptos sólidos de análisis a través del estudio de la estática y de las estructuras estáticamente determinadas. Estos conceptos son suficientes para abordar la tercera etapa, que es el objetivo de este Capítulo, aunque posteriormente se profundizará en aspectos de análisis de estructuras estáticamente indeterminadas, esenciales para la comprensión del comportamiento sísmico y los conceptos de diseño sismorresistente de estructuras.

El dimensionamiento, comúnmente llamado también “diseño” de los elementos, requiere la consideración de los esfuerzos internos a que está sometido el elemento, del comportamiento del elemento frente a tal sollicitación, en lo que obviamente incide el material a usar, y del nivel de seguridad que es razonable adoptar. Las propiedades de los materiales y su capacidad para resistir esfuerzos son temas que comprende la disciplina de la Resistencia de Materiales que menciona el título de este Capítulo. Por otra parte, cabe destacar que el diseño no es exclusivamente un problema de resistencia, ya que con frecuencia pueden controlar las condiciones de *serviciabilidad*, por ejemplo, la limitación de deformaciones para el adecuado funcionamiento o prestación de servicio de un elemento.

El aspecto seguridad se abordará a lo largo de este Capítulo y también posteriormente. A nivel introductorio, en términos muy generales, puede decirse que se entiende por seguridad el evitar que la estructura o elemento alcance o sobrepase un estado límite hasta el cual se considera que el comportamiento de la estructura es aceptable. Tal estado límite es el de falla o colapso de un elemento o de la estructura completa. Para establecer una medida cuantitativa de la seguridad se introduce el concepto de *factor de seguridad* cuya evaluación requiere comparar la “demanda” de resistencia (sollicitación o carga) con la capacidad “suministrada” a la estructura (su resistencia máxima).

La concepción más simplista del factor de seguridad puede ilustrarse con el siguiente ejemplo: el cable de una grúa debe ser capaz de resistir una carga de 3 toneladas, y se ha seleccionado un cable de acero de calidad y sección tal que su resistencia nominal de rotura es de 5 toneladas. Decimos entonces que el factor de seguridad (FS) a la rotura del cable es:

$$FS = \frac{5}{3} = 1,7$$

El hipotético problema anterior nos induce de inmediato a pensar que si existiera certeza de que la carga máxima no excederá de 3 toneladas, bastaría con una resistencia levemente superior para evitar la rotura, y por tanto se podría usar un cable más económico. Sin embargo, en la realidad hay incertidumbre respecto al valor preciso de la carga que el operador puede ser requerido de alzar, como también respecto de la resistencia última real del cable utilizado en esa grúa en particular. En rigor se trata de un problema probabilístico, ya que tanto la sollicitación como la capacidad resistente son variables aleatorias.

Por ello el diseño se apoya en normas. Las normas establecen requisitos mínimos que deben cumplirse, los que han resultado de conjugar antecedentes provenientes de tres fuentes: estudios teóricos, evidencia experimental, y la experiencia. Los estudios teóricos ofrecen modelos analíticos para el tratamiento de los fenómenos físicos y aportan resultados de los casos típicos de interés. Los estudios experimentales permiten abordar problemas muy complejos de modelar y analizar teóricamente, y recolectar datos básicos como las propiedades de los materiales. La experiencia aporta el conocimiento de la práctica profesional y de la industria, en cuanto a lo que ha dado buenos o malos resultados en el pasado.

Hay dos tipos de normas claves para el diseño. Las normas de cargas que especifican las solicitaciones a utilizar para condiciones de viento, nieve, sismo, sobrecargas de uso, entre otras; ello es muy útil porque entregan los valores a usar en los casos más comunes, evitando al calculista estudiar individualmente un tema de por sí complejo por la incertidumbre de las cargas. Las normas de diseño de los materiales (acero, madera, hormigón, albañilería) entregan los requisitos mínimos que deben cumplirse en el diseño. Las normas mencionadas son bastante extensas porque cubren un sinnúmero de aspectos de detalle. La presentación y discusión de aspectos normativos se aleja considerablemente del objetivo de este texto, que es enfatizar en los conceptos básicos del dimensionamiento de elementos estructurales. Por ello, sólo se recapitulará sobre el tema al final de este Capítulo, después de haber introducido al lector al diseño estructural.

3.2 Elementos Sometidos a Carga Axial

3.2.1 Concepto de Tensión Unitaria

En la medida que se progresa en el proceso de diseño es necesario ir concentrando la atención en zonas cada vez más puntuales de la estructura. Desde el análisis del equilibrio estático global iniciado en el Capítulo 1, se llegó al final del Capítulo 2 a la evaluación de esfuerzos internos en secciones a lo largo de los elementos de la estructura. Ahora, para dimensionar una sección es necesario saber que ocurre en cada punto de ella, pues habrá que comparar la solicitación en el punto más crítico de la sección con la resistencia del material que la constituye.

La necesidad de analizar el esfuerzo que realiza el material en cada punto se hace evidente si se piensa en dos elementos distintos y se desea saber en cuál de ellos el material está trabajando más intensamente. Para ello se introduce el concepto de *tensión*, que corresponde a la fuerza que se transmite por unidad de área de la sección. En el caso de elementos sometidos a esfuerzo normal (axial) únicamente, tema de esta Sección, la tensión axial se define como:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (3-1)$$

en que P es el esfuerzo normal que se transmite a través de la sección transversal de área A . En la literatura técnica se utiliza comúnmente la letra griega sigma (σ), inicial de *stress* (tensión en inglés). La tensión axial puede ser de tracción o compresión, en correspondencia con el sentido (signo) del esfuerzo interno normal. La Fig. 3.1 ilustra el sentido físico del concepto de tensión: si el área total A de la sección se cuadrícula de modo de dividirla en un conjunto de cuadrados de área unitaria, σ es la fuerza que se aplica sobre cada cuadrado.

El concepto de tensión es equivalente a lo que en física se define como *presión* o *fuerza por unidad de superficie*. Típicamente la física lo utiliza para referirse a estados de carga que actúan en forma distribuida sobre una superficie. El lector está familiarizado con una serie de aplicaciones del concepto de presión: la presión atmosférica, la presión sanguínea, la presión del agua, la presión de un neumático, etc. La presión atmosférica se debe al peso del aire que se extiende desde el punto en consideración hasta el límite superior de la atmósfera. En el ser humano, la sangre circula impulsada por la contracción del ventrículo izquierdo, que bombea sangre a todos los órganos y tejidos (presión sistólica), cuando el corazón se relaja, disminuye la presión del sistema arterial (presión diastólica). La Tabla 3.1 da valores típicos de la presión en varios casos comunes. Las unidades más usuales de presión son los *centímetros de Mercurio* (barómetro de Torricelli), la lb/pulg^2 , y el kg/cm^2 . En este texto se usará el kg/cm^2 como unidad de tensión, por cierto entendiendo el kilogramo como kilogramo peso o fuerza.

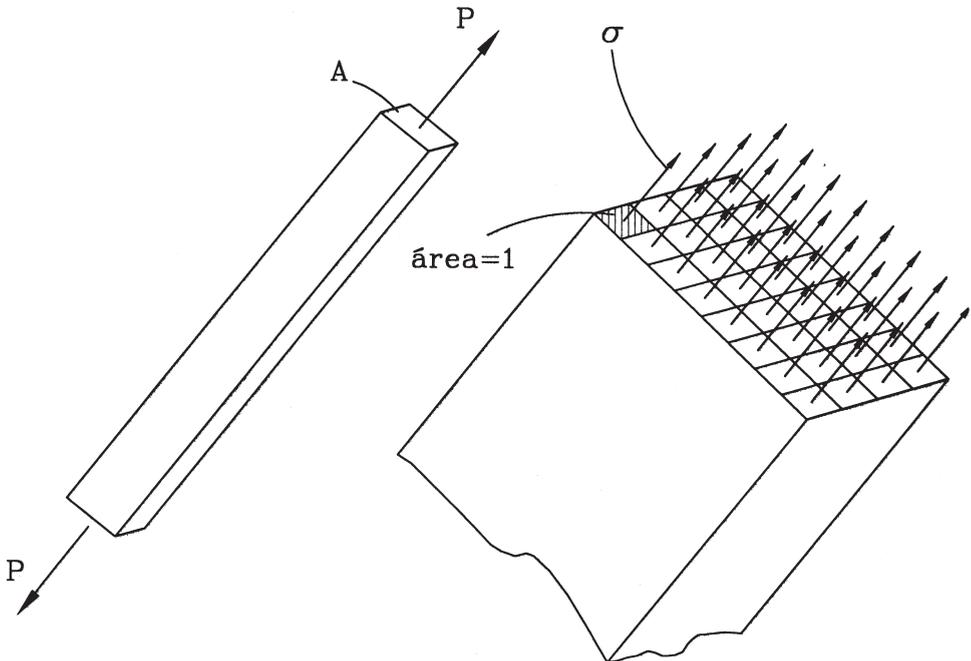


Figura 3.1 Tensión axial

TABLA 3.1 Ejemplos de presión

| Presión | Unidad Típica | Kg/cm ² |
|---|----------------------------------|--------------------|
| atmosférica | 1 atmósfera = 76 cm Hg | 1,03 |
| arterial sanguínea (sistólica/diastólica) | 12/8 cm Hg | 0,16/0,11 |
| intraocular normal | 0,8 – 2,2 cm Hg | 0,01 – 0,03 |
| aire neumáticos | 28 lb/pulg ² | 2 |
| red de agua potable | 57 – 85 lb/pulg ² | 4 – 6 |
| fractura del hormigón | 3000 – 5000 lb/pulg ² | 150 – 350 |
| a 200 m de profundidad en el mar | 307 lb/pulg ² | 21,6 |
| gas licuado (interior cilindro) | 113 lb/pulg ² | 8 |
| gas (red domiciliaria) | 2,5 lb/pulg ² | 0,18 |
| vacío | 0 | 0 |

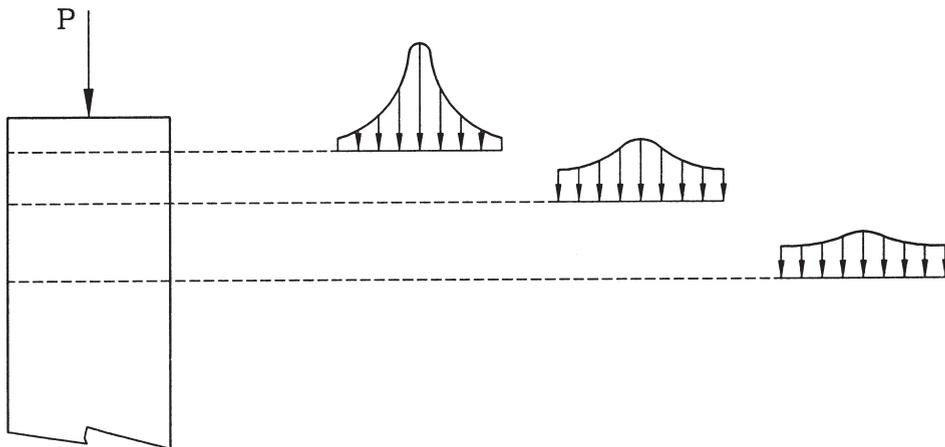


Figura 3.2 Concentración de tensiones por carga puntual

La distribución de tensiones en una sección sometida a esfuerzo axial puede no ser uniforme (constante) sobre la sección. En efecto, el estado de tensiones puede alterarse por diversas singularidades como por ejemplo: la aplicación de una carga concentrada, la existencia de una perforación, un cambio de tamaño de la sección, transmisión de cargas por pernos, soldaduras, etc.

La Fig. 3.2 muestra en forma esquemática la distribución de tensiones en la proximidad del punto de aplicación de una carga concentrada, donde se produce una

concentración de tensiones (tensiones más intensas), que se “suavizan” en la medida que la sección se aleja del extremo cargado. La Fig. 3.3 muestra una placa que tiene un agujero circular, sometida a tensiones de tracción uniformes en sus extremos; pese a la carga uniforme, en la sección que atraviesa la perforación se producirán tensiones mayores junto a ésta.

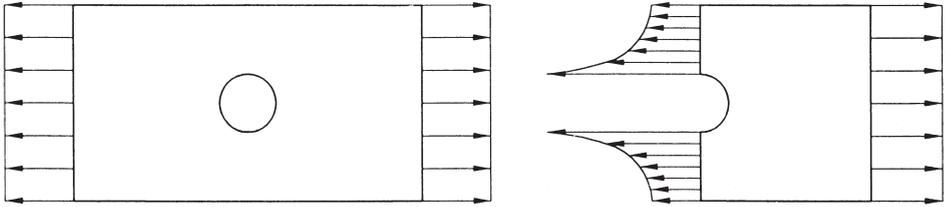


Figura 3.3 Concentración de tensiones por discontinuidad del material

3.2.2 Concepto de Deformación Unitaria

Por primera vez en este texto se considerarán las deformaciones de los materiales. Ello porque es necesario para comprender su comportamiento, y también para poder analizar estructuras hiperestáticas. Conviene insistir de todos modos en que las deformaciones de las estructuras son en general pequeñas, de modo que en la gran mayoría de los casos la hipótesis de cuerpo rígido se satisface con aproximación satisfactoria. Considérese una barra de largo L como la de la Fig. 3.4.a, a la que se aplica una carga axial P de tracción, como muestra la Fig. 3.4.b. Debido a la carga, cualquiera sea el material, la barra experimentará una elongación δ (muy exagerada en la figura para apreciarla mejor), y su largo final será $L_f = L + \delta$. Se define la *deformación unitaria* del elemento, designada por la letra griega epsilon, como

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (3-2)$$

El significado de ε es *la deformación que experimenta cada unidad de longitud del elemento original*. En la barra de la Fig. 3.4.a se han marcado las unidades de longitud como en una regla (centímetros por ejemplo), en la Fig. 3.4.b la distancia entre las marcas ha aumentado: ε es lo que se ha alargado cada unidad de longitud. Por ello, la barra completa que tiene L unidades de longitud, se ha estirado en la cantidad $\delta = L\varepsilon$, lo que también se concluye, obviamente, de la Ec. 3-2. Cabe entonces enfatizar la gran diferencia conceptual que existe entre la *deformación global* o *alargamiento* δ y la *deformación unitaria* ε . Notar incluso que mientras δ puede por ejemplo medirse en centímetros, ε no tiene unidades.

Si el lector tiene alguna duda sobre la explicación de la Fig. 3.4, puede hacer un experimento muy simple, utilizando un elástico ancho y marcando líneas a un

centímetro de distancia. Al estirar el elástico aplicando una fuerza de tracción axial podrá reflexionar sobre la diferencia entre δ y ϵ .

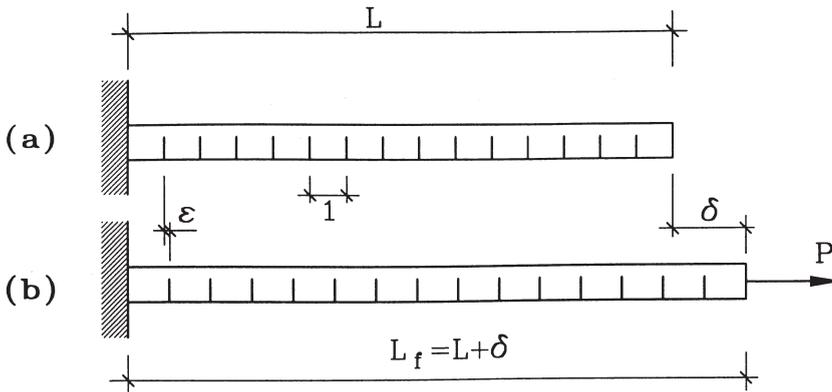


Figura 3.4 Deformación unitaria

3.2.3 Ley de Hooke

Robert Hooke (1635-1703), científico inglés contemporáneo de Newton, enunció su ley general que relaciona las tensiones con las deformaciones de los materiales. En esta sección se presentará el caso particular de los elementos sometidos a esfuerzo axial exclusivamente, por medio de un ensayo de tracción uniaxial.

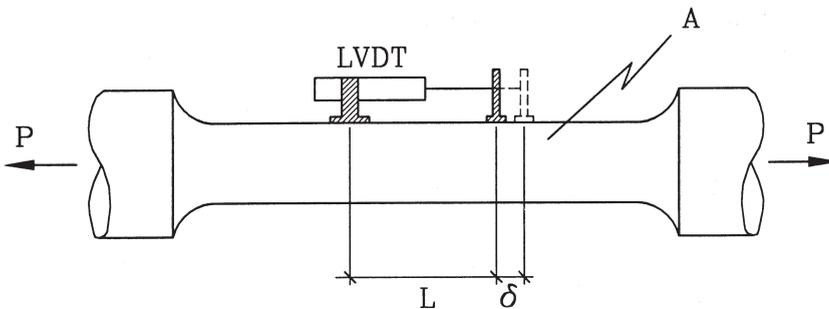


Figura 3.5 Esquema del ensayo de tracción uniaxial

El ensayo de tracción se realiza sobre una muestra de material o probeta (Fig. 3.5) que se prepara dejando una zona central de sección transversal A perfectamente constante mientras los extremos se ensanchan para permitir tomarla con las mordazas de la máquina que ejercerá la fuerza de tracción. La sección varía gradualmente con el propósito que así también lo hagan las tensiones de tracción, de modo que en la zona central éstas sean uniformes. A su vez, en la zona central se marcan dos líneas a una

distancia L conocida, entre las cuales se medirá la elongación de la barra mediante un deformómetro mecánico o un instrumento electrónico muy sensible llamado LVDT (Low Voltage-Displacement Transducer).

El ensayo consiste en aplicar una deformación axial a la probeta de modo de aumentar P progresivamente, leyendo para cada valor de P la elongación δ y calculando la tensión $\sigma = P/A$, en que A es el área inicial de la sección, y la deformación unitaria $\varepsilon = \delta/L$, las que se grafican resultando un gráfico como el de la Fig. 3.6.

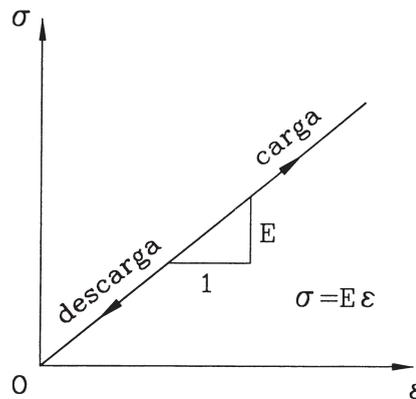


Figura 3.6 Material lineal-elástico (Hookeano)

Del experimento se concluye la Ley de Hooke: *las tensiones y deformaciones unitarias son directamente proporcionales*. Lo que se expresa mediante la *relación tensión-deformación*.

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3-3)$$

en que E es el llamado módulo de elasticidad, que es una constante diferente para cada material. Como la relación anterior corresponde a una línea recta (Fig. 3.6) se dice que el material es *lineal*. Por suerte la mayoría de los materiales presentan esta propiedad, de modo que la Ley de Hooke se usa ampliamente en análisis. Hay que destacar sin embargo, como se confirmará luego, que la linealidad es válida sólo mientras las tensiones se mantienen a un nivel de intensidad bajo o moderado.

Si el ensayo descrito se revierte removiendo paulatinamente la carga, calculando nuevamente para cada valor de P y δ la tensión unitaria σ y la deformación unitaria ε , se observará que los puntos (ε, σ) correspondientes caen sobre la misma línea recta obtenida durante el proceso de carga, volviendo finalmente al origen O con deformación nula para la carga nula. Los materiales que presentan esta propiedad, se denominan materiales *elásticos*, y se dice que tienen la propiedad de *recuperar* la

deformación experimentada frente a una carga. También, como se verá más adelante, la elasticidad se mantiene siempre que no se excedan ciertos límites de deformación. La combinación de las propiedades de linealidad y elasticidad conforman lo que se denomina un material *Hookeano*.

Utilizando las definiciones de las Ecs. 3-1 y 3-2 la relación tensión-deformación dada por la Ec. 3-3 puede escribirse

$$\frac{P}{A} = E \frac{\delta}{L} \quad (3-4)$$

o bien

$$\delta = \frac{PL}{AE} \quad (3-5)$$

que permite calcular la deformación total δ que experimenta un elemento sometido a un esfuerzo axial P , si se conocen sus propiedades (largo L , sección A) y el módulo de elasticidad del material (E). La Ec. 3-5 puede escribirse también como

$$P = k\delta \quad \text{con} \quad k = \frac{AE}{L} \quad (3-6)$$

en que k , que es sólo una propiedad del elemento, se denomina su *rigidez*. La rigidez es la fuerza axial que hay que aplicar a la barra para producirle una elongación unitaria. La Ec. 3-6 se denomina *relación fuerza-deformación* de un elemento sometido a carga axial; ella podría haberse obtenido del mismo ensayo de tracción antes descrito, pero dibujando P - δ en vez de las tensiones unitarias y deformaciones unitarias (σ - ϵ). La gran diferencia es que infinitas barras distintas de un mismo material producirían infinitas líneas P - δ de distinta pendiente k , mientras que las infinitas barras producen una sola línea σ - ϵ de pendiente E . Es decir, cada barra tiene su propia rigidez, pero todas las barras de un material tienen el mismo módulo de elasticidad.

Finalmente, es necesario señalar que a pesar de haber descrito estas propiedades mediante un ensayo de tracción, ellas son por lo general igualmente válidas en compresión. Los límites de validez tanto en tracción como compresión se discutirán posteriormente para cada uno de los materiales estructurales: acero, madera y hormigón.

Ejemplo 3.1

Calcular la elongación de una barra de acero de 12 mm de diámetro y 3 m de largo sometida a una carga de 3 toneladas. El módulo de elasticidad del acero es 2.100.000 kg/cm².

Solución: La barra tiene sección transversal $A=\pi d^2/4$ en que d es el diámetro:

$$A = \frac{\pi(1,2)^2}{4} = 1,13 \text{ cm}^2$$

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{3000 \cdot 300}{1,13 \cdot 2100000} = 0,38 \text{ cm} = 3,8 \text{ mm}$$

Ejemplo 3.2

Dos alambres de 2 metros de largo y sección circular sostienen en conjunto una carga de 1000 kg. Uno es de cobre, con módulo de elasticidad $E_{\text{Cu}}=1.130.000 \text{ kg/cm}^2$ y diámetro 4 milímetros, y el otro es de aluminio, de módulo de elasticidad $E_{\text{Al}}=725.000 \text{ kg/cm}^2$ y diámetro 6 milímetros. ¿Cuál es el esfuerzo axial de cada alambre?.

Solución: En este ejemplo se aborda la solución de un caso hiperestático. Es quizás el caso hiperestático más sencillo que pueda pensarse, y por ello mismo es muy útil para ilustrar los conceptos. Se trata de un problema de partícula, el equilibrio del punto B. Llamando a las fuerzas en las barras T_{Cu} y T_{Al} respectivamente, la estática permite escribir la ecuación de *equilibrio*

$$T_{\text{Cu}} + T_{\text{Al}} = 1000 \quad (\text{i})$$

Claramente la estática es insuficiente para resolver el problema: proporciona una sola ecuación y hay 2 incógnitas. Si los alambres fueran idénticos, se podría argüir que cada uno debería soportar 500 kg, pero como son distintos, no se puede especular sobre relación alguna entre ellos. Es necesario entonces incorporar las deformaciones de los alambres, que cumplen con la Ley de Hooke; luego pueden escribirse las *relaciones fuerza-deformación* (Ec. 3-5):

$$\delta_{\text{Cu}} = \frac{T_{\text{Cu}}L}{A_{\text{Cu}}E_{\text{Cu}}} \quad (\text{ii})$$

$$\delta_{\text{Al}} = \frac{T_{\text{Al}}L}{A_{\text{Al}}E_{\text{Al}}} \quad (\text{iii})$$

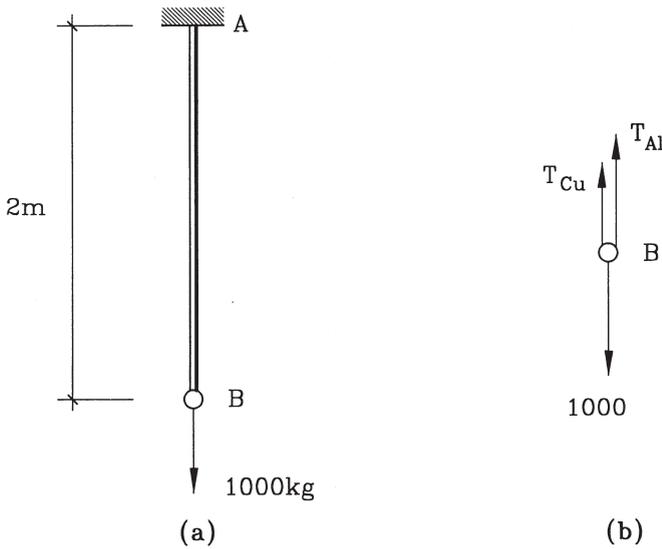


Figura E3.2

Haciendo un recuento de incógnitas, hasta el momento se tienen 4: T_{Cu} , T_{Al} , δ_{Cu} y δ_{Al} . Falta entonces una ecuación, que se obtiene de fijarse en las condiciones que deben cumplir las deformaciones, lo que típicamente se denomina estudiar la *compatibilidad geométrica*. En este caso ella es muy simple, porque ambos alambres unidos en el punto B deben experimentar igual elongación, luego

$$\delta_{Cu} = \delta_{Al} \tag{iv}$$

lo que completa el sistema de 4 ecuaciones necesarias para determinar las cuatro incógnitas. Las tres herramientas utilizadas: *equilibrio*, *relaciones fuerza-deformación* y *compatibilidad geométrica*, constituyen la metodología general para la solución de problemas estáticamente indeterminados, como se establecerá posteriormente. Volviendo a la solución del sistema de ecuaciones, con la ecuación iv, las ecuaciones ii y iii permiten escribir:

$$\frac{T_{Cu}}{A_{Cu} E_{Cu}} = \frac{T_{Al}}{A_{Al} E_{Al}}$$

$$T_{Cu} = \frac{d_{Cu}^2 E_{Cu}}{d_{Al}^2 E_{Al}} T_{Al} = \frac{0,4^2 \cdot 1130000}{0,6^2 \cdot 725000} T_{Al} = 0,693 T_{Al}$$

que combinada con la ecuación i entrega $T_{Cu} = 409,3 \text{ kg}$ y $T_{Al} = 590,7 \text{ kg}$.

3.2.4 Diseño de Elementos de Acero en Tracción

a) Propiedades del Acero Estructural

Para abordar el diseño es necesario estudiar las propiedades del acero más allá del comportamiento inicial lineal-elástico descrito en la sección anterior. Para ello, se prolonga el ensayo de tracción antes descrito hasta la rotura del material. Como resultado se obtiene un gráfico como el de la Fig. 3.7. La Fig. 3.7.a muestra la curva completa hasta la rotura, mientras la Fig. 3.7.b es un detalle de la parte inicial.

En este gráfico se distinguen tres fases de comportamiento del acero estructural:

- El rango lineal-elástico en que se cumple la ley de Hooke, esto es, tensiones y deformaciones unitarias son directamente proporcionales, y las deformaciones son recuperables, es decir desaparecen una vez removida la carga.
- La zona de fluencia. Una vez alcanzado el *límite elástico* o punto nominal de fluencia caracterizado por la tensión σ_y , o *tensión de fluencia*, y la *deformación unitaria de fluencia* ϵ_y , la probeta no es capaz de tomar más carga y se deforma plásticamente bajo tensión constante σ_y . Dado que el módulo de elasticidad de los aceros estructurales es aproximadamente constante, el valor de ϵ_y depende de la tensión nominal de fluencia σ_y , es decir, de la calidad del material. La elongación plástica irrestricta de la probeta finalmente se detiene para una deformación unitaria ϵ_c del orden del 1% al 2%, típicamente igual a 10 ó 20 veces ϵ_y .
- Las zonas de *endurecimiento y estricción*. Al detenerse la deformación bajo carga constante en ϵ_c , es necesario aumentar la carga para aumentar la deformación, o sea, el acero se pone repentinamente más rígido después de haber fluido plásticamente; de ahí el nombre de zona de endurecimiento de este rango del comportamiento. En todo caso, la barra no alcanza jamás la rigidez inicial proporcional a E sino un porcentaje no mayor del 10 ó 20% de E. A medida que se aumenta la carga, la deformación progresa hasta llegar a la *resistencia de máxima tracción* σ_r con deformación unitaria ϵ_r . En los aceros estructurales ϵ_r puede llegar a ser 200 veces ϵ_y , lo que denota una propiedad fundamental de este material, su ductilidad, que se define como:

$$\mu = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_y} \quad (3-7)$$

La ductilidad es una propiedad fundamental del acero, de gran importancia en relación con el modo de falla de los elementos estructurales, tanto metálicos como de hormigón armado. En efecto, bajo condiciones que eliminan la posibilidad de fallas por inestabilidad en perfiles metálicos, o fractura del hormigón en elementos de hormigón armado, el elemento estructural llega a su capacidad última después de grandes deformaciones plásticas, tipo de falla diametralmente opuesto al de un material frágil, como el vidrio, la loza, o el hormigón sin armar, que se caracterizan

por una falla abrupta o explosiva pues no presentan comportamiento plástico. La ductilidad es de gran relevancia para el diseño sísmico, ya que permite diseñar estructuras capaces de incursionar al rango inelástico, deformándose plásticamente mientras mantienen su resistencia, sin fracturarse ni colapsar en forma prematura.

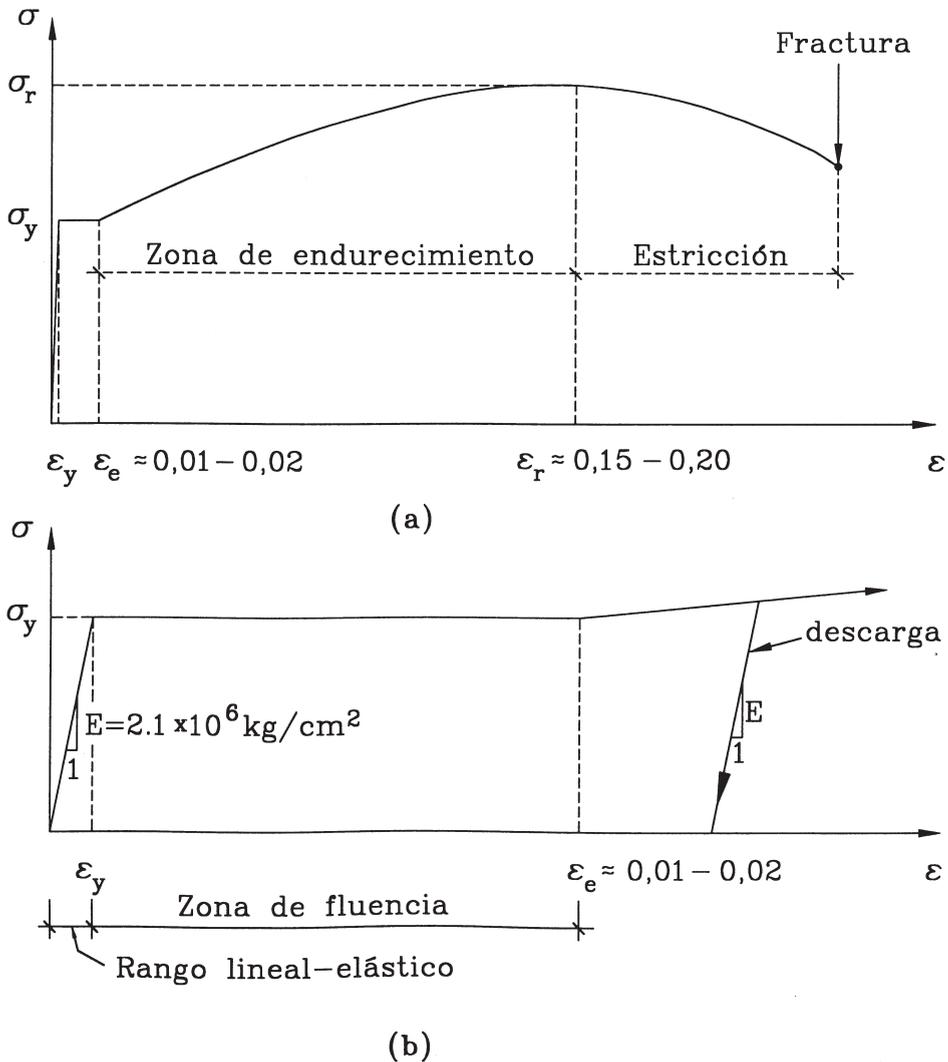


Figura 3.7 Relación tensión-deformación del acero estructural

Volviendo a la discusión de la relación σ - ϵ , cabe destacar que la resistencia *real* del material es mayor que σ_r , ya que la sección de la probeta, en esta fase final, ha disminuido a medida que se ha elongado, pero la propiedad relevante en diseño estructural es precisamente σ_r . Al progresar el ensayo después de alcanzado σ_r la deformación deja de ser uniforme a lo largo de la probeta y se concentra en la sección más solicitada, dando lugar el fenómeno de estricción o formación de un “cuello” notorio donde finalmente se produce la fractura. La deformación unitaria nominal de fractura (referida al largo L de la probeta) varía considerablemente dependiendo de la geometría de la probeta (largo y sección) alcanzando valores entre 25 y 40%; estos valores, y la curva σ - ϵ para $\epsilon > \epsilon_r$ son en realidad irrelevantes, ya que corresponden a un estado de deformaciones no uniforme en que la zona crítica se deforma plásticamente mientras otras porciones de la barra se descargan elásticamente.

La Fig. 3.7.b muestra también que la descarga desde cualquier punto del rango inelástico ocurre con pendiente paralela a la rigidez del rango elástico, sin embargo, la deformación no vuelve a cero, queda entonces una deformación *permanente* o *remanente*, o simplemente como se ha llamado antes, *deformación plástica*.

Cabe mencionar que la curva *real* en un ensayo de compresión difiere de la *real* de tracción, ya que en la fase final el área de la sección aumenta en vez de disminuir; sin embargo, ello no tiene importancia desde el punto de vista del diseño, ya que se trabaja con la relación σ - ϵ con área constante, la que se supone simétrica en tracción y compresión.

El acero estructural para perfiles metálicos se produce mediante *laminación* en caliente, entregándose en Chile en planchas de espesores entre 5 y 50 mm. Planchas delgadas entre 0,4 y 4 mm de espesor se obtienen de un segundo proceso de laminado en frío. No hay en Chile laminadores pesados para producir perfiles estructurales directamente, por ello, éstos se fabrican por doblado en frío o uniendo planchas mediante soldadura.

Una propiedad fundamental del acero estructural debe ser su capacidad de mantener su ductilidad a pesar de la severidad de los procesos de soldadura, doblado, y corte oxiacetilénico. Para ello debe controlarse la composición química del material, principalmente los elementos Mn, Si, P y S. Las normas establecen límites para estos elementos y especifican los valores mínimos de las propiedades mecánicas de fluencia, resistencia de rotura, y elongación de rotura (σ_y , σ_r y ϵ_r) que se presentan en la Tabla A.1 del Apéndice A.

Los elementos químicos más importantes son el C y el Mn, que al aumentar, incrementan la resistencia (σ_y y σ_r) pero disminuyen la ductilidad (ϵ_r) y la soldabilidad. Otros componentes como Cr, Ni, Cu son beneficiosos para proveer resistencia a la corrosión y también mejorar la ductilidad; se incorporan en aceros especiales resistentes a la corrosión en cantidades del orden de 0,5%.

Se aprovecha de comentar aquí que los resultados de ensayos de tracción en barras de acero para hormigón armado de producción nacional son similares a los antes descritos. Excepto que se ha observado que el acero calidad A63-42H no presenta una zona clara de fluencia sino pasa directamente del rango lineal elástico al endurecimiento; ésta no es una característica deseable, pues la zona de fluencia constituye un elemento de control que garantiza que la fuerza que desarrolla el acero permanece estacionaria antes de entrar al endurecimiento. Las propiedades mecánicas básicas que deben cumplir los aceros de refuerzo para hormigón armado se presentan en la Tabla H.1 del Apéndice H. Esta tabla entrega también otras propiedades de las barras de acero como las características de los resaltos, diámetros y longitudes comercialmente disponibles, área de la sección, perímetro, peso, y marcas de identificación según la calidad.

Cabe destacar que los valores de resistencia especificados en las Tablas A.1 y H.1 antes referidas corresponden a valores mínimos que en general son excedidos. Por ello las calidades de referencia de los aceros se llaman *nominales*, pues los materiales no las cumplen exactamente, sino deben estar siempre por sobre ellas pero nunca por debajo.

b) Condiciones de diseño

El criterio de diseño de elementos de acero en tracción comprende dos verificaciones básicas: *resistencia* y *esbeltez*. Para la resistencia se comprueba que la tensión de trabajo del elemento no exceda la *tensión admisible* del material. La tensión admisible es el límite de resistencia que se puede aprovechar del material dejando un margen de seguridad razonable para garantizar su buen comportamiento, sin descuidar la necesaria economía. En el acero estructural se considera como resistencia límite, o condición de falla, a la resistencia de fluencia σ_y . Aunque en realidad la resistencia de rotura σ_r es un 50% más alta, se estima que las deformaciones necesarias para alcanzarla son excesivas desde el punto de vista práctico. Establecida σ_y como resistencia límite, se adopta un factor de seguridad (FS), que en este caso se toma igual a 1,67, de modo que la tensión admisible es

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{FS} = 0,6\sigma_y \quad (3-8)$$

La tensión de trabajo del elemento es su esfuerzo normal N dividido por el área neta A_{neta} de su sección transversal. La condición de diseño por resistencia es entonces:

$$\sigma_{trabajo} = \frac{N}{A_{neta}} \leq \sigma_{adm} \quad (3-9)$$

El esfuerzo normal N es el que proviene del análisis de la estructura sometida a las cargas de servicio, por ejemplo cargas de peso propio y permanentes más sobrecargas de uso (PP+SC). El área neta se obtiene de considerar la reducción de la sección, por ejemplo por las perforaciones en uniones apernadas, o la concentración de tensiones en puntos aislados cuando se usan uniones soldadas.

