

Chapter Title: ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

Book Title: Fundamentos de ingeniería estructural para estudiantes de arquitectura

Book Subtitle: Tercera edición

Book Author(s): Rafael Riddell C. and Pedro Hidalgo O.

Published by: Ediciones UC. (2015)

Stable URL: <https://www.jstor.org/stable/j.ctt1bhkq3k.4>

---

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact [support@jstor.org](mailto:support@jstor.org).

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at <https://about.jstor.org/terms>



JSTOR

*Ediciones UC* is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Fundamentos de ingeniería estructural para estudiantes de arquitectura*

## II.

---

# ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

## 2.1 Equilibrio Global

### 2.1.1 Grados de Libertad y Vinculación

En muchos de los sistemas estudiados en el Capítulo anterior el equilibrio se lograba sólo para valores muy precisos de algunas fuerzas o para configuraciones geométricas específicas. Ello porque en su mayoría dichos sistemas estaban constituidos por cuerpos y superficies en condiciones de simple contacto, que pueden desbaratarse si se les somete a sistemas de fuerzas distintos. Por ejemplo, el sistema de la Fig. 1.32 dejaría de funcionar si sobre la barra AB se aplicara una fuerza que la hiciera levantarse de su apoyo en A.

Las estructuras en cambio, en general, tienen la cualidad de ser *fijas*, esto es, no pueden moverse cualesquiera sea el sistema de fuerzas que se les aplique. Como se recordará, en la Sección 1.3.2 se mencionaron diversos tipos de cargas que deben soportar las estructuras, entre otros: peso propio, cargas de uso, viento, nieve, sismo, y cambio de temperatura. En contraposición, se llamarán *mecanismos* los sistemas que tienen la posibilidad de adoptar distintas posiciones dependiendo de las cargas a que estén sometidos.

Al hablar de posibilidades de movimiento se entra al campo de la *cinemática*, que es la parte de la mecánica que estudia las características geométricas del movimiento sin relacionarlo con las causas que lo producen. La consideración de tales causas es naturalmente el campo de la *dinámica*.

El aspecto de la cinemática que interesa aquí son los *grados de libertad* de un sistema, los que se definen como las *posibilidades de movimiento* del sistema y que en número coinciden con el *número de coordenadas necesarias para definir su posición en el*

*espacio*. Los tres conceptos mencionados están tan relacionados que prácticamente se confunden: la *libertad* se expresa en *movimiento* y éste, que corresponde a cambio de *posición*, se describe mediante *coordenadas*.

Un ejemplo sencillo es el de una partícula en el espacio. Sus posibilidades de movimiento son 3: puede desplazarse en dirección norte-sur (cambiar de latitud), en dirección este-oeste (cambiar de longitud), y en dirección vertical (cambiar de cota). Por cierto que de un punto a otro puede desplazarse en una trayectoria cualquiera que los una, pero ese desplazamiento siempre puede expresarse como un cambio de sus tres coordenadas: latitud, longitud, y cota. En vez de usar coordenadas geográficas, podría interesar la posición de la partícula al interior de una sala de clases; en tal caso como coordenadas de referencia puede escogerse un sistema de ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  coincidente con un vértice y tres aristas de la sala (Fig. 2.1.a). La posición de la partícula  $P$  queda dada por sus coordenadas  $x_p$ ,  $y_p$  y  $z_p$  y sus posibilidades de movimiento son tres: cambiar de posición según  $x$ , según  $y$ , y según  $z$ . Se concluye que *una partícula en el espacio tiene 3 grados de libertad*.

La restricción de la libertad de movimiento se llama *vinculación*, la que se especifica imponiendo un *vínculo*. La vinculación puede ser de muy variada naturaleza, y los vínculos pueden materializarse mediante dispositivos físicos reales como se usarán en las estructuras reales, o simplemente mediante condiciones abstractas. Volviendo al ejemplo de la partícula en la sala de clases, supóngase ahora que se le impone la restricción de mantenerse sobre la pared definida por el plano  $yz$  en la Fig. 2.1.a. El establecimiento de un vínculo implica una pérdida de libertad, en efecto, el vínculo establece que  $x_p \equiv 0$  y la partícula ahora sólo puede cambiar sus coordenadas  $y_p$  y  $z_p$ . Se concluye que *la partícula en el plano tiene 2 grados de libertad*. Es decir el vínculo impuesto le quitó un grado de libertad de los 3 que originalmente tenía en el espacio. En este caso el vínculo es de tipo abstracto, porque no se está detallando como se logra efectivamente que la partícula no abandone el plano. El lector puede imaginar formas físicas de hacerlo.

Una restricción más fuerte sobre la partícula de la Fig. 2.1.a es obligarla a mantenerse sobre uno de los ejes coordenados, por ejemplo el eje  $y$ . En tal caso la vinculación establece que  $x_p \equiv 0$  y  $z_p \equiv 0$  que corresponden a 2 restricciones y por tanto la partícula queda con un grado de libertad solamente. Las condiciones de vinculación pueden ser de muy variada naturaleza; por ejemplo, la Fig. 2.1.b muestra una partícula obligada a mantenerse sobre un riel circular. Claramente la partícula tiene un sólo grado de libertad, pues basta la coordenada  $\theta$  para definir la posición que tiene en el riel.

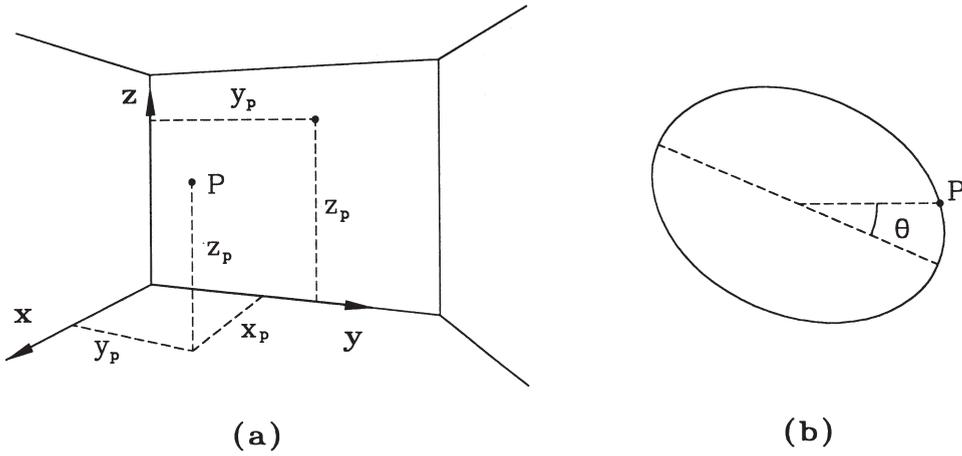


Figura 2.1 Grados de libertad de una partícula

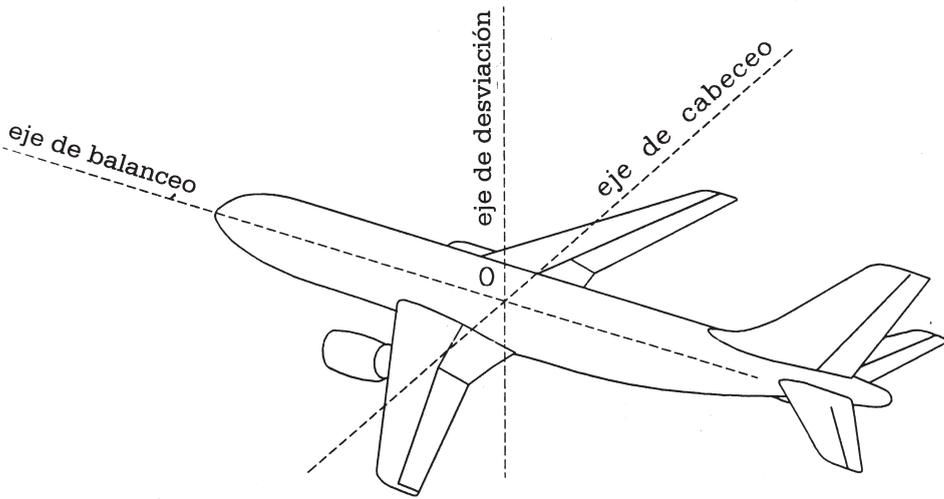


Figura 2.2 Grados de libertad de un cuerpo rígido en el espacio

¿Cuántos grados de libertad tiene un cuerpo rígido en el espacio? Para responder esta pregunta el lector debe reflexionar acerca del número de coordenadas necesarias para definir su posición en el espacio, o bien, separada o conjuntamente, analizar qué posibilidades independientes tiene de moverse. De paso ha aparecido aquí un nuevo concepto, la *independencia* de los grados de libertad, que significa que cada grado de libertad puede variarse aisladamente sin alterar los restantes. Para imaginarse más

fácilmente la situación de un cuerpo rígido en el espacio puede considerarse el caso de un avión. En el avión de la Fig. 2.2, que corresponde a uno de los modelos Airbus, se ha indicado un sistema de ejes con origen en O. Por cierto la posición geográfica del avión en vuelo puede especificarse por las coordenadas (latitud, longitud, altitud) del punto O, las que desde ya corresponden a 3 grados de libertad del aparato. Pero además, independientemente de las coordenadas del punto O, el aparato puede rotar con respecto a los tres ejes indicados, los que reciben nombres específicos conforme a las maniobras que realiza el avión. Las rotaciones con respecto a estos tres ejes corresponden a 3 grados de libertad más. *En resumen, un cuerpo rígido en el espacio tiene 6 grados de libertad.*

## 2.1.2 Dispositivos de Vinculación

En las secciones siguientes se analizarán distintas clases de estructuras, las que se fijarán al terreno, o sobre otras estructuras, mediante dispositivos estándar. Estos dispositivos, que establecen restricciones a los desplazamientos, se denominan *vínculos* o simplemente *apoyos*. Se usarán tres vínculos básicos llamados *deslizante*, *rótula* o *articulación*, y *empotramiento*, los que se describirán inicialmente en relación con su utilización en estructuras planas, aunque pueden extenderse al caso tridimensional. Siempre que se impone una restricción a un desplazamiento aparece una fuerza reactiva asociada al desplazamiento impedido (como se discutió en la Sección 1.3.2), de manera que en cada tipo de apoyo aparecerán tantas reacciones como desplazamientos se restrinjan.

El apoyo *deslizante* cumple la función de impedir uno de los dos desplazamientos posibles en el plano en que actúa. En la Fig. 2.3, que muestra los símbolos más usuales de este vínculo, el desplazamiento impedido es el de dirección “y” y el desplazamiento permitido tiene la dirección “x” de deslizamiento. En consecuencia, en este apoyo se desarrollará una reacción  $R_y$  de dirección “y” o reacción normal. La dirección “y” se denomina comúnmente *línea de acción del deslizante*, que coincide con la línea de acción de la fuerza reactiva que ejerce el apoyo. Notar que el vínculo deslizante tampoco ofrece ninguna restricción al eventual giro del elemento conectado a él. En consecuencia el vínculo deslizante *quita sólo un grado de libertad* a la estructura unida a él. Puede observarse también que el apoyo deslizante es muy similar al “contacto liso”, frecuentemente utilizado en el capítulo anterior, pero con una importante salvedad: el simple contacto liso es capaz de producir reacción en un solo sentido, mientras que la reacción  $R_y$  del deslizante puede tener sentido “+y” o “-y”, es decir el deslizante no puede “levantarse”.

La *rótula* o *articulación* impide ambos desplazamientos, en el plano, del punto de la estructura que se une a ella, pero deja absolutamente libre el potencial giro con respecto a ella, de allí su denominación de articulación. Este vínculo entonces *quita dos grados de libertad* a la estructura unida a él, y por lo tanto es capaz de producir dos componentes de reacción  $R_x$  y  $R_y$  asociadas a los desplazamientos x e

y impedidos, como muestra la Fig. 2.4.a. Alternativamente puede considerarse que la rótula produce una fuerza reactiva  $R$  de dirección  $\alpha$  cualquiera, como muestra uno de los símbolos en la Fig. 2.4.a; obviamente las dos situaciones son equivalentes,  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$  pues  $\alpha = \arctan \frac{R_x}{R_y}$

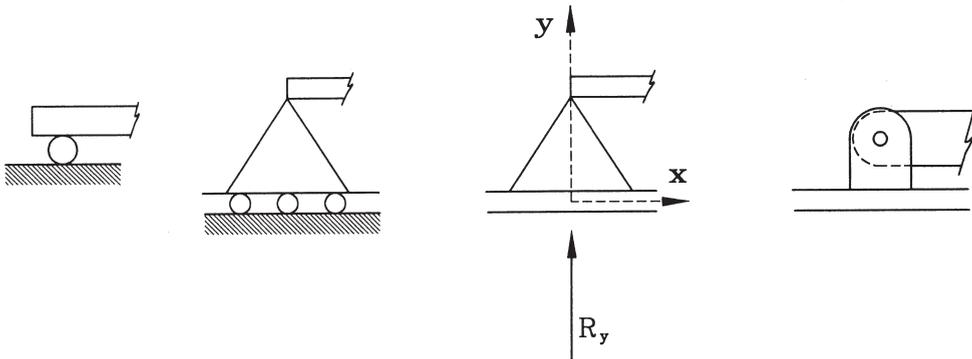


Figura 2.3 Apoyo deslizante: símbolos que lo representan

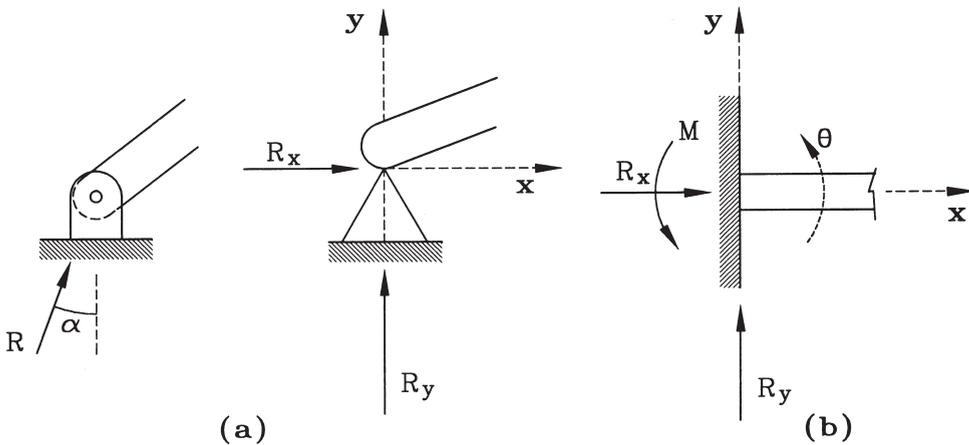


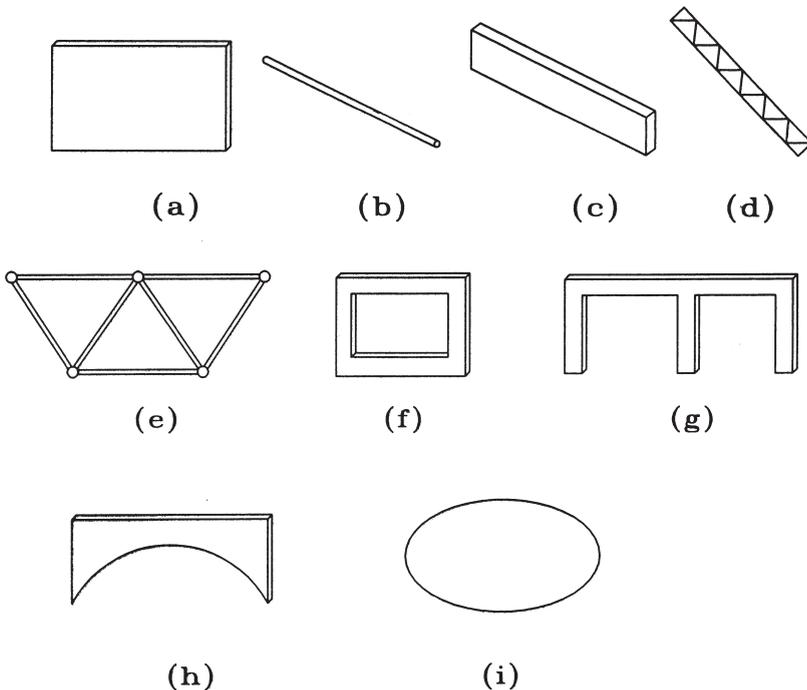
Figura 2.4 Vínculos: a) Articulación, b) Empotramiento

El vínculo llamado *empotramiento* equivale a una fijación total del elemento de la estructura unido a él, pues restringe ambos desplazamientos en el plano ( $x$  e  $y$  en la Fig. 2.4.b) y también la rotación  $\theta$ . En consecuencia el empotramiento *quita 3 grados de libertad* a la estructura plana unida a él, apareciendo por lo tanto tres componentes de reacción: Las fuerzas  $R_x$  y  $R_y$  asociadas a los desplazamientos impedidos y el momento  $M$  asociado al giro impedido.

### 2.1.3 Concepto de Lámina

El concepto de *lámina* engloba cualquier estructura plana que consta de un cuerpo sólido sin movimiento entre sus partes. La ventaja de este modelo es que permite referirse a las propiedades generales de este tipo de estructuras, sin adoptar una forma particular que pudiese insinuar una pérdida de generalidad de los métodos. Como ya se ha mencionado, la idealización de estructura plana se aplica a estructuras en las cuales el espesor no es relevante y que están sometidas a sistemas de cargas planos. La Fig. 2.5 muestra varios ejemplos de estructuras que pueden considerarse como láminas: a) placa, b) barra, c) viga, d) pieza de celosías, e) reticulado, f) marco, g) pórtico, h) arco. Las láminas se representan por una forma plana cualquiera como muestra la Fig. 2.5.i.