La segunda condición de diseño establece un límite máximo de *esbeltez*. La esbeltez λ se define como el cociente entre la longitud L del elemento y el *radio de giro* “ i ” de la sección

$$\lambda = \frac{L}{i} \qquad i = \sqrt{\frac{I}{A}} \qquad (3-10)$$

en que I es el *momento de inercia* de la sección y A su área. El radio de giro es una propiedad de la sección asociada a la forma en que se distribuye el material en ella. Manteniendo el área A de la sección constante, el radio de giro aumentará mientras más grande sea el momento de inercia I , es decir, mientras más se aleja el material respecto del eje correspondiente (Fig. 3.8). Estas propiedades (i e I) se discutirán en mayor detalle en la Sección 3.2.6 cuando se estudien los elementos en compresión, caso en el cual son de primordial importancia. Por el momento, cabe señalar que la limitación de esbeltez tiene por objeto evitar que, aún satisfaciendo la verificación de resistencia, resulten elementos excesivamente delgados para su longitud. Ello por varias razones: primero para cubrirse de una falla de inestabilidad por compresión, a la que los elementos esbeltos son especialmente vulnerables, compresión que podría ocurrir frente a una eventual inversión de esfuerzos para una condición de carga distinta de la analizada; y segundo, para proteger del daño a que pueden quedar expuestos los elementos extremadamente esbeltos durante la fabricación y montaje de la estructura, o durante su uso, por vibraciones indeseadas o cargas accidentales en tareas de mantenimiento, reparación, pintura, etc. La condición de diseño establece los siguientes límites de esbeltez:

$$\lambda \leq \begin{cases} 240 & \text{(para elementos principales)} \\ 300 & \text{(para elementos de arriostramiento)} \end{cases} \qquad (3-11)$$

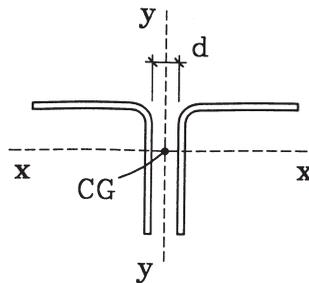


Figura 3.8 Perfiles ángulo en posición “espalda a espalda”

Como se mencionó antes, en la propiedad de radio de giro (Ec. 3-10) interviene el momento de inercia, cuya definición se verá posteriormente, pero que cabe anticipar depende del eje de referencia escogido en la sección. Volviendo al caso de perfil TL de la Fig. 3.8, la Tabla A.2 de propiedades de este tipo de perfiles presenta el radio de giro con respecto a dos ejes:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad e \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

en que I_y e i_y dependen de la distancia de separación d entre los ángulos (la Tabla incluye los casos $d=0, 2, 4, 6, 8$ y 10 mm). El menor radio de giro, y por lo tanto el crítico, es siempre i_x para perfiles TL.

c) Reticulados de acero

Como se sabe, los reticulados son estructuras típicas en que sus elementos están sometidos sólo a esfuerzo axial, tanto en tracción como en compresión. El diseño de éstos últimos se verá más adelante, pero se aprovechará de introducir los reticulados aquí. Existe una enorme gama de posibilidades para conformar reticulados con distintos tipos de elementos, de acuerdo a los requerimientos de resistencia. Muy utilizados son los perfiles ángulo, doble-ángulo, canal, te, tubo, etc., como muestra la Fig. 3.9. Los empalmes o uniones de los elementos pueden hacerse mediante soldadura o pernos; con frecuencia el espacio para desarrollar la longitud de soldadura necesaria, o para ubicar los pernos respetando las distancias mínimas exigidas entre ellos o a los bordes del perfil, puede obligar a usar planchas suplementarias en los nudos, las que se conocen con el nombre de *gussets*.

Como ejemplo considérese el diseño del reticulado de la Fig. 3.10. La primera etapa del diseño es el proceso de análisis: en este caso el cálculo de reacciones y esfuerzos internos en todas las barras del reticulado. Las reacciones verticales en los apoyos A y D son claramente $R_A=R_D=10$ ton. Continuando la solución se encuentran los esfuerzos axiales en todas las barras, los que se resumen en la Tabla 3.2. Luego procede el dimensionamiento de todas las barras, para lo cual se deben buscar perfiles que satisfagan las condiciones de diseño antes señaladas (Ecs. 3-9 y 3-11). A continuación se considerarán las barras AB y BC, y el material se escogerá calidad A37-24ES.

TABLA 3.2 Esfuerzos internos en las barras del reticulado de la Fig. 3.10

| Barras | Fuerza Axial (ton) | Tipo |
|---------|--------------------|------------|
| BC | 8,66 | Tracción |
| AE y GD | -15,00 | Compresión |
| AB y CD | 13,00 | Tracción |
| EB y CG | -4,33 | Compresión |
| BF y FC | 4,33 | Tracción |
| EF y FG | -12,50 | Compresión |

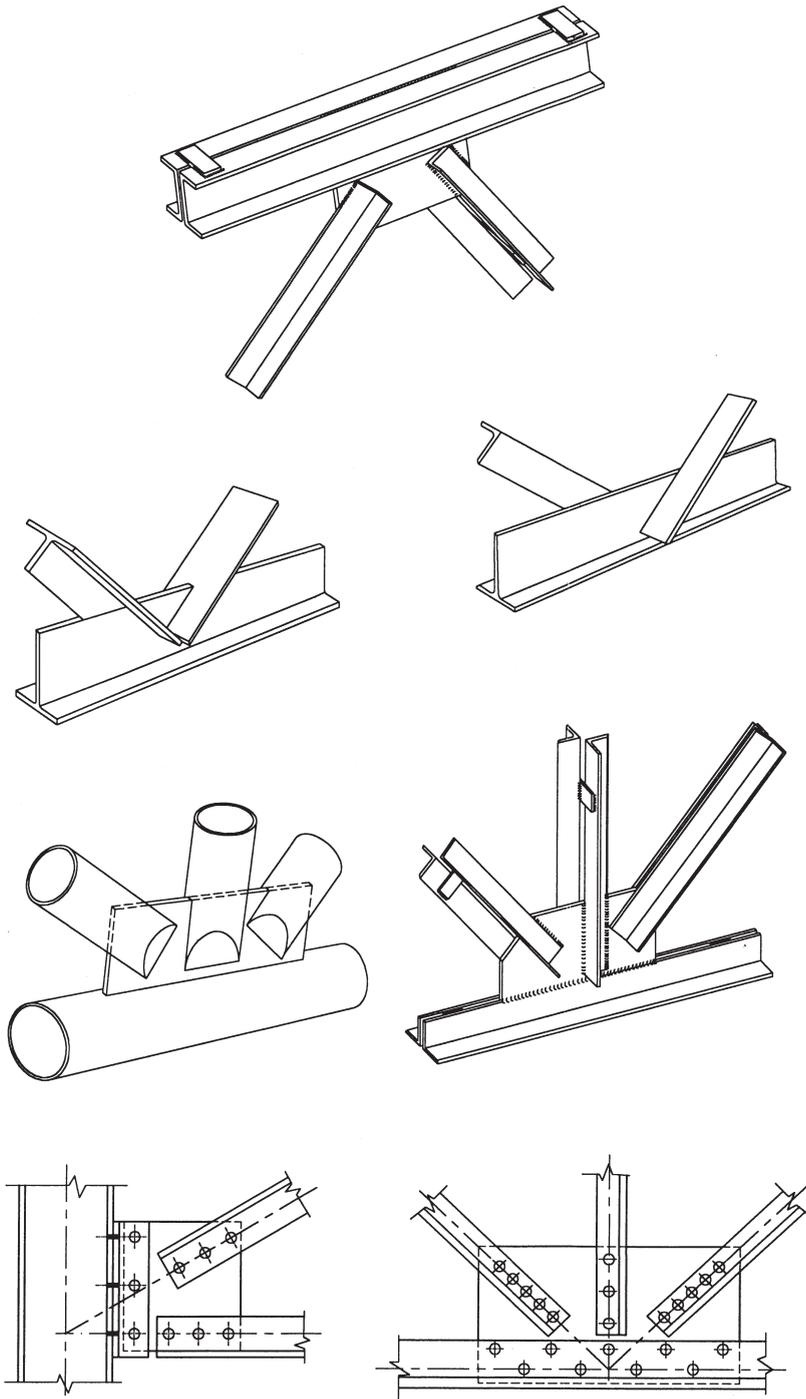


Figura 3.9 Perfiles y uniones típicas en reticulados

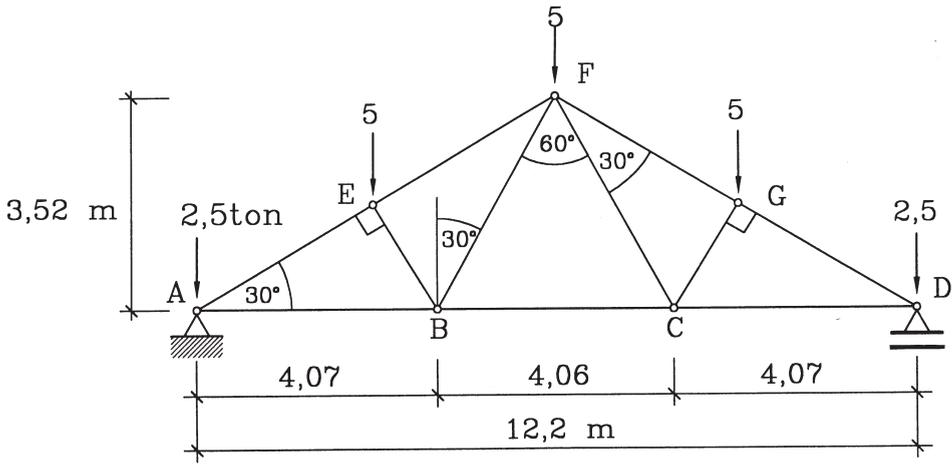


Figura 3.10 Forma del reticulado estudiado y cargas aplicadas

Para la barra AB, $N=13$ ton, de modo que aplicando la Ec. 3-9 se tiene:

$$\sigma_{\text{trabajo}} = \frac{13000}{A_{\text{neta}}} \leq 0,6\sigma_y = (0,6)(2400) = 1440 \text{ kg/cm}^2$$

es decir, el área neta mínima requerida para satisfacer condición de diseño es:

$$A_{\text{neta}} = \frac{13000}{1440} = 9,03 \text{ cm}^2$$

Como se ha mencionado, el concepto de área neta toma en cuenta que los perfiles metálicos deben empalmarse mediante soldaduras o pernos, lo que se traduce en concentración de tensiones o reducción de material producto de las perforaciones. Las normas distinguen diversas situaciones y formas de determinar el área neta; aquí, por simplicidad, y para fines de prediseño, se usará como una fracción constante del área total A de la sección transversal:

$$A_{\text{neta}} = 0,85A \tag{3-12}$$

Luego, para la barra AB se requiere un perfil de sección total

$$A = \frac{A_{\text{neta}}}{0,85} = \frac{9,03}{0,85} = 10,62 \text{ cm}^2$$

y utilizando las Ecs. 3-10 y 3-11 el radio de giro requerido es:

$$i \geq \frac{L}{240} = \frac{407}{240} = 1,69$$

Buscando en la Tabla A.2 para perfiles TL, se encuentra que el perfil más liviano que satisface ambas condiciones es el TL6x8,77 que tiene $A = 11,2 > 10,62$ e $i_x = 1,86 > 1,69$.

Se completa el diseño del cordón inferior con la barra BC. Las áreas neta y bruta requeridas son:

$$A_{\text{neta}} = \frac{8660}{1440} = 6 \text{ cm}^2$$

$$A = \frac{6}{0,85} = 7,06 \text{ cm}^2$$

y el radio de giro requerido es:

$$i_x \geq \frac{L}{240} = \frac{406}{240} = 1,69$$

El perfil más económico que satisface ambas condiciones es el TL6,5x5,89 con área $7,5 \text{ cm}^2$ e $i_x = 2,05 \text{ cm}$. Notar que por ser distintos los perfiles escogidos para los elementos AB (igual a CD) y BC, es necesario realizar empalmes en los nudos B y C (Fig. 3.10) para materializar la conexión entre ambos perfiles. Es posible también decidir mantener el perfil TL6x8,77 a lo largo de todo el cordón inferior (elementos AB, BC y CD), despreciando la posible economía por la posible reducción de peso del elemento BC, pero con la ventaja de tener un empalme más simple en los nudos B y C.

3.2.5 Diseño de Elementos de Madera en Tracción

a) Propiedades de la madera

Las propiedades mecánicas de la madera presentan gran variación, dependiendo de la especie, la zona donde se desarrolla el árbol, el contenido de humedad de la madera y el tipo de sollicitación.

Es de conocimiento común que ciertas especies como el roble y el eucalipto son particularmente densas y resistentes, mientras lo contrario ocurre con el pino y el álamo. Sin embargo, el crecimiento del árbol es muy dependiente de las condiciones ambientales (temperatura, precipitación, calidad del suelo, manejo forestal, asoleamiento) de manera que no sólo las propiedades de una especie pueden variar considerablemente dependiendo de la localidad en que se ha desarrollado el árbol, sino que, aún en una misma localidad son de hecho muy heterogéneas.

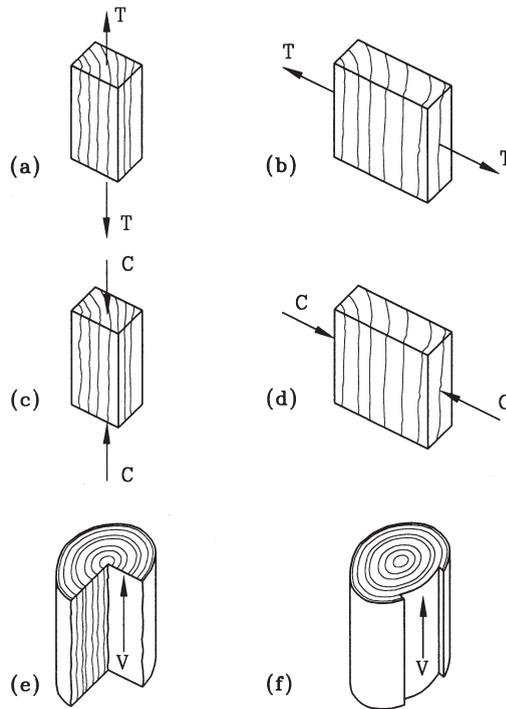


Figura 3.11 Tipos de esfuerzos en madera: a) tracción paralela a las fibras, b) tracción normal a las fibras, c) compresión paralela, d) compresión normal, e) cizalle en plano radial, f) cizalle en plano tangencial.

La Tabla M.1 presenta algunos datos a modo de ejemplo (más información puede encontrarse en la referencia original, Instituto Forestal, 1967). Las propiedades mecánicas de la madera se presentan en términos de σ_p , la tensión en el límite de comportamiento lineal o límite de proporcionalidad, y la tensión σ_r de ruptura (Fig. 3.13), para flexión, compresión (axial y normal a las fibras), tracción, y las tensiones de rotura a cizalle radial y tangencial (ambos paralelos a las fibras longitudinales de la madera, pero con plano de cizalle radial, perpendicular a los anillos de crecimiento, o tangencial, tangente a los anillos de crecimiento), además del módulo de elasticidad E . La Fig. 3.11 muestra el significado de los distintos tipos de esfuerzos mencionados. Se puede observar en la Tabla M.1 que para una misma muestra de madera las propiedades en flexión, compresión y tracción son muy disímiles; básicamente, esta es la característica de los materiales llamados *anisótropos*, cuyas propiedades físicas y mecánicas varían según la dirección considerada. La Tabla M.1 no incluye datos para tracción perpendicular a las fibras porque en esa dirección la resistencia de la madera es muy baja.

La presencia de agua en la madera tiene varias implicancias de interés. Como todo tejido vivo, la madera contiene una fuerte proporción de agua. Parte de esta agua está

en combinación con las sustancias constituyentes de la madera y permanece constante en cantidad. Existe además una cantidad de agua que no forma parte integrante de la madera, que puede eliminarse por secamiento y que constituye la *humedad de la madera*. Esta humedad se presenta en dos formas: como humedad de saturación de las fibras, retenida por las membranas celulósicas, y como agua libre, contenida en los espacios intercelulares. La madera del árbol recién cortado tiene un alto contenido de humedad, entre 40 y 250%, medida en relación con el peso seco de la madera como se define más adelante. Cuando se elimina toda el agua libre, la humedad llega al punto de saturación de las fibras, que, aunque varía según la especie, es de aproximadamente 30%. El agua libre no tiene influencia sobre el volumen de la madera; por el contrario, el agua de saturación es de la mayor importancia al considerar la hinchazón y la contracción de la madera. En efecto, cuando la humedad baja del 30%, la madera empieza a contraerse y estas contracciones son proporcionales a la humedad perdida bajo el 30%. La madera se contrae más tangencialmente (ϵ_θ =reducción del perímetro de los anillos de crecimiento) que radialmente (ϵ_r =reducción del tronco en dirección radial), mientras la contracción longitudinal (ϵ_l =paralelo a las fibras) es insignificante (Fig. 3.12). Estas deformaciones varían considerablemente con la especie, valores típicos para 0% de humedad son $\epsilon_\theta=0,08$, $\epsilon_r=0,04$ y $\epsilon_p=0,002$, y para 15% de humedad $\epsilon_\theta=0,04$, $\epsilon_r=0,015$ y $\epsilon_p=0,001$. Inversamente, la madera se hincha al aumentar su contenido de humedad, comportamiento que queda gobernado por las mismas relaciones que rigen la contracción.

Uno de los métodos para medir la humedad es el de secado al horno. Las muestras se mantienen a una temperatura ligeramente superior a 100°C entre 12 y 48 horas hasta que se alcance un peso constante. La humedad se determina con la siguiente fórmula:

$$H = \text{Humedad}(\%) = \frac{(\text{Peso muestra húmeda} - \text{Peso seco})}{\text{Peso seco}} 100 \quad (3-13)$$

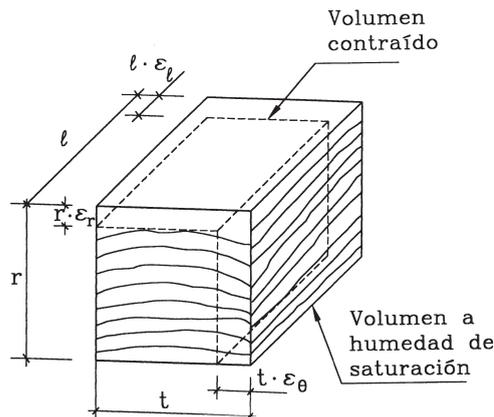


Figura 3.12 Contracción de la madera por pérdida del agua de saturación

Por su *higroscopicidad*, la madera es capaz de absorber y exhalar humedad por contacto con el agua o el aire. Bajo una prolongada exposición a un determinado ambiente, el contenido de humedad se estabiliza, experimentando ligeras variaciones diarias y estacionales. Se dice entonces que la madera ha llegado a la *humedad de equilibrio*. La humedad de equilibrio de maderas expuestas a la intemperie en Chile varía en general entre 12 y 18%.

La resistencia y el módulo de elasticidad de la madera son inversamente proporcionales al contenido de humedad, como se observa en la Tabla M.1. Por ello, las normas especifican tensiones admisibles más altas para maderas en estado seco, pero que deben reducirse cuando la madera no está seca durante la construcción y cuando las condiciones de uso corresponden a una humedad de equilibrio que excede al 12%. Por simplicidad, en este texto no se utilizará dicha ventaja, pensando que el interés primordial para el arquitecto es dimensionar a nivel de prediseño, lo que podrá posteriormente afinarse en el cálculo definitivo.

La Fig. 3.13 muestra una curva tensión-deformación de un ensayo de carga axial sobre una muestra de madera seca. El comportamiento es lineal elástico hasta la tensión σ_p o límite de proporcionalidad; luego la curva deja de ser lineal y se alcanza finalmente la tensión de ruptura σ_r . Como puede observarse, la madera no presenta zona de fluencia ni de deformación plástica como el acero. De hecho, es muy elástica, las deformaciones se revierten una vez retirada la carga, aún cuando las tensiones hayan alcanzado niveles muy próximos a la tensión de rotura. Se concluye entonces que la madera es, un material eminentemente frágil. Muchos se sorprenden al oír que la madera es frágil, ello porque confunden los conceptos de ductilidad y flexibilidad, que suelen emplearse como sinónimos en el lenguaje cotidiano, aunque no lo son, y menos aún para los precisos significados que se les asigna en ingeniería estructural. La *flexibilidad* (f) es la propiedad inversa a la rigidez, por ello se define como

$$f = \frac{1}{k} \quad (3-14)$$

recordando que k para un elemento sometido a carga axial quedó definido por la Ec. 3-6. Para expresarlo en forma sencilla, un material flexible es uno muy deformable, que es exactamente lo contrario de un material rígido; pero ambos conceptos se refieren al rango de comportamiento elástico. En cambio la ductilidad (Ec. 3-7) es una medida de la capacidad del material de experimentar deformaciones plásticas.

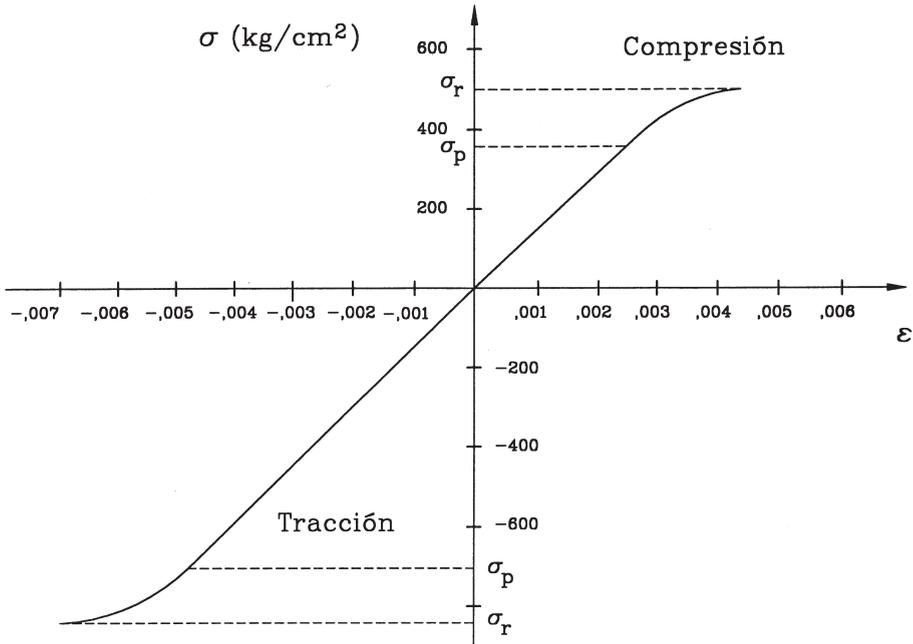


Figura 3.13 Relación tensión-deformación de una muestra de madera

Los metales son dúctiles, porque pueden doblarse y experimentar deformaciones permanentes que no se recuperan elásticamente. La madera seca, el vidrio, la losa, la cerámica, el yeso, los ladrillos, el hormigón, etc., no pueden “doblarse” y permanecer así; son materiales frágiles, que si exceden su capacidad resistente simplemente se “quebran” y todos los pedazos (como un vidrio roto) están perfectamente rectos, indeformados. Compare con un tarro de aluminio, que puede deformarse y aplastarse completamente sin quebrarse.

Volviendo a la Fig. 3.13, puede observarse que la resistencia a la tracción de la madera es mayor que en compresión, como se aprecia también en la Tabla M.1; naturalmente ello se debe a la constitución fibrosa del tejido vegetal. En la tabla también se aprecian notables diferencias entre las compresiones paralela y normal a las fibras, y entre las tensiones de cizalle y las longitudinales. Estos antecedentes justifican la afirmación inicial que las propiedades de la madera dependen del tipo de solicitación. La tabla muestra pocos resultados en tracción axial, pues es un ensayo difícil de realizar debido a la tendencia al desgarramiento de la madera con las mordazas que la aprisionan para aplicarle la carga de tracción.

La especificación de tensiones de diseño admisibles de la madera es un proceso de varias etapas. El procedimiento que aplica la norma chilena NCh1989.Of86 es relativamente complejo, por ello aquí se presentará en forma sucinta y simplificada,

recomendándose para el diseño valores conservadores. La primera etapa consiste en medir mediante ensayos las tensiones de rotura en probetas pequeñas libres de defectos en estados llamados *verde* ($H \geq 30\%$) y *seco* ($H = 12\%$); los ensayos se realizan para flexión, compresión paralela y módulo de elasticidad, obteniéndose datos como los presentados en la Tabla M.1. Con esta información las especies se clasifican en grupos, de acuerdo a las resistencias promedio medidas. A continuación, para cada grupo se establecen *tensiones de rotura mínima probables*, de modo que, según criterios estadísticos, haya una probabilidad muy pequeña (del orden de 1 en 100) que la resistencia sea inferior a ellas. En una tercera etapa, las tensiones de rotura mínimas probables se dividen por factores de seguridad, que las llevan a un nivel aceptable para el diseño y que toman también en cuenta el efecto que las cargas de acción prolongada tienen sobre la madera. Sin embargo, todavía no puede diseñarse con estas *tensiones básicas*, pues debe reconocerse que las propiedades resistentes basadas en probetas pequeñas libres de defectos no pueden extrapolarse a piezas de madera de dimensiones normales para uso estructural, ya que en éstas pueden hallarse presentes una gran variedad de defectos detrimentales para la resistencia, como grietas, deformaciones de secado, pudrición, entre muchos otros que define la norma NCh992.EOf72, algunos de los cuales se describen en la Tabla M.2. Las normas NCh1970/1.Of88 y NCh1970/2.Of88 definen cuatro grados de calidad para la clasificación visual de la madera según la cantidad y magnitud de los defectos presentes, asociando a cada grado una *tensión admisible* equivalente a una fracción de la tensión básica antes determinada. Tal fracción se denomina *razón de resistencia* (RR) y corresponde a 0,75, 0,60, 0,48 y 0,38 para los Grados Estructurales I a IV respectivamente.

Las tensiones admisibles de algunas especies chilenas se presentan en la Tabla M.3, que está basada en propiedades de la madera en estado “verde” ($H \geq 30\%$), y se aplica a cualquier pieza de madera independientemente de su contenido de humedad durante la construcción (H_c) y de la humedad de equilibrio en condiciones de servicio (H_s).

La norma permite tensiones admisibles más altas que las de la Tabla M.3 cuando se cumplen condiciones más estrictas desde el punto de vista de la humedad: primero, que se trate de piezas de espesor menor o igual a 10 cm (que se secan más fácilmente), y segundo que $12\% < H_c < 20\%$ y $H_s \leq H_c$. Estas potenciales ventajas no se utilizarán aquí por las razones antes señaladas.

Cabe observar también en la Tabla M.3 que, contrariamente a lo observado en la Tabla M.1, las tensiones admisibles de compresión son mayores que las de tracción, ello se debe a que la norma toma arbitrariamente estas últimas como un 60% de las de flexión. Esto se hace porque no se dispone de un volumen de datos estadísticamente apropiado para inferir conclusiones, por las dificultades del ensayo de tracción en madera, como también la mayor incidencia que algunos defectos tienen en los elementos traccionados, como la presencia de nudos por ejemplo.

Por otra parte, las tensiones admisibles dadas por la Tabla M.3 deben corregirse por otros factores, como el factor de duración de la carga K_D y otros que se describirán oportunamente que dependen del tipo de sollicitación (carga axial, flexión, etc.). La corrección por duración de carga se debe a que la resistencia de la madera es sensible a este parámetro, como se comprueba experimentalmente. Cuando una carga se aplica repentinamente y se retira en pocos segundos la madera es capaz de resistir casi el doble de lo que soportaría en un período de varios años. La norma chilena propone el factor K_D de modificación por duración de la carga dado por:

$$K_D = 1,747t^{-0,0464} + 0,295 \quad (3-15)$$

en que t es la duración de la carga en segundos. La Ec. 3-15 se ilustra en la Fig. 3.14. Cuando se combinan cargas de distinta duración, por ejemplo carga permanente con nieve, los factores K_D respectivos no deben promediarse, sino usar el mayor de ellos.

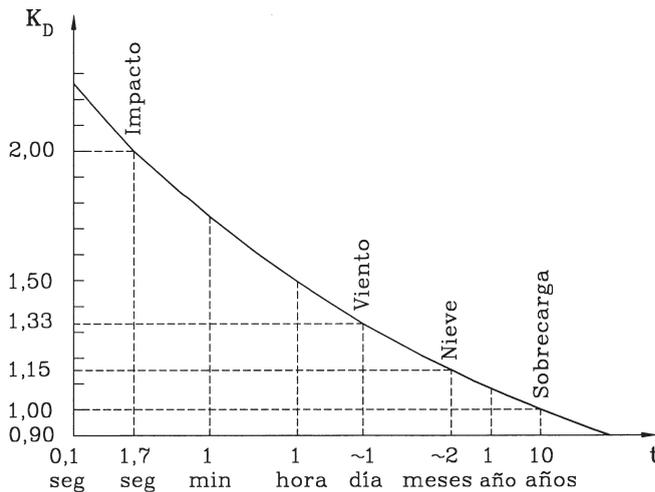


Figura 3.14 Efecto de la duración de la carga en la resistencia de la madera.

b) Diseño de elementos de madera en tracción

Estos elementos se diseñan satisfaciendo la condición:

$$\sigma = \frac{N}{A_{\text{neta}}} \leq \sigma_{\text{adm de tracción}} \quad (3-16)$$

en que N es el esfuerzo axial de tracción y A_{neta} es el área efectiva descontadas las perforaciones, cortes para ensambles, u otras reducciones de sección, y utilizando las dimensiones reales cuando se trate de piezas cepilladas.

La madera aserrada se usa en elementos provisorios, escondidos, no muy importantes, protegidos del ambiente. La madera elaborada se usa en elementos a la vista, elementos barnizados o pintados, y elementos importantes. En la Tabla M.4 se muestra la relación de dimensiones para elementos de madera aserrada y cepillada.

En lo que se refiere a la tensión admisible que aparece en la Ec. 3-16, ella se obtiene en base a la tensión admisible de tracción paralela a la fibras σ_{tp}^{adm} determinada de la Tabla M.3, afectada por los factores K_D de duración de la carga y K_{ct} de concentración de tensiones en las conexiones:

$$\sigma_{adm \text{ de tracción}} = K_D K_{ct} \sigma_{tp}^{adm} \quad (3-17)$$

en que K_{ct} es igual a 0,8 para uniones clavadas, 0,7 para uniones apernadas, y 0,5 cuando se usan anillos conectores. Para unir piezas de madera se usan clavos, tornillos, pernos, conectores especiales y empalmes provistos de elementos que impidan el desplazamiento de las partes conectadas. La Fig. 3.15 muestra algunos tipos de conexiones y elementos conectores que pueden servir de ejemplo de la enorme variedad de soluciones posibles en el arte de proyectar conexiones de elementos de madera.

Los anillos metálicos de conexión (Fig. 3.15.a) permiten unir elementos en cualquier ángulo y son de varios tipos, entre ellos, los anillos abiertos que se colocan en un sacado previo anular realizado con una herramienta especial, y los anillos dentados que se hienden a presión en la madera. El mecanismo de trabajo de estos anillos deja porciones de la madera sometida a tracción, compresión y cizalle respectivamente, sin embargo, las resistencias de diseño se basan en general en resultados empíricos (Gurfinkel, 1973); la norma NCh1198.Of91 da capacidades de carga para anillos abiertos.

Las Figs. 3.15.c y 3.15.d muestran un empalme de compresión y uno de tracción respectivamente, ejemplos de una gran variedad de alternativas posibles. Los empalmes en tracción son, en general, poco eficientes por la reducción de sección que involucran.

El uso de gussets metálicos en combinación con pernos es una solución muy común, y de buen resultado estético, para conectar piezas coplanares de dimensiones mayores (Fig. 3.15.b); también se pueden usar pernos y clavos conectando piezas sobrepuestas (Figs. 3.15.f y g) aunque en este caso se prefiere el uso de conectores especiales, especialmente en otros países. Los gussets metálicos son particularmente útiles para la conexión de elementos cuyos ejes no son paralelos ni coplanares. Información acerca del comportamiento y especificaciones de diseño de uniones apernadas se encuentra en Gurfinkel, 1973, y Pérez *et al.* 1966, y fórmulas de diseño en la norma NCh1198.Of91.

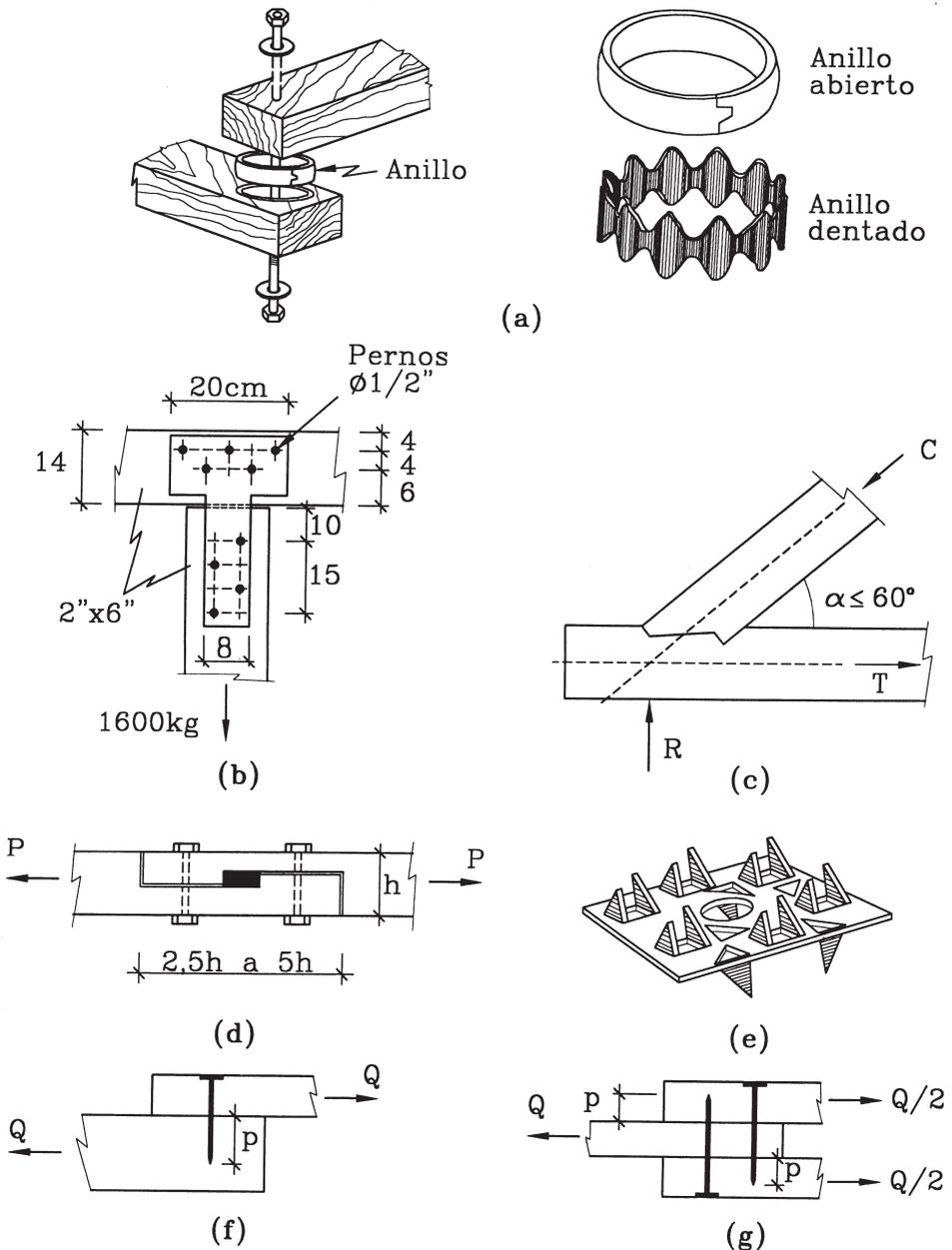


Figura 3.15 Ejemplos de uniones en madera: a) Anillos conectores, b) Empalme apernado con gusset metálico, c) Empalme en compresión de doble talón, d) Empalme en tracción o media madera, e) Placas metálicas dentadas, f) Unión clavada en cizalle simple, y g) Unión clavada en cizalle doble.

Placas metálicas dentadas (Fig. 3.15.e) existen en gran variedad de formas para distintos usos, lo que impide desarrollar especificaciones generales de diseño. Las capacidades informadas por el fabricante deben confirmarse experimentalmente, pues algunos de estos dispositivos no están diseñados para usos estructurales. Hay placas para ser dispuestas por el exterior de las piezas conectadas, mientras otras quedan invisibles en el plano de contacto entre ellas. Deben hincarse en la madera mediante presión, jamás martillando. Tienen la dificultad de tender a soltarse por movimientos relativos tendientes a la separación de las piezas conectadas, aún en la construcción y montaje; no deben por ello usarse en conexiones sujetas a vibraciones o sismo.

Finalmente, se tratarán en mayor detalle las uniones clavadas, que son las más comunes en estructuras simples. Los casos de cizalle simple y doble (Fig. 3.15.f y g) se refieren al número de planos a través de los cuales los clavos transmiten esfuerzos. En base a la norma NCh1198.Of91, la carga admisible de cizalle simple de un clavo es:

$$P_{adm, simple} = 0,022p\sqrt{D\rho_0} \text{ kg} \tag{3-18}$$

en que p es la penetración efectiva en la pieza que aloja la punta del clavo en mm (Fig. 3.15.f), D es el diámetro del clavo en mm (ver Tabla M.5), y ρ_0 es la densidad anhidra característica en kg/m^3 que se presenta en la Tabla M.6 para maderas crecidas en Chile. La densidad característica ρ_0 será excedida en un 95% de los casos, de modo que su uso es conservador. La Ec. 3-18 rige con las siguientes condiciones:

- $p \geq 6D$
- $e =$ espesor de la pieza $\geq 7D$ y $e \geq 18\text{mm}$; con perforaciones guías $e \geq 6D$
- si $p > 12D$ usar $p=12D$ para calcular $P_{adm, simple}$
- En una hilera de más de 10 clavos, a los clavos en exceso de 10 corresponde una carga admisible de $0,33 P_{adm, simple}$

En cizalle doble (Fig. 3.15.g) la carga admisible por clavo es:

$$P_{adm, doble} = 0,024(11D + p)\sqrt{D\rho_0} \text{ kg} \tag{3-19}$$

con las mismas definiciones y condiciones anteriores, excepto que:

- $p \geq 4D$
- si $p > 8D$ usar $p=8D$ para calcular $P_{adm, doble}$
- El clavado debe ejecutarse alternadamente por ambos lados

Las Ecs. 3-18 y 3-19 rigen cualquiera sea la dirección de la carga con respecto a la inclinación de las fibras. Los clavos deben disponerse respetando distancias mínimas entre clavos, entre filas de clavos, al borde cargado, y al borde descargado;

esto tiene por objeto evitar la falla por rajadura de la madera. La Fig. 3-16 muestra los espaciamientos recomendados en función del diámetro D del clavo; notar en la misma figura que los clavos deben *desalinearse* para disminuir el riesgo de generar planos débiles.

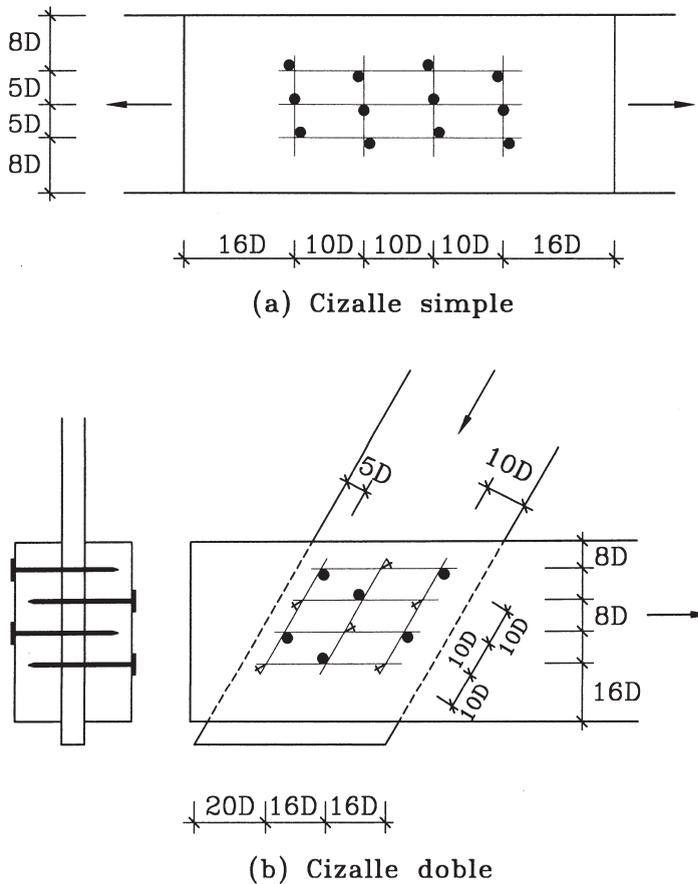


Figura 3.16 Disposición de clavos en unión de piezas de madera

Ejemplo 3.3

En una cercha, el cordón inferior sometido a una tracción de 500 kg, es una pieza de dimensión nominal 1"x4". La madera es Pino Radiata Grado II.

La pieza debe empalmarse, para lo cual se utilizan piezas adicionales (gusset o suples) de ancho nominal 4" y espesor e como muestra la Fig. E3.3.a. Se pide: a) Verificar si se satisface la carga de tracción admisible de la pieza, y b) Diseñar la conexión clavada (determinar e , L , número, dimensión y espaciamiento de los clavos).

Solución: a) Según la Tabla M.3 para Pino Radiata Grado II la tensión admisible de tracción paralela es $\sigma_{tp}^{adm}=41 \text{ kg/cm}^2$. Tomando $K_{ct}=0,8$ para unión clavada, y suponiendo $K_D=1$, se tiene de la Ec. 3-17:

$$\sigma_{adm \text{ de tracción}} = 1 \cdot 0,8 \cdot 41 = 32,8 \text{ kg/cm}^2$$

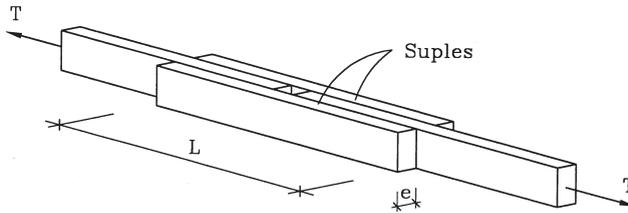


Figura E3.3.a

La pieza de 1"x4" cepillada tiene sección de $2 \times 9 = 18 \text{ cm}^2$ (ver Tabla M.4) luego la carga T admisible es:

$$T_{adm} = 32,8 \cdot 18 = 590 \text{ kg} > 500 \quad \text{OK}$$

b) Con los suples para formar una unión en cizalle doble, se cumple $e=1''=20\text{mm} > 18$, y usando clavos de $D=3,1 \text{ mm}$ ($e=20 \text{ mm}$ es ligeramente inferior al espesor requerido $e=7D=21,7 \text{ mm}$; si se usaran perforaciones guías el requisito disminuye a $e=6D=18,6 \text{ mm}$) se tiene una capacidad admisible por clavo según la Ec. 3-19:

$$P_{adm, \text{doble}} = (0,024) [(11)(3,1) + 20] \sqrt{(3,1)(370)} = 44 \text{ kg}$$

$$\text{N}^\circ \text{ de clavos requeridos es} = 500/44=11,4$$

Usar 12+12 clavos dispuestos como muestra la Fig. E3.3.b con separaciones: $16D=5,0 \text{ cm}$, $10D=3,1$ (usar 3 cm), $8D=2,5$, $5D=1,6$ (usar 2 cm). Clavar alternadamente por ambos lados.

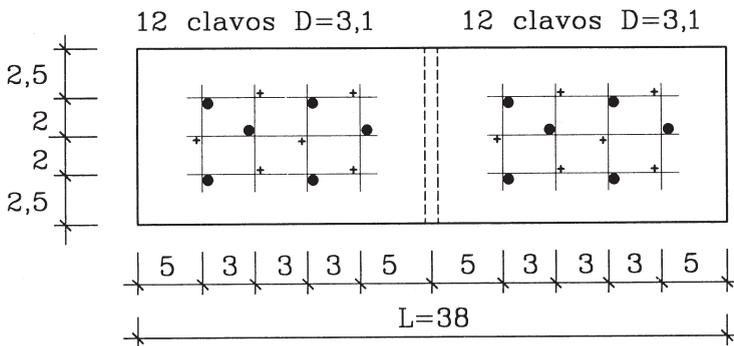


Figura E3.3.b

3.2.6 Elementos Sometidos a Compresión. Pandeo

a) El fenómeno de inestabilidad

Como se ha visto en las secciones anteriores, el diseño de elementos en tracción ha consistido en examinar que el nivel de tensiones en la sección crítica del elemento no supere ciertos límites basados en la resistencia del material. Sin embargo, el diseño de elementos sometidos a compresión implica, además, el asegurarse que no se producirá una falla por inestabilidad o pandeo. Este es un modo de falla diferente a los analizados anteriormente, que no depende de la resistencia del material, y que consiste en el colapso de la columna, que puede ocurrir aún con tensiones de compresión muy pequeñas, especialmente si la esbeltez de la columna es muy grande.

El fenómeno de pandeo, como ilustra la Fig. 3.17, consiste en que una columna perfectamente recta y axialmente cargada abandona su posición rectilínea flectándose lateralmente. La carga para la que ello ocurre P_{cr} , se llama carga crítica de pandeo. La Fig. 3.17.b muestra el comportamiento de una columna esbelta, cuyo pandeo ocurre en el rango elástico del material con P_{cr} mucho menor que P_u , la resistencia máxima del material de la sección. Por ejemplo en una columna de acero la capacidad máxima útil de la sección sería $P_u = \sigma_y A$, en que σ_y es la tensión de fluencia del acero y A el área de la sección, o en madera $P_u = \sigma_r A$ en que σ_r es la tensión de rotura de la especie correspondiente.

Se puede demostrar teóricamente que al aumentar la deformación lateral después de iniciado el pandeo, la carga es ligeramente superior a la carga crítica, como muestra la línea continua de la figura aludida. Sin embargo, la excesiva deformación lateral δ involucra a un aumento de tensiones por flexión, lo que en definitiva conduce a la falla del material de la sección y al colapso de la columna. Por otra parte, imperfecciones inevitables en la realidad, como una leve curvatura de fabricación inicial de la columna, o una ligera excentricidad no intencional de la carga, resultan en que el comportamiento real es como el de la línea segmentada de la Fig. 3.17.b, en que una vez alcanzado P_{cr} las deformaciones laterales crecen indefinidamente sin necesidad de aumentar la carga, de manera que aunque se logre un estado de equilibrio en la posición deformada, el colapso es inminente, pues ocurrirá ante la más leve perturbación que experimente la precaria condición de equilibrio de la columna. A su vez, en la columna real, la deformación lateral δ se inicia antes de alcanzar la carga crítica, como muestra la línea segmentada.

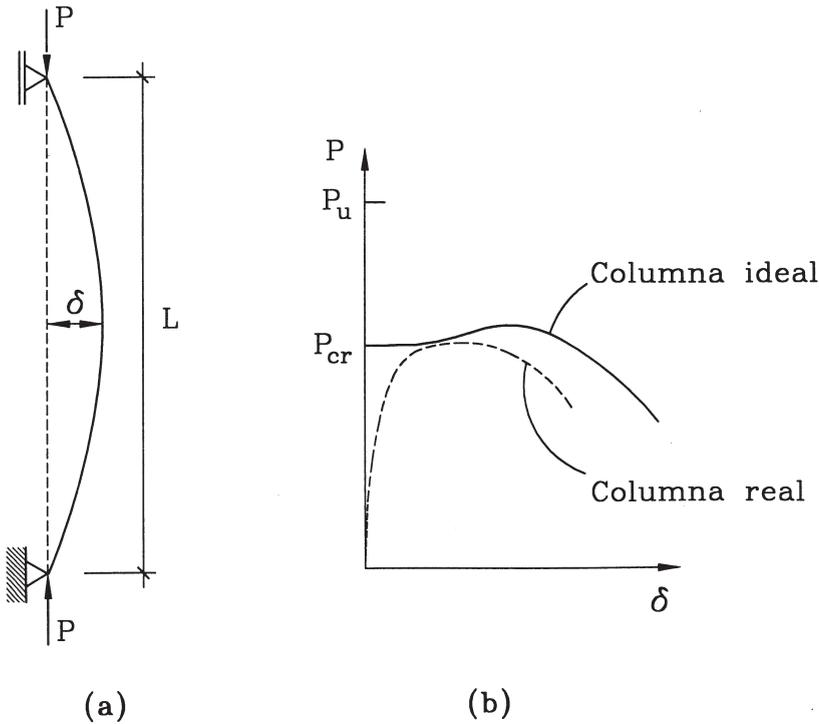


Figura 3.17 Columna axialmente cargada con extremos simplemente apoyados, a) forma pandeada, b) relación P - δ en pandeo elástico.

La discusión anterior ha dejado de manifiesto un nuevo concepto, el de *estabilidad del equilibrio*. En efecto, se observa que una posición de equilibrio puede ser *estable* o *inestable*. Un ejemplo muy simple, pero muy ilustrativo, es el de la Fig. 3.18, en que una bolita se posa en el fondo o en la cima de una esfera. La condición de equilibrio es muy simple, en ambos casos basta una reacción $R=W$, pero las dos posiciones de equilibrio son de naturaleza enteramente diferente: la de la Fig. 3.18.a es estable, porque ante cualquier perturbación que la saque de su posición la bolita retomará su posición de equilibrio cuando se retire la perturbación, mientras la de la Fig. 3.18.b está en equilibrio inestable, porque ante la más mínima perturbación abandonará su posición y no volverá jamás a ella.

En el caso de las columnas esbeltas, el umbral de estabilidad es P_{cr} . Si la carga axial P es menor que P_{cr} el equilibrio es estable: la columna permanece recta, y si se le aplica una perturbación lateral que la saque de su posición, ella volverá a su posición rectilínea una vez que se retire la perturbación. Cuando se alcanza P_{cr} , sin embargo, se pierde la estabilidad del equilibrio.

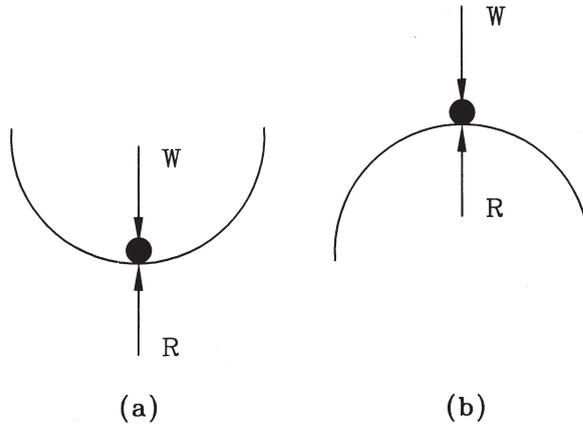


Figura 3.18 a) Equilibrio estable, b) Equilibrio inestable

b) La carga crítica de Euler

El problema de pandeo elástico fue resuelto por el matemático suizo Leonard Euler en el año 1750, quién demostró que la carga crítica de una columna axialmente cargada es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \quad (3-20)$$

en que E es el módulo de elasticidad del material de la columna, I el momento de inercia de la sección, L el largo de la columna y K el *coeficiente de longitud efectiva* que depende de las condiciones de apoyo de los extremos de la columna.

El coeficiente de longitud efectiva refleja el hecho que la carga crítica varía si se cambian las condiciones de vinculación de la columna. En efecto, si “en vez de la columna básica simplemente apoyada en sus extremos, como en la Fig. 3.17.a, ambos apoyos se cambian por empotramientos, la carga crítica aumenta 4 veces. Esto se obtiene de la Ec. 3-20 cambiando $K=1$ de la columna simplemente apoyada por $K=0,5$ para la columna doblemente empotrada. La explicación física para el aumento de la carga crítica reside en el hecho que los apoyos empotrados imponen restricción al giro de la columna en los extremos, y por tanto representan un impedimento adicional a que la columna abandone su posición rectilínea. El nombre de “longitud efectiva” refleja la condición geométrica relativa a la mayor o menor extensión de la longitud de la columna implicada en el desplazamiento lateral por pandeo, como se aprecia en la Fig. 3.19 para varias formas de vinculación. Notar que al analizar las condiciones de vinculación se debe observar la restricción al *giro* y al *desplazamiento lateral* en ambos extremos de la columna. La Fig. 3.19 incluye también los valores de K que se recomiendan para diseño, los que se toman mayores que el teórico por seguridad, ya que existe cierta dificultad de producir en la realidad condiciones de vinculación 100% efectivas. En el caso f de la Fig. 3.19 no se indica un valor recomendado porque

| | | | | | | | |
|--|------|---------------|----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Coeficiente de luz efectiva | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) | (f) | (g) |
| | | | | | | | |
| Valor teórico de K | 0,50 | 0,7 | 1,0 | 1,0 | 2,0 | 2,0 | ∞ |
| Valor de diseño recomendado para condiciones de apoyo aproximadas a la ideal | 0,65 | 0,8 | 1,2 | 1,0 | 2,1 | >2 | ∞ |
| Condiciones de apoyo | | | | | | | |
| | | Rotación fija | Rotación libre | Desplazamiento fijo | Desplazamiento fijo | Desplazamiento fijo | Desplazamiento fijo |
| | | | | | | | |
| | | Rotación fija | Rotación libre | Desplazamiento libre | Desplazamiento libre | Desplazamiento libre | Desplazamiento libre |

Figura 3.19 Valores de K teóricos y de diseño para distintas condiciones de apoyo

K puede llegar a ser hasta infinito, si el empotramiento del extremo superior de la columna pierde su efectividad para impedir el giro; en efecto, si ese empotramiento se flexibilizara hasta convertirse en una articulación, la columna se convertiría en un mecanismo, como muestra el caso g de la figura, al que corresponde $P_{cr} = 0$. Por otra parte, existen procedimientos para evaluar K en situaciones no contempladas en la Fig. 3.19, los que se basan en una estimación más precisa de la rigidez o restricción al giro que imponen los elementos que llegan a un nudo; sin embargo, este tema de análisis no se ha considerado dentro de los objetivos de este texto.

El momento de inercia I de la sección es una propiedad que refleja la rigidez del elemento en oposición a la flexión, es decir a mayor momento de inercia menor es la tendencia de la columna a salirse de su posición rectilínea y adoptar una forma curva (flectada). Por ello, mientras mayor es el momento de inercia, mayor es la carga crítica de pandeo (Ec. 3-20). La rigidez a la flexión la otorga el material de la sección, pero especialmente contribuye a tal rigidez el alejamiento del material del centro de la sección, lo que se mide en referencia a un sistema de ejes ubicado en el centro de gravedad de la sección. Dada una sección plana cualquiera como la de la Fig. 3.20, los momentos de inercia de la sección con respecto a los ejes x e y se definen como:

$$I_x = \sum_i^n A_i y_i^2 \qquad I_y = \sum_i^n A_i x_i^2 \qquad (3-21)$$

en que A_i son un conjunto de segmentos de área que cubren la sección completa ($A = \sum A_i$), y x_i e y_i son las coordenadas del centro de gravedad de cada segmento con respecto a los ejes de referencia (es decir las distancias de cada segmento a los ejes). Notar que en las Ecs. 3-21 las distancias van al cuadrado, de modo que los segmentos de área más alejados de los ejes contribuyen considerablemente a los momentos de inercia, mientras un segmento cercano a un eje contribuye muy poco al momento de inercia con respecto a dicho eje. En rigor las definiciones dadas por las Ecs. 3-21 deben ser integrales, lo que simplemente corresponde a llevar la sumatoria al límite de infinitos elementos de área infinitesimalmente pequeña. Aunque el concepto es el mismo, debe tenerse presente que para que el cálculo basado en una discretización (como insinúa la Fig. 3.20) sea correcto, la subdivisión del área debe ser muy fina, es decir deben contemplarse numerosos segmentos de área pequeños (A_i). En todo caso, para los objetivos de este texto, lo importante es entender el concepto y significado físico de momento de inercia, y es poco relevante ser experto en calcularlo; además, hay fórmulas disponibles para las secciones más típicas las que se presentan en la Tabla V.3.

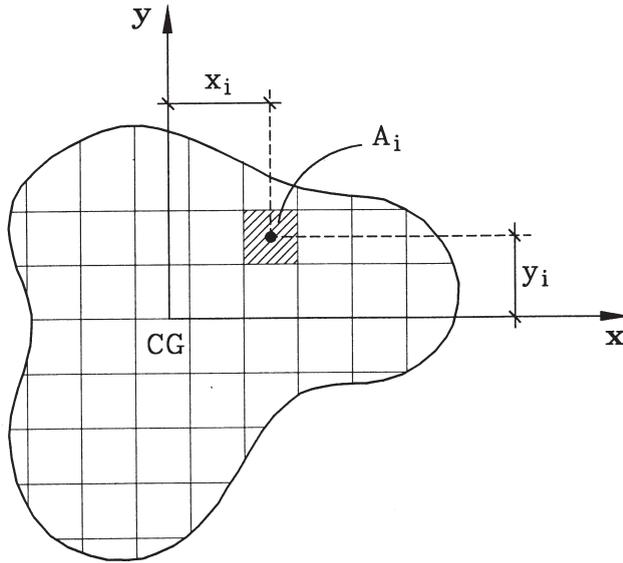


Figura 3.20 Términos de la definición de momento de inercia

Ya en la Ec. 3-10 se introdujo el concepto de radio de giro, necesario en ese momento para controlar la esbeltez de elementos en tracción. Con la definición anterior de momento de inercia se puede ahora comprender mejor el significado del radio de giro

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad (3-22)$$

que es una indicación de la eficiencia con que el área total de la sección se ha utilizado para proveer rigidez a la flexión. En el Ejemplo 3.4 se comparan las propiedades y la carga crítica de columnas de acero hechas con secciones como las de la Fig. 3.21, ambas de igual área $A=91,1 \text{ cm}^2$. Sin embargo, la sección tubular tiene un momento de inercia igual a 14,5 veces el de la sección circular llena y un radio de giro 3,8 veces mayor. Manteniendo iguales las condiciones restantes, la carga crítica del perfil tubular es 14,5 veces de la carga crítica de la sección circular llena. Los detalles de los cálculos se presentan en el Ejemplo 3.4.

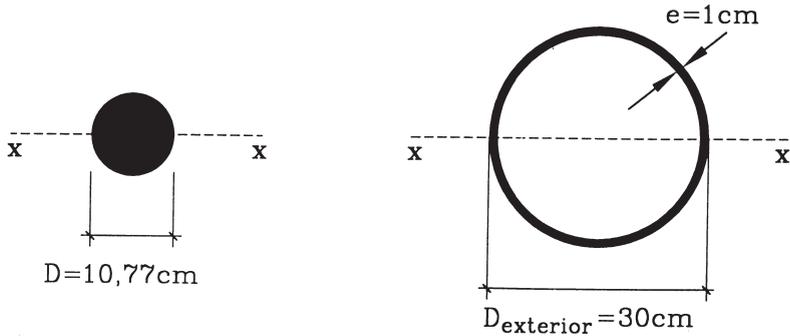


Figura 3.21 Secciones circular y tubular de igual área

Tanto para efectos de la estabilidad en columnas, como para mejorar la eficiencia de secciones sometidas a flexión (como se verá más adelante), en los perfiles metálicos es posible optimizar el uso del material distribuyéndolo de manera de maximizar el momento de inercia, para un área dada. La Fig. 3.22 muestra perfiles típicos como el llamado “I” o “IN” o “doble-T” cuyo objetivo es alejar el material lo más posible del eje $x-x$, o el perfil “cajón” (tubular rectangular) que cumple similar objetivo, pero respecto a ambos ejes centroidales ($x-x$ e $y-y$). También debe tenerse presente, que en algunas secciones, como los perfiles “ángulo” los ejes críticos no son x o y , sino el eje $v-v$ respecto del cual tanto el momento de inercia como el radio de giro son mínimos.

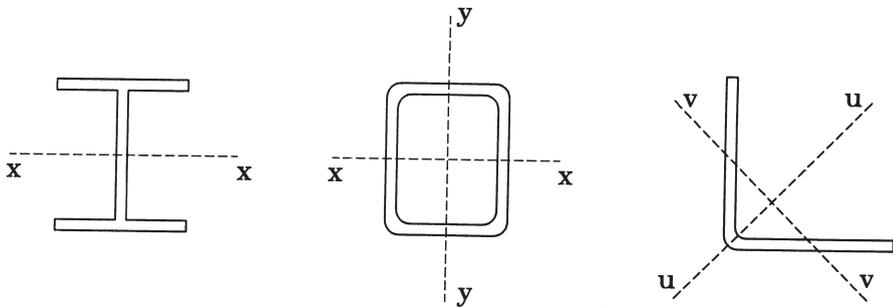


Figura 3.22 Perfiles metálicos

Ejemplo 3.4

Dos columnas de acero de 10 metros de longitud y simplemente apoyadas en sus extremos ($K=1$) se fabrican con secciones como las de la Fig. 3.21. Determinar las cargas críticas de pandeo elástico de cada una.

Solución: Aplicando las fórmulas dadas en la Tabla V.3 para las propiedades de las secciones circular llena y tubular se tiene:

Sección circular:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 10,77^2}{4} = 91,1 \text{ cm}^2$$

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi 10,77^4}{64} = 660,44 \text{ cm}^4$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{660,44}{91,1}} = 2,69 \text{ cm}$$

$$E_{\text{acero}} = 2.100.000 \text{ kg/cm}^2$$

$$L = 10 \text{ m} = 1000 \text{ cm}$$

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 (2100000)(660,44)}{(1 \cdot 1000)^2} = 13688 \text{ kg} = 13,7 \text{ ton}$$

Sección tubular:

$$A = \frac{\pi}{4} (D_{\text{ext}}^2 - D_{\text{int}}^2) = \frac{\pi}{4} (30^2 - 28^2) = 91,1 \text{ cm}^2$$

$$I = \frac{\pi}{64} (D_{\text{ext}}^4 - D_{\text{int}}^4) = \frac{\pi}{64} (30^4 - 28^4) = 9588,9 \text{ cm}^4$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{9588,9}{91,1}} = 10,26 \text{ cm}$$

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 (2100000)(9588,9)}{(1 \cdot 1000)^2} = 198741 \text{ kg} = 198,7 \text{ ton}$$

c) Tensión crítica de pandeo

Como se discutió en la Sección 3.2.1 el concepto de tensión unitaria tiene la ventaja de indicar cuál es el nivel de intensidad a que está trabajando el material de un elemento. Igual ocurre ahora con el fenómeno de pandeo: conocida la carga crítica de una columna aparece de inmediato la interrogante de si ello ocurre a un nivel alto o bajo de tensiones. Se define entonces la *tensión crítica de Euler* como:

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{P_{\text{cr}}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2 A} \quad (3-23)$$

Resulta muy útil reordenar esta fórmula utilizando la definición de radio de giro y agrupando todas las propiedades de la columna en un término:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E I^2}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{i}\right)^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (3-24)$$

donde $\lambda=KL/i$, que se denomina *esbeltez* de la columna, sintetiza todas sus propiedades geométricas y de vinculación. Cabe recordar que λ ya se había introducido preliminarmente en la Ec. 3-10. En el lenguaje corriente “esbeltez” indica la cualidad de alto y delgado, lo que siempre involucra un grado de relativismo; en el lenguaje estructural, la esbeltez de una columna se puede cuantificar en forma precisa con sus propiedades relevantes A, I, K, L.

Volviendo a la motivación inicial, para analizar el nivel de las tensiones de pandeo resulta conveniente compararlas con la resistencia del material. Para ello se construye la Fig. 3.23, tomando como ejemplo el material acero A37-24ES. La curva representa la tensión crítica de Euler. Como puede observarse, σ_{cr} disminuye rápidamente en la medida que λ crece, de hecho σ_{cr} tiende a cero cuando λ tiende a infinito; inversamente σ_{cr} crece rápidamente cuando la esbeltez λ disminuye, tendiendo la tensión crítica a infinito cuando la esbeltez tiende a cero. Las implicancias prácticas surgen de la comparación de σ_{cr} con la resistencia del material representada por la línea horizontal: las columnas esbeltas experimentarán la falla por pandeo a tensiones de compresión bajas ($\sigma_{cr} < \sigma_y$) y las columnas cortas no experimentarán fenómeno de pandeo pues antes fallarán por resistencia ($\sigma_{cr} > \sigma_y$). Aunque la discusión anterior se hizo en base a un acero en particular, las conclusiones tienen validez general porque las características de la Fig. 3.23 son las mismas para cualquier material; si se cambia a otro material la curva de Euler sólo se traslada verticalmente por el cambio del valor del módulo de elasticidad E, y por cierto, la línea horizontal que representa la capacidad resistente del material también se desplazará verticalmente según las propiedades de éste.

3.2.7 Diseño de Columnas de Acero

La teoría de Euler se basa en un comportamiento lineal-elástico del material, y por tanto en un módulo de elasticidad E constante. Sin embargo, en el acero esto no se cumple exactamente cuando el pandeo ocurre a tensiones de compresión altas, es decir en la proximidad del punto O de la Fig. 3.23. Esto se explica principalmente por dos razones. Primero, porque debido a los procesos de fabricación y enfriamiento de perfiles (laminación, doblado en frío, soldadura) todos los elementos de acero tienen tensiones internas previas a su uso estructural; estas tensiones se denominan

residuales pues son el resultado de los severos procesos térmicos y de deformación plástica antes señalados. Las tensiones residuales pueden tener valores relativamente importantes, del orden de un 50% de la fluencia en algunos puntos de la sección. La segunda razón es que al iniciarse el pandeo y curvarse el elemento, aparecen tensiones de flexión que se superponen a las de la carga axial, de modo que si estas son intensas, puede iniciarse la fluencia en algunos puntos de la sección, aunque teóricamente $\sigma=P/A$ sea menor que la tensión de fluencia σ_y .

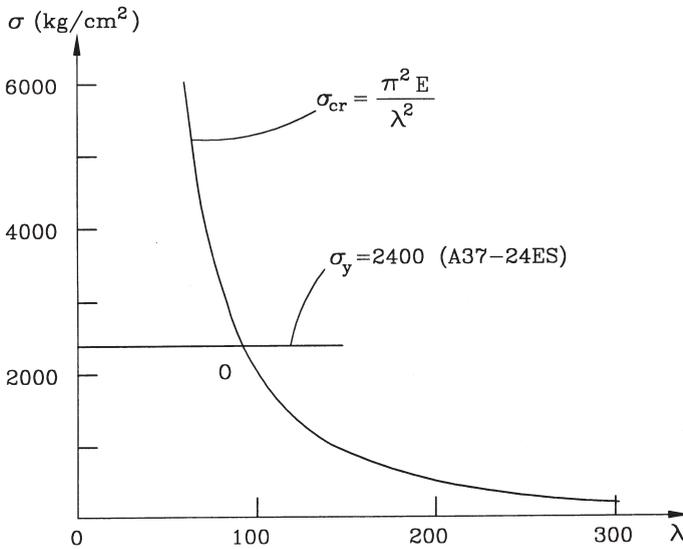


Figura 3.23 Comparación de modos de falla de un elemento en compresión

Los dos efectos se combinan para producir fluencia prematura, y en tal circunstancia deja de ser válido el módulo de elasticidad elástico comportándose el material con un módulo variable y reducido, llamado *módulo tangente*. La consecuencia de la disminución de E es la disminución de la tensión crítica (Ec. 3-24), de modo que el pandeo ocurre para cargas menores a las que predice la teoría de Euler y al fenómeno se le llama *pandeo inelástico*.

Otros efectos secundarios, como que las columnas no sean perfectamente rectilíneas ni las cargas perfectamente centradas se superponen a los anteriores, pero tienen un carácter más bien eventual que el de los fenómenos antes señalados que son intrínsecos al material y al fenómeno de pandeo.

El problema se ha tratado y resuelto analíticamente, y confirmado experimentalmente. La Fig. 3.24 muestra la forma que presentan los resultados experimentales superpuestos

a la Fig. 3.23. Se observa que los experimentos ajustan bien a la curva de Euler para esbelteces grandes y al modo de falla por resistencia para columnas cortas, mientras en la zona intermedia hay una transición suave entre ambos modos de falla, sin alcanzarse el punto O. Se reconocen entonces tres modos de falla: pandeo elástico para columnas esbeltas, pandeo inelástico para columnas de esbeltez intermedia, y falla por resistencia (aplastamiento o fluencia del acero) en las columnas cortas (Fig. 3.24).

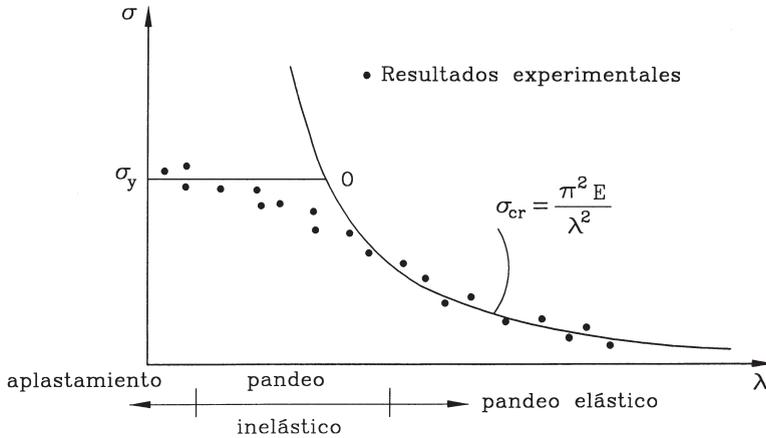


Figura 3.24 Resultados experimentales y modos de falla de columnas

Para el diseño se requiere primero definir la *curva de falla* de la columna en forma precisa. El código del American Institute of Steel Construction (AISC, 1991) adopta lo siguiente (Fig. 3.25):

- i) Utiliza la tensión crítica de Euler para $\lambda \geq \lambda_c$, en que λ_c se define como la esbeltez para la cual $\sigma_{cr} = 0,5\sigma_y$. Es decir, usando la Ec. 3-24:

$$\sigma_{cr} = 0,5\sigma_y = \frac{\pi^2 E}{\lambda_c^2}$$

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} \quad (3-25)$$

- ii) Utiliza una curva de transición entre $\lambda=0$ y $\lambda=\lambda_c$, definida por la expresión

$$\sigma_{cr} = \left[1 - \frac{\lambda^2}{2\lambda_c^2} \right] \sigma_y \quad (3-26)$$

la que da $\sigma_{cr} = \sigma_y$ para $\lambda = 0$, y $\sigma_{cr} = 0,5\sigma_y$ para $\lambda = \lambda_c$, empalmado por lo tanto en dicho punto con la curva de Euler.

Para efectos de diseño, la curva de falla debe dividirse por un factor de seguridad. La norma AISC adopta factores de seguridad distintos para las Ecs. 3-24 y 3-26:

$$FS = \frac{5}{3} + \frac{3 \lambda}{8 \lambda_c} - \frac{1 \lambda^3}{8 \lambda_c^3} \quad \text{para } \lambda \leq \lambda_c \quad (3-27.a)$$

$$FS = 1,92 \quad \text{para } \lambda > \lambda_c \quad (3-27.b)$$

El factor de seguridad para columnas de esbeltez intermedia y baja ($\lambda \leq \lambda_c$) aumenta con la esbeltez, variando entre 1,67 para esbeltez nula, y 1,92 para $\lambda = \lambda_c$. Esta variación se basa en la dispersión observada en resultados experimentales; a su vez, el valor 1,67 para $\lambda = 0$ hace coincidir la tensión admisible de compresión sin pandeo (columna infinitamente corta) con la tensión admisible de tracción $\sigma_{adm} = 0,6\sigma_y$. Por consiguiente, las expresiones para las tensiones admisibles de pandeo en columnas metálicas son:

$$\sigma_{adm} = \frac{\left[1 - \frac{\lambda^2}{2\lambda_c^2} \right] \sigma_y}{\frac{5}{3} + \frac{3 \lambda}{8 \lambda_c} - \frac{\lambda^3}{8 \lambda_c^3}} \quad \text{para } \lambda \leq \lambda_c \quad (3-28)$$

$$\sigma_{adm} = \frac{\pi^2 E}{1,92 \lambda^2} = \frac{10.795.000}{\lambda^2} \text{ kg/cm}^2 \quad \text{para } \lambda_c < \lambda < 200 \quad (3-29)$$

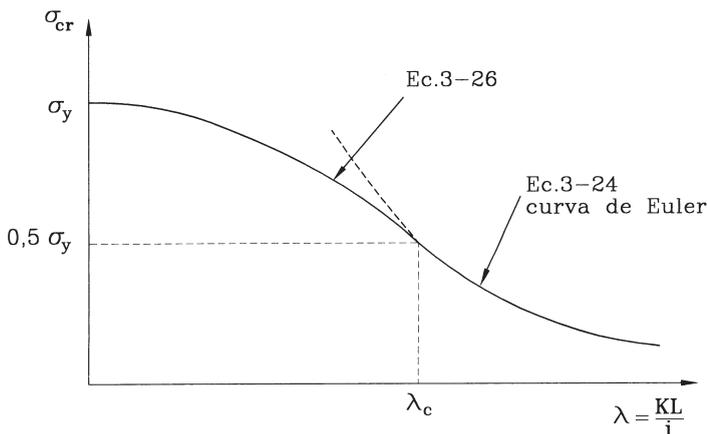


Figura 3.25 Curva de falla de columnas de acero según AISC

En las Tablas A.3 y A.4 se han tabulado las tensiones admisibles dadas por las Ecs. 3-28 y 3-29 para aceros de calidades A37-24ES y A42-27ES. También se indican en dichas tablas las tensiones admisibles para elementos secundarios; el factor de seguridad de estos elementos es menor que el de los elementos principales, ya que su tensión admisible σ'_{adm} se obtiene de la tensión admisible dada por las Ecs. 3-28 y 3-29 modificada por de la expresión:

$$\sigma'_{adm} = \frac{200\sigma_{adm}}{300 - \lambda} \quad \text{para } 120 < \lambda < 200 \quad (3-30)$$

Ejemplo 3.5

Verificar una columna de acero A37-24ES, perfil HN25x95, para una carga axial $P=110$ ton. En la dirección de la viga metálica enrejada suponer que el desplazamiento esta impedido y que la viga es suficientemente rígida para impedir la rotación de la columna. En la otra dirección hay libertad de desplazamiento y giro. Las propiedades del perfil son: $I_x=14000 \text{ cm}^4$, $i_x=10,80 \text{ cm}$, $I_y=5210 \text{ cm}^4$, $i_y=6,56 \text{ cm}$, y $A=121 \text{ cm}^2$.