Cuerpos planos unidos entre sí mediante articulaciones internas no constituyen una lámina pues sus partes pueden moverse una con respecto a la otra, girando en torno a la articulación interna. La Fig. 2.6 muestra ejemplos de este tipo de estructuras, las que se denominan *cadena de láminas*; las articulaciones internas se han indicado con la letra A. Las Figs. 2.6.a, b y c muestran cadenas de dos láminas, la Fig. 2.6.d es una cadena de tres láminas, y la Fig. 2.6.e muestra la representación esquemática típica de una cadena de láminas (tres en este caso). La articulación interna no tiene necesariamente que estar en un extremo de la lámina o pieza conectada; por ejemplo, en la Fig. 2.6.c la articulación está en un punto intermedio cualquiera del marco.



**Figura 2.5** Estructuras modeladas como láminas

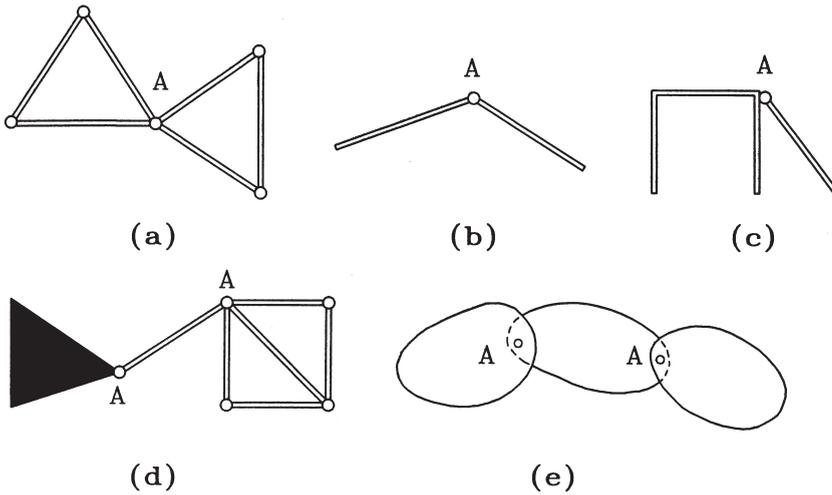


Figura 2.6 Cadenas de láminas

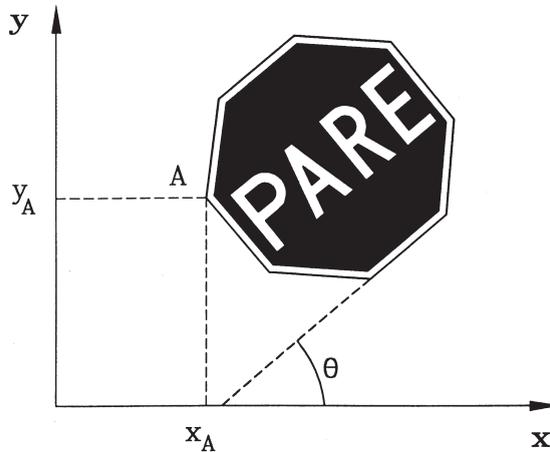
### 2.1.4 Estructuras de una Lámina

#### a) Vinculación

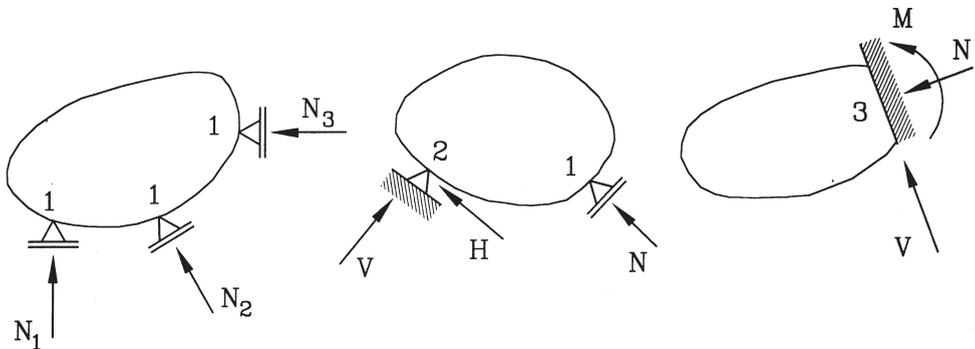
Bajo la hipótesis de estructura plana sometida a cargas en su plano, interesa analizar sus posibilidades de movimiento, o grados de libertad, dentro del plano. Es claro que la lámina puede trasladarse horizontalmente, trasladarse verticalmente, y girar en su plano, es decir tiene 3 grados de libertad. Lo mismo puede concluirse al examinar el número de coordenadas que se necesitan para definir una posición específica de la lámina en el plano. Por ejemplo, para el signo de la Fig. 2.7 pueden especificarse las coordenadas  $x_A$  e  $y_A$  de su vértice A con respecto a un sistema de referencia previamente escogido, pero el signo puede aún adoptar infinitas posiciones diferentes girando con respecto al punto A, luego es necesario definir el ángulo  $\theta$  que forma con respecto a la horizontal (u otra dirección preconvendida) para completar la descripción precisa y única de la posición del signo en el plano. El uso de 3 coordenadas ( $x_A$ ,  $y_A$ ,  $\theta$ ) implica que la lámina tiene 3 grados de libertad en el plano.

Para fijar la lámina en el plano se requiere restringir su libertad utilizando los dispositivos de vínculo descritos en la Sección 2.1.2. Con ellos, hay tres posibilidades de inmovilizar la lámina quitándole sus 3 grados de libertad, como ilustra la Fig. 2.8: con 3 deslizantes (una restricción de vínculo cada uno), con un deslizante y una rótula (una y 2 restricciones respectivamente), y con un empotramiento (3 restricciones de vínculo). Notar que en todos los casos aparecen 3 reacciones de vínculo. Este tipo de vinculación se denomina *isostática*, que corresponde a la condición de un sistema

de  $n$  grados de libertad, que se ha fijado utilizando  $n$  restricciones de vínculo, y donde aparecen  $n$  reacciones incógnitas. Como veremos, la estática siempre podrá proveer las  $n$  ecuaciones de equilibrio para calcular las  $n$  reacciones incógnitas. De allí el nombre isostática, en que el prefijo griego *iso* (igual) indica que la estructura está al nivel de la estática, y podrá calcularse haciendo uso de las leyes de la estática solamente. Por ello, es equivalente referirse a las estructuras isostáticas como estructuras *estáticamente determinadas*.



**Figura 2.7** Coordenadas para fijar una lámina en el plano

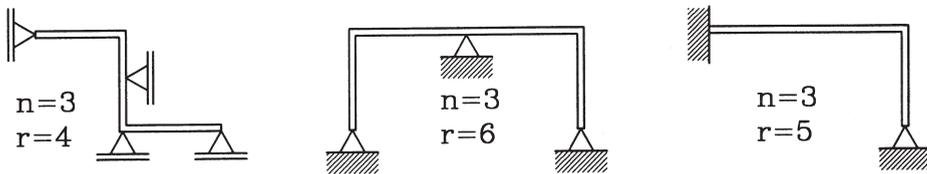


**Figura 2.8** Vinculación isostática de una lámina en el plano

Notar que en la discusión anterior se ha ignorado la forma de sustentación de la lámina fuera de su plano. Obviamente, una estructura modelada como lámina (por ejemplo el pórtico de la Fig. 2.5.g) puede ser parte de una estructura más compleja tridimensional, y será naturalmente el resto de la estructura la que le provea la sujeción necesaria para impedir el abatimiento del plano de la lámina. Tal vinculación, y las fuerzas reactivas correspondientes, corresponderán a acciones fuera del plano de la lámina (perpendiculares a ella por ejemplo), las que no intervienen en las condiciones

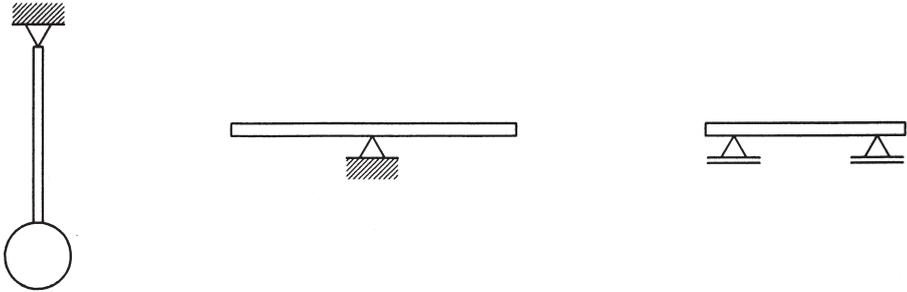
de equilibrio de la lámina en su plano. Es común en análisis estructural descomponer una estructura tridimensional en un conjunto de estructuras planas ortogonales entre sí, estableciéndose lo que se denomina un modelo de *planos resistentes*. Así mismo, en un buen proyecto arquitectónico los planos resistentes deben ser claramente reconocibles; en ellos se ubicarán los elementos estructurales que soporten cargas verticales, sísmicas y otras, para transmitir las a las fundaciones, a su vez, cualquier elemento estructural, fuera de dichos planos, no solo será inefectivo sino incluso puede ser un estorbo para el buen comportamiento de la estructura.

Cuando el número  $r$  de restricciones de vínculo excede el número  $n$  de grados de libertad de la estructura se dice que hay vinculación hiperestática, o que la estructura es *hiperestática*. En este caso se adopta el prefijo griego *hiper* (por sobre, exceso) denotando que se ha sobrepasado la estática, ya que las  $n$  ecuaciones de equilibrio que ella provee serán insuficientes para determinar las  $r$  reacciones de vínculo ( $r > n$ ). Por ello se dice que son estructuras *estáticamente indeterminadas*. Los problemas hiperestáticos si pueden resolverse, pero para ello hay que recurrir al análisis de las deformaciones de la estructura, lo que se presentará en el Capítulo 4. Ejemplos de una lámina hiperestática hay infinitos, basta agregar apoyos redundantes a los casos de la Fig. 2.8 como muestra la Fig. 2.9. Se llama *grado de hiperestaticidad* a la diferencia  $r-n$ ; en la Fig. 2.9 las láminas tienen grados de hiperestaticidad de 1, 3 y 2 respectivamente (de izquierda a derecha), y se dice que ellas son “una vez hiperestática”, “tres veces hiperestática”, y “dos veces hiperestática” respectivamente.



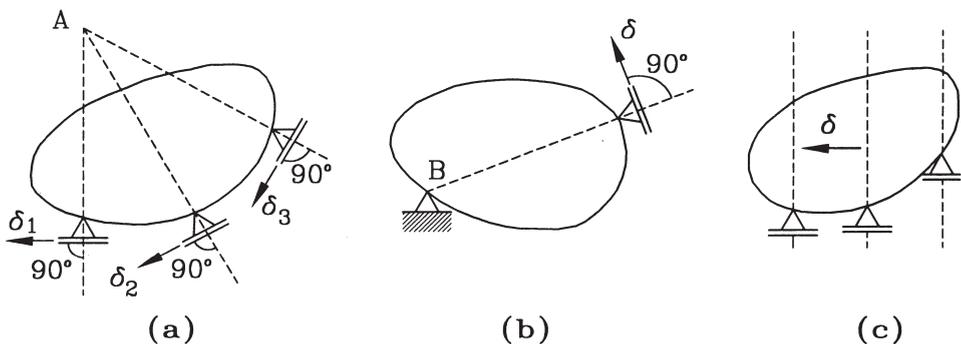
**Figura 2.9** Ejemplos de vinculación hiperestática de una lámina en el plano

Por cierto, existe también la posibilidad de imponer un número  $r$  de restricciones de vínculo menor que el número  $n$  de grados de libertad del sistema. Como se mencionó al comienzo de este Capítulo, en tal caso el sistema no constituye estructura sino se denomina *mecanismo*. Ello porque si  $r < n$  no se logra fijar completamente la estructura. Como se mencionó, los mecanismos pueden adoptar distintas posiciones de equilibrio dependiendo de las cargas aplicadas, o incluso no ser capaces de lograr el equilibrio salvo que los estados de carga sean muy particulares. La Fig. 2.10 muestra ejemplos simples de una lámina actuando como mecanismo: un péndulo, un balancín, y lo que podría ser un patín. Con frecuencia en los mecanismos se pueden calcular las reacciones de vínculo porque sobran las ecuaciones; sin embargo también se pueden presentar situaciones absurdas o insolubles, como ocurre si al patín de la Fig. 2.10 se le aplica una fuerza horizontal.



**Figura 2.10** Ejemplos de láminas en el plano que son mecanismos ( $r=2$ ,  $n=3$ )

Para completar esta discusión, hay todavía que introducir el concepto de *vinculación aparente*. Ello ocurre cuando habiéndose seleccionado los dispositivos de vínculo necesarios, ellos se han dispuesto en forma defectuosa. La Fig. 2.11 muestra las situaciones que pueden presentarse en el caso de una lámina. En la Fig. 2.11.a se han utilizado 3 apoyos deslizantes, pero se han dispuesto de modo que sus líneas de acción concurren al punto A; ello significa que los desplazamientos  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  y  $\delta_3$  están permitidos y la lámina puede girar en torno al centro de rotación A. En la Fig. 2.11.b la línea de acción del deslizante pasa por la rótula B, configuración que permite el desplazamiento  $\delta$  y por lo tanto la rotación de la lámina con respecto al punto B. En ambos casos anteriores podría pensarse que después de un giro limitado las láminas tenderían a trabarse y quedar fijas, ello ciertamente es posible pero hay dos razones para continuar descalificando esas estructuras: primero, experimentarían enormes fuerzas en los muy ineficientemente dispuestos apoyos, fuerzas que las fundaciones reales no serían capaces de resistir a no ser que fueran exageradamente antieconómicas, y segundo, la estructura quedaría siempre expuesta a un inaceptable movimiento de acomodo, “o juego”, que se repetiría cada vez que se modifique el sistema de cargas aplicadas. Finalmente, en la Fig. 2.11.c se muestra el caso de tres deslizantes dispuestos de manera que sus líneas de acción son paralelas; claramente en este caso el desplazamiento  $\delta$  perpendicular a dichas líneas no ha sido restringido.



**Figura 2.11** Vinculación aparente de una lámina

**b) Condiciones de equilibrio**

Las ecuaciones de equilibrio de una lámina son las ya conocidas para el cuerpo rígido plano (Ecs. 1-48), que se repiten aquí por comodidad

$$\Sigma F_x = 0 \tag{2-1.a}$$

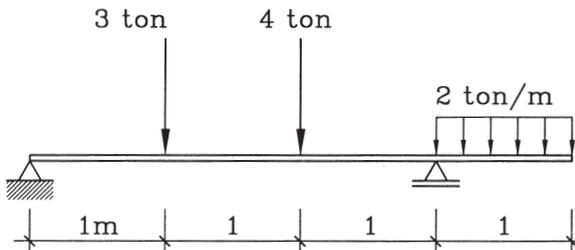
$$\Sigma F_y = 0 \tag{2-1.b}$$

$$\Sigma M_o = 0 \tag{2-1.c}$$

Estas 3 ecuaciones permiten calcular las 3 reacciones incógnitas que aparecen en el caso de cualquier lámina isostáticamente vinculada.

**Ejemplo 2.1**

Calcular las reacciones en los apoyos de la viga de la Fig. E2.1.a.



*Figura E2.1.a*

**Solución:** En la Fig. E2.1.b se han indicado las fuerzas reactivas correspondientes a la articulación en A y al apoyo deslizante en B. Además se ha sustituido la carga distribuida uniforme por su resultante en su centro de gravedad (sistema estáticamente equivalente). Las condiciones de equilibrio (Ecs. 2-1) son:

$$\Sigma F_{horizontal} = 0 \quad H = 0$$

$$\Sigma F_{verticales} = 0 \quad R_A + R_B = 3 + 4 + 2 = 9$$

$$\Sigma M_{respectoA} = 0 \quad R_B \cdot 3 = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3,5$$

luego  $R_B = \frac{18}{3} = 6 \text{ ton}$  y  $R_A = 9 - R_B = 3 \text{ ton}$ .

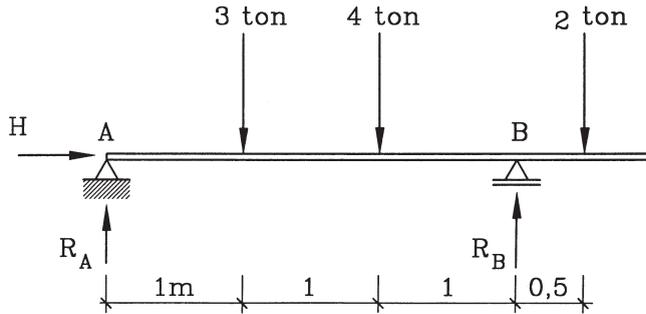


Figura E2.1.b

**Ejemplo 2.2**

Calcular las reacciones en los apoyos de la estructura de la Fig. E2.2.a.