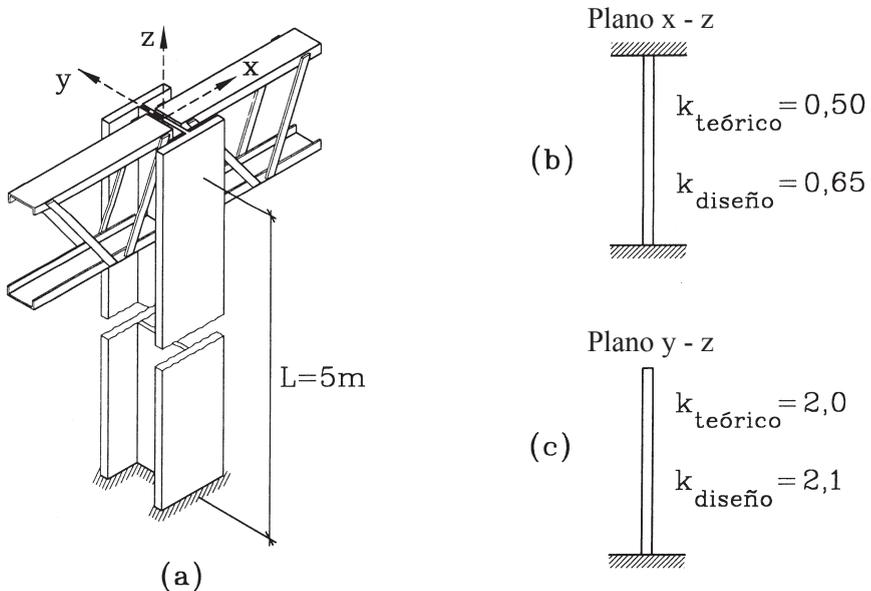


Figura E3.5

Solución: La tensión de compresión para la carga de trabajo es:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{110000}{121} = 909 \text{ kg/cm}^2$$

Las condiciones de vinculación indicadas son tales que en el eje débil de la sección (eje y), es decir, suponiendo pandeo que produzca flexión con respecto al eje y, la situación es como se ilustra en la Fig. E3.5.b. La esbeltez correspondiente es:

$$\frac{KL}{i_y} = \frac{(0,65)(500)}{6,56} = 49,5$$

a la que corresponde (Tabla A.3) una tensión admisible de compresión $\sigma_{adm} = 1237 \text{ kg/cm}^2 > 909 \text{ kg/cm}^2$. En el eje fuerte de la sección (eje x), es decir, suponiendo que el pandeo ocurre flectando la sección con respecto al eje x, las condiciones de vinculación corresponden a las indicadas en la Fig. E3.5.C. La esbeltez en esta dirección es:

$$\frac{KL}{i_x} = \frac{(2,1)(500)}{10,8} = 97,2$$

a la que corresponde la tensión admisible de compresión $\sigma_{adm} = 920,4 \text{ kg/cm}^2 > 909 \text{ kg/cm}^2$. Luego, $P_{adm} = 920,4 \cdot 121 = 111368 \text{ kg} = 111,4 \text{ ton} > P = 110$.

Notar que la nomenclatura “eje débil” y “eje fuerte” usada se refiere solamente a la sección del perfil. En este ejemplo particular, sin embargo, la columna es más fuerte para el pandeo con flexión respecto a su “eje débil” (pandeo en el plano xz) porque las condiciones de vinculación en ese sentido son más favorables resultando que la columna es menos esbelta y, por lo tanto, tiene tensión admisible mayor para esa dirección. Recíprocamente, en este caso, el “eje fuerte” de la sección está asociado a la dirección más crítica de la columna (pandeo en el plano yz), es decir, a aquella que conduce a la tensión admisible menor y controla el diseño. Como regla general de diseño del eje fuerte de la sección debe disponerse en la dirección con mayor longitud efectiva (KL) con el objeto de minimizar la esbeltez y maximizar la tensión admisible.

Ejemplo 3.6

Diseñar las columnas de acero A42-27ES (todas iguales) de la plataforma de la figura. Las columnas están empotradas al suelo y cada una recibe una carga axial de 370 toneladas. Los marcos ABCD y EFGH sólo tienen puntales débiles (CD y GH) en flexión al nivel de la viga, por lo que se han modelado como barras articuladas en ambos extremos, al igual que los elementos de arriostamiento dispuestos en los mismos planos. Los marcos BFDH y AEFG tienen vigas tales que puede suponerse una situación intermedia entre los casos $I=0$ e $I=\infty$. Usar perfiles serie HN.

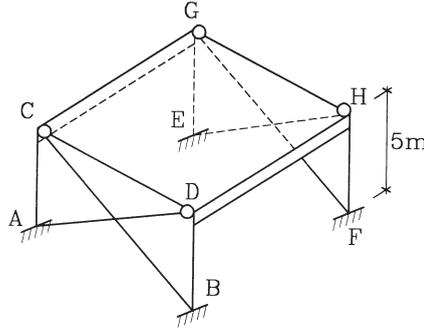


Figura E3.6

Solución: En el plano ABCD las condiciones de las columnas corresponden al caso (b) de la Fig. 3.19, por lo tanto, el coeficiente de luz efectiva de diseño es $K=0,8$. En el plano BFDH la condición puede considerarse un promedio entre los casos (c) y (e) de la Fig. 3.19, luego $K=(1,2+2,1)/2=1,65$. De lo anterior se concluye que el perfil debe situarse de modo de ofrecer su eje fuerte a la flexión en el plano BFDH, es decir, con su alma contenida en dicho plano.

Si no hubiera pandeo, la tensión admisible sería $(2700)(0,6)=1620 \text{ kg/cm}^2$ y se requeriría un perfil de sección $A=370/1,62=228 \text{ cm}^2$; como la tensión admisible será menor que 1620 kg/cm^2 probar con el perfil HN40x214 de propiedades $A=272 \text{ cm}^2$, $i_x=17,4 \text{ cm}$, e $i_y=10,5 \text{ cm}$. Las esbelteces en los planos BFDH y ABCD son respectivamente:

$$\lambda_x = \frac{(1,65)(500)}{17,4} = 47,4$$

$$\lambda_y = \frac{(0,80)(500)}{10,5} = 38,1$$

Controla λ_x para la cual se obtiene de la Tabla A.4 $\sigma_{adm}=1387,2 \text{ kg/cm}^2$. Luego, la carga axial admisible es:

$$P_{adm} = A \sigma_{adm} = (272)(1387,2) = 377318 \text{ kg} = 377 \text{ ton} > 370 \text{ OK}$$

3.2.8 Diseño de Elementos de Madera en Compresión

a) Tensiones admisibles

El problema de la capacidad soportante de columnas de madera tiene similitud con lo estudiado para el acero, aunque por cierto no es idéntico. En el caso de columnas esbeltas de madera, la teoría de Euler es perfectamente aplicable; en efecto, Euler no hace otro distinguo entre los materiales que su módulo de elasticidad lineal-elástico,

y la madera, para tensiones bajo el límite de proporcionalidad σ_p (Fig. 3.13), se comporta en forma perfectamente lineal. Por otra parte, las columnas cortas fallarán al alcanzar σ_p , la tensión de rotura en compresión paralela a las fibras.

En columnas de esbeltez intermedia no puede hablarse propiamente de pandeo inelástico, primero, porque la madera no es un material dúctil que presente un rango de comportamiento inelástico como el acero, y segundo, porque no existen en la madera tensiones residuales de fabricación como en el acero. Es posible, sin embargo, argüir que si la tensión crítica de pandeo σ_{cr} excede σ_p , el módulo de elasticidad apropiado será el tangente a la relación σ - ϵ , y por ende, la tensión crítica deja de coincidir con la de Euler, dando origen a un efecto de pandeo no-lineal. Es claro, por cierto, que el colapso final de la columna pandeada no ocurrirá para un estado de plastificación de la sección como en el acero, ya que la resistencia en tracción paralela a las fibras es considerablemente mayor que la de compresión, y, por tanto, la sección colapsará por rotura del borde comprimido. Claramente puede observarse experimentalmente, que la sección más solicitada “se quiebra” quedando los dos segmentos del elemento perfectamente rectos, sin evidencia, obviamente, de plastificación como se apreciaría en un elemento metálico dúctil.

Posiblemente una discusión como la del párrafo anterior haya inclinado al comité de norma de Estados Unidos a excluir entre 1947 y 1977 una fórmula de transición para columnas de esbeltez intermedia, por cierto, con la ventaja adicional de la simplificación para el diseño. Sin embargo, debe también reconocerse que no puede ocurrir pandeo elástico con $\sigma_c = \sigma_p$, pues E ya ha disminuido. En definitiva, la norma norteamericana (NFPA, 1977) reconoce tres clases de comportamiento de columnas: cortas, intermedias, y esbeltas (Fig. 3.26).

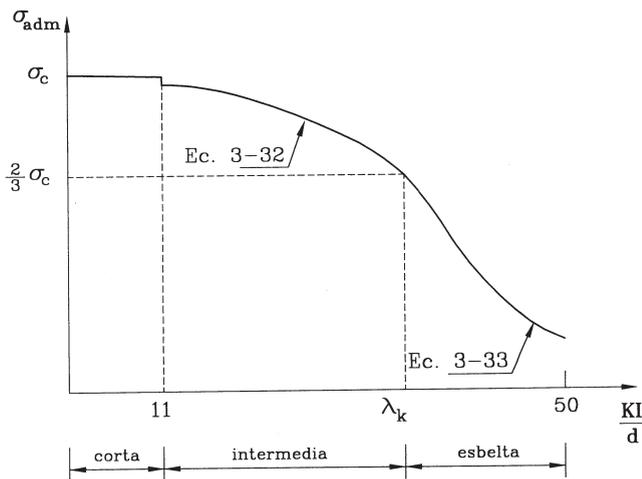


Figura 3.26 Tensión admisible de compresión en columnas de madera en función de la esbeltez

Ya que la mayoría de las columnas son de sección rectangular, la norma mencionada utiliza la dimensión de la sección d en vez del radio de giro i para definir la esbeltez (por cierto $d = i\sqrt{12}$). Para columnas cortas, $\lambda \leq 11$, no hay reducción alguna por inestabilidad, adoptándose como tensión admisible $\sigma_{adm} = \sigma_c$, en que σ_c es la tensión admisible en compresión paralela a las fibras. El límite entre las columnas intermedias y las esbeltas se define para la esbeltez:

$$\lambda_k = 0,671 \sqrt{\frac{E}{\sigma_c}} \quad (3-31)$$

que corresponde a la esbeltez para la cual la tensión crítica de Euler es igual a $2\sigma_c/3$. En la Ec. 3-31, E es el módulo de elasticidad elástico promedio de la madera. La tensión admisible para columnas intermedias queda dada por una fórmula de transición (Ec. 3-32), y para columnas esbeltas la tensión admisible (Ec. 3-33) corresponde a la tensión crítica de Euler (Ec. 3-24) afectada por un factor de seguridad de 2,74 y por el cambio de i por $d/\sqrt{12}$:

$$\sigma_{adm} = \sigma_c \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{KL/d}{\lambda_k} \right)^4 \right] \quad (3-32)$$

$$\sigma_{adm} = \frac{0,3E}{(KL/d)^2} \quad (3-33)$$

La esbeltez máxima permitida en columnas de madera es $KL/d=50$.

En el caso de columnas de sección circular la norma permite la simplificación de suponer que su capacidad soportante es igual a la de una columna de sección cuadrada con igual área de compresión; esta aproximación resulta en un error del orden del 5% por el lado de la inseguridad para columnas esbeltas. Una alternativa a la simplificación es usar las Ecs. 3-32 y 3-33 sustituyendo d por $i\sqrt{12}$, en que el radio de giro i de una sección circular es igual a la mitad del radio de la sección de la columna (Tabla V.3).

Cabe hacer notar que, cuando proceda, la tensión admisible debe también afectarse por el factor K_D definido en la Sección 3.2.5.

b) Columnas compuestas de madera

En madera es común usar columnas compuestas por dos o más piezas, como las de la Fig. 3.27. La separación de las piezas tiene por objeto aumentar el momento de inercia de la sección y por ende el radio de giro, disminuyendo la esbeltez y aumentando la tensión admisible, para hacer un uso más eficiente del material. Sin embargo, los experimentos han demostrado que para pandeo con flexión en torno al

eje y-y (Fig. 3.27) no se logra el incremento de inercia teórico de la sección sino sólo una fracción de él. La norma alemana de cálculo y ejecución de construcciones de madera (DIN 1052) recomienda usar un momento de inercia equivalente I_e dado por:

$$I_e = I_o + \frac{1}{4}(I_1 - I_o) \tag{3-34}$$

en que I_o es el momento de inercia de una sección llena de espesor igual a la suma de los espesores de los elementos individuales componentes, e I_1 es el momento de inercia de la sección compuesta. Separaciones tales que $a > 2d$ no podrán ser consideradas en el cálculo. El radio de giro equivalente i_e está dado por:

$$i_e = \sqrt{\frac{I_e}{A}}$$

en que A es la suma de las áreas de los elementos componentes. El momento de inercia respecto al eje x-x es igual a la suma de los momentos de inercia de los elementos componentes (no hay reducción).

Los tacos de madera que unen piezas individuales se deben colocar, por lo menos, en los extremos y en el centro del elemento. En todo caso, la esbeltez de cada elemento individual entre tacos de conexión debe ser menor que la esbeltez del conjunto. Los tacos tendrán un ancho igual al de las piezas conectadas y un largo mínimo igual a $(a+2d)$. Las conexiones se realizan con un mínimo de dos pernos para piezas de ancho menor a 8” y con cuatro pernos para piezas de ancho mayor a 8”. En elementos de menor importancia se pueden utilizar clavos.

Finalmente, es necesario destacar que en esta Sección no se ha seguido la presentación de la norma chilena NCh1198.Of91, ya que se ha preferido una formulación más sencilla.

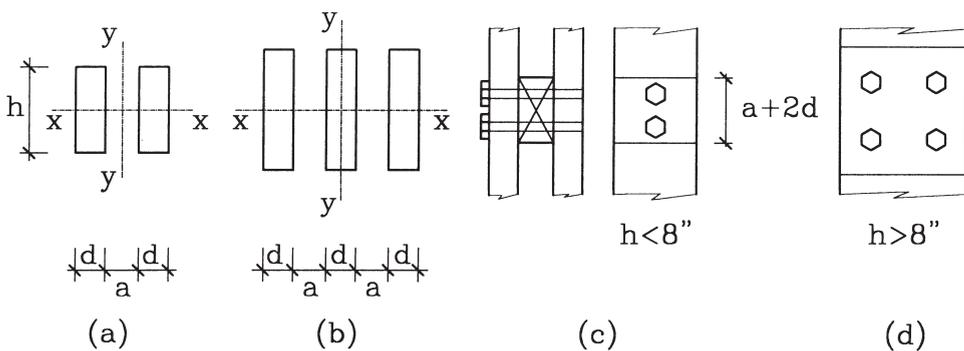


Figura 3.27 Columnas compuestas de madera

Ejemplo 3.7

Para un cobertizo de automóviles en una residencia particular se usa una estructura de madera de roble cepillada Grado de calidad III. No hay certeza de la humedad de la madera que se adquirirá, y por tratarse de una estructura a la intemperie, se utilizarán conservadoramente propiedades de madera verde. Las columnas de 2,3 m de altura estarán empotradas en la base y no formarán nudos rígidos con las cerchas o vigas de cubierta. La carga en cada columna es de 1200 kg. Se pide diseñar las columnas.

Solución: Según la Tabla M.3, para Roble Grado III, la tensión admisible de compresión paralela a las fibras es de 66 kg/cm² y el módulo de elasticidad 69000 kg/cm².

Tomando una sección formada por dos piezas de 2"x6" separadas en 2" (Fig. E3.7.a) y utilizando dimensiones de piezas cepilladas (Tabla M.4) se tiene:

$$i_x = \frac{d}{\sqrt{12}} = \frac{d}{3,46} = \frac{14}{3,46} = 4,05 \text{ cm}$$

$$i_{ye} = \sqrt{\frac{I_{ye}}{A}}$$

$$A = 2 \cdot 4,5 \cdot 14 = 126 \text{ cm}^2$$

$$I_e = I_o + \frac{1}{4}(I_1 - I_o)$$

en que I_1 e I_o , con respecto al eje "y", se calculan para las secciones indicadas en las Figs. E3.7.a y b respectivamente. Para calcular I_1 puede procederse tomando el momento de inercia como si la sección fuese llena y restando el momento de inercia del vacío:

$$I_1 = \frac{14}{12}(3 \cdot 4,5)^3 - \frac{14}{12}(4,5)^3 = 2764 \text{ cm}^4$$

$$I_o = \frac{(14)(9)^3}{12} = 850,5 \text{ cm}^4$$

$$I_{ye} = 850,5 + \frac{2764 - 850,5}{4} = 1329 \text{ cm}^4$$

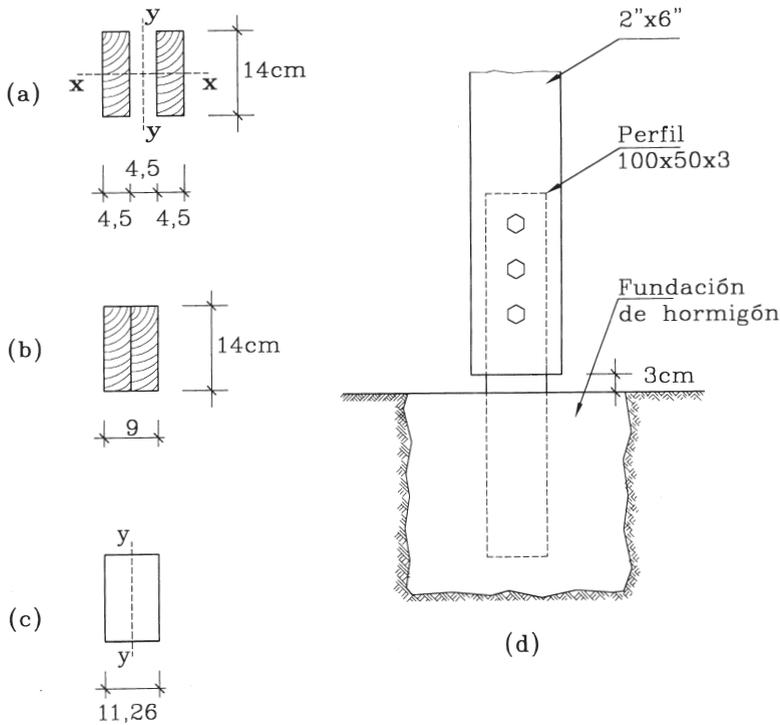


Figura E3.7

Notar que la eficiencia de la sección (I_{ye}/I_1) es de un 48%. El radio de giro equivalente es entonces:

$$i_{ye} = \sqrt{\frac{1329}{126}} = 3,25 \text{ cm} \quad (\text{controla } i_{ye} < i_x)$$

Como las fórmulas de diseño se han presentado para una sección rectangular, el radio de giro calculado equivale a una sección cuya dimensión menor d_e es (Fig. E3.7.c):

$$d_e = i_{ye} \sqrt{12} = 11,26 \text{ cm}$$

Para una columna empotrada en la base y libre en su extremo superior $K=2,1$ (Fig. 3.19), luego la esbeltez de la columna es:

$$\lambda = \frac{KL}{d_c} = \frac{(2,1)(230)}{11,26} = 42,9$$

como:

$$\lambda = 0,671 \sqrt{\frac{E}{\sigma_c}} = 0,671 \sqrt{\frac{69000}{66}} = 21,7$$

rige la Ec. 3-33. Luego:

$$\sigma_{adm} = \frac{0,3E}{\lambda^2} = \frac{(0,3)(69000)}{(42,9)^2} = 11,25 \text{ kg/cm}^2$$

$$N_{adm} = A\sigma_{adm} = 1417 \text{ kg} > 1200$$

Para completar el diseño, usar en la base un perfil tubo metálico de 100x50x3 mm al que se unirán las dos piezas de roble de 2"x6" mediante pernos. El perfil metálico se empotrará en una fundación de hormigón. Se evitará el contacto de la madera con el suelo para protegerla de la humedad (Fig. E3.7.d).

3.2.9 Diseño de Columnas de Hormigón Armado

a) Propiedades del Hormigón

Es un material artificial que imita la roca natural, con la ventaja de poder darle la forma deseada. Como la roca, tiene gran capacidad en compresión, pero presenta baja resistencia a la tracción; de hecho, salvo en casos excepcionales, es común despreciar su resistencia en tracción, de modo que la propiedad de referencia del hormigón es su resistencia a la compresión. Esta se mide mediante un ensayo que puede realizarse sobre dos tipos distintos de probetas (Fig. 3.28). Siendo P_{max} la carga máxima de compresión que resiste la probeta, se definen según el ensayo, la resistencia cilíndrica por medio de la tensión $f'_c = P_{max}/A_{cil}$, y la resistencia cúbica o prismática $f_c = P_{max}/A_{cub}$, en que A es el área de la sección según corresponda. Aun cuando se realicen ensayos con probetas de igual sección, f_c y f'_c son diferentes, ya que la geometría de las probetas influye en la resistencia, siendo siempre mayor la cúbica debido al confinamiento adicional que proporcionan el hormigón de las aristas y la máquina de ensayos misma. Para hormigones de uso común puede usarse como aproximación $f'_c \approx 0,85f_c$, o bien, la equivalencia oficial según la norma NCh170.Of85 que se presenta en la Tabla 3.3. En Chile la resistencia especificada corresponde a probetas cúbicas, o sea en base a f_c , definiéndose grados de resistencia como muestra la Tabla 3.3.

TABLA 3.3 Clasificación de los hormigones por resistencia especificada a la compresión según norma NCh170.Of85 en kg/cm²

| Grado | Resistencia especificada f_c | f_c' equivalente |
|-------|--------------------------------|--------------------|
| H10 | 100 | 80 |
| H15 | 150 | 120 |
| H20 | 200 | 160 |
| H25 | 250 | 200 |
| H30 | 300 | 250 |
| H35 | 350 | 300 |
| H40 | 400 | 350 |
| H45 | 450 | 400 |
| H50 | 500 | 450 |

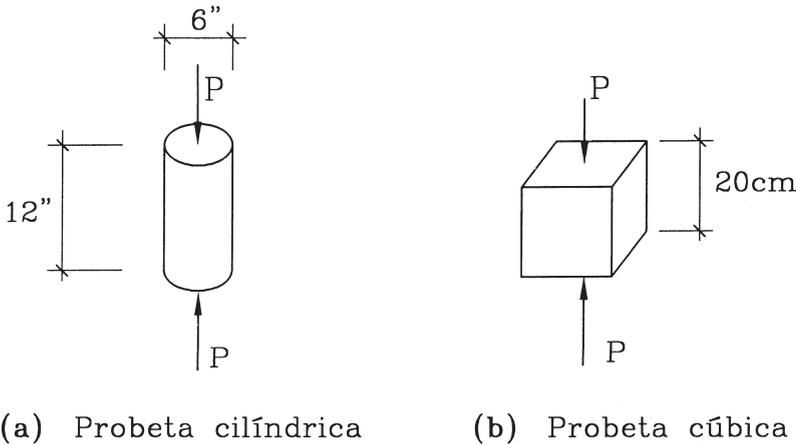


Figura 3.28 Probetas estándar para el ensayo de compresión en hormigón

Como la resistencia del hormigón aumenta con el tiempo, tanto f_c como f_c' se refieren convencionalmente a la edad de 28 días. Los ensayos se realizan a una velocidad de deformación unitaria relativamente lenta, del orden de 0,001/min, de modo que la resistencia máxima se alcanza en 2 ó 3 minutos. En ensayos muy rápidos, en que la carga máxima se alcanza en fracciones de segundo, se observan incrementos en la resistencia y en el módulo de elasticidad del orden de un 15%.

La Fig. 3.29 muestra curvas σ - ϵ típicas para hormigones en ensayos lentos con control de deformación, lo que permite obtener la curva completa después de alcanzada la resistencia máxima. Varias observaciones de interés se pueden hacer en relación con esta figura: (a) el hormigón es un material frágil de muy baja capacidad de deformación

que no tiene punto de fluencia ni rango de deformación plástica, (b) a mayor resistencia tiene menor capacidad de deformación, (c) la resistencia máxima se produce para $\varepsilon \leq 0,002$, (d) después de alcanzada la resistencia máxima la capacidad del hormigón decae debido a su deterioro, que se manifiesta en grietas visibles paralelas a la dirección de la carga, las que se traducirían en una falla explosiva al alcanzar f_c si el aparato de ensayo no redujera de inmediato la carga aplicada, (e) el colapso global de la probeta ocurre finalmente para $\varepsilon \geq 0,003$, (f) la parte inicial de la curva σ - ε es aproximadamente lineal hasta $\sigma \approx 0,5f_c$ y (g) la curva σ - ε tiene en general forma parabólica.

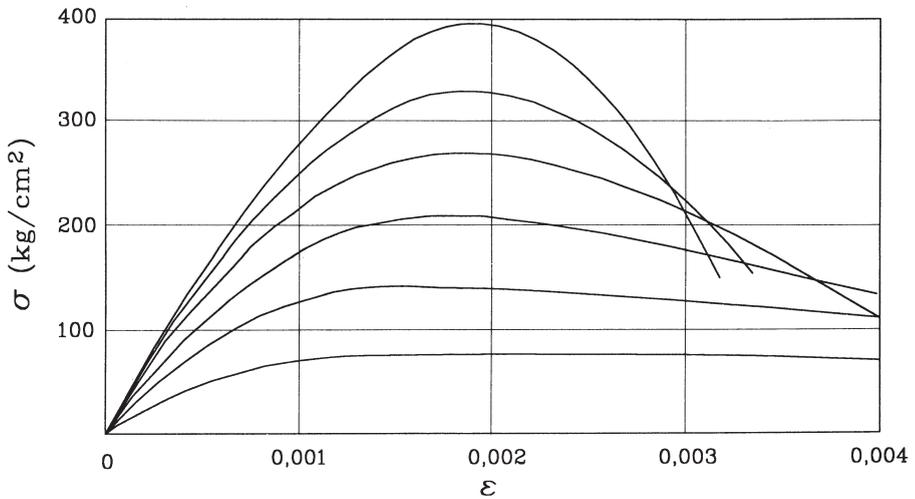


Figura 3.29 Curvas de ensayos de compresión uniaxial en probetas cilíndricas (adaptada de Park y Paulay, 1975)

Para efectos de análisis se han propuesto varias idealizaciones de la relación tensión deformación del hormigón. La más popular es la de Hognestad, 1951 (Fig. 3.30), que utiliza entre $\varepsilon=0$ y ε_0 una curva de forma parabólica dada por:

$$\sigma_c = f_c' \left[2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (3-35)$$

y una rama lineal entre ε_0 y ε_u con tensión de fractura del hormigón $\sigma_u = 0,85 f_c'$ para $\varepsilon = \varepsilon_u$. Hognestad propuso $\varepsilon_0 = 2f_c'/E_c$ y $\varepsilon_u = 0,0038$, sin embargo, es usual utilizar $\varepsilon_0 \approx 0,002$ y $\varepsilon_u \approx 0,003$, sin perjuicio de cambiarlos en análisis específicos que lo requieran. El módulo de elasticidad E_c , válido sólo en el rango lineal inicial de la curva σ - ε , tiene valores del orden de 220.000 a 280.000 kg/cm² para el rango usual de resistencias, es decir, aproximadamente 1/10 a 1/8 del módulo de elasticidad del acero. Cuando se obtiene directamente de un experimento, E_c se calcula como la pendiente de la secante a un 40% de la resistencia máxima.

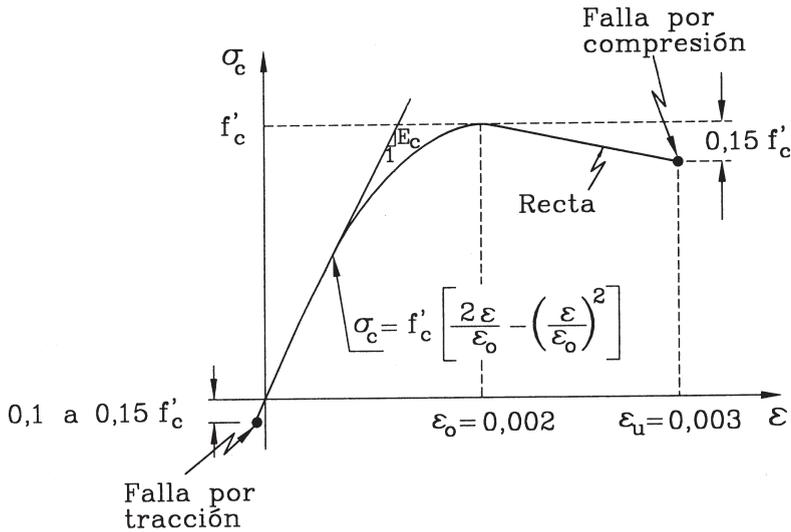


Figura 3.30 Relación tensión-deformación idealizada del hormigón

La resistencia del hormigón a la tracción es muy baja, del orden de 10 a 15% de f'_c y es muy dependiente del tipo de ensayo utilizado para medirla. El ensayo de tracción directa es complejo de realizar, por ello es más común el de flexotracción, que proporciona la resistencia de tracción en flexión o módulo de ruptura f_r . Es generalmente aceptada la relación:

$$f_r = 2\sqrt{f'_c} \tag{3-36}$$

en que f_r y f'_c deben expresarse en kg/cm^2

Debido a la baja resistencia a la tracción del hormigón es usual ignorarla en los cálculos de resistencia del hormigón armado. Esto no significa que sea una propiedad poco importante del hormigón; de hecho no sólo hay casos especiales en que el hormigón se diseña en estado elástico controlado por su resistencia a la tracción, por ejemplo, en fundaciones sin armar o en estanques expuestos a fluidos altamente corrosivos o en pavimentos, sino también la resistencia a la tracción es una propiedad fundamental en relación con la resistencia al esfuerzo de corte del hormigón, y en fenómenos de fisuración por retracción y temperatura.

b) Comportamiento de columnas de hormigón armado sin pandeo

Las columnas de hormigón armado pueden ser de varios tipos. Por ejemplo, las Figs. 3.31.a y b muestran secciones de hormigón armado tradicional, que se estudiarán aquí, y las otras muestran casos más especiales llamados columnas compuestas: un perfil tubular de acero relleno de hormigón (Fig. 3.31 .c) y un perfil de acero rodeado por hormigón y armaduras de refuerzo estándar (Fig. 3.31 .d).

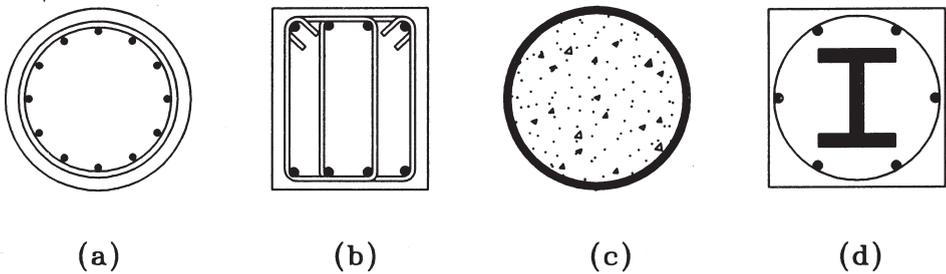


Figura 3.31 Secciones de columnas de hormigón armado

El estudio del comportamiento de una columna consiste en evaluar cómo varían las tensiones internas y las deformaciones de los materiales cuando la carga crece desde cero hasta la rotura. Se considerará una columna sometida a una carga axial P perfectamente centrada, como la de la Fig. 3.32, exenta de esfuerzos internos de flexión. Tampoco se considerará la posibilidad de inestabilidad, lo que se incorporará posteriormente.

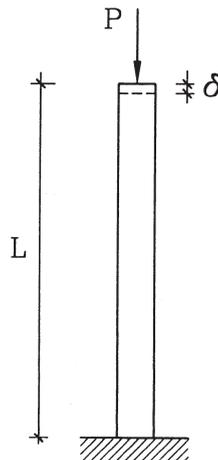


Figura 3.32 Columna axialmente cargada

La hipótesis fundamental en este caso es que, por existir perfecta simetría, la deformación δ global de la columna corresponderá a un descenso plano paralelo de la sección extrema superior, esto implica que la deformación axial de las barras de refuerzo es idéntica a la del hormigón que las rodea; en otras palabras se supone perfecta adherencia entre acero y hormigón, sin deslizamiento de la barra en el interior del hormigón, condición que se logra materializar en la realidad mediante el uso de barras con resaltes. Esta hipótesis constituye la condición de compatibilidad geométrica del problema de mecánica estructural planteado; en efecto, en cada sección de la columna existirá una deformación unitaria axial ε tal que:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \varepsilon_s = \varepsilon_c$$

en que ε_s y ε_c son las deformaciones unitarias en el acero y el hormigón respectivamente. Como las propiedades de los materiales son conocidas, por medio de sus relaciones tensión-deformación, con las deformaciones unitarias se obtienen las tensiones σ_s y σ_c a que están sometidos ambos materiales. Conocidas las tensiones se puede determinar la carga axial que toma el acero P_s y la que toma el hormigón P_c , simplemente multiplicando por sus áreas transversales A_s y A_c respectivamente:

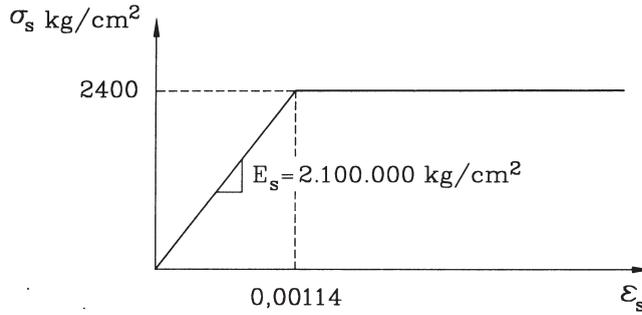
$$P_s = \sigma_s A_s \qquad P_c = \sigma_c A_c$$

de modo que la carga total que soporta la columna es

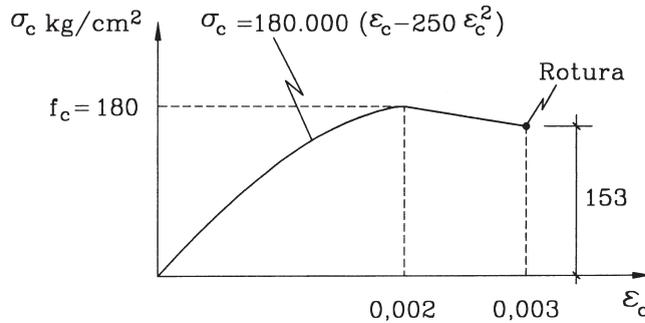
$$P = P_c + P_s = \sigma_c A_c + \sigma_s A_s$$

Para ilustrar este procedimiento, se aplicará en forma numérica a una columna específica de 4m de longitud, 25x25 cm de sección, y 4 ϕ 16 de armadura de refuerzo. Las relaciones tensión-deformación de los materiales son las que muestra la Fig. 3.33.

La sección total de la columna es $A_g = 25 \times 25 = 625 \text{ cm}^2$. Cada barra de ϕ 16 tiene una sección de $2,01 \text{ cm}^2$ (Tabla H.1), luego $A_s = 4 \cdot 2,01 = 8,04 \text{ cm}^2$. La sección de hormigón es $A_c = A_g - A_s = 625 - 8,04 = 617 \text{ cm}^2$. Los cálculos del procedimiento antes descrito se realizan en la secuencia siguiente: darse un valor de ε , calcular σ_s y σ_c (Fig. 3.33), calcular P_s , P_c y P , calcular $\delta = L\varepsilon = 400\varepsilon$. El cálculo se repite para distintos valores de ε hasta la rotura como se resume en la Tabla 3.4, y en la Fig. 3.34.



(a) Acero A37-24, modelo elastoplástico



(b) Hormigón

Figura 3.33 Curvas tensión-deformación de los materiales para estudio de comportamiento**TABLA 3.4** Cálculo de curva P-δ de columna de hormigón armado

| ε | σ_s (kg/cm ²) | P_s (ton) | $(\varepsilon_c - 250\varepsilon_c^2)10^3$ | σ_c (kg/cm ²) | P_c (ton) | P (ton) | δ (cm) |
|---------------|----------------------------------|-------------|--|----------------------------------|-------------|-----------|---------------|
| 0,0005 | 1050 | 8,44 | 0,4375 | 78,75 | 48,59 | 57,03 | 0,20 |
| 0,0010 | 2100 | 16,88 | 0,7500 | 135,00 | 83,30 | 100,18 | 0,40 |
| 0,0015 | 2400 | 19,30 | 0,9375 | 168,75 | 104,12 | 123,42 | 0,60 |
| 0,0020 | 2400 | 19,30 | 1,0000 | 180,00 | 111,06 | 130,36 | 0,80 |
| 0,0025 | 2400 | 19,30 | | 166,50 | 102,73 | 122,03 | 1,00 |
| 0,0030 | 2400 | 19,30 | | 153,00 | 94,40 | 113,70 | 1,20 |

Varios comentarios pueden hacerse de la observación de la Fig. 3.34, que a pesar de corresponder a un caso particular, representa el comportamiento general de columnas de hormigón armado:

- i) el acero fluye antes que el hormigón alcance su resistencia máxima,
- ii) el hormigón contribuye con una parte sustancial de la carga total que toma la columna,
- iii) la carga máxima ocurre cuando el hormigón alcanza su resistencia máxima,
- iv) después de alcanzar la carga máxima la columna disminuye su resistencia,
- v) la columna falla cuando el hormigón llega a su capacidad máxima de deformación y se fractura.

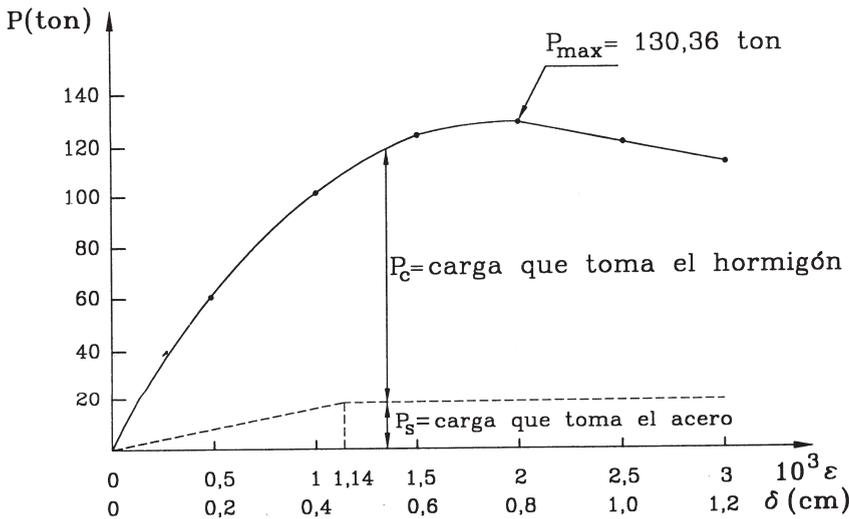


Figura 3.34 Curva P- δ y P- ϵ para una columna de hormigón armado

c) Diseño de columnas de hormigón armado sin pandeo

La norma de diseño de hormigón armado que se usa en forma generalizada en Chile es la ACI 318-95 del American Concrete Institute. Ella contiene disposiciones modernas que tienen por objeto lograr un adecuado comportamiento sísmico de las estructuras de hormigón armado; por ello la norma de diseño sísmico de edificios (NCh433.Of96) requiere obligatoriamente su uso para el diseño de elementos sismorresistentes. En el caso particular de los elementos en compresión sin embargo, la norma chilena antigua NCh429.Of57 propone una fórmula muy atractiva por su simplicidad, que es fácil de recordar, y útil para prediseño o para una verificación rápida de capacidad, por ello se

incluye aquí. La fórmula define la carga admisible de una columna axialmente cargada en base a la carga máxima que ella resiste (Fig. 3.34):

$$P_{\max} = f_c A_c + \sigma_y A_s$$

a la cual se le aplica un factor de seguridad de 3 para garantizar el trabajo en el rango elástico de los materiales para las cargas de servicio, obteniéndose:

$$P_{\text{adm}} = \frac{P_{\max}}{3} = \frac{1}{3}(f_c A_c + \sigma_y A_s) \quad (3-37)$$

Otro aspecto importante en el diseño es el control de la cantidad de acero en la columna, la que se denomina *cuantía* y se define como

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} 100 \quad (3-38)$$

que debe cumplir con los límites

$$1\% \leq \rho \leq 6\% \quad (3-39)$$

Existen varias razones para imponer cuantías mínimas en columnas. En primer lugar, evitar que se diseñen columnas sin armaduras, que dejarían de comportarse como hormigón armado y tendrían una falla extremadamente frágil. Segundo, algún mínimo de armadura se requiere para proveer resistencia a la flexión, aún cuando teóricamente sólo exista compresión axial. Y tercero, para paliar en parte los fenómenos de fluencia lenta (creep) y retracción del hormigón que tienen como consecuencia la transferencia de carga del hormigón al acero. La limitación de la cuantía máxima obedece principalmente a las dificultades prácticas para el hormigonado de columnas con gran congestión de armaduras; al respecto hay que considerar que las armaduras deben añadirse por traslapeo, y también que las columnas son usualmente cruzadas por vigas en dos direcciones cuyas armaduras las atraviesan. Por ello, aunque el código ACI permite hasta $\rho=8\%$ se recomienda atenerse al límite indicado en la Ec. 3-39.

Adicionalmente hay una serie de requisitos que exigen las normas a las columnas. Sin entrar en detalle a ellos, cabe mencionar algunas recomendaciones muy básicas. La mínima dimensión de una columna es de 20 cm de lado o diámetro, ello porque es prácticamente imposible que columnas de dimensiones menores queden bien hormigonadas. Las armaduras mínimas en una columna son $4\phi 12$, porque el diámetro de 12 mm da alguna seguridad de que las barras se mantengan rectas durante la construcción. Las armaduras deben quedar adecuadamente protegidas del ambiente

por un *recubrimiento* de hormigón, mínimo de 2 cm en columnas, el que se mide desde el borde exterior de los estribos; en condiciones más severas por exposición al aire libre, ambientes húmedos marítimos o corrosivos, en contacto directo con la humedad, con el terreno u otro ambiente agresivo, los recubrimientos deben ser aún mayores (3 a 5 cm). Los estribos, que rodean a las armaduras longitudinales (Fig. 3.35) no deben distanciarse más de 12 veces el diámetro de las barras longitudinales ni más de una distancia igual al lado menor o diámetro de la columna; además deben cerrarse completamente en ganchos a 45° con longitud mínima de 10 cm.

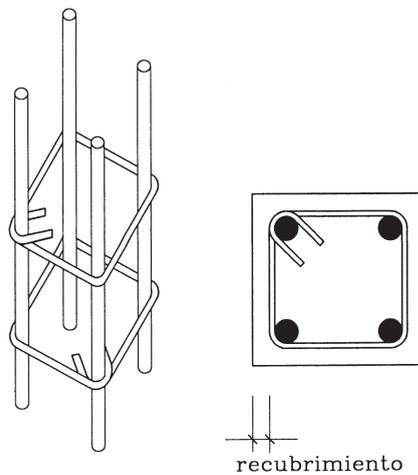


Figura 3.35 Estribos en columnas

Ejemplo 3.8

Dimensionar una columna para una carga total de peso propio más sobrecarga de 115 toneladas, sin considerar pandeo. Utilizar hormigón con $f_c=180 \text{ kg/cm}^2$ y acero A63-42H ($\sigma_y=4200 \text{ kg/cm}^2$).

Solución: La fórmula a utilizar es la Ec. 3-37:

$$P_{adm} = \frac{1}{3} (f_c A_c + \sigma_y A_s)$$

En este caso no se han especificado restricciones al tamaño de la sección. Por economía se usará $\rho_{\min} = 1\%$, entonces $A_s = 0,01 A_c$. Luego puede escribirse la condición:

$$P_{\text{adm}} = \frac{1}{3} (f_c A_c + \sigma_y 0,01 A_c)$$

$$115000 = \frac{1}{3} (180 + 4200 \cdot 0,01) A_c$$

$$A_c = \frac{345000}{180 + 42} = 1554 \text{ cm}^2$$

Escogiendo la sección de la columna de 40x40 cm, es decir $A_g = 1600 \text{ cm}^2$, y tomando:

$$A_s = 0,01 \cdot 1554 = 15,54 \text{ cm}^2$$

deben usarse armaduras $8\phi 16 = 16,08 \text{ cm}^2$. La verificación confirma que se satisface la resistencia requerida:

$$A_c = 1600 - 16,08 = 1583,92$$

$$P_{\text{adm}} = \frac{1}{3} (180 \cdot 1583,92 + 4200 \cdot 16,08) = 117547 \text{ kg} > 115 \text{ ton}$$

La Fig. E3.8 muestra la solución con estribos mínimos a $12\phi = 12 \cdot 16 = 192 \text{ mm} \rightarrow 20 \text{ cm}$ (redondeando para simplicidad constructiva).

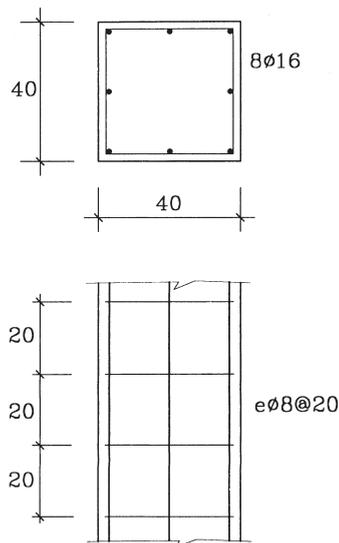


Figura E3.8

d) Columnas de hormigón armado incluyendo pandeo

Una forma muy sencilla para tomar en cuenta el fenómeno de inestabilidad para efectos del prediseño de columnas de hormigón armado, es introducir un factor γ que reduce la carga admisible sin pandeo

$$P_{adm} = \frac{1}{3\gamma} (f_c A_c + \sigma_y A_s) \tag{3-40}$$

El factor γ , que depende de la esbeltez de la columna se presenta en la Tabla 3.5. Para valores intermedios a los tabulados se puede interpolar entre los valores más cercanos. La máxima esbeltez permitida es $\lambda=140$ de manera que el valor máximo de γ es 3. Para $50 < \lambda < 140$ puede también usarse la expresión $\gamma=1+(\lambda-50)^2/4050$.

TABLA 3.5 Factor de pandeo γ para columnas de hormigón armado

| Esbeltez = $\frac{KL}{i}$ | γ |
|---------------------------|----------|
| ≤ 50 | 1,00 |
| 70 | 1,08 |
| 85 | 1,32 |
| 105 | 1,72 |
| 120 | 2,28 |
| 140 = max | 3,00 |

3.3 Elementos Sometidos a Flexión

3.3.1 Tensiones de Flexión

Se considerará aquí el caso más frecuente de vigas de sección simétrica respecto al plano vertical, plano que a su vez es aquél que contiene las cargas verticales aplicadas. En estas condiciones la deformación o *deflexión* de la viga es puramente vertical pues no se producen desplazamientos fuera de dicho plano. La Fig. 3.36 muestra una viga de sección rectangular (pero puede ser cualquier otra forma simétrica con respecto al eje y-y) y la típica deformación de *curvatura* por flexión que se produce al cargarla, tal como se observaría en un experimento de laboratorio. Aunque la figura muestra una sección rectangular, el análisis que sigue no exige simetría con respecto al eje horizontal x-x. La primera observación que puede hacerse en el experimento es que secciones perfectamente verticales en la viga sin carga, como AB y CD, experimentan una rotación debido a la flexión, lo que origina la curvatura. Segundo,

lo que constituye una hipótesis fundamental de la flexión, cualquier sección, como la AB, no se distorsiona al ocurrir la flexión, o sea las *secciones originalmente planas permanecen planas*. La tercera observación, como se aprecia claramente en la figura, es que los puntos A y C se acercan al flectarse la viga, mientras los puntos B y D se alejan; de ello se deduce que debe estar ocurriendo compresión en el borde superior de la viga, y tracción en el borde inferior.

Con las bases anteriores se puede proceder a determinar las tensiones debidas al fenómeno de flexión. Para ello considérese un segmento de viga sometido a momento flector constante, como por ejemplo el delimitado por las secciones AB y CD en la Fig. 3.36, el que se analiza en mayor detalle en la Fig. 3.37.

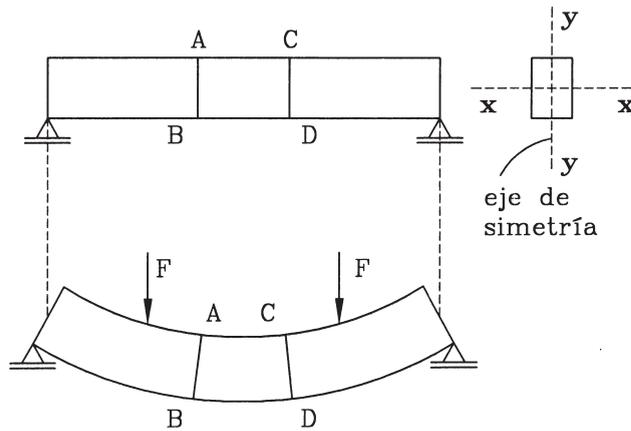


Figura 3.36 Viga en flexión

De la tercera observación antes indicada se concluye que existe un *eje neutro*, o más bien una *superficie neutra*, que no experimenta ni elongación ni acortamiento, y que por tanto tiene tensiones nulas. Sea éste el eje de los puntos N y O, y considérese una fibra cualquiera PQ a distancia “y” de él (Fig. 3.37). El giro relativo de las secciones es θ , y ρ es el radio de curvatura de la viga flectada medido hasta el eje neutro. La deformación unitaria de la fibra PQ es por definición

$$\epsilon_{PQ} = \frac{\text{largo final} - \text{largo inicial}}{\text{largo inicial}}$$

$$\epsilon_{PQ} = \frac{PQ - NO}{NO}$$

en que el largo inicial es NO porque en el estado inicial no deformado todas las fibras tienen igual longitud. Escribiendo las longitudes de los arcos PQ y NO en función de ρ y θ se tiene

$$\epsilon_{PQ} = \frac{(\rho - y)\theta - \rho\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

expresión que indica que la deformación unitaria de las fibras de la sección varía con “y”, siendo además negativa (acortamiento) para las fibras ubicadas sobre el eje neutro (“y” positivo) y positiva (elongación) para las fibras ubicadas bajo el eje neutro (“y” negativo). En virtud de la relación tensión-deformación del material se tiene $\sigma = E\epsilon$, luego

$$\sigma = -\frac{Ey}{\rho} \tag{3-41}$$

Por otra parte, puede demostrarse analítica y experimentalmente que el radio de curvatura ρ y el momento flector M se relacionan en la forma siguiente:

$$\rho = \frac{EI}{M} \tag{3-42}$$

en que E es el módulo de elasticidad del material, I es el momento de inercia de la sección con respecto al eje x-x (Fig. 3.36), y M es el momento flector que actúa sobre la sección. Notar que M es un momento en torno al eje x, I es el momento de inercia en torno a dicho eje, y la sección gira en torno al eje x.

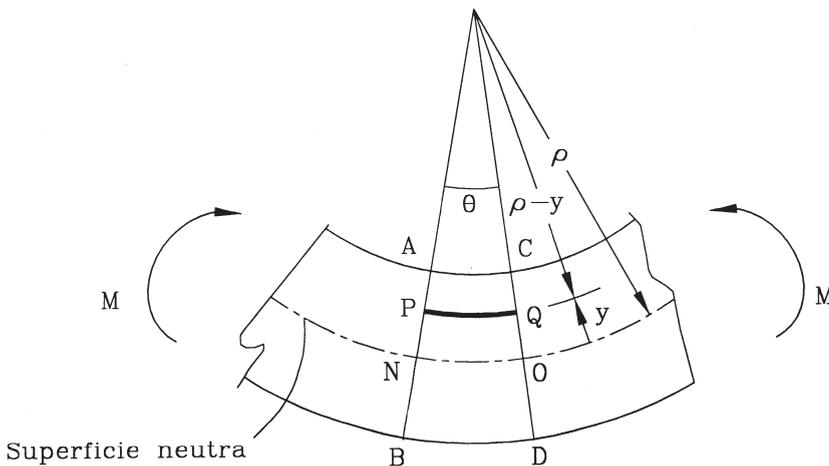


Figura 3.37 Deformación por flexión

Aunque la Ec. 3-42 no se ha demostrado formalmente aquí, es importante destacar que ella tiene un sentido físico tan claro que puede llegarse a ella prácticamente por intuición. En efecto, si se analiza la influencia de cada uno de los parámetros E , I , y M en la curvatura θ y en el radio de curvatura ρ , se concluye que mientras mayor sea el módulo de elasticidad E (rigidez del material), mayor es el radio de curvatura ρ , o sea menor es la curvatura o deformación por flexión. Igualmente, a mayor momento de inercia I (rigidez de la sección), mayor es ρ y menor es θ . Dicho de otra manera, E e I son directamente proporcionales a ρ (si ellos crecen, ρ crece). Inversamente, mientras mayor sea el momento flector M , menor es el radio de curvatura y mayor es la curvatura o deformación por flexión; es decir M es inversamente proporcional a ρ (si M crece, ρ disminuye).

La Ec. 3-42 es obviamente una relación “fuerza-deformación” (M vs. ρ específicamente) en que el producto EI está relacionado con la rigidez a la flexión. El producto EI refleja la influencia del material y de la forma de la sección en la *rigidez de la viga*: a mayor EI más rígida es la viga, es decir es menos deformable, menor es la curvatura θ en cada sección, y mayor es el radio de curvatura ρ . Finalmente, introduciendo la Ec. 3-42 en la Ec. 3-41, se obtiene la distribución de tensiones de flexión normales (perpendiculares) a la sección

$$\sigma = -\frac{M}{I}y \quad (3-43)$$

La Ec. 3-43 indica que las tensiones de flexión varían linealmente con la coordenada “ y ”, siendo nulas en la *superficie neutra* y creciendo hacia los bordes superior e inferior de la sección como muestra la Fig. 3.38 para secciones de forma rectangular, doble-T, y T. Notar que cuando la coordenada “ y ” es positiva, o sea en la porción de la viga sobre la superficie neutra, la tensión σ es negativa, lo que es consistente con el efecto de compresión a que está sometida la viga sobre la superficie neutra, y que queda representado por el sentido de las flechas (tensiones) en la Fig. 3.38. Por cierto, cuando “ y ” es negativa, σ es positiva, lo que refleja el estado tensional de tracción en la viga bajo a la superficie neutra.

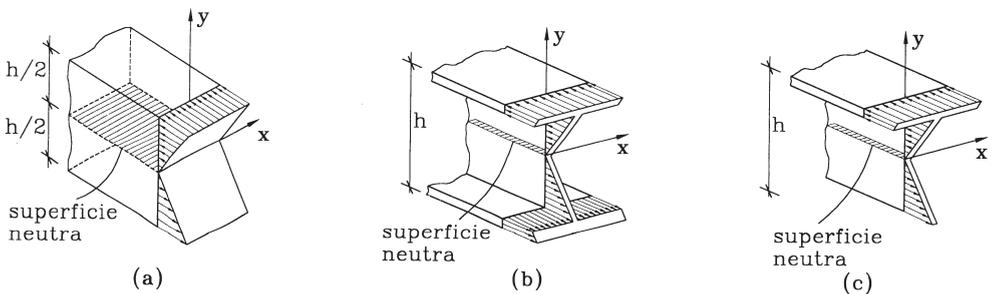


Figura 3.38 Distribución de tensiones de flexión (para M en sentido de la Fig. 3.37)

La posición de la superficie neutra puede determinarse de la condición de equilibrio de fuerzas normales a la sección. En efecto, dado que no existe esfuerzo normal, la suma de todas las tensiones multiplicadas por las áreas en que actúan debe ser nula

$$\Sigma F=0$$

$$\Sigma F_i = \Sigma \sigma_i A_i = 0$$

en que σ_i es la tensión que actúa en un área pequeña A_i . Usando la Ec. 3-43 se tiene:

$$\Sigma \left(-\frac{M}{I} y_i \right) A_i = 0$$

es decir, se cumple que:

$$\Sigma y_i A_i = 0$$

Esta condición implica que $y^*=0$ (Ec. 1-11), o sea la superficie neutra, origen de la coordenada “y”, coincide con el centro de gravedad de la sección.

Por otra parte, a veces resulta conveniente usar una expresión simplificada de la Ec. 3-43 definiendo el *módulo deflexión* o *módulo resistente* de la sección

$$W = \frac{I}{y_{\max}} \quad (3-44)$$

con lo cual la expresión de la tensión de flexión máxima queda de la forma

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \quad (3-45)$$

la que típicamente se utiliza sin signo, pero teniendo la preocupación de reconocer el sentido físico de las tensiones (tracción o compresión) dependiendo del borde de la viga que se haya considerado.

Ejemplo 3.9

La viga de la figura tiene 6 metros de luz y está sometida a una sobrecarga uniformemente distribuida de 5,5 ton/m. El perfil es de sección IN35x106 de acero calidad A42-27ES. Determinar la tensión máxima de flexión en la viga.

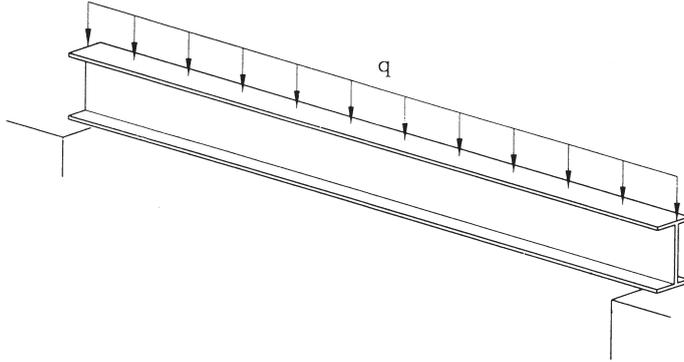


Figura E3.9

Solución: Las propiedades del perfil se buscan en la Tabla A.2: altura de la sección $H=35$ cm, área 134 cm², peso del perfil 106 kg/m, momento de inercia $I_x=31500$ cm⁴, y módulo resistente $W_x=1800$ cm³. La carga distribuida total sobre la viga (peso propio más sobrecarga) es entonces:

$$q = 5500 + 106 = 5606 \text{ kg/m}$$

El momento flector máximo en la viga ocurre en la sección en la mitad de la luz y tiene magnitud

$$M = \frac{qL^2}{8} = \frac{5606 \cdot 6^2}{8} = 25227 \text{ kg} \cdot \text{m} = 2522700 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

Aplicando la Ec. 3-43 se obtiene la tensión máxima de compresión en el borde superior de la viga

$$\sigma = -\frac{M}{I} \left(\frac{H}{2} \right) = -\frac{2522700}{31500} \cdot \frac{35}{2} = -1401,5 \text{ kg/cm}^2$$

Notar que en todos los términos se ha usado consistentemente el centímetro como unidad de longitud: M (kg · cm), I (cm⁴), H (cm). Igualmente, para el borde inferior usando $y=-H/2$ se obtiene $\sigma=1401,5$ kg/cm² (tracción).

Por cierto, el mismo resultado se obtiene utilizando directamente la Ec. 3-45:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{2522700}{1800} = 1401,5 \text{ kg/cm}^2$$

Ejemplo 3.10

Rehacer el ejemplo anterior para los mismos datos de sobrecarga y luz, pero utilizando como sección el perfil T que muestra la Fig. E3.10.a.

Solución: El área de la sección del perfil T es $A=3 \cdot 25+2 \cdot 30=135 \text{ cm}^2$, que es prácticamente igual a la del perfil IN35x106 del Ejemplo 3.9. Por lo tanto, ambos tienen casi el mismo peso propio. Si esto no cambia, y las cargas y luz de la viga no cambian, el momento flector máximo en este caso es también $M=25227 \text{ kg}\cdot\text{m}$.

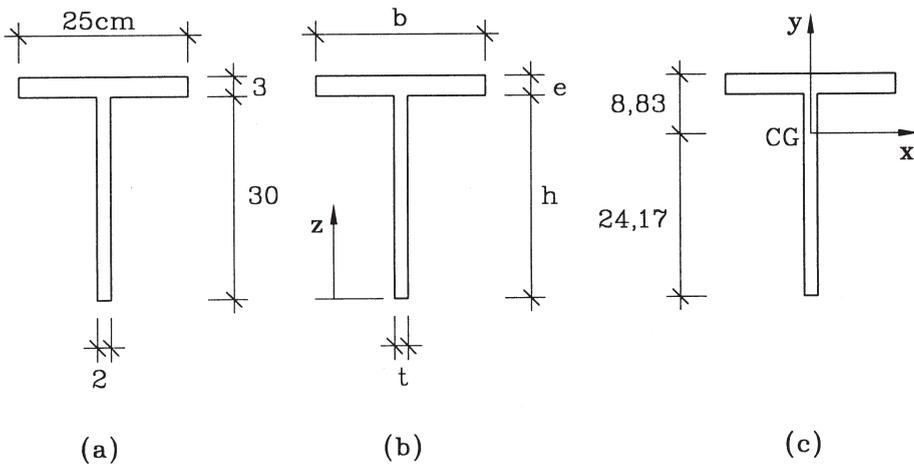


Figura E3.10

Para determinar las tensiones de flexión es necesario determinar la posición del centro de gravedad y el momento de inercia de la sección. Escogiendo como referencia la coordenada z que muestra la Fig. E3.10.b, el cálculo del centro de gravedad procede como sigue:

$$z^* = \frac{2 \cdot 30 \cdot 15 + 3 \cdot 25 \cdot 31,5}{60 + 75} = 24,17 \text{ cm}$$

quedando los ejes de referencia como muestra la Fig. E3.10.c. El momento de inercia de la sección T es (ver Tabla V.3):

$$I = \frac{be^3}{12} + \frac{th^3}{12} + eb \left(h + \frac{e}{2} - z^* \right)^2 + th \left(z^* - \frac{h}{2} \right)^2$$

$$I = \frac{25 \cdot 3^3}{12} + \frac{2 \cdot 30^3}{12} + 3 \cdot 25(30 + 1,5 - 24,17)^2 + 2 \cdot 30(24,17 - 15)^2$$

$$I = 13593,8 \text{ cm}^4$$

Las tensiones superior e inferior de la sección son respectivamente:

$$\sigma_{\text{sup}} = -\frac{M}{I} y_{\text{sup}} = -\frac{2522700}{13593,8} \cdot 8,83 = -1638,6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{inf}} = -\frac{M}{I} y_{\text{inf}} = -\frac{2522700}{13593,8} \cdot (24,17) = 4485,4 \text{ kg/cm}^2$$

La forma de la distribución de tensiones es la que muestra la Fig. 3.38.c. Notar que la magnitud de estas tensiones es mucho mayor que la del Ejemplo 3.9, especialmente σ_{inf} (más del triple), a pesar que la cantidad de material utilizado es prácticamente la misma, porque el área y el peso de las secciones son casi iguales. Ello ocurre porque el perfil IN del Ejemplo 3.9 es mucho más eficiente que el perfil T del Ejemplo 3.10, es decir, el material está mejor empleado en el primer caso, logrando un momento de inercia que es 2,3 veces el segundo.

3.3.2 Tensiones de Cizalle

El esfuerzo de corte que se transmite a través de una sección en forma tangencial a ella, es la resultante de las *tensiones de cizalle* o *tensiones de corte* que se desarrollan y están contenidas en el plano de la sección, es decir tangencialmente a ella. Cuando existe flexión siempre hay esfuerzo de corte, excepto en el caso especial en que el momento flector es constante.

Las tensiones de cizalle no se distribuyen uniformemente sobre la sección sino dependen de su forma, y análogamente a las tensiones normales (Ec. 3-43), también dependen de la distancia al eje neutro (coordenada “y”) aunque no son función lineal de dicha distancia. La distribución de tensiones de cizalle en una sección rectangular está dada por la expresión (ver deducción en Riddell, Hidalgo, 2010):

$$\tau = \frac{6V}{bh^3} \left[\frac{h^2}{4} - y^2 \right] \quad (3-46)$$

que corresponde a una variación parabólica como muestran las Figs. 3.39.b y c. Esta distribución es equivalente al esfuerzo de corte total que actúa sobre la sección (Fig. 3.39.a), o mejor dicho, es la forma como la fuerza de corte V se reparte sobre ella.

Conforme a la Ec. 3-46, el cizalle máximo ocurre para $y=0$, es decir en la superficie neutra, con valor.

$$\tau_{\max} = \frac{3 V}{2 bh} \tag{3-47}$$

y el mínimo, $\tau_{\min}=0$, ocurre en los bordes superior e inferior (para $y = \pm h/2$). Como puede observarse, el cizalle máximo ocurre en los puntos en que las tensiones normales (Ec. 3-43) son mínimas (en la superficie neutra), y recíprocamente, las tensiones de cizalle mínimas, ocurren donde las tensiones de flexión son máximas (en los bordes superior e inferior de la viga).

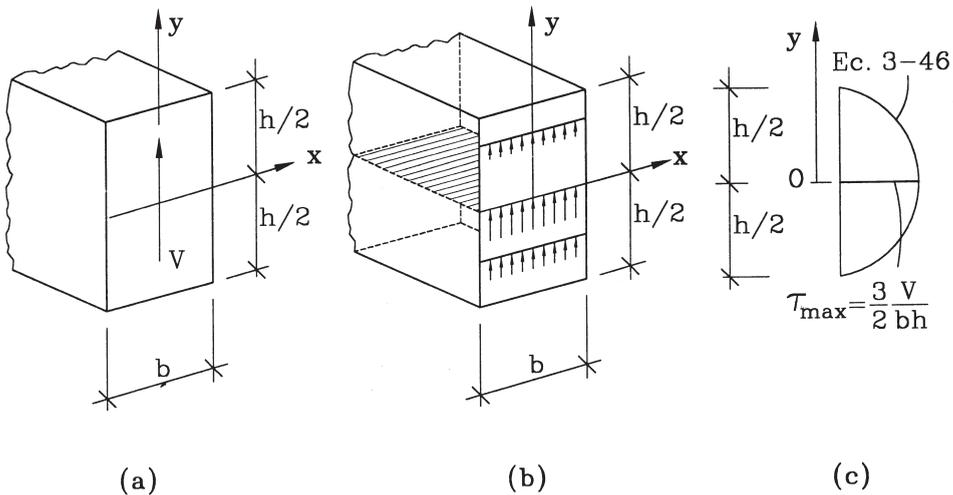


Figura 3.39 Tensiones de cizalle en sección rectangular

En el caso de una sección doble-T, el esfuerzo de corte V es tomado fundamentalmente en el alma del perfil, variando muy poco sobre ésta, como muestra la Fig. 3.40. En las alas las tensiones de cizalle disminuyen drásticamente su intensidad, ya que el ancho “ b ” en que ellas actúan es considerablemente mayor que el espesor “ t ” del alma. Por ello, para este tipo de perfiles es usual considerar la aproximación:

$$\tau_{\max} = \frac{V}{A_{\text{alma}}} = \frac{V}{ht} \tag{3-48}$$

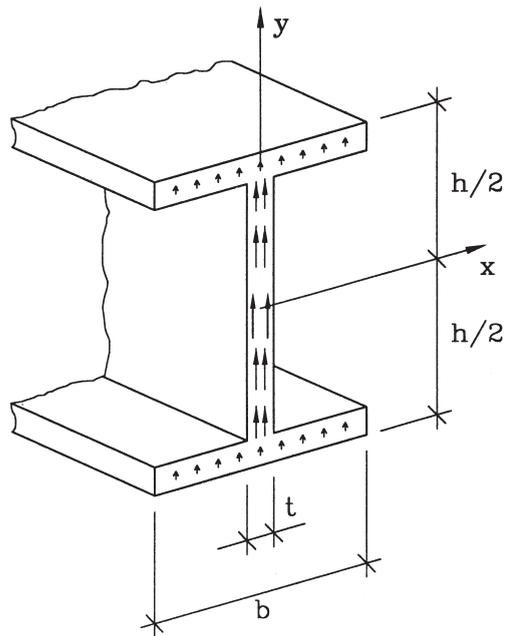


Figura 3.40 Tensiones de cizalle en perfil doble-T

3.3.3. Diseño de Vigas de Material Homogéneo: Acero y Madera

a) Diseño por Seguridad con Tensiones Admisibles

En este método, después de estimar la magnitud de las acciones para las condiciones de servicio y una vez calculados los esfuerzos internos y las tensiones en las secciones, éstas se diseñan de modo que en ningún punto de la estructura las tensiones de trabajo superen las tensiones admisibles. Los valores de las tensiones admisibles son un porcentaje de la tensión de fluencia o tensión máxima útil del material, entre 40% y 66% aproximadamente, con lo cual se asegura que el comportamiento de la estructura permanecerá dentro del rango elástico si las cargas son inferiores, o a lo sumo iguales, a las estimadas para las condiciones de servicio. Por consiguiente, es usual diseñar exigiendo separadamente que las tensiones máximas debidas a las cargas de servicio satisfagan:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}} \quad (3-49)$$

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{adm}} \quad (3-50)$$

A continuación se especifican las condiciones para el diseño de vigas de acero y madera. El caso del hormigón armado, material no-homogéneo, se presentará en la Sección 3.3.5.

- Diseño de Vigas de Acero

El valor de las tensiones admisibles está muy influenciado por las condiciones de inestabilidad lateral, que se discutirán en la Sección 3.3.4. Si no se presentan problemas de inestabilidad, las tensiones admisibles son:

Tensiones normales: $\sigma_{adm} = 0,6\sigma_y$ (3-51)

Tensiones tangenciales: $\tau_{adm} = 0,4\sigma_y$ (3-52)

en que σ_y es la tensión de fluencia del material.

- Diseño de Vigas de Madera

Las tensiones admisibles para los casos que no ofrecen problemas de inestabilidad se obtienen aplicando los factores K_D (Ec. 3-15) y K_r a las tensiones admisibles especificadas en la Tabla M.3:

Tensiones normales: $\sigma_{adm} = K_D \sigma_f^{ad}$ (3-53)

Tensiones tangenciales: $\tau_{adm} = K_D K_r \tau^{ad}$ (3-54)

K_r es un factor de reducción que debe aplicarse cuando se hacen rebajes (reducción de la sección sobre los apoyos, ver NCh1198.Of91); si la sección se mantiene constante $K_r=1$. Las tensiones admisibles dadas por las Ecs. 3-53 y 3-54 pueden aumentarse cuando las condiciones de humedad de la madera, ambiental y durante la construcción, son más favorables que las representadas por la Tabla M.3. También debe aplicárseles una ligera reducción en la medida que la dimensión mayor de la sección (altura) crece, utilizándose un factor K_h definido en la norma antes citada. Por simplicidad, estas correcciones no se han presentado aquí.

b) Diseño por Serviciabilidad. Limitación de Deformación Máxima en Vigas

Un elemento estructural (o una estructura) puede dejar de ser útil (dejar de prestar servicio satisfactoriamente) si se deforma excesivamente, aún cuando desde el punto de vista de su resistencia no presente problemas. Ejemplos de ello son los daños en revestimientos de pisos; los daños en cielos estucados; en el caso sísmico, los daños en terminaciones (vidrios, tabiques, etc.) en edificios muy flexibles; las vibraciones excesivas (por motores, tráfico, personas); la deformación en puentes (que puede poner en peligro a los vehículos); y en edificios industriales, los desperfectos en equipos sobre rieles, o los problemas de máquinas rotatorias que requieren nivelación, cuando se producen deformaciones excesivas. También deben considerarse en el objetivo de serviciabilidad las reacciones psicológicas de las personas frente a las vibraciones, a las deformaciones excesivas, o al agrietamiento visible de los edificios.

Por estas razones, en el diseño siempre es necesario verificar las deformaciones, especialmente en acero y madera. El problema es menos crítico en las estructuras de hormigón armado, porque normalmente tienen suficiente rigidez, excepto cuando las luces son importantes. Para el diseño por serviciabilidad se limita la razón entre la deformación máxima, llamada *flecha*, y la luz (δ_{\max}/L), o bien se construye con *contraflecha*, especialmente en elementos de gran luz.

En el Capítulo 4 se discutirán en más detalle los conceptos pertinentes al cálculo de deformaciones en vigas y estructuras. Por el momento se recurrirá a los resultados presentados en la Tabla V.4 para vigas. Por ejemplo, para la viga de la Fig. 3.41 la *deflexión* o *deformada* o *curva elástica* δ , está dada por la expresión:

$$\delta = \frac{q}{48EI} (2x^4 - 3Lx^3 + L^3x)$$

Mediante la cual se puede determinar la deformación máxima y la sección en que ella ocurre

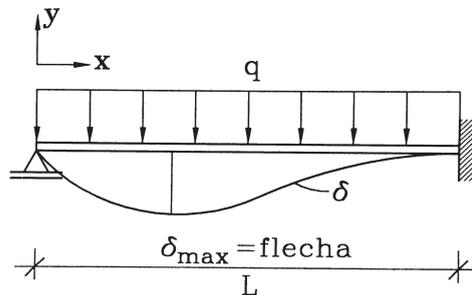


Figura 3.41 Deformación de una viga

- Deformaciones Admisibles según Tipo de Elemento

Dado que se espera que el comportamiento de la estructura se mantenga dentro del rango elástico bajo cargas de servicio, el cálculo de deformaciones siempre se hace bajo la hipótesis de comportamiento elástico. A modo de ejemplo se presentan en la Tabla 3.6 valores típicos máximos permitidos para la razón δ_{\max}/L , pero debe tenerse presente que hay una amplia variedad de situaciones que las normas de los materiales consideran adicionalmente. A su vez, en materiales como hormigón y madera que experimentan deformaciones en el tiempo bajo carga constante, es

necesario evaluar y controlar las deformaciones por fluencia lenta (creep) cuando actúan cargas permanentes intensas; la intensidad de la carga permanente se mide en relación con la sobrecarga. Por ejemplo, si la carga permanente excede el 50% de la carga total puede decirse que hay una carga de larga duración intensa.

TABLA 3.6 Deformaciones admisibles según tipo de elementos

| | δ_{\max} / L |
|--------------------------------------|---------------------|
| Vigas corrientes de piso | 1/300 |
| Vigas que soportan cielos estucados | 1/360 |
| Vigas de puente caminero | 1/800 |
| Vigas enrejadas (cerchas) | 1/700 |
| Vigas de puente ferroviario | 1/1000 |
| Vigas que soportan equipo vibratorio | 1/800 |

Resulta práctico en diseño satisfacer la limitación de las deformaciones máximas exigiendo que la viga tenga una cierta altura mínima. Por ejemplo, si se desea satisfacer la condición:

$$\delta_{\max} \leq \frac{L}{360}$$

bajo la acción de peso propio y sobrecargas, se puede usar el caso de una viga simplemente apoyada bajo carga distribuida q , en que la deformación máxima se produce en el centro de la luz (ver Tabla V.4):

$$\delta_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI}$$

Por otra parte, la tensión longitudinal máxima en vigas simétricas respecto al eje neutro es, siendo h la altura de la viga,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{qL^2}{8} \frac{h}{2I}$$

luego:

$$\delta_{\max} = \frac{qL^2 h}{16I} \frac{5L^2}{24Eh} = \sigma_{\max} \frac{5L^2}{24Eh}$$

Limitar la deformación máxima a $L/360$ implica entonces:

$$\frac{5\sigma_{\max} L^2}{24Eh} \leq \frac{L}{360}$$

$$\frac{L}{h} \leq \frac{E}{75 \sigma_{\max}}$$

si se usa acero A37-24ES, $\sigma_{\max} = \sigma_{\text{adm}} = 1400 \text{ kg/cm}^2$ y $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$, resulta:

$$\frac{L}{h} \leq 20 \quad \text{o bien} \quad h \geq \frac{L}{20} \quad (3-55)$$

lo que indica que el límite de deformación se satisface automáticamente si la altura de la viga se escoge al menos igual a un veinteavo de su luz. Relaciones de este tipo son muy útiles en la etapa de prediseño, por su simpleza, facilidad de aplicación, y porque dan un criterio para definir la altura del elemento.