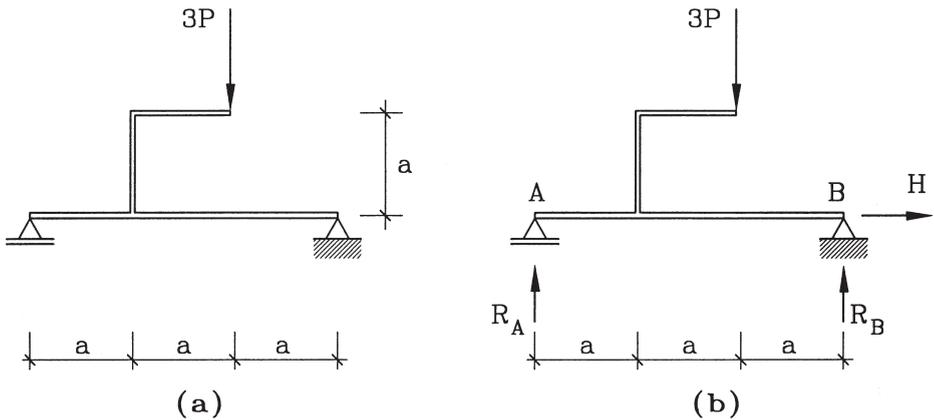


Figura E2.2

**Solución:** En la Fig. 2.2.b se indican las reacciones correspondientes a los vínculos de la estructura. Las ecuaciones de equilibrio (Ecs. 2-1) son:

$$\Sigma F_h = 0$$

$$H = 0$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$R_B \cdot 3a = 3P \cdot 2a \rightarrow R_B = 2P$$

$$\Sigma F_v = 0$$

$$R_A + R_B = 3P \rightarrow R_A = P$$

**Ejemplo 2.3**

Calcular las reacciones en los apoyos de una placa rígida triangular apoyada como muestra la Fig. E2.3.a.

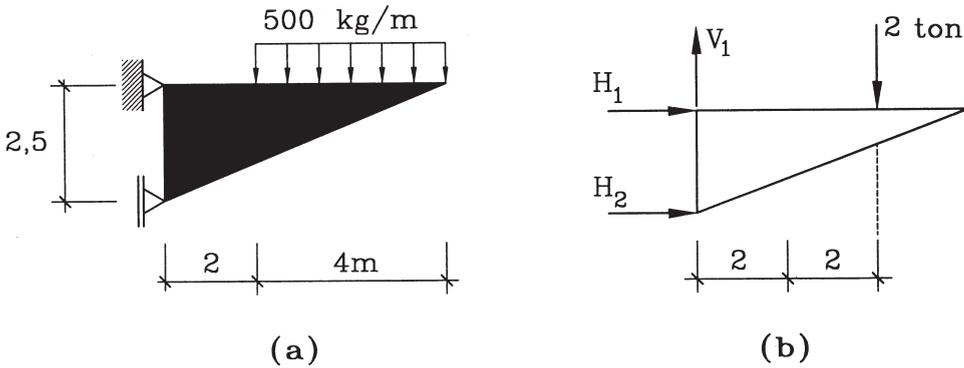


Figura E2.3

**Solución:** La Fig. E2.3.b muestra el diagrama de cuerpo libre de la lámina con las reacciones correspondientes a los apoyos. Para efectos del equilibrio, la carga uniformemente distribuida se ha substituido por su resultante equivalente. Las condiciones de equilibrio (Ecs. 2-1) son:

$$\begin{aligned} \Sigma F_v = 0 & & V_1 = 2 \text{ ton} \\ \Sigma F_h = 0 & & H_1 + H_2 = 0 \\ \Sigma M_1 = 0 & & H_2 \cdot 2,5 = 2 \cdot 4 \end{aligned}$$

Luego  $H_2 = 8/2,5 = 3,2$  ton y de la ecuación anterior se obtiene  $H_1 = -3,2$  ton. El signo negativo de  $H_1$  significa que la reacción tiene realmente sentido opuesto al supuesto para ella en el modelo de la Fig. E2.3.b. Notar que  $H_1$  y  $H_2$  tienen el efecto conjunto de una pareja de fuerzas que realiza un momento opuesto al que ejerce la carga respecto a los apoyos.

**Ejemplo 2.4**

Calcular las reacciones en los apoyos de la estructura de la Fig. E2.4.a.

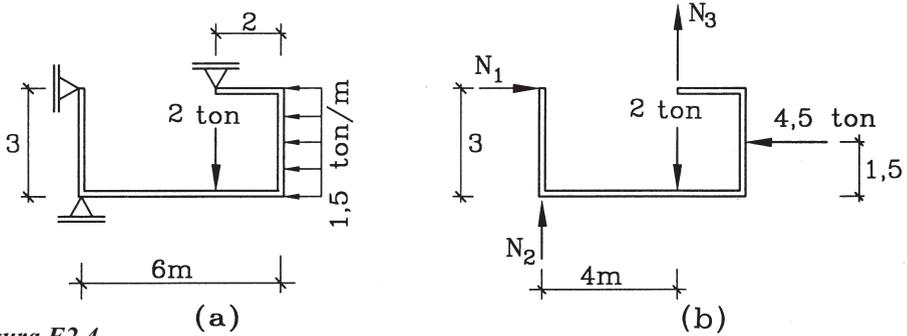


Figura E2.4

**Solución:** La Fig. E2.4.b muestra el diagrama de cuerpo libre de la estructura. El sistema de vinculación consiste en 3 deslizantes, los que están apropiadamente dispuestos pues sus líneas de acción no son ni concurrentes ni paralelas. En cada apoyo deslizante hay una reacción normal, las que se supusieron del sentido que muestra la figura. Las condiciones de equilibrio (Ecs. 2-1) son:

$$\begin{aligned} \Sigma F_v &= 0 & N_2 + N_3 &= 2 \text{ ton} \\ \Sigma F_h &= 0 & N_1 &= 4,5 \text{ ton} \\ \Sigma M_1 &= 0 & N_3 \cdot 4 &= 2 \cdot 4 + 4,5 \cdot 1,5 \end{aligned}$$

luego,  $N_3 = 14,75/4 = 3,69$  ton, y de la primera ecuación se obtiene  $N_2 = -1,69$  ton. El signo negativo de  $N_2$  significa que en realidad esta fuerza actúa sobre la estructura con sentido opuesto al inicialmente supuesto en el modelo de la Fig. E2.4.b.

**Ejemplo 2.5**

Calcular las reacciones en los apoyos de la viga de la Fig. E2.5.a. incluyendo su peso propio de 100 kg/m.

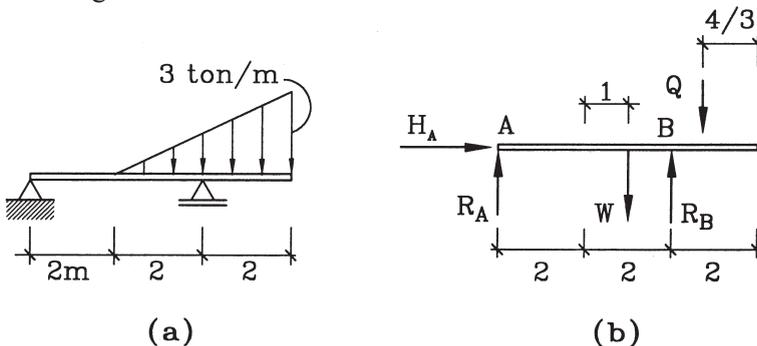


Figura E2.5

**Solución:** La Fig. E2.5.b muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga. Se han indicado las reacciones incógnitas en los apoyos:  $R_A$ ,  $R_B$  y  $H_A$ . Se sabe desde ya que  $H_A=0$  pues no hay otras fuerzas horizontales. La carga distribuida de intensidad triangular se ha sustituido para efectos del equilibrio por su resultante  $Q$ , cuyo valor es:

$$Q = \frac{3\text{ton/m} \cdot 4\text{m}}{2} = 6 \text{ ton}$$

La posición de la línea de acción de  $Q$  es el centro de gravedad del triángulo de carga; este se ubica a distancia  $h/3$  del extremo derecho de la carga, con  $h=4 \text{ m}$  (ver Tabla V.2). El peso total de la viga es  $W=100 \text{ kg/m} \cdot 6 \text{ m}=600 \text{ kg}=0,6 \text{ ton}$ , que se ubica en su centro de gravedad en la mitad de su longitud. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \Sigma F_v = 0 & & R_A + R_B = W + Q = 6 + 0,6 = 6,6 \text{ ton} \\ \Sigma M_A = 0 & & R_B \cdot 4 = Q(6 - 4/3) + W \cdot 3 \end{aligned}$$

De donde se obtiene  $R_B=7,45 \text{ ton}$  y  $R_A = -0,85 \text{ ton}$ . Notar que el signo negativo de  $R_A$  indica que la fuerza tiene sentido opuesto al supuesto en el modelo de la Fig. E2.5.b, lo que significa que la viga tiende a levantarse en su extremo A y es necesario sujetarla con una fuerza que apunta hacia abajo.

**Ejemplo 2.6**

Calcular las reacciones en los apoyos del pórtico de la Fig. E2.6.a. Ignorar el peso propio de los elementos.

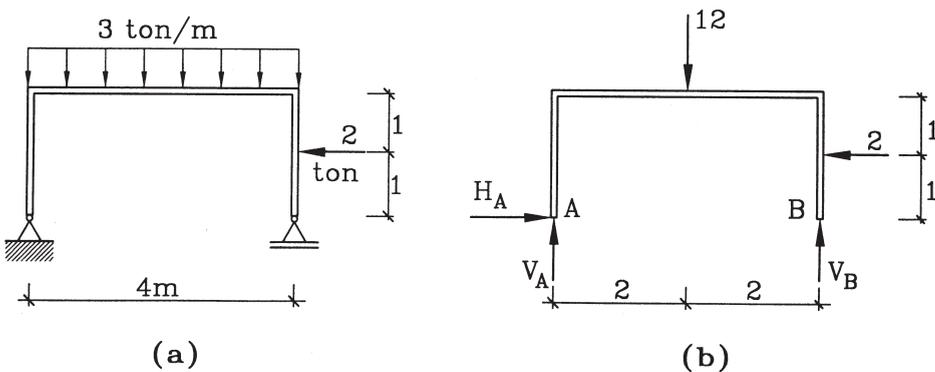


Figura E2.6

**Solución:** En la Fig. E2.6.b se muestra el diagrama de cuerpo libre de la estructura incluyendo las reacciones incógnitas en los apoyos y concentrando el total de la carga distribuida en su centro de gravedad. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}\Sigma F_h &= 0 & H_A &= 2 \text{ ton} \\ \Sigma F_v &= 0 & V_A + V_B &= 12 \\ \Sigma M_A &= 0 & V_B \cdot 4 + 2 \cdot 1 &= 12 \cdot 2\end{aligned}$$

$$V_B = \frac{22}{4} = 5,5 \text{ ton}$$

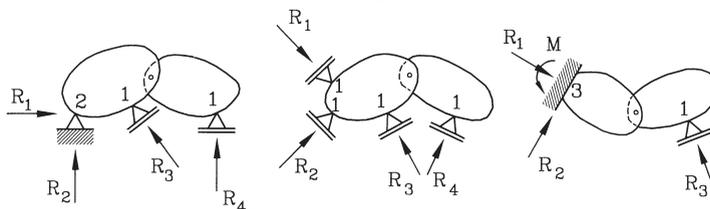
$$V_A = 12 - V_B = 6,5 \text{ ton}$$

## 2.1.5 Estructuras de Dos Láminas en Cadena

### a) Vinculación

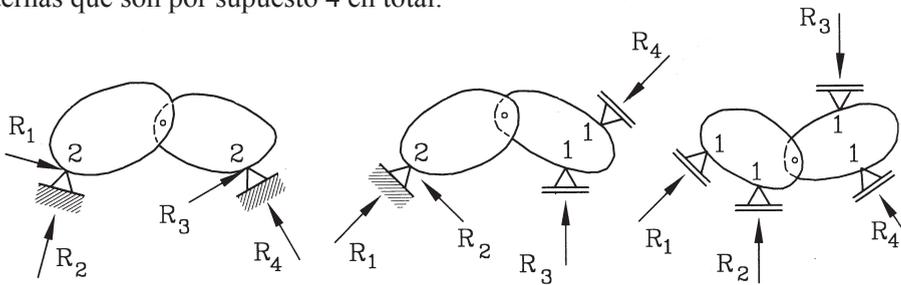
Estas estructuras se forman tomando dos láminas y uniéndolas entre sí mediante una articulación (Fig. 2.12). Esta última típicamente se designa por *articulación interna* o *rótula interna* para diferenciarla de los apoyos externos. La rótula interna es lógicamente un vínculo que restringe la libertad de las láminas; por ello, se espera que el total de 6 grados de libertad de las dos láminas independientes (3 cada una en el plano) se reduzca al encadenarlas entre sí. En efecto, es fácil ver que la cadena de 2 láminas tiene 4 grados de libertad en el plano. Ello se concluye observando que para fijar una de las láminas se requieren 3 condiciones de vínculo, y estando la primera fija, la segunda queda obligada a girar en torno a la articulación interna, es decir le queda sólo un movimiento permitido, y por lo tanto un sólo grado de libertad. Queda claro entonces que el *vínculo interno* redujo los grados de libertad de 6 a 4.

Como en toda restricción al desplazamiento, en el vínculo interno deben aparecer fuerzas reactivas, que como se sabe están directamente asociadas a los desplazamientos impedidos. La aplicación directa de este concepto dice entonces que en la rótula interna debe desarrollarse una fuerza de interacción que impide que las láminas se distancien; tal fuerza de interacción tendrá 2 componentes, horizontal y vertical, asociadas al impedimento a la separación de las láminas en las direcciones horizontal y vertical respectivamente. Ciertamente en vez de las 2 componentes de la fuerza ( $R_x$  y  $R_y$ ) puede hablarse de la fuerza resultante  $R$  de ellas actuando en una dirección  $\alpha$  cualquiera. Se comprueba entonces que aparecen tantas fuerzas reactivas como grados de libertad restringidos por el vínculo, en este caso 2. Obviamente, en la rótula interna el momento es nulo, porque el vínculo permite el giro que es el movimiento asociado al momento. Se dice entonces comúnmente que la *rótula interna transmite fuerzas pero no momentos* (desde una lámina a la otra, o sea, desde una parte de la estructura a la otra).



**Figura 2.12** Vinculación isostática de una cadena de dos láminas en el plano. Fijación 3-1.

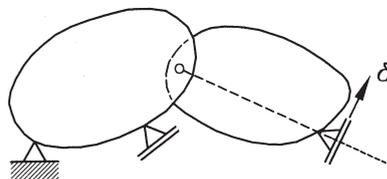
La cadena de dos láminas de cuatro grados de libertad debe a continuación fijarse para constituir una estructura, es decir debe establecerse la *vinculación externa*. Existen dos formas de fijación isostática. La fijación tipo 3-1 que consiste en fijar totalmente una de las láminas (3 vínculos) y agregar un deslizante a la segunda (1 vínculo); como muestra la Fig. 2.12 existen tres posibilidades según los apoyos que se escojan para la primera lámina (por cierto la “primera” lámina puede ser cualquiera de las dos). El segundo tipo de fijación es el 2-2 que consiste en la incorporación de dos condiciones de vínculo en cada lámina; como muestra la Fig. 2.13 también hay tres posibilidades para ello. En las figuras anteriores junto a cada vínculo externo se indica el número de grados de libertad restringidos y se muestran las reacciones externas que son por supuesto 4 en total.



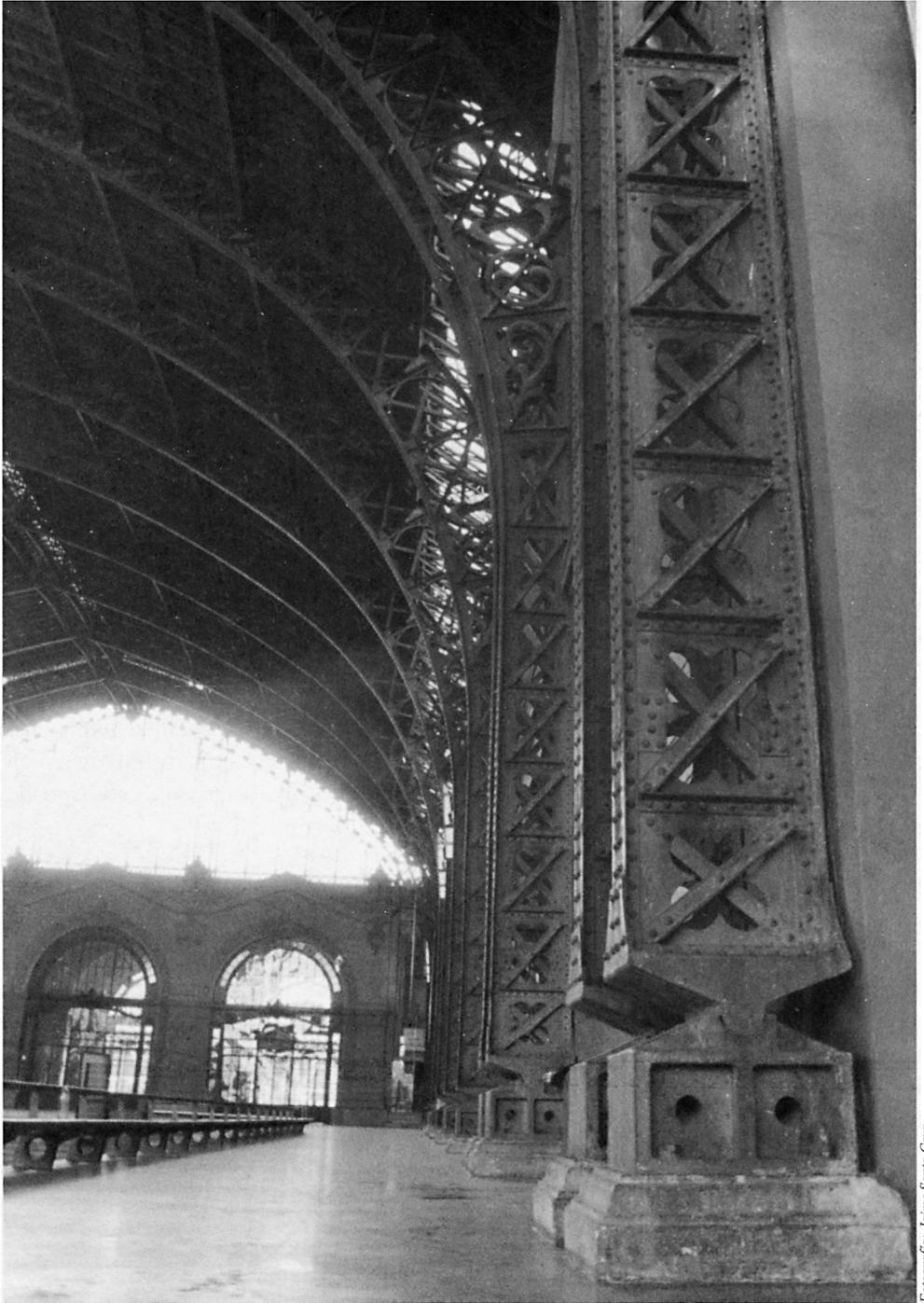
**Figura 2.13** Vinculación isostática de una cadena de dos láminas en el plano. Fijación 2-2

El caso de la izquierda en la Fig. 2.13 tiene el nombre especial de *arco triarticulado* porque consta de dos articulaciones externas más la interna, las que deben disponerse en forma de arco como se explicará luego. Este tipo de estructuras es muy usual en naves industriales de gran luz. Una importante obra histórica con este tipo de estructuración es la ex-Estación Mapocho en Santiago (Fig. 2.15).