- Contraflecha

Se llama *contraflecha* a la deformación que se deja durante la fabricación del elemento en sentido contrario a la que producirán las cargas. Típicamente se da una contraflecha igual a la deformación correspondiente a la carga permanente. Para elementos en que la razón sobrecarga/carga permanente es muy alta (vigas portagrúas) se usa una contraflecha igual a la flecha correspondiente a la carga permanente más el 50% de la sobrecarga. La contraflecha debe seguir aproximadamente la forma de la curva deformada elástica, tal como se indica en la Fig. 3.42 para las vigas y en la Fig. 3.43 para las cerchas o reticulados. Las vigas de acero, se pueden fabricar en pedazos, que se ensamblan como muestran las Figs. 3.42.b y c. En vigas de hormigón armado se puede dar la curva deseada al moldaje según sean los requerimientos estéticos. En los reticulados la contraflecha se logra muy simplemente fabricando las piezas de largos diferentes a los de la estructura teórica no-deformada; por ejemplo, en la Fig. 3.43 los elementos diagonales son ligeramente más cortos.

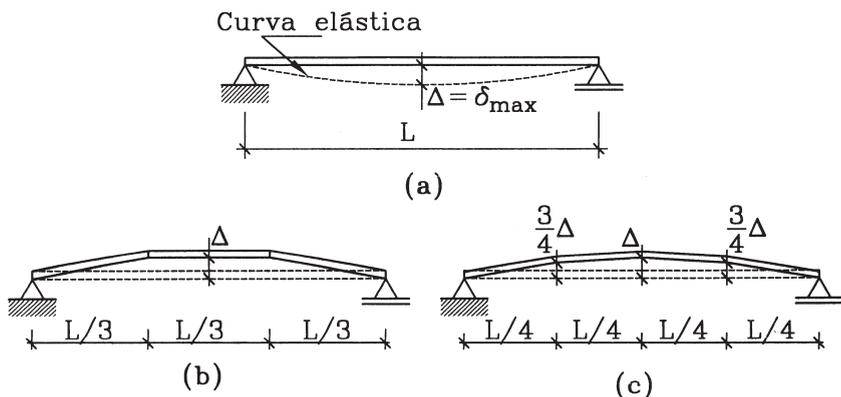


Figura 3.42 Contraflechas en vigas de acero

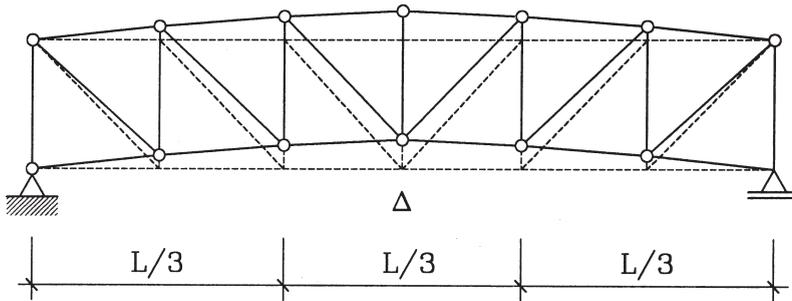


Figura 3.43 Contraflecha en cerchas

Ejemplo 3.11

La viga de acero de la figura es un perfil IN25x28 de acero A37-24ES. Determinar las tensiones máximas de flexión, de cizalle, y la flecha. Notar que esta estructura es hiperestática, de modo que sus esfuerzos internos no pueden calcularse sólo con las ecuaciones de la estática (Capítulo 2); por ello, puede recurrirse a las soluciones que entrega la Tabla V.4.

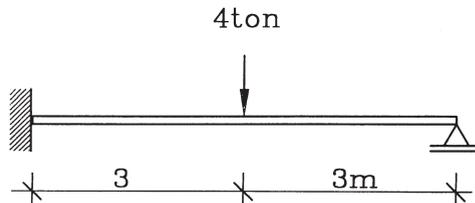


Figura E3.11

Solución: En la Tabla V.4 se obtienen el momento flector máximo $M=3PL/16$, el esfuerzo de corte máximo $V=11P/16$ (ambos ocurren en el empotramiento), y la flecha $\delta_{max}=0,009317PL^3/EI$. Las propiedades del perfil metálico se obtienen de la Tabla A.2: $W_x=324 \text{ cm}^3$, altura $H=25 \text{ cm}$, y el espesor del alma $t=5 \text{ mm}$. El módulo de elasticidad del acero es $E=2.100.000 \text{ kg/cm}^2$. La tensión máxima de flexión es entonces (Ec. 3-45):

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{3PL}{16W} = \frac{3 \cdot 4000 \cdot 60}{16 \cdot 324} = 1389 \text{ kg/cm}^2$$

La tensión máxima de cizalle es (Ec. 3-48):

$$\tau = \frac{V}{ht} = \frac{11P}{16ht} = \frac{11 \cdot 4000}{16 \cdot 25 \cdot 0,5} = 220 \text{ kg/cm}^2$$

y la deflexión máxima

$$\delta_{\max} = \frac{0,009317 \cdot 4000 \cdot 600^3}{2100000 \cdot 4050} = 0,95 \text{ cm}$$

Ejemplo 3.12

Diseñar una viga de piso simplemente apoyada de acero A37-24ES, de 6 m de luz, para soportar una carga uniformemente distribuida de 2 ton/m. La carga incluye el peso propio de la viga (estimado), cargas permanentes y sobrecarga de uso. El volcamiento de la viga está impedido mediante sujeción lateral apropiada del ala comprimida.

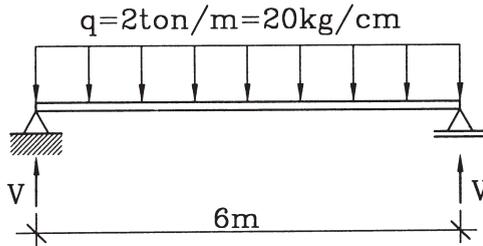


Figura E3.12

Solución: En este caso las reacciones en los apoyos son $V = qL/2$, el momento flector máximo $M = qL^2/8$, y la deflexión máxima (flecha) es $\delta_{\max} = 5qL^4/(384EI)$.

a) Diseño por resistencia

La tensión máxima de flexión no debe exceder la tensión admisible, esto es:

$$\sigma = \frac{M}{W} \leq \sigma_{\text{adm}} = 0,6 \sigma_y$$

Como M es conocido, y $\sigma_y = 2400 \text{ kg/cm}^2$ para el acero especificado, la condición de diseño anterior permite determinar el módulo resistente requerido de la sección:

$$\frac{M}{W} = \frac{qL^2}{8W} = \frac{20 \cdot 600^2}{8W} \leq 0,6 \cdot 2400 = 1440$$

$$W_{\text{req}} = 625 \text{ cm}^3$$

Se necesita entonces buscar un perfil IN cuyo $W \geq W_{req}$. Además, para prever que las deformaciones estén dentro de un margen razonable, conviene tener presente que la altura del perfil cumpla (Ec. 3-55):

$$h \geq \frac{L}{20} = \frac{600}{20} = 30 \text{ cm}$$

En la Tabla A.2 se encuentran varios perfiles que satisfacen los requisitos anteriores, siendo los siguientes los más livianos en los grupos de alturas 30, 35 y 40 cm respectivamente:

| | |
|-----------|---------|
| IN30x44,6 | W = 634 |
| IN35x40,9 | W = 641 |
| IN40x41,4 | W = 708 |

Conviene entonces usar el perfil IN 35x40,9 que el más económico. Si existiesen razones para ocupar uno de altura diferente, los perfiles que lo acompañan en la lista anterior serían los más apropiados.

Satisfecha la tensión máxima de flexión hay que comprobar la de cizalle:

$$\tau = \frac{V}{ht} < \tau_{adm} = 0,4\sigma_y$$

El perfil seleccionado tiene espesor del alma $t=6$ mm, luego:

$$\tau = \frac{qL}{2ht} = \frac{20 \cdot 600}{2 \cdot 35 \cdot 0,6} = 286 < 0,4 \cdot 2400 = 960 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{OK}$$

b) Verificación de serviciabilidad

Suponiendo que se trate de una viga de piso de un edificio que llevará terminación de cielo estucado, debe cumplirse (Tabla 3.6):

$$\delta_{max} \leq \frac{L}{360}$$

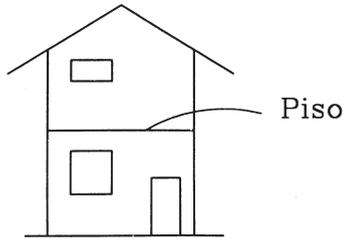
El perfil IN35x40,9 tiene momento de inercia $I_x=11200 \text{ cm}^4$, luego:

$$\frac{5qL^4}{384EI} \leq \frac{600}{360} = 1,67$$

$$\frac{5 \cdot 20 \cdot 600}{384 \cdot 2100000 \cdot 11200} = 1,43 \text{ cm} < 1,67 \quad \text{OK}$$

Ejemplo 3.13

Para las oficinas en terreno de una obra se construirá una caseta de dos pisos de madera. La planta de la caseta será aproximadamente de 3x12 m. Se pide diseñar las vigas de piso (determinar escuadría y espaciamiento) utilizando Pino Radiata cepillado con razón de resistencia 48%. El piso debe soportar el peso propio de las vigas, un entablado de madera de 3/4" (12 kg/m²) y una sobrecarga de 150 kg/m². Considerar que para una caseta provisoria no se requerirá controlar las deformaciones. Para estimar el peso propio de las vigas usar el peso específico $\rho_{\text{madera}}=0,5$.

**Figura E3.13**

Solución: Según la Tabla M.3 el Pino Radiata húmedo tiene una tensión admisible de flexión:

$$\sigma_f^{\text{adm}} = 55 \text{ kg/cm}^2$$

Para determinar las cargas sobre cada viga suponer un espaciamiento de 50 cm entre ellas. Las cargas uniformes distribuidas sobre la viga, por unidad de longitud, son entonces:

$$q_{\text{sc}} = \frac{150 \cdot 0,5}{100} = 0,75 \text{ kg/cm} \quad (\text{debido a sobrecarga})$$

$$q_{\text{pp}} = \frac{12 \cdot 0,5}{100} = 0,06 \text{ kg/cm} \quad (\text{peso propio entablado})$$

y para el peso propio de la viga (suponiendo una sección de 2"x6")

$$q_v = 0,0005 \cdot 4,5 \cdot 14 = 0,032 \text{ kg/cm}$$

$$q_{\text{total}} = q_{\text{sc}} + q_{\text{pp}} + q_v = 0,842 \text{ kg/cm}$$

$$M_{\text{max}} = \frac{qL^2}{8} = 9472,5 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

Luego, se requiere una sección con módulo resistente:

$$W_{\text{req}} = \frac{M_{\text{max}}}{\sigma_{\text{adm}}} = \frac{9472,5}{55} = 172 \text{ cm}^3$$

verificando la sección supuesta de 2"x6":

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{4,5(14)^2}{6} = 147 \text{ cm}^3 \rightarrow \text{Insuficiente}$$

Reduciendo el espaciamiento de 50 cm inicialmente supuesto en la proporción 147/172 se obtiene $(0,855) \cdot (50) = 43$ cm. Usar piezas de 2"x6" a 43 cm.

La deformación de la viga para sobrecarga máxima, con $E = 55.000 \text{ kg/cm}^2$ según Tabla M.3, se calcula como sigue:

$$q = \frac{150 \cdot 0,43}{100} + \frac{12 \cdot 0,43}{100} + 0,032 = 0,73 \text{ kg/cm}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{4,5(14)^3}{12} = 1029 \text{ cm}^4$$

$$\delta_{\text{max}} = \frac{5qL^4}{384EI} = \frac{5 \cdot 0,73 \cdot 300^4}{384 \cdot 55000 \cdot 1029} = 1,36 \text{ cm}$$

que corresponde a $L/220$, deformación más que aceptable para una estructura provisoria.

3.3.4 Inestabilidad en Vigas. Pandeo Lateral-Torsional

La presencia de tensiones de compresión en elementos en flexión puede conducir a un fenómeno de inestabilidad cuando no hay restricción al desplazamiento lateral de la viga y especialmente cuando la sección tiene baja rigidez lateral y a la torsión. Esta es precisamente la situación de los perfiles de acero tipo IN, los que se proporcionan en general altos, con almas delgadas, y concentrando el material en las alas para hacerlos eficientes en flexión y aumentar su resistencia y rigidez con respecto al eje fuerte de la sección (eje horizontal).

El pandeo lateral-torsional de una viga de acero ocurre en la forma que ilustra la Fig. 3.44, desplazándose la sección lateralmente junto con girar, razón por la cual el fenómeno se conoce también simplemente como *volcamiento* de la viga. En esta viga no hay elementos que restrinjan tales deformaciones, como ocurre en otros casos en que la *sujeción lateral* reduce la tendencia al pandeo o lo inhibe totalmente.

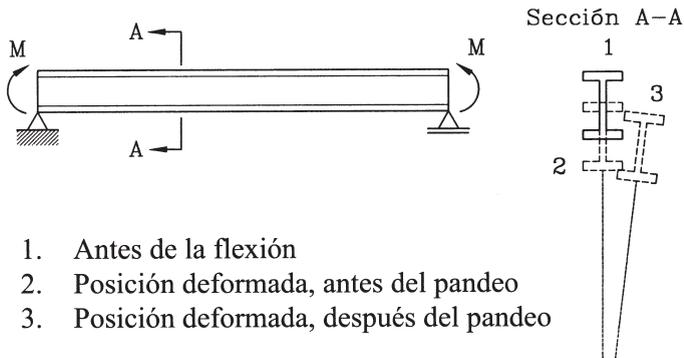


Figura 3.44 Pandeo lateral torsional de una viga de acero

La Fig. 3.45 ilustra ejemplos de restricción al pandeo: (a) una losa sobre vigas metálicas, provista de elementos conectores de acero embebidos en la losa, impide totalmente el volcamiento de las vigas; (b) un sistema de arriostramiento de piso, frecuentemente usado en estructuras industriales sin losa de hormigón, para reducir la longitud de pandeo lateral de las vigas. En este último caso, los elementos de arriostramiento deben fijar directamente el ala comprimida de la vigas para que sean realmente efectivos.

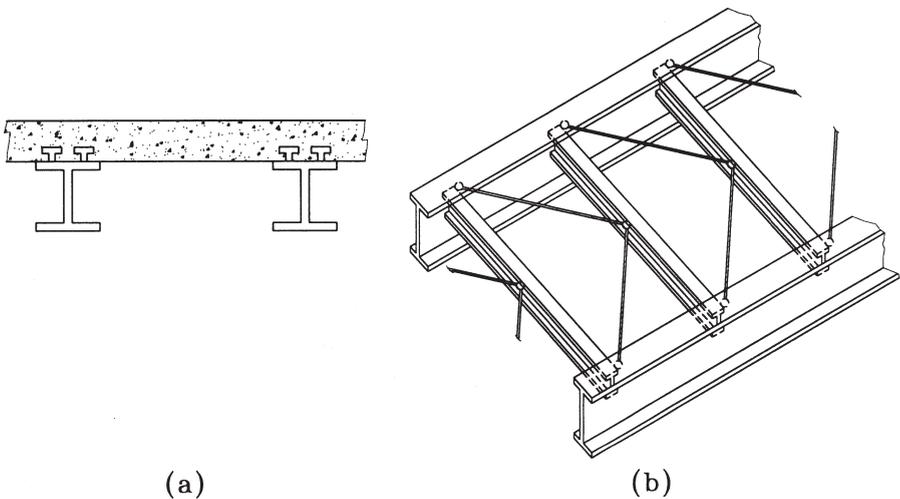


Figura 3.45 Sistemas de arriostramiento lateral de vigas

Cuando no hay sujeción lateral, las tensiones admisibles de compresión por flexión deben reducirse considerablemente en la medida que aumenta la luz de la viga (similarmente a lo que ocurre con las columnas a medida que aumenta su esbeltez). La reducción de tensiones depende de la forma del perfil, en particular su *rigidez torsional*. Este tema, que escapa a los objetivos de este texto, se encuentra desarrollado en detalle en otros textos (Riddell, Hidalgo 2010). Sin embargo, a modo de ejemplo, la Fig. 3.46 presenta las tensiones admisibles de compresión por flexión para dos perfiles específicos de acero calidad A37-24ES; como puede observarse, para el perfil IN40x95,5, que es un perfil relativamente robusto en el grupo de perfiles de 40 cm de altura, la tensión admisible comienza a decrecer a partir de una luz de 7,5 m, mientras que en el perfil IN35x27,4, el más esbelto de su grupo, la tensión admisible empieza a disminuir, y drásticamente, para L poco mayor de 2 m.

En vigas de madera se puede usar la siguiente regla práctica: Si $h/b \leq 4$ (en que h es la altura y b el ancho de la sección rectangular respectivamente) y la deformación máxima δ es menor que $L/360$ no hay peligro de volcamiento, en que L es la luz de la viga. Dentro de estos límites (ambos a la vez) se usa la tensión admisible de flexión según tablas sin reducción por estabilidad lateral. Por otra parte, es muy común que en un envigado de madera el desplazamiento lateral del canto comprimido esté impedido por el entablado que se apoya sobre las vigas y por la presencia de cadenas transversales apoyadas y clavadas contra los lados de la viga. En todo caso, las vigas de madera deben quedar siempre efectivamente apoyadas en sus extremos para impedir tanto el desplazamiento lateral como la rotación en torno al eje longitudinal de la pieza. En situaciones en que exista una condición susceptible al volcamiento deben reducirse las tensiones de flexión, utilizando el factor de modificación por volcamiento K_v que especifica la Norma Chilena NCh1198.Of91, el que debe agregarse a la Ec. 3-53.

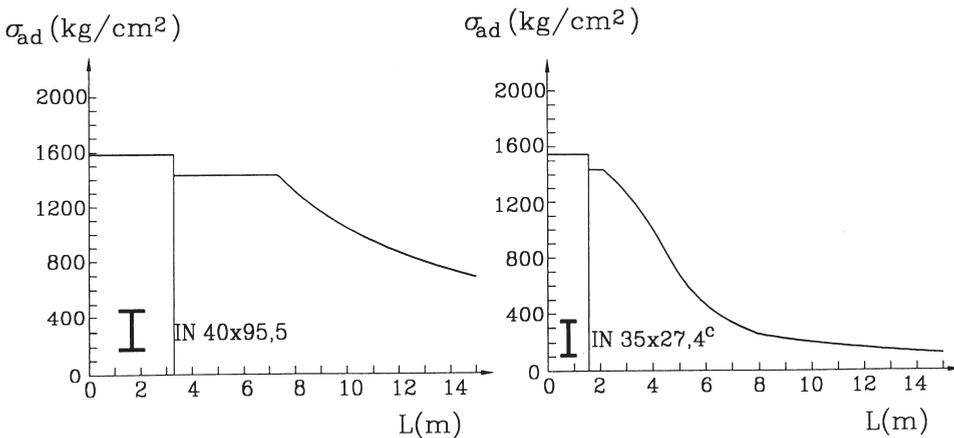


Figura 3.46 Tensión admisible de compresión por flexión en perfiles de acero sección IN

3.3.5 Diseño de Vigas de Material No-homogéneo: Hormigón Armado

a) Comportamiento Mecánico

El hormigón armado es un material *no-homogéneo* porque está conformado por dos materiales de propiedades diferentes. El hormigón contribuye con su buena resistencia a la compresión, pero tiene la desventaja de su reducida resistencia a la tracción y su fragilidad. El acero aporta su gran resistencia a la tracción y su ductilidad. En el hormigón armado se saca provecho de los atributos positivos de cada uno de sus componentes; en efecto, en un elemento sometido a flexión el hormigón será el encargado de tomar los esfuerzos de compresión, mientras el acero se hará cargo de los esfuerzos internos de tracción.

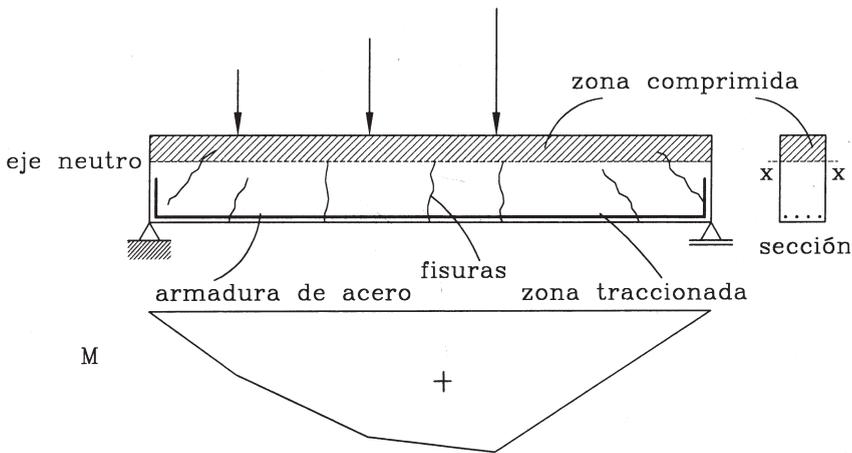


Figura 3.47 Viga de hormigón armado

Considérese por ejemplo una viga de sección rectangular como la de la Fig. 3.47, cuyo diagrama de momentos tiene la forma indicada. Como elemento en flexión, sometido a momento flector positivo, se deformará en la misma forma que muestran las Figs. 3.36 y 3.37, quedando la parte superior de la viga sometida a tensiones de compresión y la parte inferior a tracción. El hormigón soportará las compresiones, pero como no resiste tracciones, en la parte inferior aparecerán *fisuras*, las que se iniciarán en el borde inferior (el más traccionado) y progresarán hacia arriba alcanzando eventualmente el eje neutro. Las *fisuras de flexión* serán prácticamente verticales en la zona central de la viga, donde el momento flector es predominante, mientras en las zonas cercanas a los apoyos ocurrirá *fisuración diagonal*, debido a la presencia de intensas tensiones de corte, y donde además el momento flector es de baja intensidad. Incluso, las fisuras más cercanas al apoyo pueden no alcanzar el borde inferior de la viga, pero se extienden por sobre el eje neutro, por lo que se les reconoce como *grietas de corte* que típicamente presentan una inclinación de 45° . Para las cargas de servicio las fisuras son casi imperceptibles a simple vista, pero se van abriendo, haciéndose cada vez más notorias, a medida que aumenta la carga, pudiendo llegar finalmente a espesores del orden de milímetros en el estado de colapso de la viga.

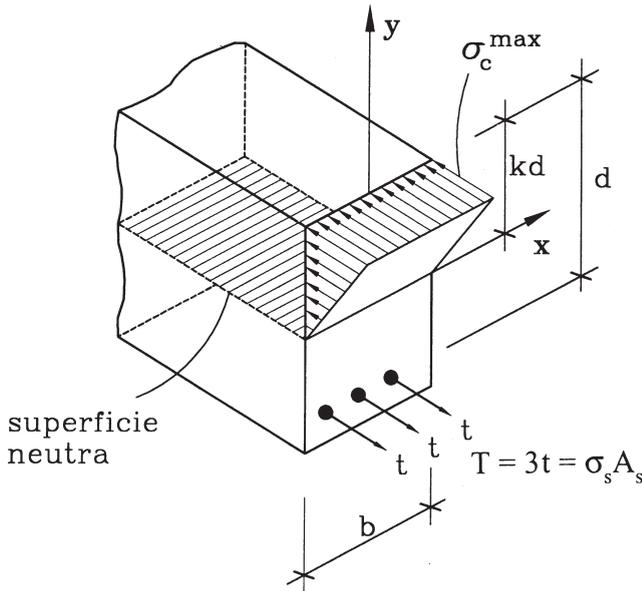


Figura 3.48 Tensiones internas en sección de hormigón armado

Claramente la función de las armaduras de acero es absorber las tensiones de tracción que el hormigón es incapaz de tomar, de modo que en definitiva el funcionamiento mecánico de la sección es como el que ilustra la Fig. 3.48. Como se aprecia en esta figura, el hormigón sólo trabaja en compresión, suponiéndose inactivo bajo la superficie neutra, donde las tracciones (fuerzas t) las toma el acero solo.

Cabe notar también que el eje neutro no se ubica en el centro geométrico de la sección rectangular, sino se encuentra normalmente desplazado hacia el borde comprimido (Fig. 3.47). Su posición, identificada por kd en la Fig. 3.48, corresponde al *centro mecánico* de la sección. La variable k se puede determinar de la condición de equilibrio de fuerzas sobre la sección, en efecto, para flexión pura sin esfuerzo normal, debe cumplirse que:

$$C = T \tag{3-56}$$

en que C es la resultante de la distribución de tensiones de compresión en el hormigón y T es la resultante de las fuerzas de tracción sobre las armaduras de acero. La Fig. 3.49 muestra el estado de deformaciones y tensiones unitarias en la sección, donde las deformaciones unitarias cumplen con la hipótesis básica de la flexión: las secciones planas permanecen planas adoptando una curvatura θ . La resultante de la distribución de tensiones triangular en el hormigón es

$$C = \frac{1}{2} \sigma_c^{\max} kdb \tag{3-57}$$

y la fuerza total que ejerce el acero es

$$T = A_s \sigma_s \tag{3-58}$$

en que σ_s es la tensión en el acero y A_s es el área total de la sección de las armaduras de refuerzo. Luego, la condición de equilibrio (Ec. 3-56) queda:

$$\frac{1}{2} \sigma_c^{\max} kdb = A_s \sigma_s \tag{3-59}$$

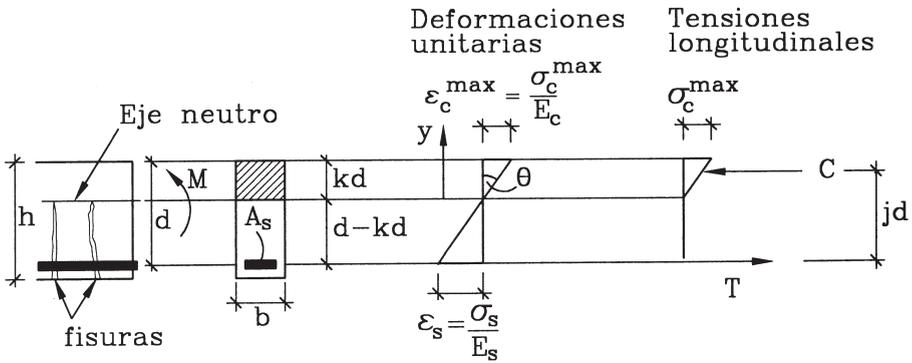


Figura 3.49 Viga en flexión simple

Pero σ_c^{\max} y σ_s están relacionadas por la condición geométrica

$$\frac{\epsilon_c}{kd} = \frac{\epsilon_s}{d - kd}$$

$$\frac{\sigma_c^{\max}}{E_c kd} = \frac{\sigma_s}{E_s (d - kd)} \tag{3-60}$$

y definiendo $n = E_s / E_c$, cociente entre los módulos de elasticidad del acero y del hormigón, la Ec. 3-60 combinada con la Ec. 3-59 conducen a:

$$\frac{\sigma_s k^2 db}{2n(1 - k)} = A_s \sigma_s$$

Definiendo la cuantía de refuerzo

$$\rho = \frac{A_s}{db} \tag{3-61}$$

se obtiene la siguiente expresión para k que define la posición del eje neutro:

$$\begin{aligned}
 k^2 &= 2\rho n(1 - k) \\
 k^2 + 2\rho nk - 2\rho n &= 0 \\
 k &= -\rho n + \sqrt{(\rho n)^2 + 2\rho n} \tag{3-62}
 \end{aligned}$$

Por otra parte, el equilibrio de momentos en la sección permite calcular las tensiones en el acero y el borde más comprimido del hormigón. Las fuerzas internas C y T en la sección constituyen una pareja de fuerzas equivalente al momento flector M que actúa en la sección

$$Cjd = Tjd = M \tag{3-63}$$

La resultante de la distribución triangular de compresiones en el hormigón actúa a distancia $kd/3$ del borde superior, luego

$$jd = d - \frac{kd}{3} \qquad \text{ó} \qquad j = 1 - \frac{k}{3} \tag{3-64}$$

Sustituyendo en la Ec. 3-63 las expresiones para j , C y T dadas por las Ecs. 3-64, 3-57, y 3-58 respectivamente, se obtienen

$$\sigma_c^{\max} = \frac{2M}{bkjd^2} \tag{3-65}$$

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s jd} \tag{3-66}$$

b) Tensiones Admisibles de Diseño Elástico

El dimensionamiento de una viga de hormigón armado consiste en determinar b , d y A_s para resistir un momento flector dado M sin exceder las tensiones admisibles σ_s^{adm} en el acero y σ_c^{adm} en el hormigón. Valores admisibles típicos recomendados para vigas y losas son las siguientes:

$$\sigma_c^{\max} = \frac{f_c}{3} \tag{3-67}$$

$$\sigma_s^{\max} = \frac{\sigma_y}{2} \tag{3-68}$$

en que f_c es la resistencia cúbica del hormigón (Tabla 3.3) y σ_y es la tensión de fluencia del acero (Tabla H.1).

Este tipo de diseño se denomina *diseño elástico* porque ambos materiales se encuentran a tensiones moderadas para las cargas de servicio (peso propio más sobrecarga): el acero perfectamente lineal-elástico (Fig. 3.7.b) y el hormigón en una fase muy aproximadamente lineal de comportamiento (Fig. 3.33).

c) Diseño por serviciabilidad

Como se discutió en la Sección 3.3.3.b el control de deformaciones es un aspecto importante en el diseño. Aunque las secciones de hormigón armado son bastante más voluminosas que las de acero, por la diferencia de resistencia entre ambos materiales, las condiciones de serviciabilidad no pueden soslayarse. Aún más, el hormigón tiene una propiedad especial ausente en el acero, experimenta deformaciones bajo cargas constantes de larga duración (*creep*). Estas deformaciones pueden ser varias veces mayores que las deformaciones elásticas bajo cargas de corta duración, pero no afectan la resistencia del hormigón.

El código ACI-318 recomienda alturas mínimas de vigas y losas en edificios que se consideran suficientemente generosas como para obviar la necesidad de hacer el cálculo de deformaciones, siempre que dichos elementos no soporten o estén unidos a tabiques u otros elementos que puedan dañarse con deformaciones grandes. Si no se respetan las alturas mínimas dadas por la Tabla 3.7 es necesario hacer un cálculo detallado de las deformaciones incluido el efecto de las cargas de larga duración. Notar que las alturas mínimas dadas en la Tabla dependen de las condiciones de apoyo de la viga; por ejemplo una viga en voladizo requiere el doble de altura que una viga simplemente apoyada de igual luz.

TABLA 3.7 Altura mínima sin control de deformaciones (según ACI-318)

| |  |  |  |  |
|------------------------|---|---|---|--|
| Losas en una dirección | L/20 | L/24 | L/28 | L/10 |
| Vigas | L/16 | L/18,5 | L/21 | L/8 |

En el caso de losas apoyadas en vigas o muros en sus cuatro bordes pueden utilizarse los coeficientes de la Tabla 3.8. Estos coeficientes se consideran apropiados para control de deformaciones y vibraciones por excesiva flexibilidad de las losas.

TABLA 3.8 Altura útil de losas en dos direcciones

| | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| | | | | | |
| L/35 | L/43 | L/58 | L/53 | L/60 | L/64 |

Notas: La altura útil corresponde a d de la Fig. 3.48, debiendo agregarse el recubrimiento para completar la altura total. Los valores listados corresponden a losas cuadradas de luz L .

d) Condición de Diseño Balanceado

Es común que en un diseño los materiales acero y hormigón no trabajen simultáneamente a nivel de sus tensiones admisibles σ_s^{adm} y σ_c^{adm} . La capacidad en flexión de la sección, representada por el momento admisible de la viga dependerá de cuál de los dos materiales alcanza primero su tensión admisible. Si es el hormigón el más solicitado (Ec. 3-65):

$$M_{adm} = M_c^{max} = \frac{1}{2} b k j d^2 \sigma_c^{adm} \tag{3-69}$$

si es el acero el más solicitado (Ec. 3-66):

$$M_{adm} = M_s^{max} = j d A_s \sigma_s^{adm} \tag{3-70}$$

el momento admisible M^{adm} es entonces el menor valor entre M_c^{adm} y M_s^{adm} . Puede entonces darse una de las tres situaciones siguientes:

- Si $M_c^{adm} = M_s^{adm}$, entonces $\sigma_s = \sigma_s^{adm}$ y $\sigma_c^{max} = \sigma_c^{adm}$. Se dice que es un diseño *elástico balanceado*.
- Si $M_s^{adm} < M_c^{adm}$, entonces $\sigma_s = \sigma_s^{adm}$ y $\sigma_c^{max} < \sigma_c^{adm}$. Cabe anticipar que esta situación es la condición deseable de un diseño: primero, porque $\sigma_s = \sigma_s^{adm}$ significa que se está usando eficientemente el acero, que es el componente más caro, y segundo, desde el punto de vista del comportamiento, por la gran conveniencia de mantener “aliviado” al (hormigón $\sigma_c < \sigma_c^{adm}$), lo que aleja de una eventual fractura a este material eminentemente frágil, lográndose por tanto un comportamiento dúctil de la sección en flexión.
- Si $M_c^{adm} < M_s^{adm}$, entonces $\sigma_c^{max} = \sigma_c^{adm}$ y $\sigma_s < \sigma_s^{adm}$. Esta situación es la opuesta a la anterior y por tanto indeseable como objetivo de diseño.

Reescribiendo la Ec. 3-60 para la condición de diseño balanceado se tiene:

$$\frac{\sigma_c^{\text{adm}}}{E_c k_{\text{bal}} d} = \frac{\sigma_s^{\text{adm}}}{E_s (d - k_{\text{bal}} d)}$$

de donde

$$k_{\text{bal}} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_s^{\text{adm}}}{n\sigma_c^{\text{adm}}}} \quad (3-71)$$

Además, la condición de equilibrio (Ec. 3-59) adaptada a este caso queda:

$$\frac{1}{2} \sigma_c^{\text{adm}} k_{\text{bal}} db = A_s \sigma_s^{\text{adm}}$$

por lo tanto, la cuantía de acero para obtener un diseño elástico balanceado es:

$$\rho_{\text{bal}} = \frac{A_s}{db} = \frac{k_{\text{bal}} \sigma_c^{\text{adm}}}{2 \sigma_s^{\text{adm}}} \quad (3-72)$$

La Ec. 3-72 indica que para que haya diseño balanceado los materiales, acero y hormigón, deben estar dispuestos en la proporción adecuada. A esta conclusión puede llegarse en forma intuitiva ya que obviamente el hecho de no satisfacer exactamente la tensión admisible de un material significa que hay déficit o exceso de dicho material, luego siempre debe poder alcanzarse un punto de compensación en que ambos materiales se encuentren en la proporción teóricamente ideal.

e) Etapas del Diseño de una Viga con Armadura Simple

- Se conoce M y las propiedades de los materiales: n , σ_s^{adm} , σ_c^{adm} y se pide determinar b , d y A_s .
- Usando las Ecs. 3-71 y 3-72 calcular:

$$k_{\text{bal}} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_s^{\text{adm}}}{n\sigma_c^{\text{adm}}}} \quad \text{y} \quad \rho_{\text{bal}} = \frac{k_{\text{bal}} \sigma_c^{\text{adm}}}{2 \sigma_s^{\text{adm}}}$$

- Elegir $\rho < \rho_{\text{bal}}$, esto implica que $\sigma_s = \sigma_s^{\text{adm}}$ y $\sigma_c^{\text{max}} < \sigma_c^{\text{adm}}$ (condición de diseño deseada).
- Calcular la posición del eje neutro directamente con la Ec. 3-62. Luego $j = 1 - k/3$.
- Calcular la tensión máxima en el hormigón (se sabe que la del acero es σ_s^{adm}) usando la Ec. 3-59:

$$\sigma_c^{\text{max}} = 2\sigma_s^{\text{adm}} \frac{\rho}{k}$$

- Determinar la sección de hormigón. Reescribiendo la Ec. 3-65 como:

$$M = \frac{1}{2} k b d^2 \left(1 - \frac{k}{3} \right) \cdot \sigma_c^{\max}$$

se escogen las dimensiones de la sección para satisfacer cualquiera de las expresiones siguientes:

$$b d^2 = \frac{M}{\sigma_s^{\max} \rho \left(1 - \frac{k}{3} \right)} = \frac{M}{\sigma_s^{\text{adm}} \rho j} \tag{3-73.a}$$

$$b d^2 = \frac{M}{k \sigma_c^{\max} \left(1 - \frac{k}{3} \right)} = \frac{M}{\frac{1}{2} k \sigma_c^{\max} j} \tag{3-73.b}$$

considerando que en vigas de hormigón armado típicamente la altura total está en el rango de 1,5b a 3b. También debe considerarse que conviene seleccionar la altura de la viga en función de su longitud de manera que se satisfagan las condiciones de serviciabilidad (Tabla 3.7).

- Determinar la sección de acero:

$$A_s = \rho b d$$

f) Procedimiento Rápido para Diseñar o Verificar

Generalmente j varía poco, ya que está influenciado por la tercera parte de la variación de k (j=1-k/3), una aproximación bastante buena es tomar jd≈0,88d a 0,91d.

- Conocida la sección de hormigón (b y d), la sección de acero necesaria es (Ec. 3-65):

$$A_s = \frac{M}{\sigma_s^{\text{adm}} j d}$$

y comprobar que $\rho < \rho_{\text{bal}}$ dado por la Ec. 3-72.

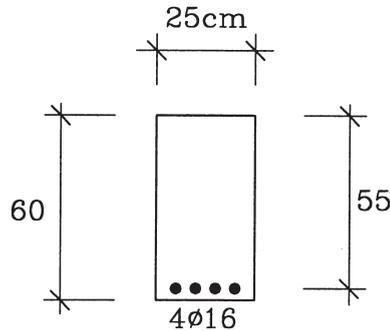
- Si se desea verificar el momento admisible de una sección dada (Ec. 3-65):

$$M^{\text{adm}} = A_s \sigma_s j d$$

y comprobar que $\rho < \rho_{\text{bal}}$ dado por la Ec. 3-72.

Ejemplo 3.14

Una viga de hormigón armado que tiene la sección indicada está sometida a un momento flector máximo de 5,5 ton·m. Verificar si se satisfacen las tensiones admisibles de los materiales H30 y A44-28H. Los módulos de elasticidad son: $E_s=2.100.000 \text{ kg/cm}^2$ y $E_c=250.000 \text{ kg/cm}^2$.