En las cadenas de dos láminas también pueden darse situaciones de vinculación aparente. En las fijaciones tipo 3-1 hay vinculación aparente si la primera lámina (lámina izquierda en los casos de la Fig. 2.12) está aparentemente vinculada, como se discutió en la Sección 2.1.4, Fig. 2.11. También hay vinculación aparente si la línea de acción del deslizante de la segunda lámina pasa por la rótula interna (para cualquiera de los casos de la Fig. 2.12); en tal caso, como ilustra la Fig. 2.14, la segunda lámina puede girar en torno a la articulación interna pues el desplazamiento  $\delta$  está permitido.



**Figura 2.14** Vinculación aparente en fijación tipo 3-1



Fotografía: Jaime Santa Cruz

**Figura 2.15** Ex-Estación Mapocho en Santiago

En las fijaciones tipo 2-2 (Fig. 2.13) hay vinculación aparente si las rótulas externas e internas son colineales. Cuando una de las láminas está vinculada con dos deslizantes éstos son equivalentes a una articulación externa en el punto de intersección de sus líneas de acción. La Fig. 2.16 muestra fijaciones tipo 2-2 con vinculación aparente, notar las articulaciones A, B y C en línea recta; como la vinculación de los puntos A y C permite el giro con respecto a ellos, el punto B puede experimentar desplazamiento ( $\delta$ ) en la dirección perpendicular a la recta AC. Por ello, en el caso del arco triarticulado, su nombre *arco* enfatiza que los puntos A, B y C no sólo no deben ser colineales, sino alejarse bastante de tal condición para ser una estructura eficiente.

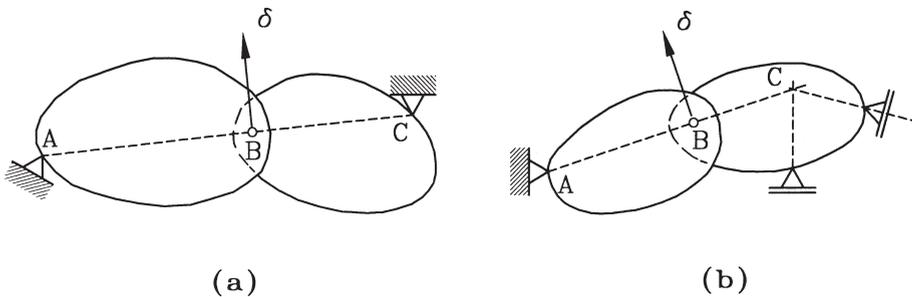


Figura 2.16 Vinculación aparente en fijación tipo 2-2

Por cierto en el caso de cadenas de dos láminas también puede existir vinculación redundante o hiperestática. Cualquier vínculo adicional que se agregue a las fijaciones típicas (Figs. 2.12 y 2.13) producirá indeterminación estática. El vínculo adicional puede ser externo (cualquier tipo de apoyo) o interno. Un ejemplo de redundancia interna se presenta en la Fig. 2.17 en que a un arco triarticulado se le ha agregado una barra de conexión entre las dos láminas.

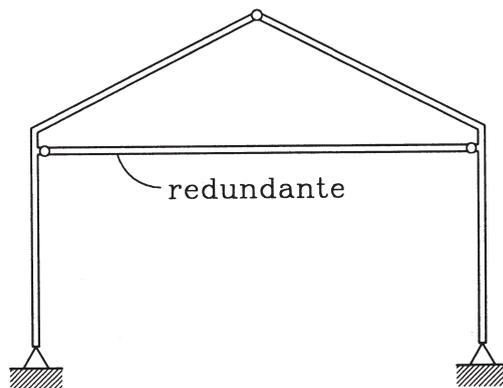


Figura 2.17 Arco triarticulado con vínculo interno redundante

### b) Ecuaciones de equilibrio

Como se presentó anteriormente, en una cadena de dos láminas las fuerzas reactivas incógnitas son 4, las que deben determinarse mediante las ecuaciones de equilibrio del sistema. Como se ha anticipado, por tratarse de sistemas isostáticos, las condiciones de equilibrio estático deben proporcionar un número suficiente de ecuaciones, como se discutirá a continuación.

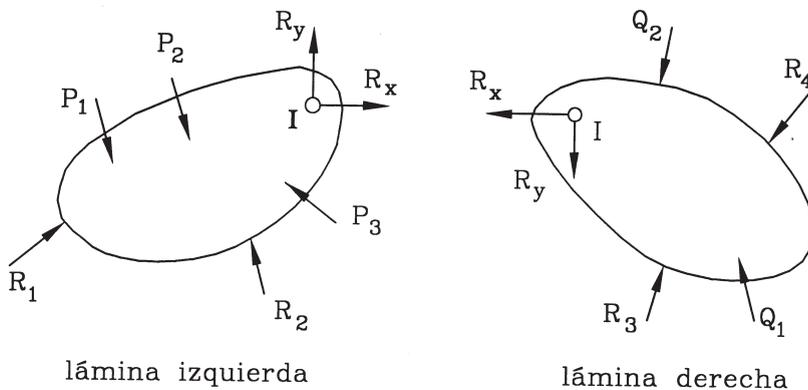
A pesar de tratarse de estructuras conformadas por dos piezas, el conjunto apropiadamente vinculado externamente conforma un todo sin movimiento. Es claro entonces que el conjunto de todas las fuerzas externas (cargas aplicadas más reacciones en los vínculos externos) es un sistema de fuerzas en equilibrio; luego, ellas deben satisfacer las condiciones generales de equilibrio de un cuerpo en el plano (Ecs. 1-48):

$$\Sigma F_x^{\text{todas}} = 0 \quad (2-2.a)$$

$$\Sigma F_y^{\text{todas}} = 0 \quad (2-2.b)$$

$$\Sigma M_o^{\text{todas}} = 0 \quad (2-2.c)$$

en que O es un punto cualquiera del plano. En las ecuaciones anteriores se ha utilizado el supraíndice “todas” para enfatizar que en ellas intervienen todas las fuerzas externas y diferenciarlas de las ecuaciones que se presentarán a continuación.



**Figura 2.18** Diagramas de cuerpo libre individuales de las láminas de una cadena

Considérese ahora el diagrama de cuerpo libre de cada una de las láminas de la cadena, como muestra la Fig. 2.18. En la lámina izquierda actúan cargas externas  $P_j$ , reacciones externas  $R_i$  (no interesa su número que depende del tipo de fijación), y reacciones internas  $R_x$  y  $R_y$  en la articulación interna I. Análogamente en la lámina derecha actúan cargas externas  $Q_j$ , reacciones  $R_j$ , y reacciones internas iguales y

contrarias  $-R_x$  y  $-R_y$ . Cada uno de estos cuerpos es un cuerpo rígido en equilibrio al que se le pueden aplicar las condiciones dadas por las Ecs. 1-48; pero, para evitar incorporar nuevas incógnitas ( $R_x$ ,  $R_y$ ), resulta conveniente utilizar sólo las ecuaciones de momento (Ec. 1-48.c) tomadas con respecto a la rótula interna I. Se tienen entonces dos ecuaciones adicionales de equilibrio

$$\Sigma M_I^{izq} = 0 \tag{2-2.d}$$

$$\Sigma M_I^{der} = 0 \tag{2-2.e}$$

en que el supraíndice “izq” indica que en la Ec. 2-2.d intervienen sólo las fuerzas externas que actúan en la lámina izquierda (cargas  $P_i$  y reacciones  $R_1$  y  $R_2$ ), y análogamente, “der” indica que en la Ec. 2-2.e sólo participan las fuerzas externas sobre la lámina derecha (cargas  $Q_i$  y reacciones  $R_3$  y  $R_4$ ).

Resumiendo, las ecuaciones de equilibrio de una cadena de dos láminas son las cinco Ecs. 2-2, que por cierto son suficientes para determinar las cuatro reacciones incógnitas. Puede llamar la atención porque hay más ecuaciones que incógnitas. Efectivamente, y sin querer profundizar sobre el tema, ello ocurre porque las Ecs. 2-2 no constituyen lo que en matemáticas se llama un sistema de ecuaciones *linealmente independientes*. En forma muy simplista, ello significa que dadas 4 de las 5 ecuaciones, la quinta no aporta nueva información pues ella podría obtenerse mediante manipulación algebraica de las 4 anteriores. Para evitar tropezar con alguna dificultad algebraica, se sugiere no usar más de 4 ecuaciones, siendo en general recomendable escoger las Ecs. 2-2.a y b de equilibrio global de fuerzas, y dos de las tres ecuaciones de momento: Ecs. 2-2.c, d, y e. Típicamente, de éstas tres convendrán las Ecs. 2-2.d y e de equilibrios parciales de momentos que son en general más simples que la Ec. 2-2.c.

**Ejemplo 2.7**

Calcular las reacciones en los apoyos de la viga de la Fig. E2.7.a.

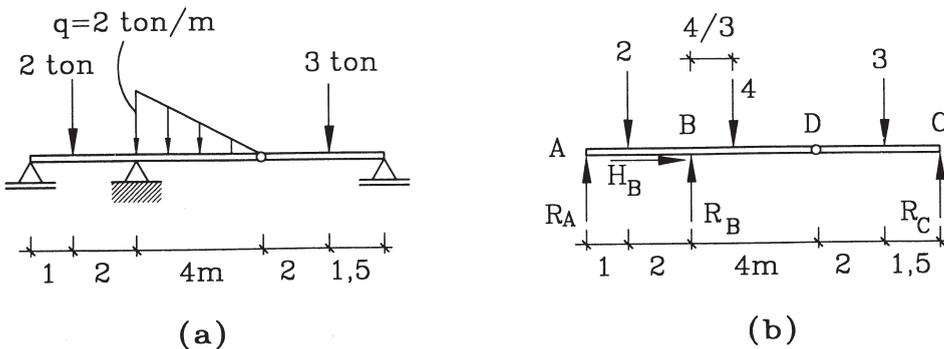


Figura E2.7

**Solución:** La estructura corresponde a una cadena de dos láminas. La Fig. E2.7.b muestra el modelo de la estructura dónde se han indicado las reacciones, y la carga distribuida de intensidad variable se ha reemplazado por su resultante actuando en el centro de gravedad correspondiente. Las 4 ecuaciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_h^{\text{todas}} = 0 \quad H_B = 0 \quad (\text{i})$$

$$\Sigma F_v^{\text{todas}} = 0 \quad R_A + R_B + R_C = 2 + 4 + 3 = 9 \quad (\text{ii})$$

$$\Sigma M_A^{\text{todas}} = 0 \quad R_B \cdot 3 + R_C \cdot 10,5 = 2 \cdot 1 + 4(3 + 4/3) + 3 \cdot 9 \quad (\text{iii})$$

$$\Sigma M_D^{\text{der}} = 0 \quad R_C \cdot 3,5 = 3 \cdot 2 \quad (\text{iv})$$

Esta última ecuación corresponde al momento de las fuerzas aplicadas en la lámina derecha (CD) solamente (Ec. 2-2.e). De ella se obtiene  $R_C = 1,71$  ton, valor que sustituido en la ecuación iii permite obtener  $R_B = 9,46$  ton; finalmente, con  $R_B$  y  $R_C$  se obtiene de la ecuación ii  $R_A = -2,17$  ton.

### Ejemplo 2.8

Calcular las reacciones en los apoyos de la estructura de la Fig. E2.8.a.

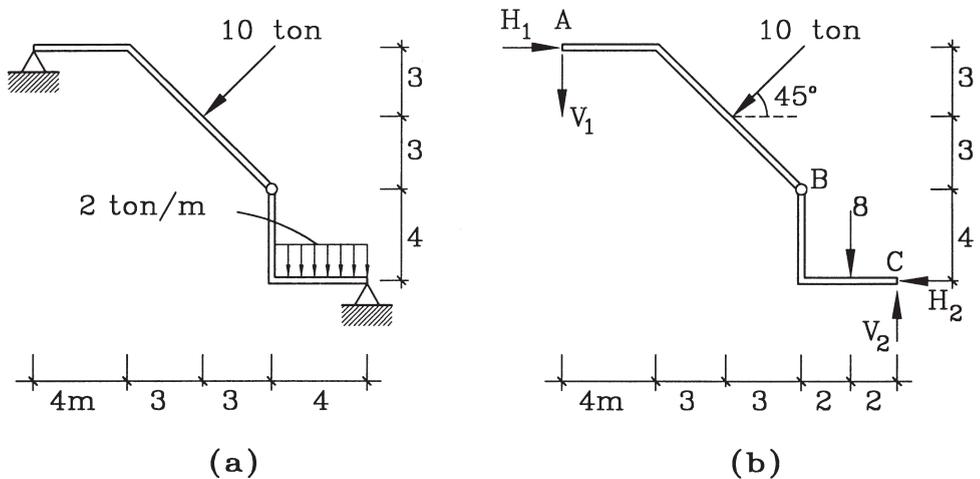


Figura E2.8

**Solución:** La Fig. E2.8.b muestra las reacciones de apoyo incógnitas y la carga distribuida reemplazada por su resultante. Las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_v = 0 \quad V_1 + 8 + 10 \text{ sen}45^\circ = V_2 \quad (\text{i})$$

$$\Sigma F_h = 0 \quad H_1 = 10 \text{ cos}45^\circ + H_2 \quad (\text{ii})$$

$$\Sigma M_A^{\text{todas}} = 0 \quad 10 \text{ cos}45^\circ \cdot 3 + 10 \text{ sen}45^\circ \cdot 7 + 8 \cdot 12 + H_2 \cdot 10 = V_2 \cdot 14 \quad (\text{iii})$$

$$\Sigma M_B^{\text{der}} = 0 \quad V_2 \cdot 4 = H_2 \cdot 4 + 8 \cdot 2 \quad (\text{iv})$$

$$V_2 = H_2 + 4 \quad (\text{v})$$

La ecuación anterior se reemplaza en la ecuación iii, quedando:

$$21,21 + 49,5 + 96 + H_2 \cdot 10 = (H_2 + 4) \cdot 14$$

$$H_2 = 27,68 \text{ ton}$$

Reemplazando  $H_2$  en v da  $V_2=31,68 \text{ ton}$ , y en ii da  $H_1=34,75 \text{ ton}$ . Reemplazando  $V_2$  en i da  $V_1=16,61 \text{ ton}$ .

**Ejemplo 2.9**

Determinar las reacciones en los apoyos del pórtico de la figura.

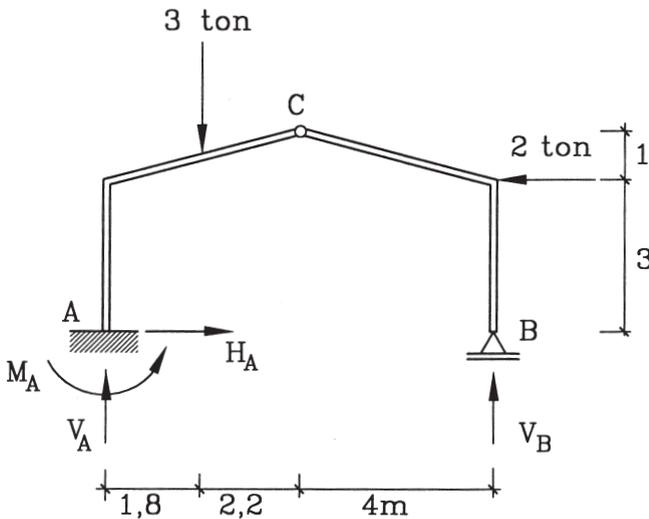


Figura E2.9

**Solución:** En la figura se muestran las reacciones correspondientes a los vínculos en A y B. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_h^{\text{todas}} = 0 \quad H_A = 2 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_v^{\text{todas}} = 0 \quad V_A + V_B = 3$$

$$\Sigma M_C^{\text{der}} = 0 \quad V_B \cdot 4 = 2 \cdot 1 \rightarrow V_B = 0,5 \text{ ton} \rightarrow V_A = 2,5 \text{ ton}$$

$$\Sigma M_C^{\text{izq}} = 0 \quad M_A + H_A \cdot 4 + 3 \cdot 2,2 = V_A \cdot 4 \rightarrow M_A = -4,6 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

### Ejemplo 2.10

Determinar las reacciones en los apoyos y en la articulación interna del arco inarticulado de la Fig. E2.10.a.

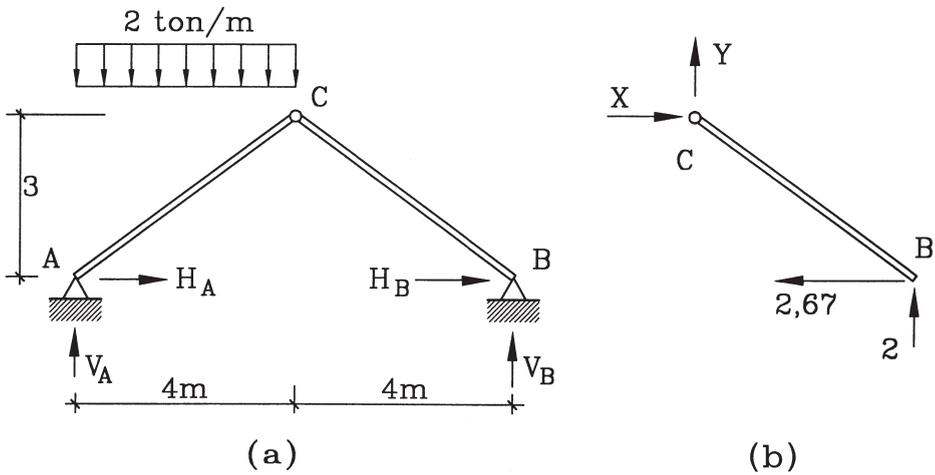


Figura E2.10

**Solución:** En la Fig. E2.10.a se indican las reacciones incógnitas en los apoyos externos. Para el análisis, la fuerza distribuida se reemplazará por su resultante: una fuerza vertical de magnitud 8 ton a 2 m de distancia del nudo A. Las ecuaciones de equilibrio son las siguientes:

$$\begin{aligned} \Sigma F_v \text{ todas} = 0 & \quad V_A + V_B = 8 \\ \Sigma F_h \text{ todas} = 0 & \quad H_A + H_B = 0 \\ \Sigma M_C \text{ der} = 0 & \quad V_B \cdot 4 + H_B \cdot 3 = 0 \\ \Sigma M_C \text{ izq} = 0 & \quad V_A \cdot 4 = H_A \cdot 3 + 8 \cdot 2 \end{aligned}$$

Resolviendo al sistema de ecuaciones se obtienen  $V_A = 6$  ton,  $V_B = 2$  ton,  $H_A = 2,67$  ton y  $H_B = -2,67$  ton. Para la reacción interna en C considérese el equilibrio de la barra BC (Fig. E2.10.b), teniendo en cuenta que a través de C se transmite una fuerza cuyas componentes se han designado por X e Y. En el nudo B se han indicado las fuerzas reactivas previamente calculadas. Se tiene:

$$\begin{aligned} \Sigma F_h = 0 & \quad X = 2,67 \text{ ton} \\ \Sigma F_v = 0 & \quad Y = -2 \text{ ton} \end{aligned}$$

Estas mismas fuerzas pero en sentido contrario actúan en la barra AC, lo que el lector puede comprobar haciendo su equilibrio.

**Ejemplo 2.11**

Determinar las reacciones en los vínculos externos e interno del pórtico triarticulado de la Fig. E2.11.a.

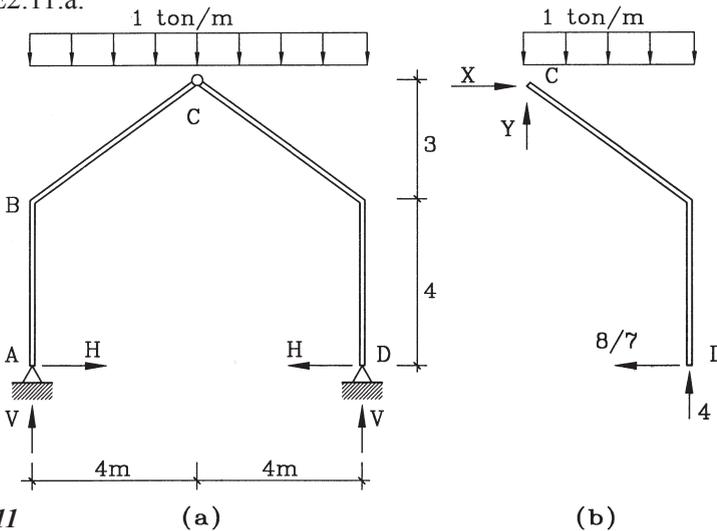


Figura E2.11

**Solución:** En este caso se puede aprovechar que se trata de una estructura simétrica sometida a carga simétrica. Las reacciones deben también ser simétricas, como muestra la Fig. E2.11.a. Luego, basta con dos ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma F_v = 0 \quad 2V = 1 \cdot 8 = 8 \quad \rightarrow V = 4 \text{ ton}$$

$$\Sigma M_C^{\text{der}} = 0 \quad V \cdot 4 = H \cdot 7 + 1 \cdot 4 \cdot 2 \quad \rightarrow H = 8/7 \text{ ton}$$

La reacción interna en la articulación C se determina imponiendo las condiciones de equilibrio a la barra CD, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la Fig. E2.11.b. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$X = 8/7 \text{ ton}$$

$$Y + 4 = 1 \cdot 4 \rightarrow Y = 0$$

Es decir a través de la rótula interna C sólo se transmite un empuje horizontal de 8/7 ton.

### 2.1.6 Cadenas de Varias Láminas

La metodología empleada en el análisis de cadenas de dos láminas es extensiva a sistemas constituidos por un número cualquiera de láminas. No obstante, el análisis detallado de este tema excede los objetivos de este texto, por ello, sólo se harán algunas consideraciones generales.

Es claro que una cadena de  $n$  láminas tiene  $n+2$  grados de libertad en el plano, pues para fijarla hay que restringir los tres grados de libertad de la primera más un grado de libertad por cada una de las  $n-1$  restantes ( $3+n-1 = n+2$ ).

Lo primero al abordar una cadena de  $n$  láminas es comprobar si las condiciones de vinculación son adecuadas. Para vinculación isostática, los dispositivos de vínculo deben sumar  $n+2$  restricciones de desplazamiento y deben estar apropiadamente dispuestos a fin de que ninguna lámina, o grupos de láminas, tengan vínculos redundantes o estén en situaciones de vinculación aparente. Una técnica que ayuda a ésto es fijarse en partes de la cadena, de una o dos láminas, que estarían perfectamente fijas si fueran independientes, para luego estudiar como el resto de las láminas va adquiriendo sustentación apoyándose en las anteriores.

Ciertamente la estática provee las  $n+2$  ecuaciones de equilibrio necesarias. De partida se tienen las 3 ecuaciones globales de equilibrio del sistema (Ecs. 2-2.a, b y c), que involucran a todas las fuerzas externas del sistema: cargas y reacciones en los apoyos. Adicionalmente, se puede plantear al menos una ecuación de momento nulo en cada una de las  $n-1$  articulaciones internas, tomando momentos de las fuerzas hacia la derecha o a la izquierda de la articulación.

## 2.2 Estructuras de Reticulado

### 2.2.1 Introducción

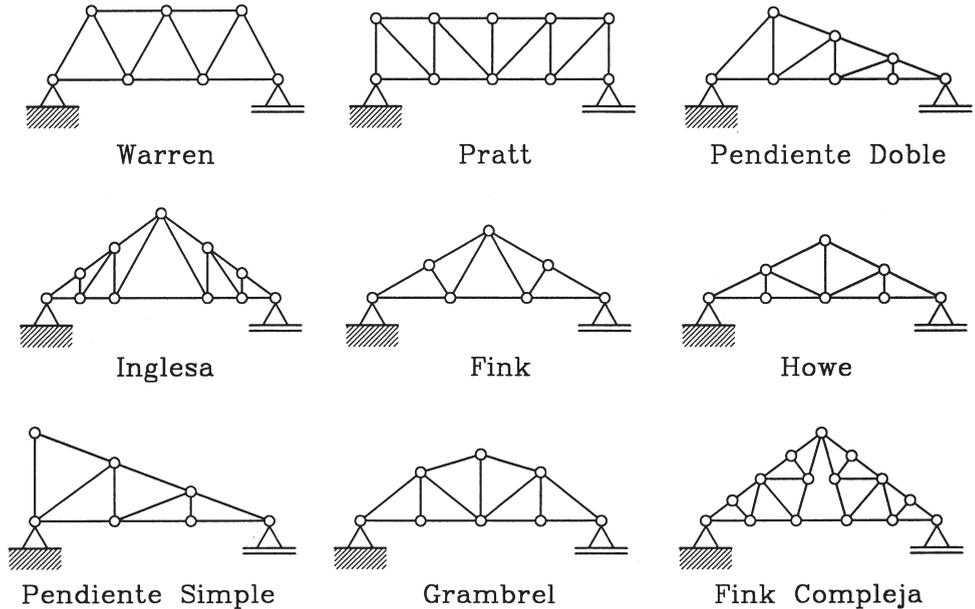
Los reticulados son estructuras de múltiples aplicaciones, desde las cerchas de madera que se usan en la techumbre de las viviendas, pasando por estructuras reticulares de acero de frecuente uso en construcciones industriales, hasta puentes carreteros o de ferrocarril de gran envergadura. El objetivo de las estructuras reticulares es el uso más eficiente del material. Al aumentar la altura de la sección del reticulado, que actúa como una viga, se reducen los efectos de la flexión, y al mismo tiempo no es necesario disponer de un *alma llena*, sino que basta con elementos diagonales y verticales para transmitir los esfuerzos correspondientes.

Otra de las ventajas de las estructuras reticulares es su versatilidad para adaptarse a diversas formas según las necesidades. Sin embargo, hay algunas formas típicas que se conocen con nombres especiales (Fig. 2.19).

Una propiedad importante de los reticulados es su rigidez. Justamente, por su considerable mayor altura en comparación con una viga de alma llena, los desplazamientos de los nudos en el plano vertical son generalmente despreciables. Esto permite en viviendas soportar cielos de materiales frágiles fijándolos al cordón inferior, sin riesgo de fracturarse. Igualmente, en el caso de puentes hay limitaciones muy estrictas de deformaciones, particularmente en puentes de ferrocarril, que pueden lograrse por la natural propiedad de rigidez de las estructuras reticulares.

Para el análisis de estructuras de reticulado se hacen tres hipótesis, que en lo posible deben atenderse en el diseño y construcción:

- a) *Los elementos que conforman el reticulado se conectan entre sí mediante articulaciones lisas.* Los elementos se llaman también *barras*, y los puntos de unión *nudos*. Como tal, la articulación permitiría el libre giro de las barras que llegan a un nudo, no pudiendo producirse momentos. Esta hipótesis, sin embargo, difícilmente se materializa en la práctica, ya que los sistemas que se usan para realizar las uniones de los elementos restringen las rotaciones en los nudos: pernos, clavos y conectores en madera, soldaduras en acero, etc. (Ver Figs. 3.9 y 3.15 en el Capítulo 3).
- b) *Los elementos de reticulado se unen en sus extremos.* Esta hipótesis se vulnera también con frecuencia en la práctica, por ejemplo en los cordones superior e inferior, donde son usuales los elementos *continuos* que cubren varios nudos, en vez de una serie de elementos cortos entre nudo y nudo. Incluso esta práctica tiene la ventaja de simplificar las conexiones entre los elementos, ya que no es necesario conectar el elemento continuo.



**Figura 2.19**

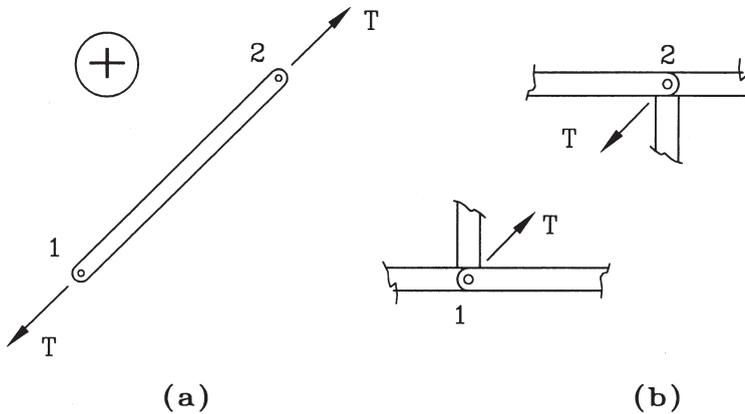
c) *Las fuerzas se aplican sólo en los nudos del reticulado.* Se entiende que se trata de todas las fuerzas: cargas y reacciones en los apoyos. Las cargas en puntos intermedios de los elementos deben evitarse pues inducen flexión en ellos. Aún así esta hipótesis tampoco se cumple en la práctica, lo que se acepta si las cargas son pequeñas. Incluso, es inevitable violar esta hipótesis porque el peso propio de los elementos no está en los nudos. En todo caso, justamente la versatilidad de forma de los reticulados permite diseñarlos disponiendo nudos donde se necesite recibir cargas concentradas importantes.

Como puede verse, un *modelo de reticulado* corresponde a una *idealización* de una estructura real. Sin embargo, salvo que se cometan gruesos errores, se estima que la estructura real se comportará en forma suficientemente aproximada a la ideal, de modo que el análisis teórico es válido.

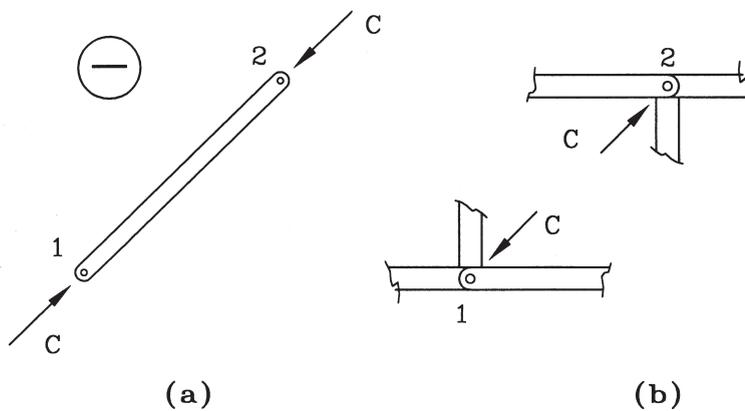
En virtud de las hipótesis anteriores las barras de reticulado sólo quedan sometidas a esfuerzos internos *axiales*, es decir en la dirección del eje longitudinal de la barra, o eje que une sus nudos extremos. Cada barra realiza entonces una fuerza, que puede ser de *tracción* o *compresión* según su sentido.

La Fig. 2.20 representa una barra traccionada. La Fig. 2.20.a muestra la *acción T de la estructura sobre la barra*, que claramente corresponde a una tendencia a *estirar*

la barra. La Fig. 2.20.b por su parte muestra *la acción de la barra sobre los nudos*, es decir sobre el resto de la estructura; la barra está *tirando* de los nudos, es decir su función es impedir que ellos se alejen. Además la figura muestra un signo positivo que es el que por convención se asigna a los esfuerzos de tracción.



**Figura 2.20** Barra en tracción



**Figura 2.21** Barra en compresión

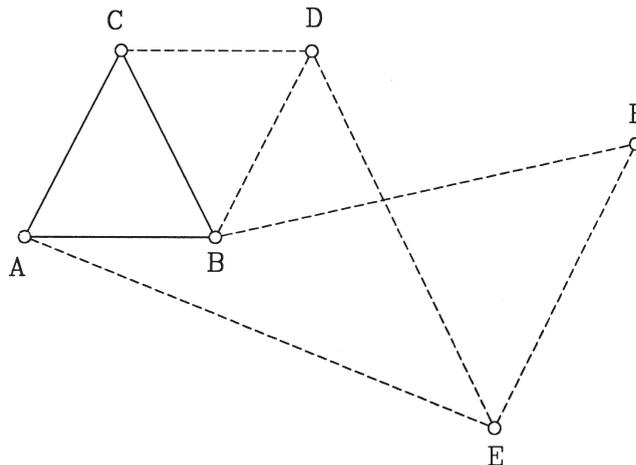
Similarmente la Fig. 2.21 representa una barra comprimida. La Fig. 2.21.a muestra la acción C de la estructura sobre la barra, que tiende a producir *acortamiento* de la barra. Por su parte la barra reacciona sobre los nudos *empujándolos* para evitar su acercamiento (Fig. 2.21.b). En este caso la figura muestra un signo negativo, el que convencionalmente se asigna al esfuerzo de compresión.

Todo lo anterior es válido tanto para reticulados planos como espaciales. En lo que sigue, la presentación se limitará a reticulados planos, en los que por cierto las cargas aplicadas deben estar en el plano del reticulado.