**Figura E3.14**

Solución: Determinar la posición del eje neutro utilizando la Ec. 3-62, para ello se calculan n y ρ :

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2100000}{250000} = 8,4$$

$$A_s = 4\phi 16 = 4 \cdot 2,01 \text{ cm}^2 = 8,04 \text{ cm}^2$$

$$\rho = \frac{A_s}{db} = \frac{8,04}{55 \cdot 25} = 0,005847$$

$$\rho n = 0,04911$$

$$k = -\rho n + \sqrt{(\rho n)^2 + 2\rho n}$$

$$k = -0,04911 + \sqrt{0,00241 + 0,09823} = 0,268$$

$$j = 1 - \frac{k}{3} = 0,91$$

Luego, usando las Ecs. 3-65 y 3-66 se tiene:

$$M = 5,5 \text{ ton} \cdot \text{m} = 550.000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$\sigma_c^{\max} = \frac{2 \cdot 550.000}{25 \cdot 0,2555 \cdot 0,91 \cdot (55)^2} = 62,6 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_c^{\text{adm}} = \frac{f_c}{3} = 100 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{OK}$$

$$\sigma_s = \frac{550.000}{8,04 \cdot 0,91 \cdot 55} = 1366,8 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_s^{\text{adm}} = \frac{\sigma_y}{2} = \frac{2800}{2} = 1400 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{OK}$$

Ejemplo 3.15

Diseñar la viga de hormigón armado de la Fig. E3.15.a para una carga permanente (q_{pp}) de 875 kg/m y una sobrecarga de uso de 625 kg/m. El diagrama de momentos es el indicado. Usar hormigón H25 y acero A63-42H. Los módulos de elasticidad de los materiales son $E_s=2.100.000$ y $E_c=220.000 \text{ kg/cm}^2$.

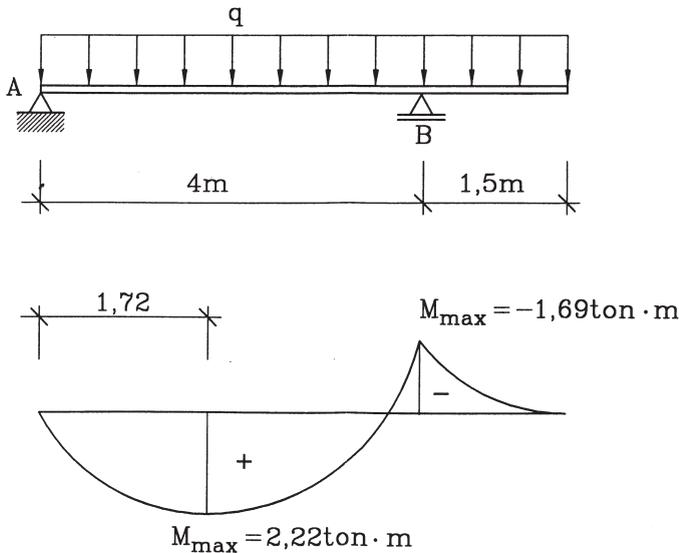


Figura E3.15.a

Solución: Se probará con una viga de 20 cm de ancho, que es el mínimo recomendable para vigas, y altura de 40 cm. Se debe determinar la armadura que se requiere en las secciones críticas B y C (momentos máximos). Las tensiones admisibles son (Ecs. 3-67 y 3-68):

$$\sigma_c^{\text{adm}} = \frac{f_c}{3} = \frac{250}{3} = 83 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_s^{\text{adm}} = \frac{\sigma_y}{2} = \frac{4200}{2} = 2100 \text{ kg/cm}^2$$

Cuantía de balance (Ecs. 3-71 y 3-72):

$$n = E_s / E_c = 9,55$$

$$k_{\text{bal}} = \frac{1}{1 + \frac{2100}{9,55 \cdot 83}} = 0,274$$

$$\rho_{\text{bal}} = \frac{0,274}{2} \cdot \frac{83}{2100} = 0,0054$$

Armadura requerida, según procedimiento rápido aproximado (Sección 3.3.5.e):

$$A_s = \frac{M}{\sigma_s^{\text{adm}} j d}$$

La distancia d' del centro de gravedad de las armaduras al borde más próximo se determina en referencia a la Fig. E3.15.b, considerando 2,5 cm de recubrimiento, suponiendo estribos de 0,8 cm de diámetro y agregando $\phi/2$, mitad del diámetro de las barras de refuerzo (suponiendo $\phi = 12 \text{ mm}$):

$$d' = 2,5 + 0,8 + 0,6 = 3,9 \text{ cm}$$

$$d = h - d' = 40 - 3,9 = 36,1 \text{ cm}$$

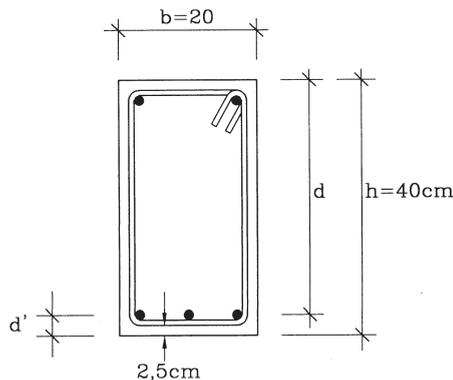


Figura E3.15.b

Entonces, para la sección C de la viga, suponiendo $j=0,9$, se obtiene:

$$A_s = \frac{2,22}{2,1 \cdot 0,9 \cdot 0,361} = 3,25 \text{ cm}^2$$

lo que se logra con $3\phi 12=3,39 \text{ cm}^2$. Esta armadura corresponde a una cuantía $\rho=3,39/(20)(35,9)=0,0047 < \rho_{bal}$; lo que significa que el acero satisface exactamente su tensión admisible y el hormigón estará bastante por debajo de la suya. Para la sección B de la viga:

$$A_s = \frac{1,69}{2,1 \cdot 0,9 \cdot 0,361} = 2,48 \text{ cm}^2$$

para lo cual se usarán $2\phi 10+1\phi 12=2,7 \text{ cm}^2$. La Figura E3.15.c muestra donde deben ubicarse las armaduras: en el borde inferior de la viga para momento flector positivo (momento máximo en C) y en el borde superior de la viga para momento flector negativo (momento máximo en B). Como puede observarse, las armaduras van al mismo lado a que se ha dibujado el diagrama de momento flector en la Fig. E3.15.a.

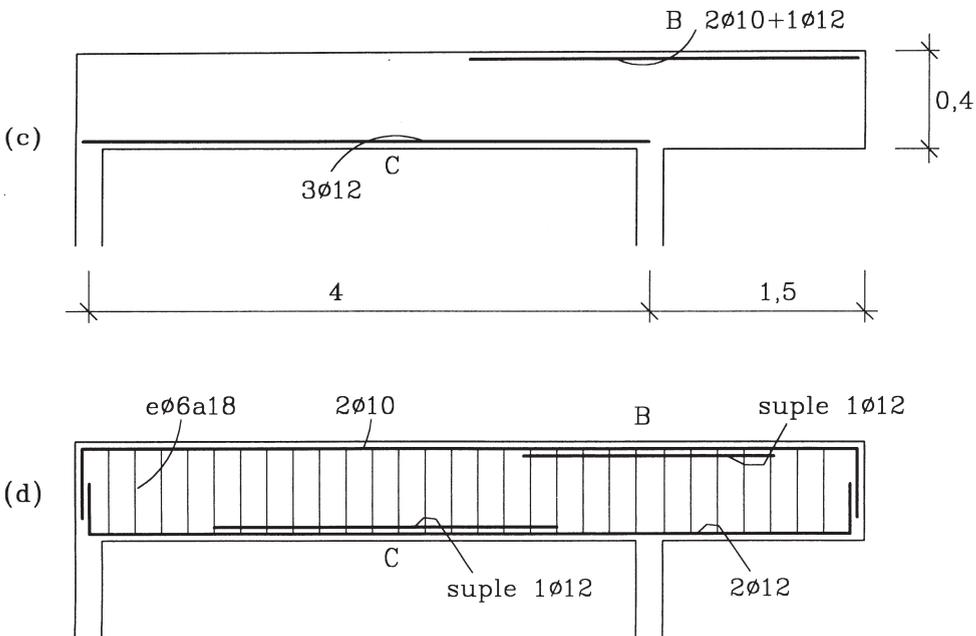


Figura E3.15 c y d

En realidad, como la viga debe completarse con estribos, debe haber por lo menos una barra en cada esquina a todo el largo de la viga, para ello se utilizarán en este caso $2\phi 10$ en el borde superior y $2\phi 12$ en el borde inferior, suplementando dichas armaduras con $1\phi 12$ para cubrir los requerimientos de cálculo en las secciones C y B; en definitiva la viga quedaría armada como muestra la Fig. E3.15.d (los suples van a igual altura que el resto de las armaduras, en la figura se muestran desplazados para poder apreciarlos). El diseño se completa con estribos de $\phi 6$ a 18 cm de distancia, cuyo cálculo no es materia de este texto.

g) Resistencia al Corte de un a Viga de Hormigón Armado

La Fig. 3.50 muestra el diagrama de cuerpo libre de una porción de viga entre su extremo apoyado y una grieta de falla por corte. Las fuerzas horizontales son las involucradas en la resistencia a la flexión: tracción en el acero inferior (T) y compresión en el hormigón (C_c) y en el acero superior (C_s). Las fuerzas verticales están asociadas al fenómeno de corte: el esfuerzo de corte V, el esfuerzo de corte V_c resistido por el hormigón (en la zona de compresión y a través de la grieta), y el esfuerzo de corte V_s resistido por los estribos verticales que cruzan la grieta.

Por equilibrio se tiene

$$V = R - qa = V_c + V_s \quad (3-74)$$

en que $V_s = \Sigma A_v \sigma_v$, con σ_v tensión de tracción en los estribos y A_v área total de la sección de estribos que cruzan la grieta.

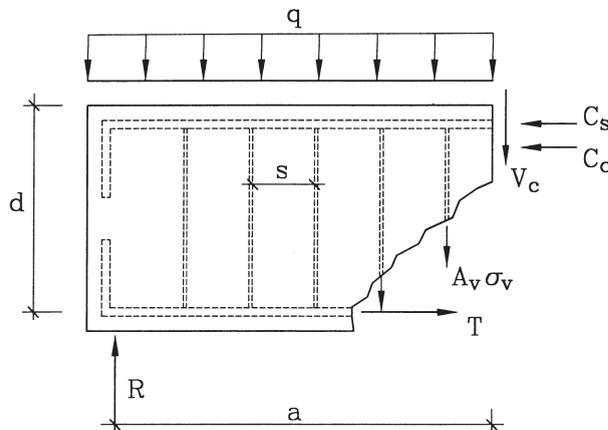


Figura 3.50 Mecanismo de resistencia al corte

Como la resistencia al corte que aporta el hormigón es relativamente baja siempre en una viga hay *armadura transversal* en forma de estribos, excepto en losas y fundaciones masivas. En vigas, aún cuando el hormigón tuviera capacidad (V_c) para resistir por sí solo el esfuerzo de corte V, las normas exigen la presencia de

al menos un mínimo de armadura transversal, especialmente en vigas que forman parte de pórticos en regiones sísmicas como Chile. Con el objeto de asegurar que cada fisura diagonal sea atravesada al menos por un estribo, la separación s entre ellos no debe exceder $d/2$ ni 60 cm; cuando el esfuerzo de corte es más intenso, y aumenta la contribución de la armadura transversal de modo que $V_s > 2V_c$ los límites anteriores se hacen más exigentes: $d/4$ y 30 cm. Como se ha mencionado, el cálculo de la armadura transversal (estribos) excede los objetivos de este texto; tratamiento completo de esta materia puede encontrarse en Riddell, Hidalgo 2010.

h) Resistencia Flexural Última de una Viga de Hormigón Armado.

Se entiende por capacidad última de una sección a su resistencia en el estado de falla o rotura de alguno de los materiales que la componen. En general, la condición de rotura del hormigón armado se produce cuando la deformación unitaria de compresión en el hormigón ϵ_c^{\max} (Fig. 3.51) llega a la capacidad límite de deformación del hormigón ϵ_u . El valor de ϵ_u se ha medido en el laboratorio, y para fines prácticos la norma ACI-318 adopta convencionalmente $\epsilon_u = 0,003$. La condición indicada de rotura se basa en las propiedades de los aceros comunes que se usan en el hormigón armado, las que permiten asegurar que no puede ocurrir la falla del acero debido a su gran capacidad de deformación antes de la rotura por tracción, ya que la deformación unitaria en rotura ϵ_r es el orden de 10% a 20% ($\epsilon_r = 0,15$ a $0,2$, ver Fig. 3.7.a).

El estado de deformaciones unitarias y tensiones unitarias en la sección a nivel último es como muestra la Fig. 3.51. La distribución de tensiones en el hormigón no es lineal como ocurría para las cargas de servicio (Figs. 3.48 y 3.49), sino parabólica, con una compresión máxima f'_c , como se estudió anteriormente (Figs. 3.29 y 3.30), y se reproduce en la Fig. 3.51. El acero, normalmente habrá iniciado la fluencia mucho antes que el hormigón llegue a la rotura, de modo que $\sigma_s = \sigma_y$ como muestra la fig. 3.51, por ello este modo de falla se denomina de *compresión secundaria del hormigón*. La falla de *compresión primaria* del hormigón, antes que el acero fluya, es de tipo frágil, por lo cual deben tomarse medidas para impedirla, como se explicará luego.

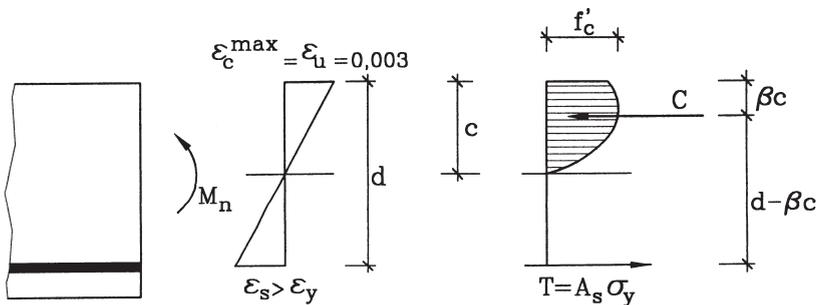


Figura 3.51 Deformaciones y tensiones unitarias en estado último

La capacidad flexural límite de una sección se denomina *resistencia última nominal*, o *momento último*, y se designa por M_n . El adjetivo nominal se refiere a que se evalúa usando propiedades idealizadas de los materiales (por ejemplo Figs. 3.33.a y 3.33.b) y un modelo analítico del fenómeno de flexión, mientras que la resistencia última *real* de una viga sólo puede medirse experimentalmente en el laboratorio. En general, la resistencia real es mayor que la nominal, ya que los materiales normalmente exceden sus propias resistencias nominales.

Para determinar el momento último de una sección según la Fig. 3.51, es necesario conocer la fuerza C resultante de la distribución de tensiones de compresión en el hormigón, y la posición de su línea de acción (centro de gravedad) definida por βc . Numerosos ensayos experimentales han demostrado que la resultante de compresiones en una sección rectangular de ancho b de hormigón se puede escribir como:

$$C = \alpha f'_c b c \quad (3-75)$$

y con una aproximación suficiente se puede afirmar que:

$$\alpha = 0,72 \quad \text{si} \quad f'_c \leq 280 \quad \text{kg/cm}^2 \quad (3-76.a)$$

$$\alpha = 0,72 - 0,04 \frac{f'_c - 280}{70} \quad \text{si} \quad f'_c \geq 280 \quad \text{kg/cm}^2 \quad (3-76.b)$$

$$\beta = 0,425 \quad \text{si} \quad f'_c \leq 280 \quad \text{kg/cm}^2 \quad (3-77.a)$$

$$\beta = 0,425 - 0,025 \frac{f'_c - 280}{70} \quad \text{si} \quad f'_c \geq 280 \quad \text{kg/cm}^2 \quad (3-77.b)$$

La condición de equilibrio de fuerzas normales a la sección permite calcular la posición del eje neutro. En efecto:

$$C = T \quad (3-78)$$

$$\alpha f'_c b c = A_s \sigma_y$$

$$c = \frac{A_s \sigma_y}{\alpha f'_c b}$$

por otra parte el equilibrio de momentos indica que:

$$M_n = T(d - \beta c)$$

$$M_n = A_s \sigma_y (d - \beta c) \quad (3-79)$$

Para que la fórmula anterior sea válida es indispensable que la rotura del hormigón sea posterior al inicio de la fluencia en las barras en tracción, lo que corresponde a una falla de tipo dúctil. Para que ello suceda se requiere que la cuantía ρ sea menor que la cuantía de *balance en rotura* ρ_b . La condición de balance en rotura se define como el caso en que la fluencia del acero se inicia en el mismo instante en que el hormigón se rompe en compresión, esto es, cuando $\epsilon_c^{max} = \epsilon_u$. Del diagrama de deformaciones unitarias de la Fig. 3.51, para el caso en que $\epsilon_s = \epsilon_y$, se deduce que la profundidad de la fibra neutra c_b para la condición de balance en rotura es:

$$\frac{c_b}{d} = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \epsilon_y} \tag{3-80}$$

reemplazando c_b por c en la Ec. 3-78 y ϵ_y por σ_y/E_s en la Ec. 3-80 se tiene:

$$\frac{A_s \sigma_y}{\alpha f_c' b c} = \frac{\epsilon_u d}{\epsilon_u + \frac{\sigma_y}{E_s}}$$

$$\rho_b = \frac{A_s}{b d} = \alpha \frac{f_c'}{\sigma_y} \cdot \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \frac{\sigma_y}{E_s}}$$

$$\rho_b = \alpha \frac{f_c'}{\sigma_y} \cdot \frac{0,003}{0,003 + \frac{\sigma_y}{E_s}} \tag{3-81}$$

Como se ha mencionado, cualquier diseño criterioso, especialmente en un país sísmico exigirá un tipo de rotura dúctil, esto es, elegirá ρ de modo que $\rho < \rho_b$.

Ejemplo 3.16

Determinar la capacidad última nominal de la sección de la Fig. E3.16. Los materiales son hormigón H25 y acero A63-42H.

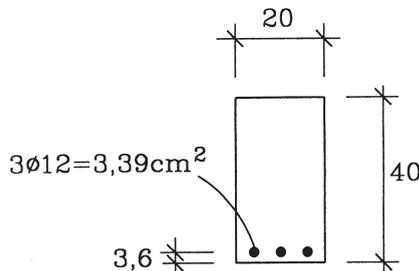


Figura E3.16

Solución: Conforme a la Tabla 3.3, el hormigón H25 tiene $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$. Según las Ecs. 3-76 y 3-77 en este caso $\alpha = 0,72$ y $\beta = 0,425$. El acero A63-42H tiene $\sigma_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$. Luego, la cuantía de balance en rotura es (Ec. 3-81):

$$\rho_b = 0,72 \frac{200}{4200} \cdot \frac{0,003}{0,003 + \frac{4200}{2100000}} = 0,02$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{3,39}{20 \cdot 36,4} = 0,0046 < \rho_b$$

Luego se puede ocupar la Ec. 3-79. Para ello se requiere antes calcular c con la Ec. 3-78:

$$c = \frac{3,39 \cdot 4200}{0,72 \cdot 200 \cdot 20} = 4,94 \text{ cm}$$

$$M_n = 3,39 \cdot 4,2 (0,364 - 0,425 \cdot 0,0494) = 4,88 \text{ ton}\cdot\text{m}$$

Cabe comparar este momento con el momento flector de diseño, $M = 2,22 \text{ ton}\cdot\text{m}$, para las cargas de servicio de la viga del Ejemplo 3.15, para el cual se dimensionó una sección igual a la utilizada en este ejemplo. La diferencia entre ambos valores corresponde entonces al factor de seguridad nominal disponible.

3.4 Combinaciones de Cargas y Criterios de Diseño

En la Sección 1.3.2 se introdujeron brevemente diversos tipos de acciones sobre las estructuras, en particular las cargas permanentes o de peso propio, las sobrecargas de uso, y las cargas eventuales de viento, nieve, y sismo. También se mencionaron las normas que las especifican.

Una vez determinados los esfuerzos internos debidos a cada una de estas acciones, debe procederse al diseño o dimensionamiento de las secciones de los elementos estructurales. Un aspecto importante de este proceso consiste en estimar la forma en que deben combinarse esfuerzos provenientes de acciones que presentan distinta probabilidad de ocurrencia y que además han sido estimadas con diferentes niveles de confianza. Por ejemplo, es usual que las solicitaciones o cargas debidas a las sobrecargas, al viento y a la nieve tengan una baja probabilidad de ser excedidas durante el período de vida útil de la estructura; por el contrario, las solicitaciones o cargas sísmicas estipuladas en la norma NCh433 tienen una alta probabilidad de ser excedidas una o más veces durante la vida útil de la obra. Estos aspectos son esenciales para establecer los *estados de combinación de cargas* que deben considerarse en el proceso de diseño. Estos estados se estipulan normalmente en las normas de diseño relativas a cada material estructural (acero, hormigón armado, albañilería, madera), y consideran como mínimo la acción simultánea de dos solicitaciones de naturaleza eventual.

Estas combinaciones de carga son diferentes según se emplee el diseño por *tensiones admisibles* o el diseño basado en la resistencia máxima o *capacidad última* de las secciones.

El diseño por tensiones admisibles es el que se ha utilizado a lo largo de todo este capítulo. Según este criterio, los distintos tipos de acciones simplemente se suman, de modo que los estados de combinación de cargas más usuales son:

- i) Peso propio + Sobrecarga
- ii) Peso propio + Sobrecarga \pm Sismo
- iii) Peso propio + Sobrecarga \pm Viento

En este Capítulo se ha usado exclusivamente la primera combinación de cargas, ya que no se han considerado las cargas de viento, y los efectos sísmicos sólo se introducirán a partir del Capítulo 5. Según el criterio de diseño por tensiones admisibles, las tensiones de trabajo debidas a la primera combinación no deben exceder las tensiones admisibles de los materiales. Cuando se usan los últimos dos estados de combinación de cargas, se permite que la tensión admisible se aumente en 33%, para reflejar la menor probabilidad que las tres acciones estén ocurriendo simultáneamente sobre la estructura con los valores especificados en la norma respectiva. En todo caso, este criterio de diseño se basa en aplicar el factor de seguridad a la resistencia que se adopta como capacidad límite útil del material, con lo cual se define la tensión o carga admisible (ver como ejemplos típicos de este criterio las Ecs. 3-8 y 3-37, entre otras que se han presentado en este Capítulo).

Existe otro criterio de diseño llamado capacidad última, o resistencia última, o resistencia máxima que consiste en plantear el problema de diseño en un escenario distinto. Este escenario consiste en trasladar el estado de diseño desde el *nivel de trabajo* al *nivel de rotura*. En vez de utilizar las combinaciones de carga antes indicadas (i, ii, iii), las cargas se amplifican por los llamados *factores de mayoración* que las transforman en cargas extremas o *cargas máximas probables* asociadas a un estado próximo a la rotura de la sección. Estos factores de mayoración corresponden de hecho al factor de seguridad, que en vez de reducir a la resistencia máxima (Ecs. 3-8, 3-37) multiplican las cargas.

Como ejemplo de esta mayoración, se indican a continuación las combinaciones análogas a i), ii), iii) especificadas en el código norteamericano ACI318-95 para las estructuras de hormigón armado:

- iv) 1,4 Peso propio + 1,7 Sobrecarga
- v) 0,75 (1,4 Peso propio + 1,7 Sobrecarga \pm 1,87 Sismo)
- vi) 0,9 Peso propio \pm 1,43 Sismo
- vii) 0,75 (1,4 Peso propio + 1,7 Sobrecarga \pm 1,7 Viento)
- viii) 0,9 Peso propio \pm 1,3 Viento

Los diferentes factores de mayoración para los distintos tipos de acciones reflejan el grado de certeza diferente con que ellas son estimadas por las diferentes normas.

Por ejemplo, el factor de mayoración más grande corresponde a la acción sísmica, ya que ella tiene una mayor probabilidad de exceder el valor especificado en la norma correspondiente, comparada con la estimación que se puede tener de las otras acciones. El factor 0,75 estipulado en las combinaciones v) y vii) es equivalente al aumento en 33% de las tensiones admisibles, sólo que en este caso se aplica a la acción y no a la capacidad resistente de los elementos.

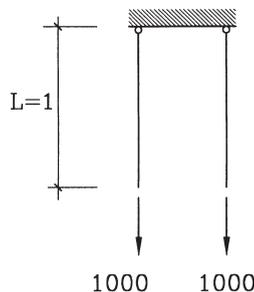
Por otra parte, la resistencia última de la sección del elemento estructural se estima conservadoramente, es decir se determina la *resistencia mínima probable*, aplicando un factor de minoración $\phi < 1$ a la resistencia última nominal. Por ejemplo, para el caso particular de flexión de una viga de hormigón armado, cuya resistencia última nominal o momento último está dada por la Ec. 3-79, la resistencia mínima probable corresponde a ϕM_n con $\phi = 0,9$ para flexión. En definitiva, el criterio de diseño último consiste en comparar la carga máxima probable con la capacidad mínima probable; por ejemplo, para diseño en flexión, para la combinación de cargas iv), el criterio de diseño último exige que:

$$1,4 M_{\text{peso propio}} + 1,7 M_{\text{sobrecarga}} < \phi M_n \quad (3-82)$$

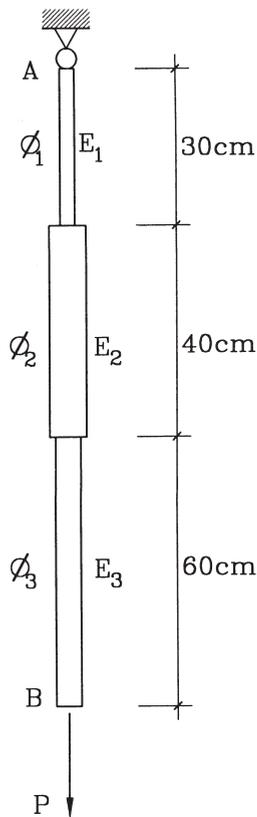
Como se puede observar, en este criterio no se aplica un factor de seguridad global a cada material como en el criterio de diseño por tensiones admisibles, sino se aplican varios factores de seguridad, como 1,4, 1,7 y ϕ en la Ec. 3-82.

3.5 Ejercicios Propuestos

- 3.01 ¿Por qué es necesario utilizar en diseño un “factor de seguridad”?
- 3.02 Defina “tensión unitaria”. ¿Qué utilidad tiene el uso de este concepto?. Defina deformación unitaria.
- 3.03 Dos barras de acero de igual longitud inicial $L=1$ m tienen secciones de 1 cm^2 y 2 cm^2 respectivamente. A cada una de ellas se le aplica una carga de 1000 kg. El módulo de elasticidad del acero es $2.100.000 \text{ kg/cm}^2$. ¿De qué longitud quedan las barras después de aplicada la carga? ¿Qué deformación unitaria experimentó cada una?

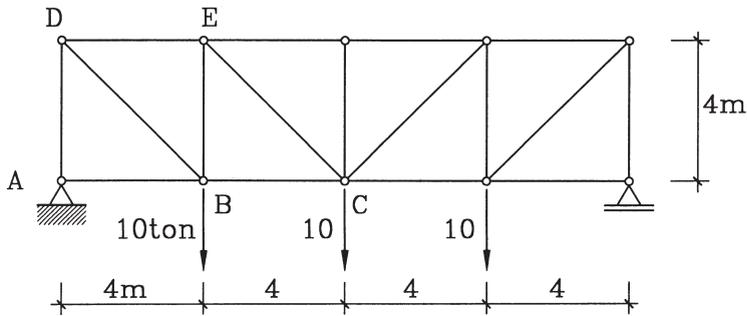


- 3.04 Una barra que cuelga de su extremo superior tiene 3 segmentos unidos entre sí de materiales y dimensiones diferentes. El segmento 1 tiene módulo de elasticidad $E_1=1.000.000 \text{ kg/cm}^2$ y sección circular de diámetro $\phi_1=1 \text{ cm}$; el segmento 2 tiene módulo de elasticidad $E_2=400.000 \text{ kg/cm}^2$ y sección circular de diámetro $\phi_2=2 \text{ cm}$; el segmento 3 tiene $E_3=2.000.000 \text{ kg/cm}^2$ y sección circular de diámetro $\phi_3=1,5 \text{ cm}$. Se pide: a) Determinar las tensiones unitarias en los tres materiales cuando se aplica una carga $P=10 \text{ ton}$; b) determinar el desplazamiento vertical del punto B cuando se aplica la carga P de 10 ton si los 3 materiales cumplen la ley de Hooke. (Respuestas: a) 12732, 3183, 5659 kg/cm^2 ; b) 8,7 mm)

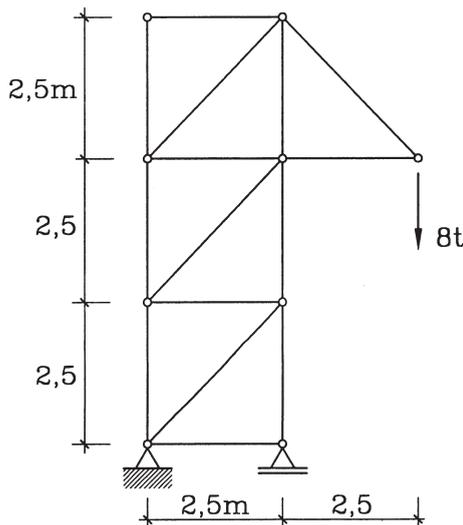


- 3.05 Explique en qué consiste la fluencia del acero.
- 3.06 ¿Cómo se define la ductilidad de un material?.
- 3.07 ¿Por qué se considera al acero estructural un material dúctil?.

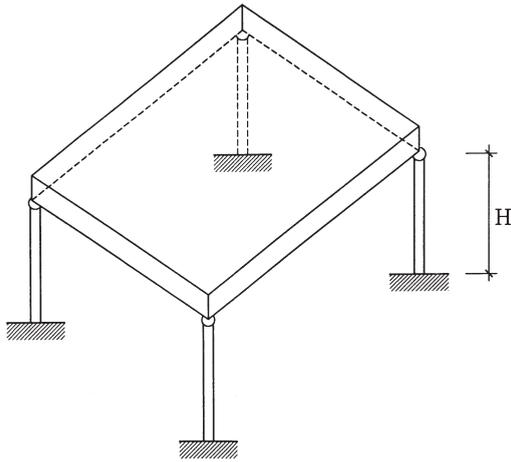
- 3.08 Dibuje la relación tensión-deformación desde carga cero hasta la rotura de un acero cuyas propiedades son: tensión de fluencia $\sigma_y = 4.000 \text{ kg/cm}^2$, módulo de elasticidad $E = 2.000.000 \text{ kg/cm}^2$, tensión de rotura $\sigma_r = 6.000 \text{ kg/cm}^2$. Calcule o suponga los valores de la deformación unitaria ϵ necesarios para completar la figura. Indique los valores en todos los puntos significativos de la curva, como también los tipos de comportamiento que se aprecian en ella.
- 3.09 Utilizando perfiles de acero A37-24ES, diseñar las barras diagonales y las del cordón inferior del reticulado de la figura. (Respuestas: AB TL6x5,42, BC TL6x10,4, DB TL 8x14,1, EC TL8x7,3)



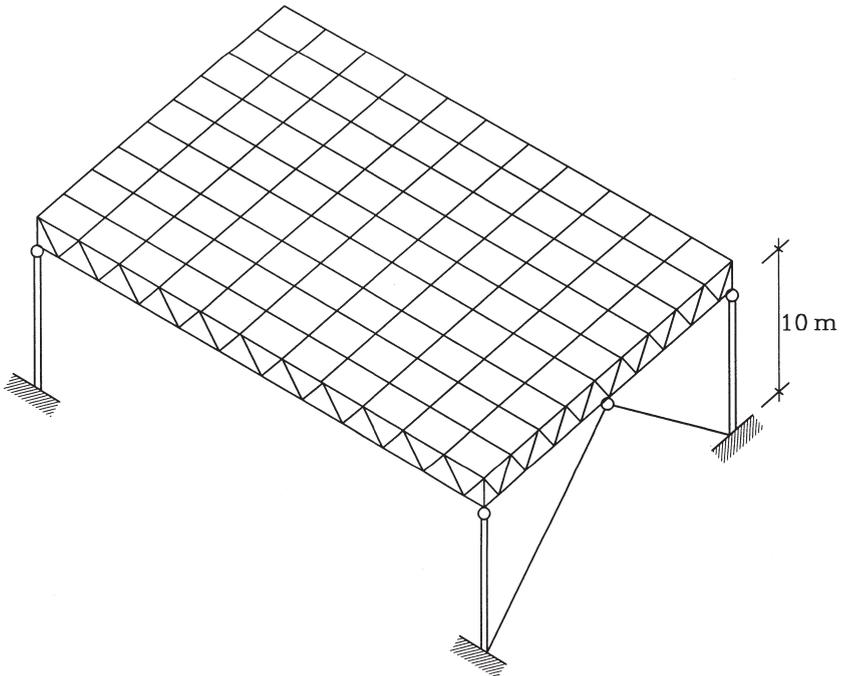
- 3.10 Diseñar las barras traccionadas del reticulado de la figura. El acero a usar tiene tensión admisible de tracción igual a $1,4 \text{ ton/cm}^2$. En la dirección perpendicular al plano está restringido al desplazamiento de los nudos. (Respuesta: TL4x5,63 y TL6,5x7,75)



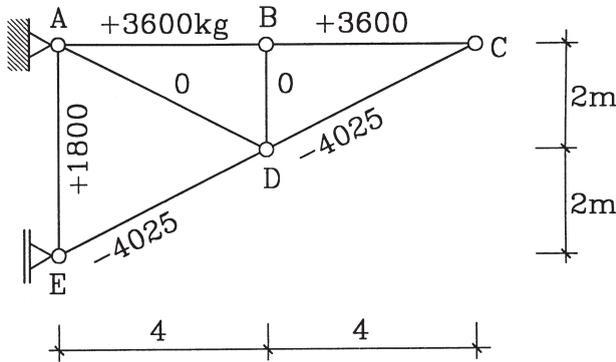
- 3.11 ¿La madera es un material dúctil o frágil?, ¿Y el hormigón?
- 3.12 ¿Por qué la madera se clasifica según la “razón de resistencia”?
- 3.13 ¿Qué es el límite de proporcionalidad en la relación tensión-deformación de la madera?
- 3.14 ¿Por qué la madera tiene propiedades mecánicas diferentes en las direcciones paralela y perpendicular a las fibras? ¿Qué propiedades son más notoriamente diferentes?
- 3.15 La tensión crítica de pandeo de una columna según la teoría de Euler es $\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2$. Explique qué es λ en esta fórmula. ¿Es aplicable la fórmula de Euler para cualquier valor de λ ?
- 3.16 ¿Cuál es la diferencia de comportamiento (capacidad última de carga) entre una columna corta y una columna esbelta?
- 3.17 Determine la razón entre las cargas críticas de pandeo elástico de una columna de sección circular y una columna de sección cuadrada, si ambas son del mismo material, tienen igual longitud, igual área de la sección, e iguales condiciones de vinculación.
- 3.18 La carga crítica de una columna esbelta de cualquier material es $P_{cr} = \pi^2 EI / (KL)^2$. Si una cierta columna de sección cuadrada de área A tiene $P_{cr} = 1000$ kg, cuánto aumentará P_{cr} si el área de la sección aumenta a $2A$, manteniéndose la forma y el resto de las propiedades.
- 3.19 Una barra de reticulado tiene longitud 2 metros. ¿Cuál es la fuerza de compresión admisible si se usa un perfil: a) L10 x 6,07; b) TL6 x 5,42 con $d=4$. ¿Cuál es más económico?
- 3.20 Una plataforma consiste en una losa cuyo peso propio más la sobrecarga que debe soportar dan un total de 20 toneladas. La losa se apoya en forma tal que los extremos de las columnas pueden suponerse articulados a ella en las esquinas. Las columnas se empotran en las fundaciones. Si para las columnas Ud. dispone de perfiles tubulares circulares de acero calidad A37-24ES, de 10 cm de diámetro exterior y 5mm de espesor, determinar la máxima longitud H que se puede dar a las columnas. Desprecie el peso propio de las columnas. (Respuesta: 2,88 m)



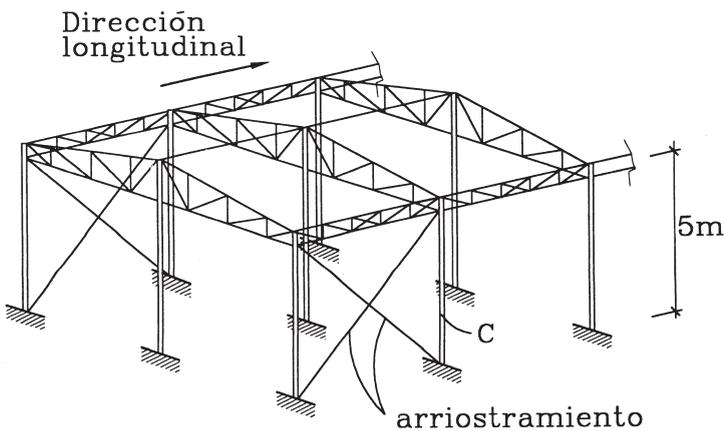
- 3.21 Una gran plataforma reticular de acero se apoya en cuatro columnas de acero A37-24ES (perfiles tipo HN). Los planos frontales están arriostrados. A cada columna le llega una carga vertical de 50 toneladas. Determinar el perfil HN requerido. (Respuesta: HN35x91,5)



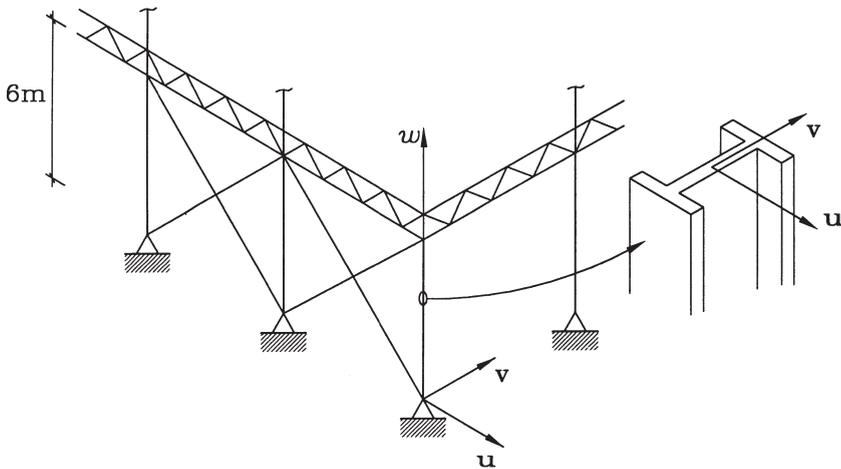
- 3.22 Dimensionar todas las barras del reticulado de la figura usando acero A37-24ES, escogiendo para cada una el perfil más liviano que encuentre. Los esfuerzos en las barras son los que se indican. Usar perfil L (ángulo). Se supone que en todos los nudos hay restricción al desplazamiento en dirección perpendicular al plano del reticulado. (Respuesta: Barras AB, BC, AE y AD L10x6,07, barras ED y DC L12,5x11,3, barra BD L5x1,52)



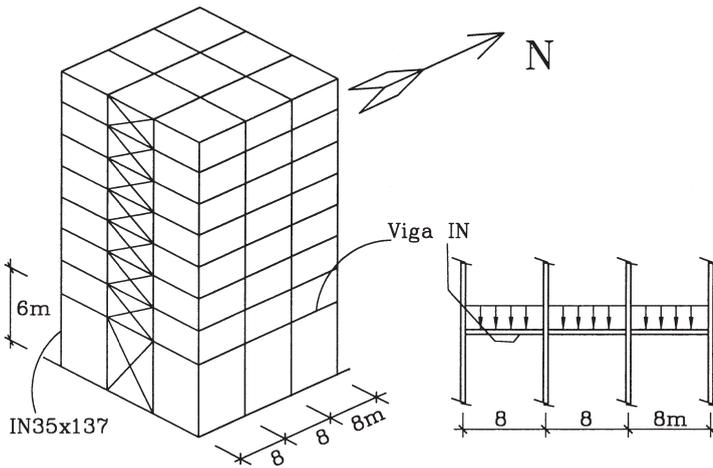
- 3.23 La figura ilustra una parte de una estructura industrial de acero. Los reticulados transversales y longitudinales pueden suponerse como infinitamente rígidos (en comparación con las columnas). El desplazamiento lateral en sentido longitudinal está impedido mediante un sistema apropiado de arriostramiento. Las columnas son del perfil HN20x46 y tienen 5 metros de largo. Las columnas están empotradas en fundaciones de hormigón armado. El material es acero calidad A37-24ES. Se pide determinar la posición más adecuada del perfil (definir si el eje x-x es paralelo o perpendicular a la dirección longitudinal del edificio) y la carga axial admisible sobre la columna C.