Una forma de generación de reticulados es a partir del elemento constitutivo básico que es un triángulo formado por tres barras articuladas entre sí en sus tres nudos. Este triángulo es el reticulado más simple que se puede concebir, y naturalmente cumple con lo que antes se definió como lámina. A partir del reticulado básico, ABC en la Fig. 2.22, se obtiene un reticulado mayor agregando cada vez dos barras a partir de dos nudos existentes para crear un nuevo nudo. Las barras BD y CD definen el nuevo nudo D, las barras AE y DE definen el nuevo nudo E, y las barras BF y EF el nudo F; notar que las barras BF y DE se cruzan sin tocarse y no existe nudo común a ellas. Este proceso se llama de generación por *triangulación* y el resultado es un *reticulado simple*, que también califica como lámina. Todos los reticulados generados por este procedimiento cumplen la relación

$$b + 3 = 2n \quad (2-3)$$

en que  $b$  es el número de barras y  $n$  el número de nudos. También cumplen esta relación otros reticulados, que no han sido generados así. Todos los que la cumplen son reticulados isostáticos, porque el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones que se pueden plantear para resolverlos. En efecto, si el reticulado constituye una lámina hay 3 reacciones externas incógnitas, además hay  $b$  incógnitas correspondientes a las fuerzas en las  $b$  barras del reticulado, entonces en total son  $b+3$  incógnitas. Si se considera el reticulado como un sistema de partículas, en que cada nudo es una partícula, se pueden plantear dos ecuaciones de equilibrio en cada nudo (Ecs. 1-31 a y b), y como son  $n$  nudos hay  $2n$  ecuaciones de equilibrio.



**Figura 2.22** Generación por triangulación

Obviamente si  $b+3 > 2n$  quiere decir que hay barras redundantes y el reticulado es *hiperestático interno*. También puede cumplirse la Ec. 2-3 pero puede haber un exceso de vínculos externos, en tal caso la estructura es *hiperestática externa*. Ambos casos no pueden ser resueltos usando puramente la estática y deben utilizarse métodos que incorporan el estudio de las deformaciones de los elementos.

### 2.2.2 Solución por el Método de Nudos

Hay varios métodos para resolver reticulados. En esta sección se presentará el método de nudos, que es el más elemental y consiste simplemente en considerar cada nudo como una partícula e imponer su equilibrio. Es una práctica común, sin embargo, tratar previamente el reticulado simple como una lámina y calcular las reacciones en los apoyos con las ecuaciones de equilibrio de cuerpo rígido, para posteriormente abordar el equilibrio de los nudos. El método se aplicará al reticulado de la Fig. 2.23, aprovechando de dar ciertas recomendaciones que hacen más eficiente la técnica de solución.

Lo primero es verificar que se cumpla la Ec. 2-3, lo que efectivamente ocurre pues  $b=17$  y  $n=10$ . A continuación se procede al análisis de equilibrio global considerando el reticulado completo como un cuerpo rígido plano (lámina); las ecuaciones de equilibrio en este caso son:

$$\sum F_v = 0 \quad R_A + R_I = 2800 \text{ kg}$$

$$\sum M_A = 0 \quad R_I \cdot 12 = 400 \cdot 0 + 800 \cdot 3 + 800 \cdot 6 + 800 \cdot 9$$

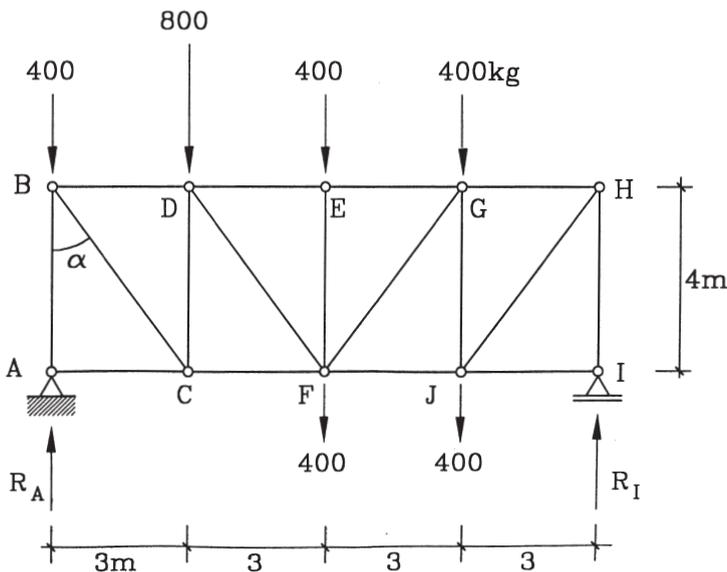


Figura 2.23 Reticulado simple

de donde se obtienen  $R_A = 1600$  kg y  $R_I = 1200$  kg. Ahora se puede proceder a aplicar el método de nudos. Para ello se debe abordar el equilibrio de nudos donde haya a lo más dos incógnitas; ya que en cada nudo sólo se podrán plantear dos ecuaciones. Considérese primero el equilibrio del nudo A, cuyo modelo como partícula se presenta en la Fig. 2.24.a: sobre A actúa la reacción conocida de 1600 kg y las fuerzas incógnitas  $F_{AB}$  y  $F_{AC}$  en las barras AB y AC respectivamente. Notar que en el modelo las fuerzas incógnitas se supusieron traccionadas, es decir, tirando del nudo (como en la Fig. 2.20.b). Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}\Sigma F_v &= 0 & F_{AB} + 1600 &= 0 & F_{AB} &= -1600 \text{ (compresión)} \\ \Sigma F_h &= 0 & F_{AC} &= 0\end{aligned}$$

El resultado negativo para  $F_{AB}$ , significa que la barra en realidad está comprimida, y no traccionada como se había supuesto. A continuación se puede plantear el equilibrio del nudo B, al que llegan tres barras, pero el esfuerzo en la barra AB, ya se conoce, luego hay sólo dos incógnitas. El modelo del nudo B se presenta en la Fig. 2.24.b: la fuerza conocida de 1600, de compresión, actúa empujando contra el nudo (como en la Fig. 2.21.b), la carga externa de 400 kg se aplica en su sentido dado, y las fuerzas incógnitas  $F_{BC}$  y  $F_{BD}$  en las barras correspondientes se suponen traccionadas, es decir, tirando del nudo. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}\Sigma F_v &= 0 & 1600 &= F_{BC} \cos \alpha + 400 \\ \Sigma F_h &= 0 & F_{BC} \sin \alpha + F_{BD} &= 0\end{aligned}$$

La diagonal del triángulo ABC mide 5 m, luego,  $\text{sen} \alpha = 3/5$  y  $\text{cos} \alpha = 4/5$ . Con estos valores y resolviendo las ecuaciones anteriores se obtienen  $F_{BC} = 1500$  kg (tracción) y  $F_{BD} = -900$  kg (compresión).

Observando que no se puede trabajar en el nudo D porque hay tres barras incógnitas, se aborda el nudo C, donde sólo hay dos. El modelo del nudo C se muestra en la Fig. 2.24.c. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}\Sigma F_v &= 0 & F_{CD} + 1500 \cos \alpha &= 0 \rightarrow F_{CD} = -1200 \text{ kg (compresión)} \\ \Sigma F_h &= 0 & F_{CF} = 1500 \sin \alpha &\rightarrow F_{CF} = 900 \text{ kg (tracción)}\end{aligned}$$

El diagrama de fuerzas sobre el nudo D se presenta en la Fig. 2.24.d. Las fuerzas previamente calculadas  $F_{BD} = -900$  y  $F_{CD} = -1200$  se aplican en su sentido real empujando al nudo, por ello se les quita el signo negativo. Las fuerzas incógnitas en las barras DE y DF se suponen de tracción, tirando del nudo. La carga de 800 kg se aplica en su sentido dado. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_v = 0 \quad F_{DF} \cos \alpha + 800 = 1200 \rightarrow F_{DF} = 500 \text{ kg (tracción)}$$

$$\Sigma F_h = 0 \quad F_{DF} \sin \alpha + 900 + F_{DE} = 0 \rightarrow F_{DE} = -1200 \text{ kg (compresión)}$$

Siguiendo el mismo procedimiento se plantea el equilibrio de los nudos restantes en la secuencia E, F, G, H, I cuyos diagramas de fuerzas se presentan en la Fig. 2.24. Las ecuaciones de equilibrio para cada nudo son las que siguen:

Nudo E:  $\Sigma F_h = 0 \quad F_{EG} + 1200 = 0 \rightarrow F_{EG} = -1200 \text{ kg (compresión)}$

$$\Sigma F_v = 0 \quad F_{EF} + 400 = 0 \rightarrow F_{EF} = -400 \text{ kg (compresión)}$$

Nudo F:  $\Sigma F_v = 0 \quad F_{FG} \cos \alpha + 500 \cos \alpha = 800 \rightarrow F_{FG} = 500 \text{ kg (tracción)}$

$$\Sigma F_h = 0 \quad F_{FJ} + F_{FG} \sin \alpha = 900 + 500 \sin \alpha \rightarrow F_{FJ} = 900 \text{ kg (tracción)}$$

Nudo G:  $\Sigma F_h = 0 \quad F_{GH} + 1200 = 500 \sin \alpha \rightarrow F_{GH} = -900 \text{ kg (compresión)}$

$$\Sigma F_v = 0 \quad F_{GJ} + 400 + 500 \cos \alpha = 0 \rightarrow F_{GJ} = -800 \text{ kg (compresión)}$$

Nudo H:  $\Sigma F_h = 0 \quad F_{HI} \sin \alpha = 900 \rightarrow F_{HI} = 1500 \text{ kg (tracción)}$

$$\Sigma F_v = 0 \quad F_{HI} + F_{HI} \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow F_{HI} = -1200 \text{ kg (compresión)}$$

Nudo I:  $\Sigma F_h = 0 \quad F_{II} = 0$

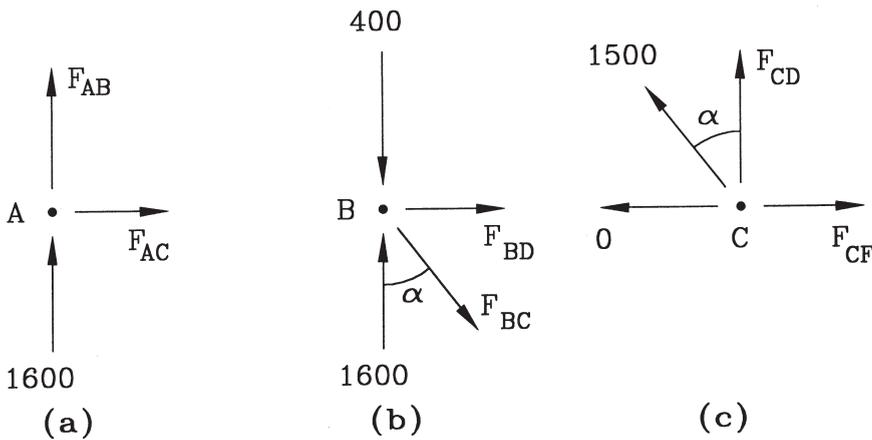
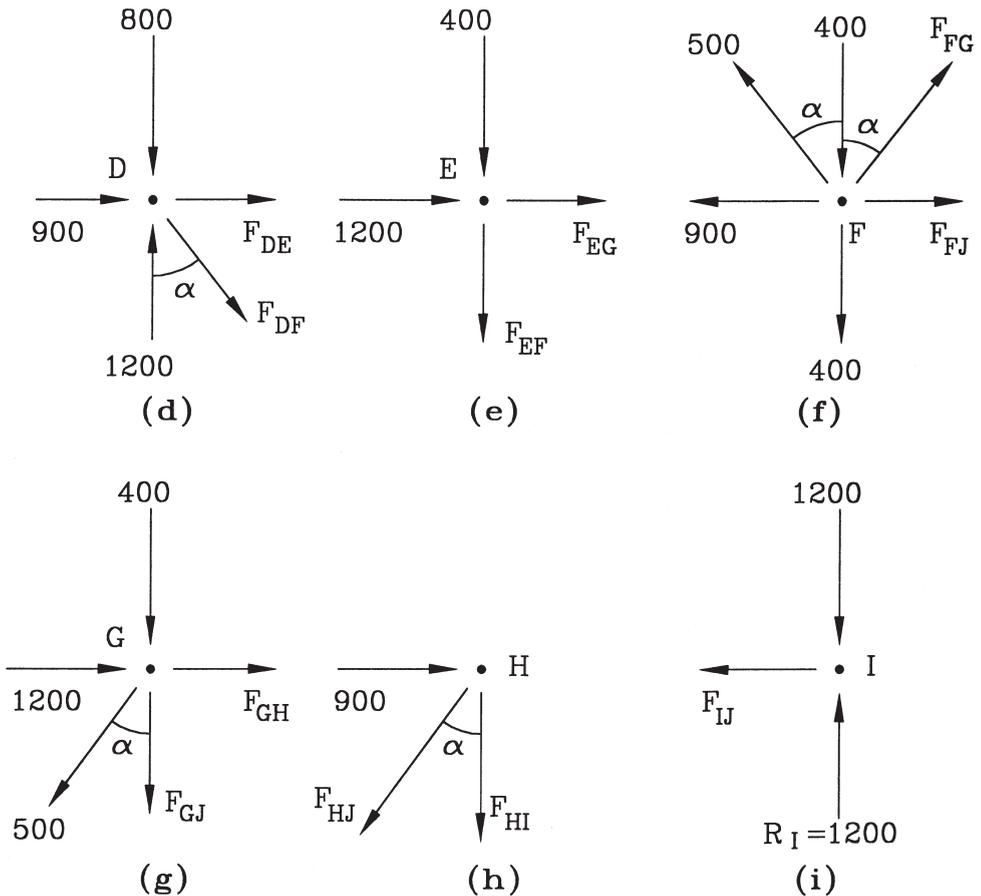


Figura 2.24 (a, b, c) Solución del reticulado de la Fig. 2.23



**Figura 2.24 (d, e, f, g, h, i)** Solución del reticulado de la Fig. 2.23

Los resultados se presentan en resumen en la Fig. 2.25, que junto con la Fig. 2.26 permiten explicar algo más acerca del comportamiento de este tipo de estructuras. En la Fig. 2.26 se han exagerado las deformaciones del reticulado para ayudar a este propósito; desde luego las deformaciones de una estructura real son pequeñas, casi imperceptibles, especialmente en el caso de los reticulados que son por naturaleza bastante rígidos. Hecha esta salvedad, puede observarse que el cordón superior (BH) está comprimido, lo que significa que sus elementos se acortan, mientras el cordón inferior (AI) está traccionado (en parte), lo que se traduce en que los elementos correspondientes se alargan. Lo anterior, sumado al alargamiento de las diagonales, todas traccionadas, hacen que la estructura completa adquiera una forma curvada, que es la deformación típica de un elemento en flexión. Ello no debe extrañar porque el reticulado es básicamente una viga alta.

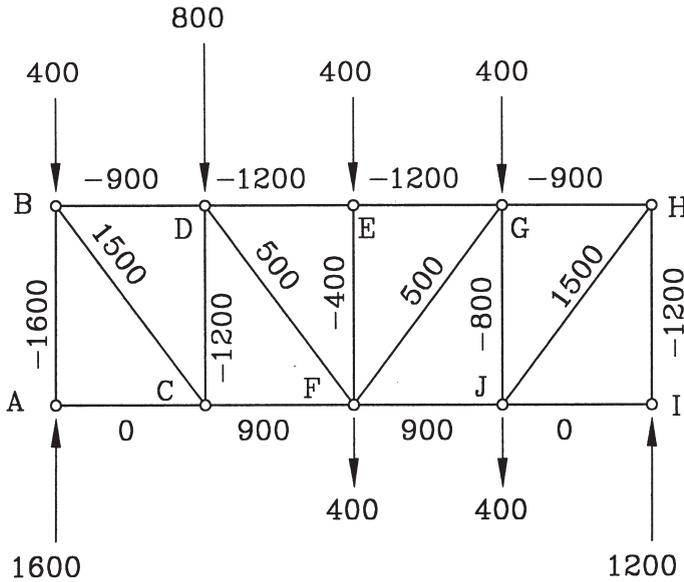


Figura 2.25 Esfuerzos en las barras del reticulado de la Fig. 2.23

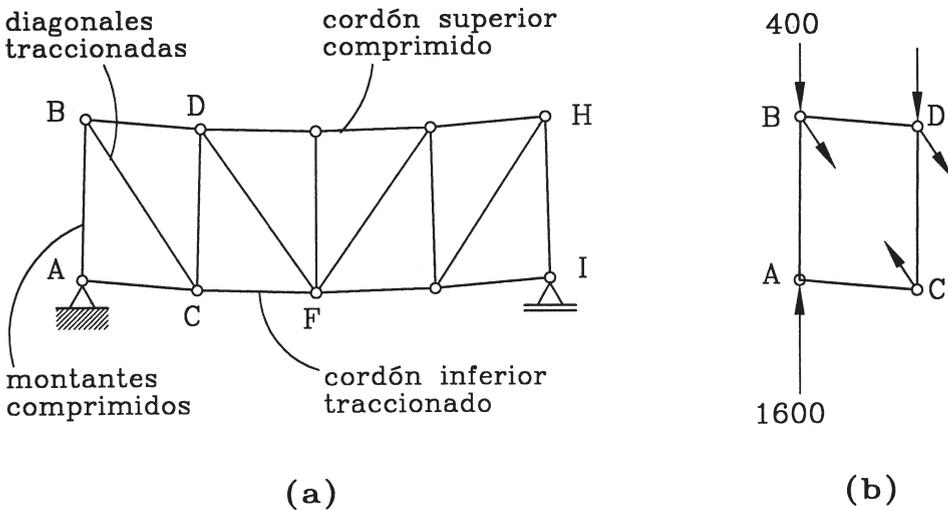


Figura 2.26 Comportamiento de la estructura reticular

La función de los elementos diagonales se aprecia mejor en la Fig. 2.26.b. El panel ABDC, rectangular en la estructura sin cargas, adopta una forma de rombo, cuya diagonal BC tiene mayor longitud que la diagonal del rectángulo inicial, luego la barra BC debe impedir que progrese esa distorsión. También puede observarse en la

Fig. 2.26.b, que sin la barra diagonal el cuadrilátero ABDC colapsaría, pues sería un mecanismo incapaz de resistir la *fuerza de corte* vertical resultante de las fuerzas de 1600 y 400 kg en A y B (el concepto de *corte* se introducirá en la Sección 2.3). Cabe destacar también que este reticulado se podría haber construido con sus diagonales invertidas (uniendo los nudos AD, CE, EJ y GI en vez de los actuales); en tal caso todas las diagonales estarían en compresión pues dichos nudos tienden a acercarse.

Razonando en forma similar se descubre la función de los *montantes* (barras verticales): si se elimina el montante CD el cuadrilátero BCFD colapsaría cerrándose, quedando claro que la barra CD está comprimida pues debe impedir que los nudos C y D se acerquen. Esto último también queda claro de observar en la Fig. 2.26.b los sentidos de las fuerzas que actúan en los nudos C y D, y su efecto en la barra CD.

### 2.2.3 Solución por el Método de las Secciones (Método de Ritter)

Este método consiste en aislar una parte del reticulado suponiendo una sección imaginaria, no necesariamente recta, que corta las barras cuyos esfuerzos se desea determinar. A continuación se analiza el equilibrio de la parte aislada bajo la acción de las cargas externas y los esfuerzos que existen en las barras cortadas. Al igual que en el método de los nudos es necesario determinar previamente las reacciones en los apoyos. El método de las secciones es especialmente útil cuando sólo se desea conocer el esfuerzo en algunas de las barras del reticulado. Para algunos problemas resultará conveniente considerar más de una sección o usar este método conjuntamente con el método de los nudos.

Para ilustrar este método, se determinarán los esfuerzos axiales en las barras EF, EG, CD y ED del reticulado indicado en la Fig. 2.27, en la cual se muestran las reacciones que han sido determinadas imponiendo las condiciones de equilibrio a la estructura completa.

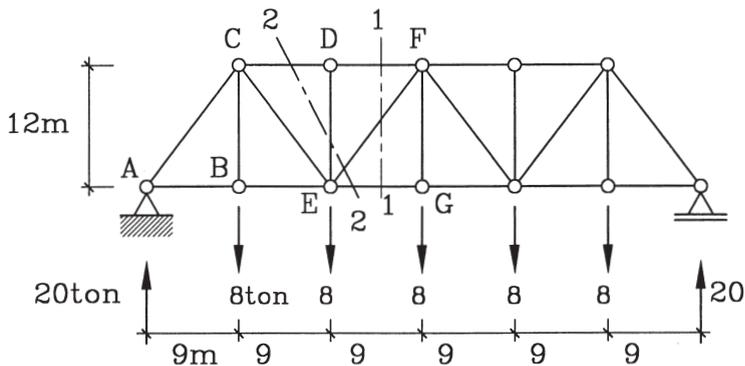


Figura 2.27

Si se considera la sección 1-1, tal como se indica en la Fig. 2.28.a, el equilibrio del subsistema (lámina) ABEDC permite escribir:

$$\begin{aligned} \Sigma F_{\text{vert}} = 0 : \quad & F_{EF} \cos \alpha + 20 = 8 + 8 \\ & \frac{4}{5} F_{EF} = 8 + 8 - 20 \\ & F_{EF} = -5 \text{ ton (compresión)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_F = 0 : \quad & F_{EG} \cdot 12 + 8 \cdot 9 + 8 \cdot 18 = 20 \cdot 27 \\ & F_{EG} = 27 \text{ ton (tracción)} \end{aligned}$$

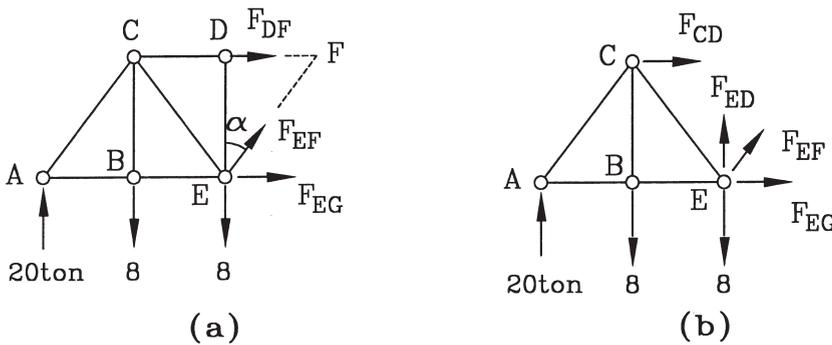


Figura 2.28

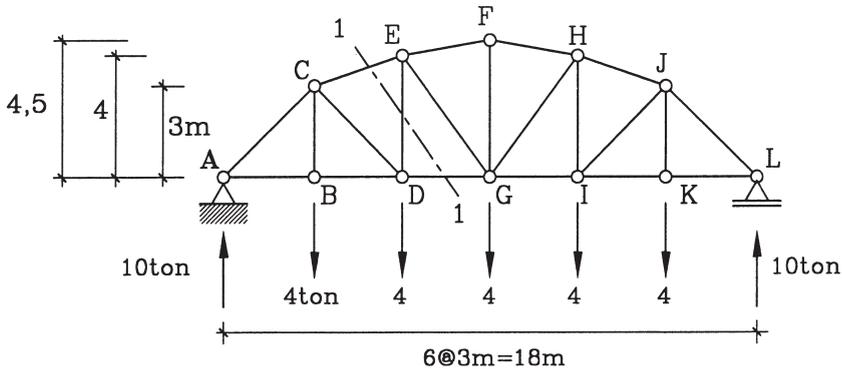
Para encontrar el esfuerzo axial en la barra CD, se puede considerar la sección 2-2 y analizar el equilibrio del subsistema ABEC que se indica en la Fig. 2.28.b:

$$\begin{aligned} \Sigma M_E = 0 : \quad & F_{CD} \cdot 12 + 20 \cdot 18 = 8 \cdot 9 \\ & F_{CD} = -24 \text{ ton (compresión)} \end{aligned}$$

Además, el método de los nudos aplicado al nudo D permite deducir que  $F_{ED} = 0$ . Por otra parte, nótese que el esfuerzo  $F_{EF}$  proyectado según la vertical, debe ser igual a la fuerza de corte en el panel DFEG, puesto que EF es la única barra de la sección 1-1 que puede dar componente vertical. Cada vez que en una sección las barras de los cordones son horizontales, las barras inclinadas deben tomar toda la fuerza de corte.

**Ejemplo 2.12**

Un segundo ejemplo del método de Ritter se aplica al reticulado de la Fig. E2.12.a, en el cual se desea determinar los esfuerzos axiales en las barras DE y DG. Previamente se han determinado las reacciones en los apoyos A y L, cuyos valores se indican en la figura.

**Figura E2.12.a**

**Solución:** Si se considera la sección 1-1 y se analiza el diagrama de cuerpo libre del subsistema ABCD (Fig. E2.12.b), tomando momentos de las fuerzas con respecto al punto O se tiene:

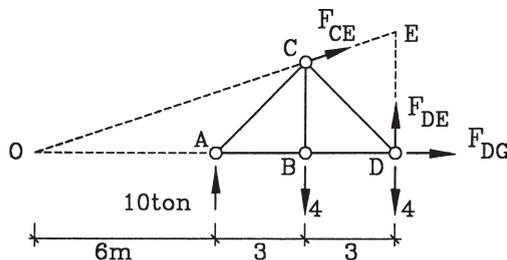
$$F_{DE} \cdot 12 + 10 \cdot 6 = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 12$$

$$F_{DE} = 2 \text{ ton (tracción)}$$

Si se toma momento de las fuerzas con respecto al punto E:

$$F_{DG} \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 10 \cdot 6$$

$$F_{DG} = 12 \text{ ton (tracción)}$$

**Figura E2.12.b**

## 2.3 Diagramas de Esfuerzos Internos

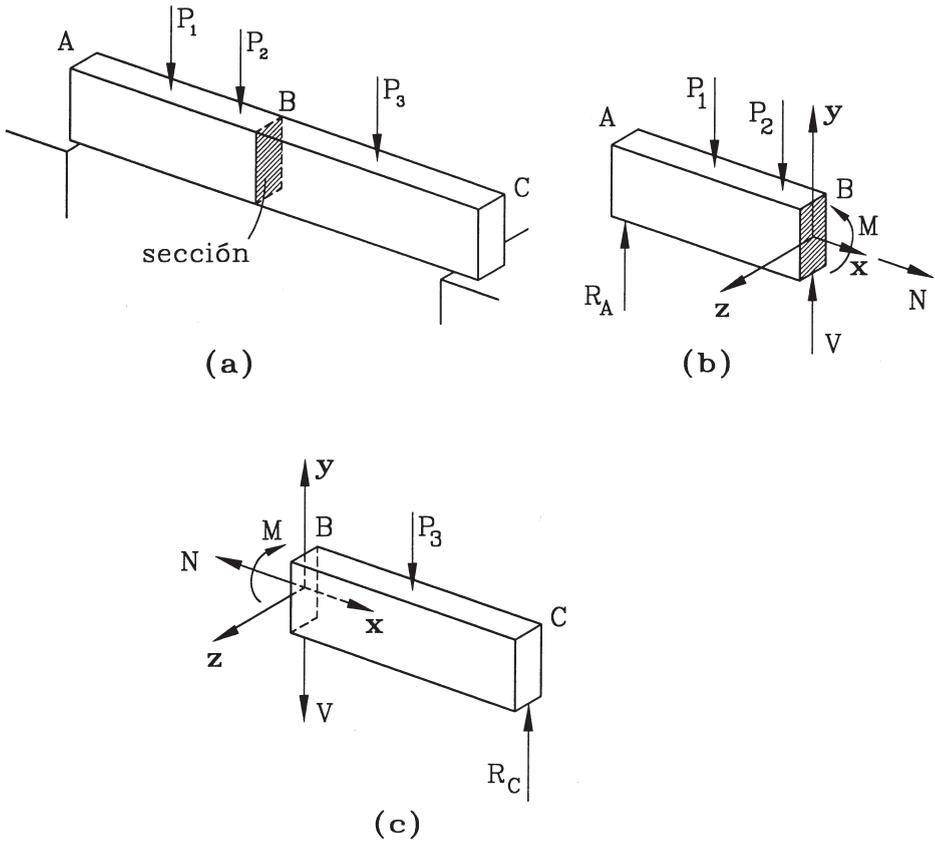
### 2.3.1 Definición de Esfuerzos Internos

El objetivo de los diagramas de esfuerzos internos es visualizar los efectos que se transmiten en cada punto de los elementos de una estructura para identificar las secciones críticas que deberán ser posteriormente diseñadas para proveerles la resistencia adecuada. Las secciones críticas son las que quedan sometidas a mayores esfuerzos.

Ya en la Sección anterior sobre reticulados se trabajó con esfuerzos internos: los esfuerzos en todas las barras. Pero en ese caso los esfuerzos en cada barra se reducían a la fuerza axial. En esta Sección se verán esfuerzos internos más generales, pero siempre limitados al caso estructuras planas con cargas en su plano.

Considérese la viga de la Fig. 2.29.a y céntrese la atención en una sección ficticia cualquiera, perpendicular al eje longitudinal del elemento, tal como la sección B. Los esfuerzos que se transmiten a través de esta sección pueden expresarse, en su forma más general, en términos de una fuerza y un momento resultantes. Como muestra la Fig. 2.29.b, en el caso de una estructura plana sometida a cargas en su plano, la fuerza se expresa en términos de sus componentes  $N$  y  $V$  según las direcciones normal (perpendicular a la sección, según el eje  $x$ ) y tangencial (paralela a la sección, según el eje  $y$ ) respectivamente; el momento  $M$  reside en el plano  $xy$  de la estructura y sus cargas, es decir, es un momento en torno al eje  $z$ . Estos esfuerzos internos reciben nombres propios:  $N$  es el *esfuerzo normal*,  $V$  es el *esfuerzo de corte*, y  $M$  es el *momento flector*. El sistema de ejes de referencia convencionalmente se posiciona en el centro de gravedad de la sección.

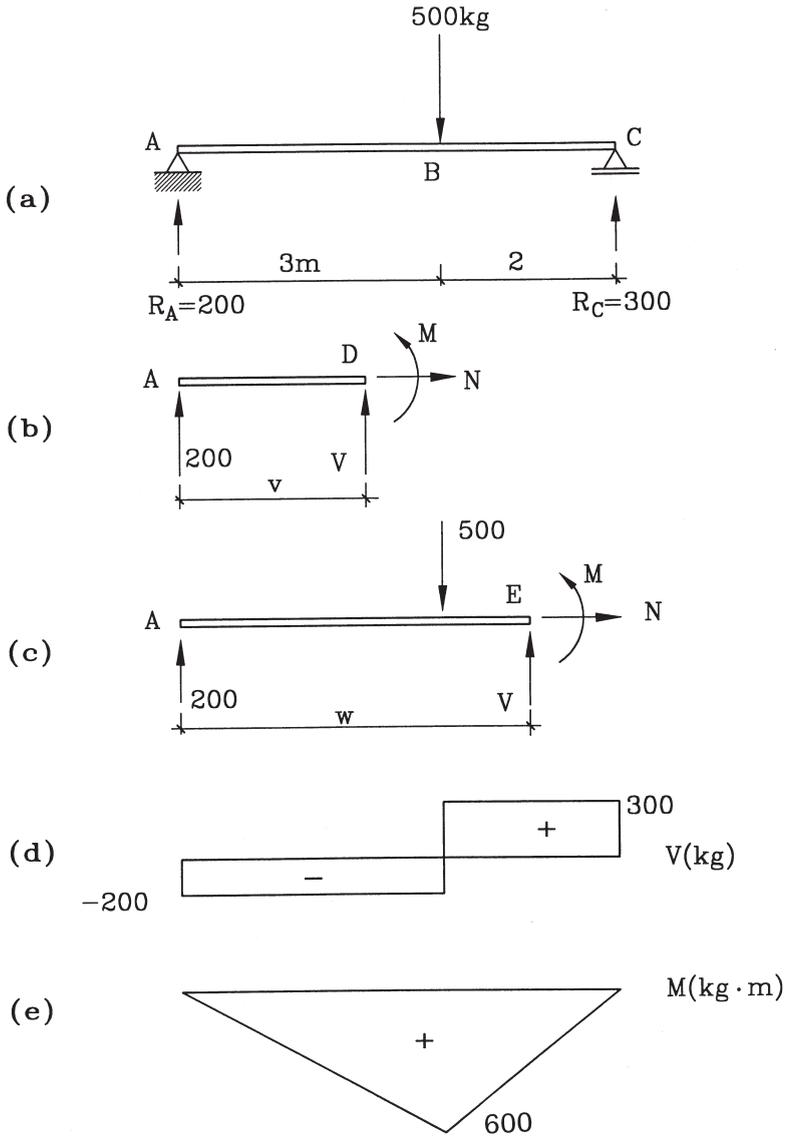
Si la estructura completa está en equilibrio, en este caso la viga AC, cualquier porción de ella está también en equilibrio, en particular los segmentos o subsistemas AB y BC de las Figs. 2.29.b y c respectivamente. Entonces los esfuerzos internos  $N$ ,  $V$  y  $M$  se determinan imponiendo las condiciones de equilibrio a los segmentos a la izquierda o a la derecha de la sección de interés. Para ser consistentes, debe tenerse la precaución de asignar los sentidos apropiados a los esfuerzos internos según sea el segmento que se considere, en efecto, por tratarse de reacciones internas, en la sección B de la Fig. 2.29.c ellos actúan con igual magnitud pero en sentido contrario al que actúan en la sección B de la Fig. 2.29.b (este tema se abordará en la Sección 2.3.2 donde se analizará en detalle la convención de signos de los esfuerzos internos). Como interesa conocer los esfuerzos internos a lo largo de toda la estructura, se acostumbra a variar la posición de la sección B y presentar los resultados a través de figuras que se denominan *diagramas de esfuerzos internos*.



**Figura 2.29** Concepto de esfuerzo interno

Antes de entrar a mayor detalle, es conveniente ilustrar estos conceptos mediante un ejemplo introductorio. Para ello considérese un caso simple como el de la Fig. 2.30.a, para el cual se determinarán los diagramas correspondientes. Las reacciones de apoyo se han calculado previamente planteando el equilibrio global de la viga. Considérese primero una sección transversal en un punto D cualquiera a distancia  $v$  del extremo A (Fig. 2.30.b), pero siempre comprendido entre A y B, ( $0 < v < 3$ ); las ecuaciones de equilibrio del segmento AD son:

$$\begin{aligned} \Sigma F_h = 0 & & N = 0 \\ \Sigma F_v = 0 & & V + 200 = 0 \rightarrow V = -200 \text{ kg} \\ \Sigma M_A = 0 & & M + Vv = 0 \rightarrow M = 200v \end{aligned}$$



**Figura 2.30** Esfuerzos internos en viga con carga concentrada

Se aprecia de inmediato que no hay esfuerzo normal, que el esfuerzo de corte es constante, pero el momento flector depende de la distancia  $v$ , y por lo tanto varía a lo largo de la viga. Como se estableció, las ecuaciones anteriores son válidas para el rango indicado de  $v$  solamente, ya que si se toma una sección entre los puntos B y C las ecuaciones se modifican. En efecto, tomando una sección E como ilustra la Fig. 2.30.c, definida por la coordenada  $w$  ( $3 < w < 5$ ), las ecuaciones de equilibrio del segmento AE son:

$$\Sigma F_h = 0 \quad N = 0$$

$$\Sigma F_v = 0 \quad V + 200 = 500 \rightarrow V = 300 \text{ kg}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad M + Vw = 500 \cdot 3 \rightarrow M = 1500 - 300w$$

Nuevamente el esfuerzo de corte es constante pero el momento flector es función de  $w$ . Pero esto se aprecia más claro por medio de los diagramas de esfuerzos internos que se presentan en las Figs. 2.30.d y e. Se observa que la sección crítica desde el punto de vista de la flexión es justo bajo la carga (punto B) donde el momento flector es máximo; además el momento varía en forma lineal (depende de la primera potencia de las variables  $v$  y  $w$ ), o sea el diagrama corresponde a líneas rectas, decreciendo hacia los extremos y anulándose en los apoyos. El esfuerzo de corte por su parte, es máximo en todo el tramo entre los puntos B y C. Los valores  $M=600$  y  $V=300$  serán datos básicos para el diseño de la viga, es decir para la determinación del material a usar y de las dimensiones de la sección necesarias para resistir dichos esfuerzos.