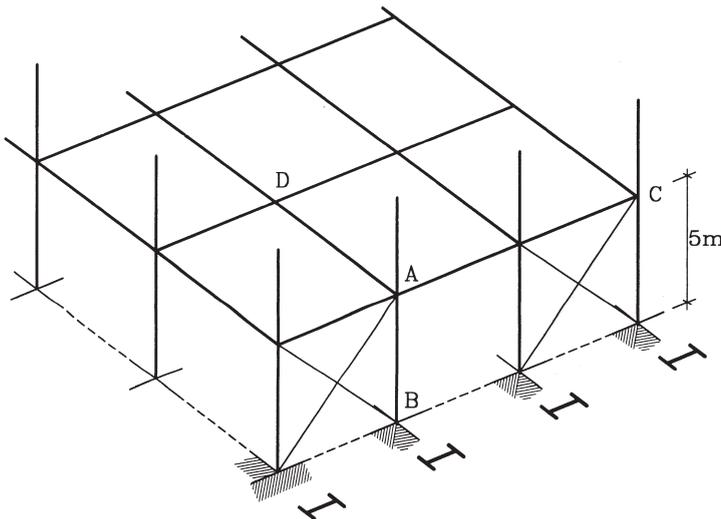
- 3.24 La figura muestra el primer piso de un edificio de estructura de acero de 5 pisos. La columna que se muestra es el perfil HN25x50,1. En el plano $u-w$ el desplazamiento lateral del extremo superior de la columna está restringido por el sistema de arriostamiento diagonal. En el plano $v-w$ el desplazamiento lateral es libre. La viga enrejada en el primer entrepiso es suficientemente rígida para suponer que el giro del extremo superior de la columna está impedido. Calcular la carga axial admisible sobre la columna. El material es acero A42-27ES. (Respuesta: 55,9 ton)



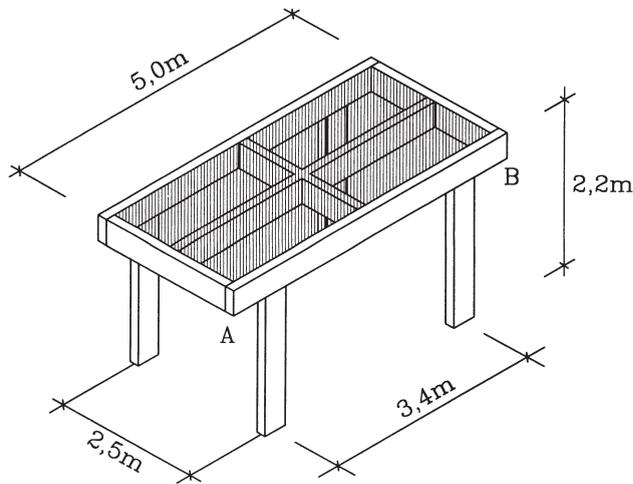
- 3.25 La columna esquina del 1^{er} piso de un edificio de estructura de acero es un perfil IN35x137 de material A37-24ES. Las fachadas Norte y Sur tienen un sistema de arriostamiento como se muestra en la figura. Las columnas del primer piso pueden considerarse como empotradas en el extremo inferior. En el extremo superior la restricción al giro la proveen las vigas, razón por la cual debe suponerse un caso intermedio entre “articulada” y “empotrada” (calcule K como articulada primero, como empotrada después y use el promedio). Ponga la sección de la columna en la dirección más apropiada, indicando que eje de ella (x ó y) coincide con la dirección N-S, y calcule la carga axial admisible de la columna. (Respuesta: Eje “ y ” en dirección N-S, 200 ton.)



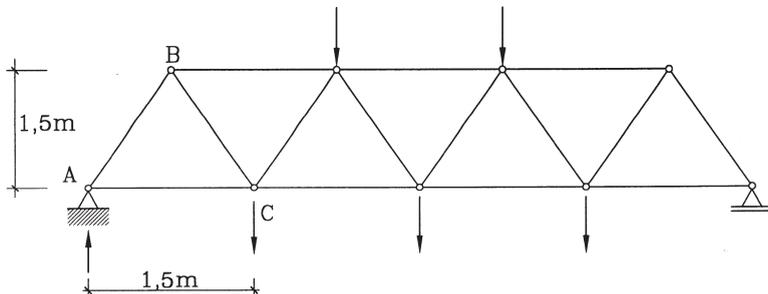
3.26 La figura muestra una parte de un edificio industrial de acero de tres pisos de altura. Las columnas, empotradas a la base, y dispuestas como se indica, son perfil HN25x95 de acero A37-24ES. En el plano ABC existe contraventación para restringir el desplazamiento lateral. En el extremo superior de las columnas del primer piso, en ambos planos, existe restricción a la rotación provista por las vigas metálicas correspondientes; sin embargo, no puede esperarse un empotramiento perfecto pues las vigas no son infinitamente rígidas. Para efectos del diseño suponer una condición de restricción al giro entre los casos “rotación libre” y “rotación nula”. Se pide determinar la carga axial admisible en la columna AB. ¿Puede Ud. hacer algún comentario sobre el diseño de las columnas de este edificio? (Respuestas: Plano ABC $\lambda=33,56$; plano ABD $\lambda=125,8$ $P_{adm}=82$ ton; la sección de las columnas no está bien orientada).



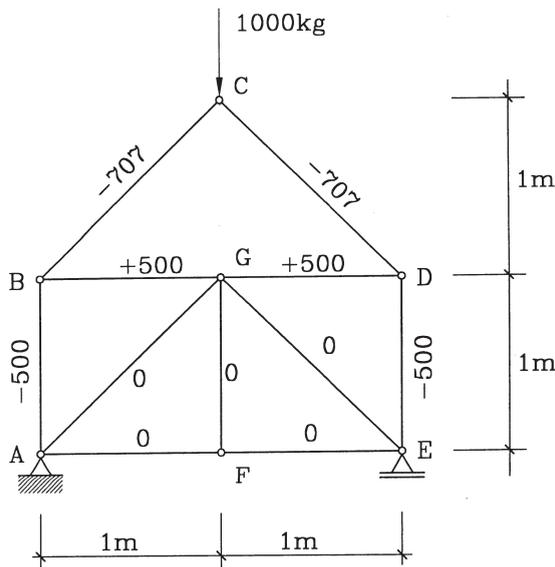
- 3.27 Diseñar la viga AB y los pilares de un cobertizo que sirva para proteger un vehículo del sol. Las dimensiones se muestran en la figura. Utilizar madera de Roble Grado II. La cubierta es de coligues. El peso de la cubierta, incluyendo las vigas y las viguetas secundarias se ha estimado en 15 kg/m^2 . Suponer que el peso propio actúa en forma uniformemente distribuida sobre la viga AB. Como sobrecarga considerar una carga concentrada de 100 kg ubicada en las posiciones más desfavorables para el elemento considerado. Suponer la viga simplemente apoyada sobre los pilares (la unión viga-pilar no transmite momento). Suponer los pilares empotrados en el suelo.



- 3.28 El reticulado de la figura es una cercha de techo de madera, a) Determinar qué fuerza axial de compresión es admisible para la diagonal AB si es una pieza de $2\frac{1}{2}'' \times 5''$ cepillada de Pino Radiata Grado II, b) El equilibrio del nudo B dice que el esfuerzo de la diagonal BC es de igual magnitud que el de AB, pero es de tracción en vez de compresión. Dimensione la pieza BC. (Respuestas: a) 1460 kg , b) $2'' \times 4''$)

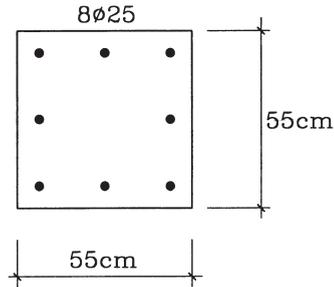


3.29 Los elementos del reticulado de la figura son de madera de Pino Radiata cepillada, grado I. Las piezas diagonales son de 1 1/2"x3" y los restantes son de 1 1/2"x2". En la figura se indican los esfuerzos de las barras en kg, el signo indica tracción o compresión. Las uniones serán clavadas. Suponer que la carga de diseño es de larga duración. Determinar las tensiones admisibles y verificar si las dimensiones de las piezas son apropiadas, indicando claramente qué condiciones se cumplen y cuáles no. (Respuestas: Barras traccionadas $\sigma_{adm} = 41,6 \text{ kg/cm}^2$, dimensión OK; barras BC y CD $\sigma_{adm} = 10,6 \text{ kg/cm}^2$, dimensión no cumple, esbeltez OK; barras AB y DE $\sigma_{adm} = 21,2 \text{ kg/cm}^2$, dimensión no cumple, esbeltez OK; barras con esfuerzo nulo OK)



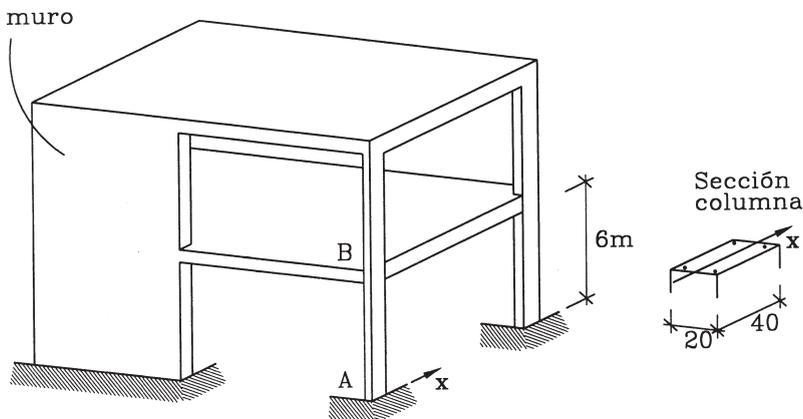
- 3.30 a) Dibuje esquemáticamente la relación σ - ϵ del hormigón en compresión. Indique en los ejes de coordenadas los valores de los puntos significativos de la curva.
- b) ¿Es el hormigón un material dúctil o frágil?. Explique.
- c) ¿Tiene punto de fluencia el hormigón en compresión?
- d) Hormigones típicos usados en construcción tienen resistencia f_c entre 250 y 300 kg/cm^2 . ¿Cómo se comparan estos valores de rotura en compresión con la resistencia de una madera fuerte?

- 3.31 Una columna de hormigón armado tiene la sección de la figura y los materiales son: hormigón calidad H30 y acero calidad A44-28H. Si no existe pandeo, calcular la carga admisible de la columna. ¿Es la cuantía de armadura de esta columna satisfactoria? (Respuesta: 335,2 ton; sí)

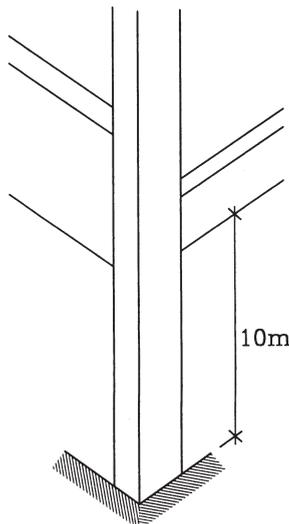


- 3.32 La sección de una columna de hormigón armado es de 30x30 cm y tiene armaduras 8φ18. El hormigón tiene resistencia última $f_c=300$ kg/cm² y el acero tensión de fluencia $\sigma=4.200$ kg/cm². ¿Cuándo se alcance la capacidad última de la columna (sin pandeo) qué proporción de la carga total toman el acero y el hormigón respectivamente?
- 3.33 Una columna de hormigón armado tiene sección 30x40 cm y materiales H30 (hormigón) y A63-42H (acero), a) Determinar la armadura de acero necesaria para que la carga axial admisible sea mayor o igual a 135 ton. No hay pandeo. b) Indicar a cuánto disminuye la carga admisible al incorporar el efecto de pandeo para el caso siguiente: La longitud de la columna es 8,25 m y el coeficiente de longitud efectiva es =1. (Respuestas: a) 6φ16=12 cm², b) 88,8 ton)
- 3.34 Dimensionar la sección y armaduras de acero de una columna de hormigón del 1^{er} piso de un edificio. La columna recibe una carga axial de 250 toneladas. Se utiliza acero calidad A63-42H y hormigón con $f_c=300$ kg/cm². La columna tiene una altura de 3,5 m, puede suponerse empotrada a la fundación, en su extremo superior puede suponerse una vinculación intermedia entre rotación fija y rotación libre, y no hay desplazamiento lateral por estar impedido por los muros estructurales existentes en el edificio.
- 3.35 Una columna de hormigón armado tiene una sección de 25x40 centímetros y 6 barras de 25 mm de diámetro de acero de refuerzo. Las calidades de los materiales son: hormigón H30 y acero A63-42. a) Calcular la carga axial admisible sobre la columna sin considerar pandeo, b) Suponiendo que el extremo inferior de la columna está empotrado, el extremo superior articulado, y que ambos extremos están impedidos de desplazarse lateralmente, determine la longitud máxima de la columna para que su carga admisible sea igual a un 50% de la carga admisible sin pandeo. (Respuestas: a) 138 ton, b) 10,15 m)

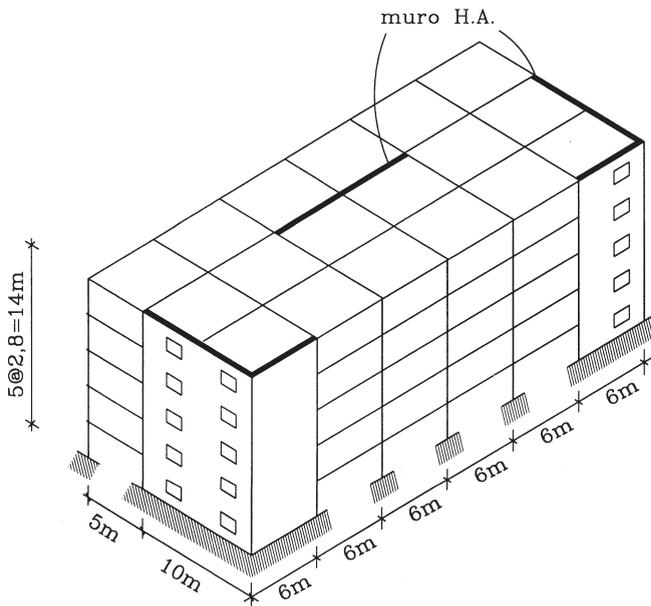
- 3.36 La columna AB del edificio de hormigón armado de la figura tiene sección 20x40 cm y armaduras 4 ϕ 16 mm. Los materiales son hormigón H30 y acero A63-42H. Se pide determinar: a) La carga admisible de la columna sin considerar pandeo, b) La carga admisible incluyendo el efecto de pandeo. Para las condiciones de vinculación en los extremos de la columna considerar: en A empotramiento; en B (en ambos planos) situación intermedia entre articulación y empotramiento; la condición de desplazabilidad lateral (en ambos planos) debe decidirla Ud. (Respuesta: a) 90,5 ton, b) 67,8 ton)



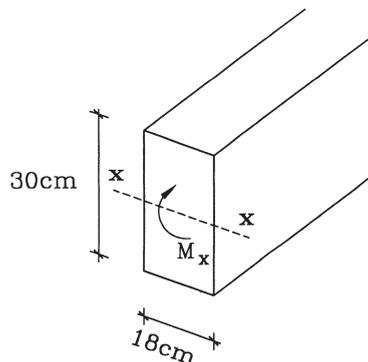
- 3.37 La columna esquina del primer piso de un edificio alto de hormigón armado tiene sección 30x60 cm y armaduras de acero A44-28H constituida por 8 barras de 22 mm de diámetro. El hormigón es clase H35. Suponiendo que el edificio tiene muros rígidos que controlan los desplazamientos laterales del edificio, y que una de las vigas es muy rígida mientras la otra es muy flexible, determinar la carga axial admisible sobre la columna. (Respuesta: 202,7 ton)



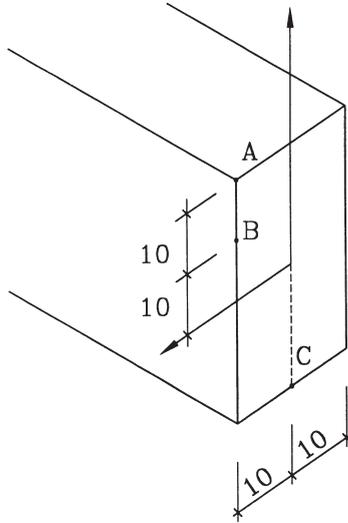
- 3.38 Un edificio de 5 pisos se ha estructurado en base a muros y marcos de hormigón armado. Se usará hormigón con $f_c=300 \text{ kg/m}^2$ y acero A44-28H. Estimar las dimensiones de las columnas típica interior y típica exterior en los distintos pisos. La carga de peso propio (incluido obra gruesa y terminaciones) se estima en 400 kg/m^2 , y la sobrecarga de piso es de 250 kg/m^2 . Las columnas soportarán esencialmente cargas verticales ya que las solicitaciones sísmicas horizontales serán resistidas por los muros estructurales. La dimensión mínima de columna a usar será de $20 \times 20 \text{ cm}$. Suponer que las condiciones de apoyo de los extremos de las columnas son intermedias entre columna doblemente empotrada y columna doblemente articulada con desplazamientos impedidos.



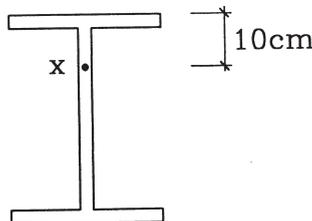
- 3.39 Calcule las tensiones de flexión y dibújelas sobre la sección rectangular que se indica para un momento flector de $3 \text{ ton}\cdot\text{m}$ en torno al eje x .



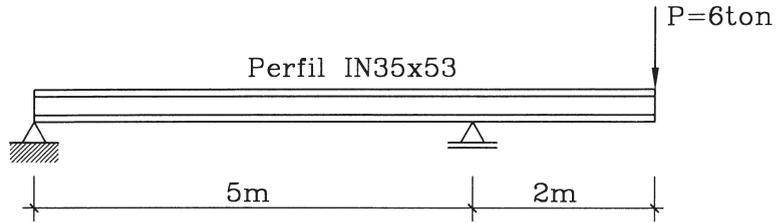
- 3.40 La sección que se muestra corresponde a una viga de sección 20x40 cm. Sobre la sección actúa un momento flector de 30 ton-m. Calcular las tensiones de flexión en los puntos A, B y C indicados; señalar si son de tracción o compresión. (Respuesta: A 562 kg/cm², compresión; B 281 kg/cm², compresión; C 562 kg/cm², tracción)



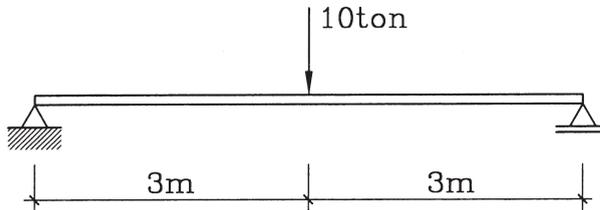
- 3.41 El perfil IN45x157, de acero calidad A37-24ES, se utiliza para una viga cuyo momento flector máximo es de 50 ton-m. a) Calcular la tensión máxima de flexión en la sección indicando en qué punto ella ocurre. b) Indicar si la tensión anterior satisface la tensión admisible de flexión si el volcamiento está impedido, c) Calcular la tensión de flexión en el punto x que muestra la figura. (Respuestas: a) 1424 kg/cm² en los bordes superior e inferior; b) sí; c) 791 kg/cm²)



- 3.42 Calcular la tensión de flexión máxima y la tensión de cizalle máxima para la viga de acero de la figura. Incluir el peso propio de la viga. Las tensiones calculadas ¿satisfacen las tensiones admisibles del acero A37-24ES? No hay volcamiento. (Respuestas: 1337 y 310 kg/cm², sí)

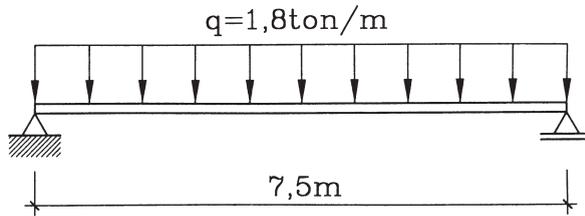


- 3.43 Seleccionar un perfil IN de acero A37-24ES para ser utilizado como viga en la condición que se muestra. No hay limitación de flecha. No hay volcamiento.
 a) Ignorar el peso propio de la viga, b) Incluir el peso propio de la viga
 (Respuesta: IN40x57,1 en ambos casos)

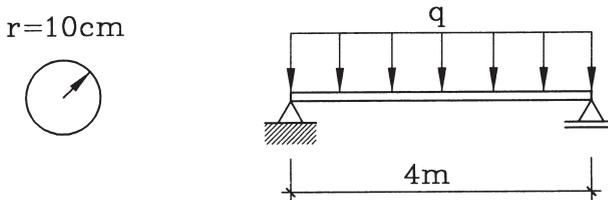


- 3.44 Tres vigas tienen idénticas longitudes, cargas y sección, pero una es de acero, la otra de hormigón armado, y la tercera de madera. ¿Cuál se deforma más?
- 3.45 ¿Qué diferencias esenciales existen entre un diseño estructural por resistencia y uno por serviciabilidad?
- 3.46 Calcular la deflexión máxima de una viga de acero IN40x109 de 8 metros de luz sometida a 2 cargas de 8 toneladas cada una a los tercios de la luz.

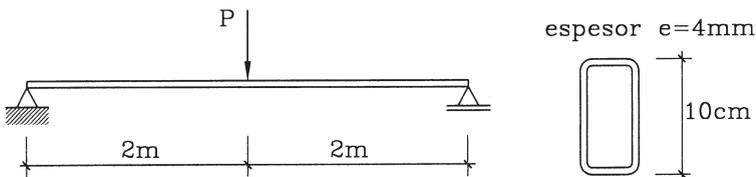
- 3.47 La viga de la figura es un perfil IN35x53 de acero A37-24ES. Calcule: a) la tensión máxima de flexión, b) la tensión máxima de cizalle, c) la deflexión máxima. En base a los resultados de las partes a), b) y c) anteriores, ¿considera Ud. el diseño apropiado? (Respuestas: a) 1438 kg/cm², b) 321,4 kg/cm², c) 2,29 cm; sí, el diseño es apropiado si no hay volcamiento)



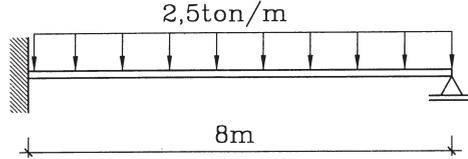
- 3.48 Una viga de acero calidad A37-24ES, de sección circular llena de 10 cm de radio, tiene 4 metros de luz. Calcular la sobrecarga q uniformemente distribuida admisible sobre la viga. No hay pandeo y la flecha máxima se limita a $L/300$. El peso propio de la viga es de 240 kg/m. (Respuesta: 5,4 ton/m)



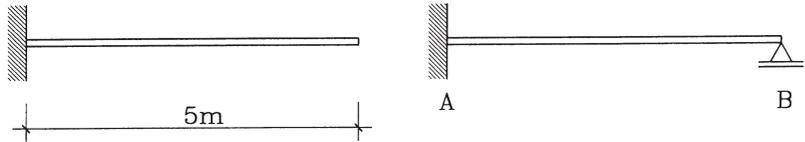
- 3.49 Una viga de acero A37-24ES de 4 metros de luz tiene sección tubular cajón rectangular como se indica. Calcular la carga P admisible sobre la viga de modo que se satisfagan: a) la tensión admisible de flexión sin volcamiento, b) que la deflexión vertical δ sea menor que $L/300$. (Respuesta: 281 kg)



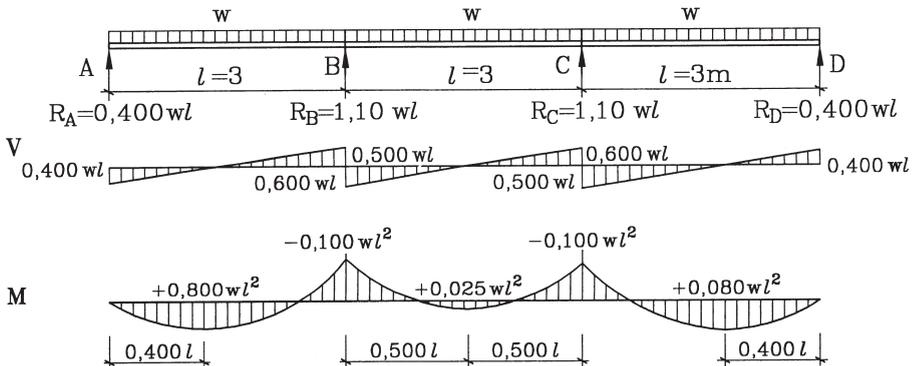
- 3.50 Seleccionar un perfil económico para ser usado para la viga de la figura. El volcamiento está impedido. Usar acero calidad A37-24ES. (Verificar tensiones de flexión, corte, y deformación máxima que no exceda $L/300$). (Respuesta: IN30x102)



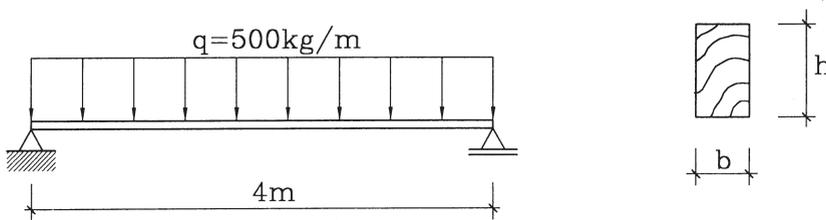
- 3.51 Una viga de acero perfil IN40x111 calidad A42-27ES se utiliza como viga en voladizo de 5 m de luz. Se pide: a) la carga uniformemente distribuida máxima que puede soportar sin que se exceda la tensión admisible de flexión sin volcamiento, b) ¿a cuánto aumenta la carga admisible si las condiciones de apoyo son empotrada en A y apoyada en B?, c) para el apoyo del caso “b” y para una carga $q=4$ ton/m calcule la deflexión y dibuje la curva deformada de la viga. Indique la deflexión máxima y dónde ocurre.



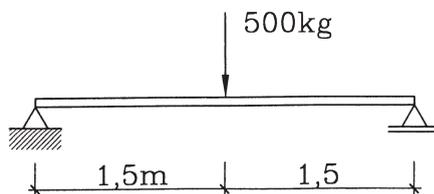
- 3.52. Para una viga de acero continua, de tres tramos de 3 metros de luz, se ha usado el perfil de acero IN20x13,8 calidad A37-24ES. La figura muestra las reacciones, diagramas de esfuerzos internos, y deformación máxima. Determinar la carga uniformemente distribuida máxima w para que se cumplan las tensiones admisibles y que la deformación no exceda $1/360$. (Respuestas: Por flexión $w=18,88$ kg/cm, por corte $w=40,5$ kg/cm, por deformación $w=37$ kg/cm; controlan las tensiones de flexión)



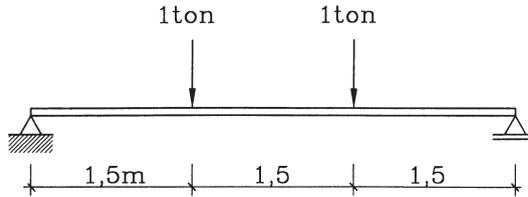
- 3.53 Encontrar el perfil de acero A37-24ES más económico para servir como viga de 8 m de luz sometida a una sobrecarga uniformemente distribuida de 1,5 ton/m. Hacer una estimación preliminar del perfil y después incluir el peso propio. Suponer que no existe volcamiento. Calcular la flecha máxima de la viga. ¿Cumple con el límite $L/250$? (Respuesta: IN40x49,3)
- 3.54 Dimensionar una viga de madera de sección rectangular de 4 metros de luz para resistir una carga uniformemente distribuida $q=500$ kg/m. La madera es de Pino Radiata Grado II. Ignorar el peso propio de la viga. Usar $h=2b$. (Respuesta: 13x26 cm)



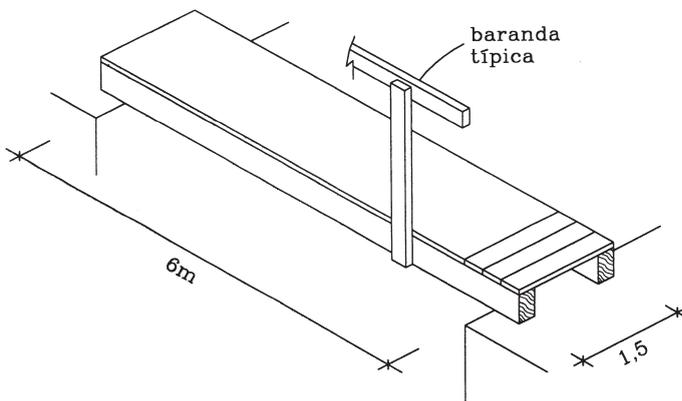
- 3.55 Una viga de madera de sección rectangular correspondiente a una pieza de dimensión nominal 2"x6", cepillada, está simplemente apoyada en sus extremos y tiene 3,2 metros de luz. El material tiene tensiones admisibles de flexión de 120 kg/cm^2 , de corte 6 kg/cm^2 , y módulo de elasticidad 99000 kg/cm^2 . Determinar la carga uniformemente distribuida, en kg/m, que puede soportar sin que se excedan las tensiones admisibles de flexión ni corte, ni una deflexión máxima de $L/250$. (Respuestas: $q=138 \text{ kg/m}$ por flexión, 157 kg/m por corte, 96 kg/m por deflexión máxima; controla esta última)
- 3.56 Dimensionar la sección rectangular de una viga de madera cepillada, de 3 m de luz, para soportar una carga concentrada ubicada al centro de la viga de 500 kg. Suponer que las tensiones admisibles de flexión y de cizalle son de 75 y 10 kg/cm^2 respectivamente. El volcamiento está impedido. No hay restricción de deflexión, a) Ignorar el peso propio de la viga, b) Incluir el peso propio de la viga. (Respuesta: $4'' \times 8'' = 9 \times 19 \text{ cm}$ en ambos casos)



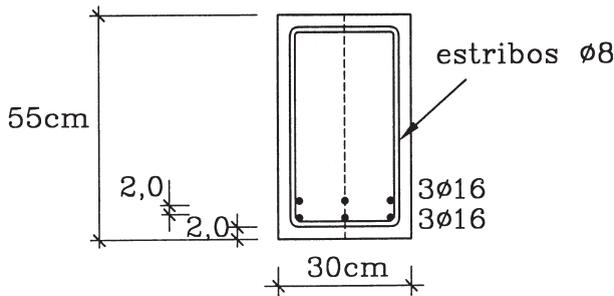
- 3.57 Diseñar una viga de madera cepillada de Roble Grado II. Verificar tensiones admisibles de flexión y corte y limitar la deformación máxima a $L/250$. No hay volcamiento. (Respuesta: Sección $5'' \times 12'' = 11,5 \times 29$ cm)



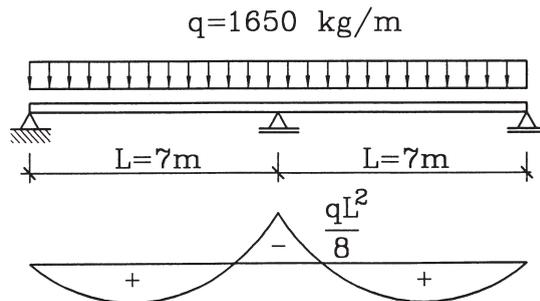
- 3.58 Calcular la tensión máxima de flexión en una viga rectangular de madera cepillada de Roble de sección $2'' \times 6''$, de largo 3m, sometida a una carga total $q=115$ kg/m (incluye el peso propio y la sobrecarga). El volcamiento está impedido. ¿Satisface la viga la tensión admisible de flexión para Roble Grado III? ¿Satisface un límite de deformación de $L/300$? (Respuesta: 88 kg/cm²; no; no)
- 3.59 Diseñar el envigado de piso de una cabaña de madera de dos pisos. La luz es de 3,2 m. El peso propio (el envigado mismo y entablado) más la sobrecarga de cálculo son en total 230 kg/m². Usar Pino Radiata cepillado de razón de resistencia 60%. Indicar la sección de las vigas y su espaciamiento. Satisfacer la tensión admisible y la deformación vertical máxima.
- 3.60 Una pasarela peatonal de madera, de 6 m de luz, se construye con 2 vigas de madera de Roble Grado I sobre las que se apoyará un entablado machihembrado de $\frac{1}{2}''$. La sobrecarga total de diseño sobre el entablado es de 300 kg/m². a) Se pide dimensionar las vigas de madera. Para efectos de prediseño ignore el peso propio, b) Si además se impone la condición que la deformación máxima de la pasarela no exceda $L/300$, ¿Cuál sería la dimensión de la viga?.



- 3.61 Una viga de hormigón armado de sección rectangular 20x50 cm tiene armaduras principales 2φ22. a) Determinar las tensiones en el acero y en el borde más comprimido del hormigón si el momento flector en la sección es de 6 ton·m, b) si los materiales fuesen hormigón H30 y acero A63-42H, cuál sería el momento flector admisible en la sección.
- 3.62 Determinar la ubicación de la fibra neutra y las tensiones máximas en el hormigón y el acero, para el momento máximo que resiste la sección sin que se excedan las tensiones admisibles $\sigma_s^{adm}=1600 \text{ kg/cm}^2$ y $\sigma_c^{adm}=80 \text{ kg/cm}^2$. Usar $n=E_s/E_c=10$. Considerar el área total de acero concentrada en el centro de gravedad de las barras de refuerzo. (Respuestas: $d=49,6 \text{ cm}$, $k=0,33$, $M_{adm}=8,52 \text{ ton}\cdot\text{m}$, $\sigma_s=1600 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_c=78,6 \text{ kg/cm}^2$)



- 3.63 Diseñar la viga de hormigón armado de la figura, indicando el número y dimensión de las barras de refuerzo en las secciones críticas. Utilizar el criterio de diseño elástico con $\sigma_s^{adm}=1600 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_c^{adm}=80 \text{ kg/cm}^2$, $n=10$. Indique como dispondría las barras de refuerzo. (Respuesta: 30/60, $A_s'=6\phi18$)



- 3.64 Determinar el momento último nominal de una sección de 20x40cm, con $A_s=2\phi16=4,02 \text{ cm}^2$, $f_c'=200 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_y=2400 \text{ kg/cm}^2$, y suponiendo $d=37 \text{ cm}$. (Respuesta: $M_n=3,43 \text{ ton}\cdot\text{m}$)

- 3.65 Determinar la armadura requerida en una sección de 25x60cm para que su momento último nominal sea mayor que 27,5 ton·m. Los materiales son hormigón H30 y acero A44-28H. Comprobar que la cuantía resultante no exceda la cuantía de balance en rotura. (Respuesta: 4 ϕ 25)
- 3.66 En un edificio de hormigón armado, se tiene una viga continua de tres tramos, cuyo tramo central tiene 8m de luz. ¿Cuál es la altura mínima que debe tener esta viga para evitar deformaciones excesivas?.