Suele llamar la atención que, siendo positivo, el diagrama de momentos se dibuje hacia abajo del eje horizontal (Fig. 2.30.e). Así se acostumbra en Chile y otros países de Europa, porque presenta ventajas de interpretación física que se discutirán en el Capítulo 3; en EE.UU. y países de habla inglesa se hace exactamente lo contrario, de modo que no se considera un error proceder de una u otra forma siempre que se sea consistente y se atenga a la convención de signos.

### 2.3.2 Convención de Signos

Debido a que hay múltiples combinaciones para elegir los sentidos positivos de los esfuerzos internos es necesario convenir una forma estándar que permita que los resultados se comprendan universalmente. La convención consta de tres aspectos:

- a) *Definir la orientación del elemento con un sistema local de ejes.* Para ello se escoge en cada elemento un sistema de ejes  $xy$ , con “ $x$ ” en la dirección longitudinal y sentido de izquierda a derecha, y el eje “ $y$ ” apuntando hacia el borde superior del elemento, como muestra la Fig. 2.31.a. Esto, que es muy obvio en una viga, puede no serlo tanto aún en estructuras simples como la de la Fig. 2.31.b. También es conveniente, como en las figuras, destacar con una línea discontinua el borde inferior de los elementos. En la Fig. 2.31.b se ha privilegiado mantener la continuidad del “borde inferior”, a pesar de dejar invertida la viga DE; ello es recomendable, siempre que sea posible, pues mantiene la continuidad de signos del diagrama de momentos. Justamente, tal continuidad no es posible en el marco de la Fig. 2.31.c, en la que se ha escogido mirar todas las columnas en la misma forma (nudo inferior a la izquierda y nudo superior a la derecha).

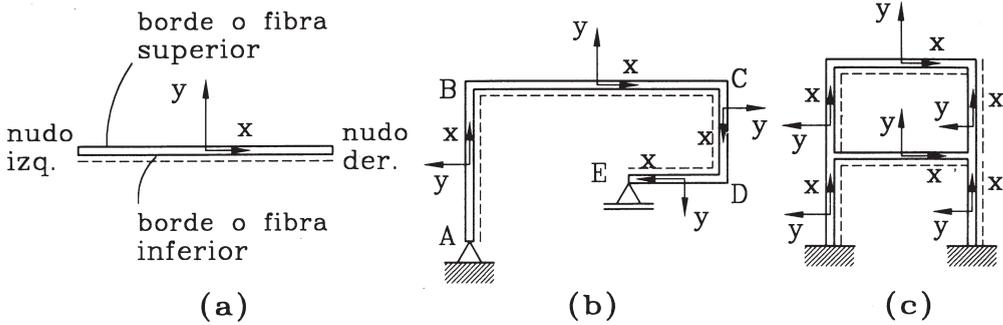


Figura 2.31 Sistema local de ejes

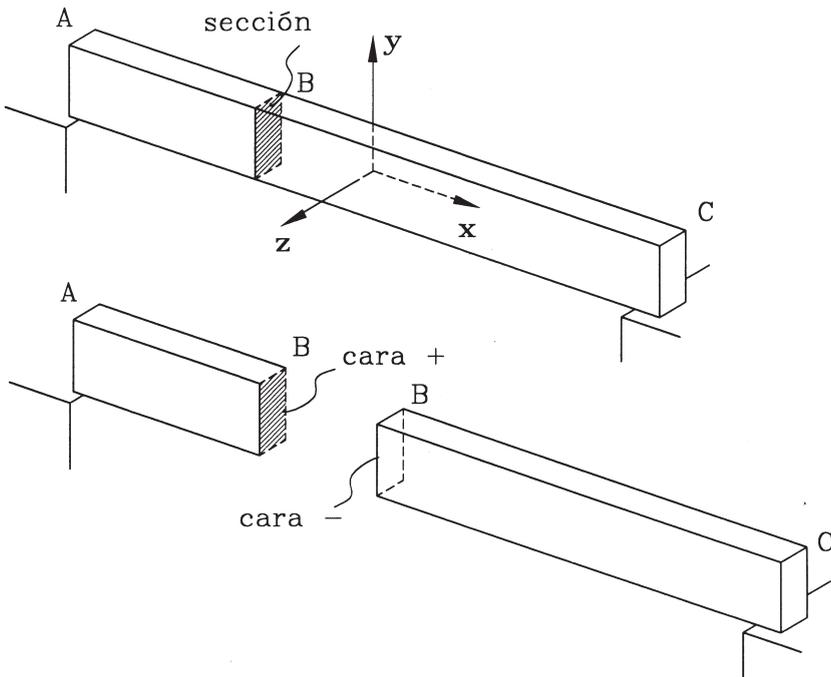
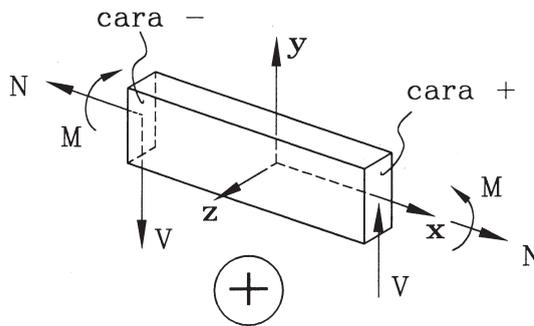


Figura 2.32 Caras de una sección

- b) Identificar la orientación de la cara de la sección que se está considerando, definiéndose como *cara positiva* aquella que mira hacia el sentido positivo del eje  $x$ , y *cara negativa* aquella que mira en el sentido contrario (Fig. 2.32).
- c) Son *esfuerzos internos positivos* aquellos que en *cara positiva* tienen el sentido positivo de los ejes, y los que en *cara negativa* tienen el sentido negativo de los ejes. Son *esfuerzos internos negativos* los que no cumplen lo anterior. La Fig. 2.33 muestra los sentidos positivos de los esfuerzos internos tanto en *cara positiva* como *negativa*. En el caso del momento, cabe señalar que él se asocia a un giro,

y el sentido positivo de un giro en torno al eje  $z$  tiene el *sentido trigonométrico positivo* (los ángulos crecen desde el eje  $x$  en sentido contrario a los punteros del reloj). Otras reglas para asignar signo a un giro en torno a un eje son la del *tornillo* (si éste tiene su punta en el origen y su cabeza hacia el sentido positivo del eje, el giro es positivo si el tornillo se desplaza en el sentido positivo del eje y negativo en caso contrario), y la *de la mano derecha* (si el pulgar de la mano derecha apunta en el sentido positivo de un eje, y los dedos restantes se dejan relajados, el giro positivo tiene el sentido que va desde las coyunturas hasta la punta de los dedos).



**Figura 2.33** Esfuerzos internos positivos

### Ejemplo 2.13

Determinar y dibujar los diagramas de esfuerzo de corte y momento flector de la viga de la Fig. E2.13.a.

**Solución:** Primero se plantea el equilibrio global de la viga para calcular las reacciones. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_v = 0 \quad R_B + R_D = 4 + 3 \cdot 4 = 16$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad R_D \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 3 \cdot 4 \cdot 2$$

que dan  $R_D = 8/3$  ton y  $R_B = 40/3$  ton. Para evaluar los esfuerzos internos se considerarán secciones típicas en los tramos AB, BC y CD.

a) Tramo AB (Fig. E2.13.b)

La posición de la sección E considerada se define por la coordenada  $u$ , con  $0 < u < 2$ . Se considera la cara positiva de la sección E con los esfuerzos internos en los sentidos positivos indicados. El equilibrio del segmento da:

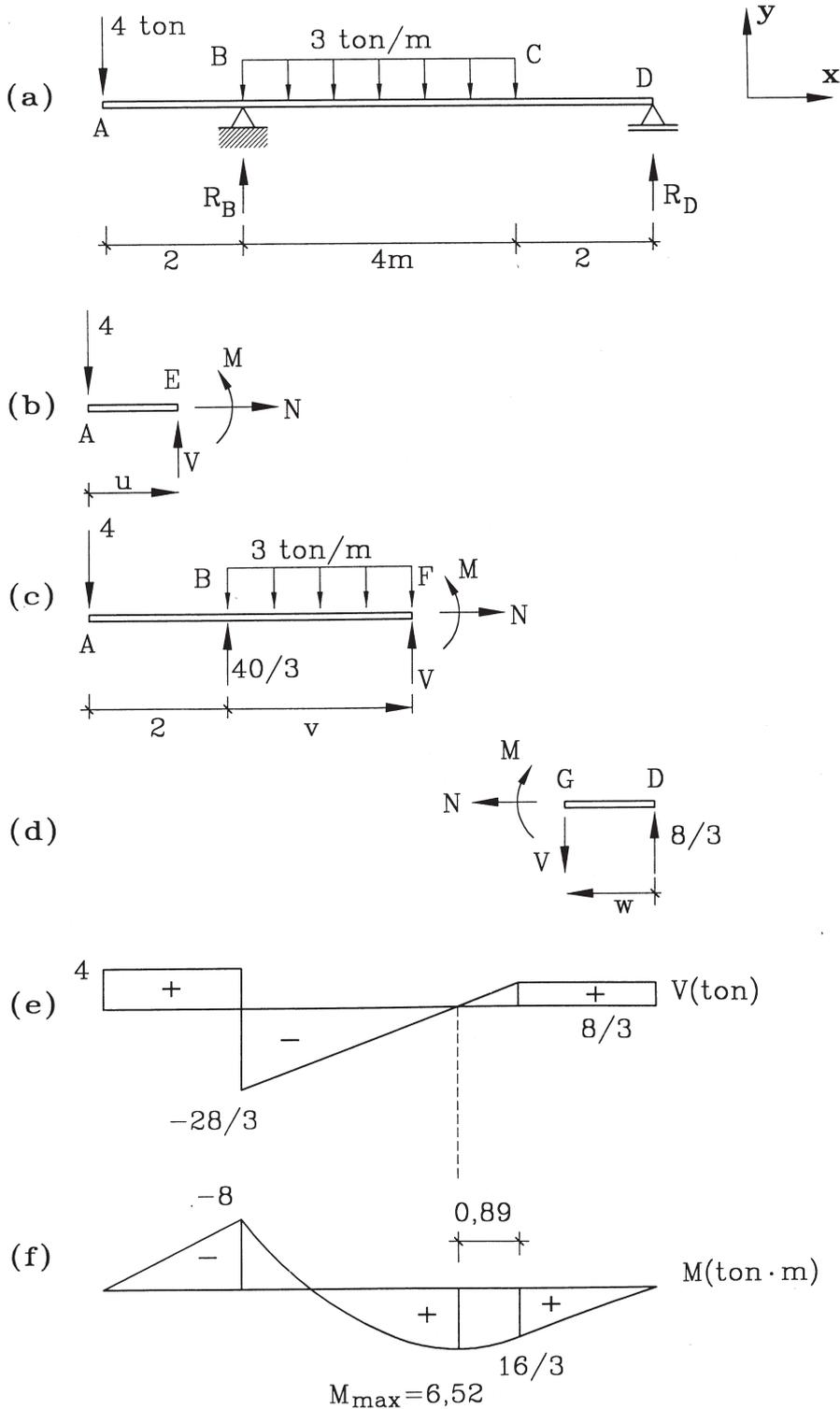


Figura E.2.13

$$\begin{aligned}\Sigma F_h &= 0 & N &= 0 \\ \Sigma F_v &= 0 & V &= 4 \\ \Sigma M_A &= 0 & M + Vu &= 0 \rightarrow M = -4u\end{aligned}$$

## b) Tramo BC (Fig. E2.13.c)

La sección F considerada se define por la coordenada  $v$ , que se mide desde el punto B, de modo que entre B y C  $0 < v < 4$ . Los sentidos de los esfuerzos internos en la sección F son los positivos en la cara positiva considerada. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}\Sigma F_h &= 0 & N &= 0 \\ \Sigma F_v &= 0 & V + \frac{40}{3} &= 4 + 3v \rightarrow V = 3v - \frac{28}{3} \\ \Sigma M_B &= 0 & M + Vv + 4 \cdot 2 &= 3 \cdot v \cdot \frac{v}{2} \rightarrow M = -8 + \frac{28v}{3} - \frac{3v^2}{2}\end{aligned}$$

Notar que en este tramo el esfuerzo de corte varía linealmente (función lineal de  $v$ ) mientras el momento flector es cuadrático.

## c) Tramo CD (Fig. E2.13.d)

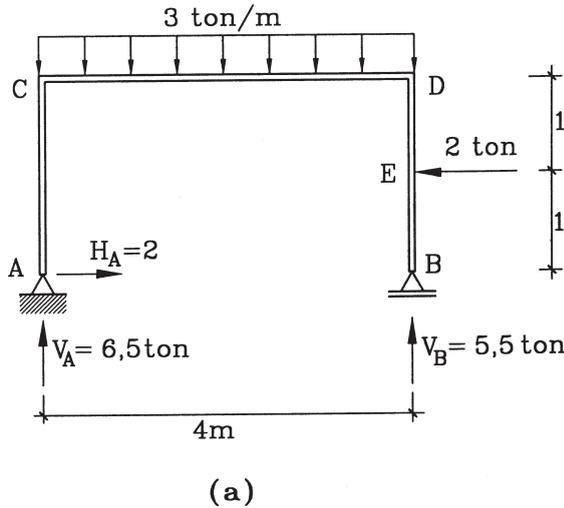
En este caso conviene aislar una porción de viga del extremo derecho, por ser más simple. Se considera entonces la cara negativa de la sección G definida por la coordenada  $w$  con origen en D. En el tramo CD,  $0 < w < 2$  en que  $w=0$  corresponde al punto D. En la sección G se han dibujado los esfuerzos internos con sus sentidos positivos para cara negativa. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}\Sigma F_h &= 0 & N &= 0 \\ \Sigma F_v &= 0 & V &= 8/3 \\ \Sigma M_G &= 0 & M &= 8w/3\end{aligned}$$

Finalmente se grafican las expresiones para  $V$  y  $M$  de cada tramo variando los valores de  $u$ ,  $v$ , y  $w$  dentro del rango correspondiente a cada tramo. Los diagramas de esfuerzo de corte y momento flector se presentan en las Figs. E2.13.e y f. El momento flector máximo tiene el valor 6,52 ton·m y ocurre en una sección a 0,89 m a la izquierda del punto C, donde el esfuerzo de corte es nulo. Para trazar la parte curva del diagrama de momento flector, entre B y C se recomienda calcular y dibujar varios puntos intermedios.

**Ejemplo 2.14**

Calcular y dibujar los diagramas de esfuerzos internos del pórtico de la Fig. E2.14.a.



*Figura E2.14.a*

**Solución:** Las reacciones en los apoyos A y B ya se calcularon en el Ejemplo 2.6. Para definir la orientación de los elementos, se han escogido ejes de referencia locales como se muestra en la Fig. E2.14.b, es decir la fibra “inferior” recorre el pórtico por su interior. Para evaluar los esfuerzos internos se harán secciones en los tramos AC, CD, DE y EB respectivamente.

a) Tramo AC (Fig. E2.14.c)

La sección se define por su distancia  $u$  al punto A, con  $0 < u < 2$ . La cara considerada es positiva. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \Sigma F_v = 0 & & N + 6,5 = 0 \rightarrow N = -6,5 \text{ ton} \\ \Sigma F_h = 0 & & V = 2 \text{ ton} \\ \Sigma M_A = 0 & & M + Vu = 0 \rightarrow M = -2u \end{aligned}$$

## b) Tramo CD (Fig. E2.14.d)

La sección escogida F se define por su distancia  $v$  al punto C, con  $0 < v < 4$ . La cara considerada es positiva. Las ecuaciones de equilibrio de la porción de estructura aislada son:

$$\begin{aligned}\Sigma F_v = 0 & & V + 6,5 = 3v \rightarrow V = 3v - 6,5 \\ \Sigma F_h = 0 & & N + 2 = 0 \rightarrow N = -2 \\ \Sigma M_F = 0 & & M + 2 \cdot 2 + 3v \cdot \frac{v}{2} = 6,5v \\ & & M = 6,5v - 1,5v^2 - 4\end{aligned}$$

## c) Tramo DE (Fig. E2.14.e)

En este tramo conviene considerar el equilibrio de la porción de estructura hacia la derecha de la sección G escogida. La sección se define por su distancia  $w$  medida desde el punto E, o sea dentro del tramo DE  $0 < w < 1$ . Los esfuerzos internos que muestra la figura corresponden a los sentidos positivos en cara negativa. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}\Sigma F_v = 0 & & N + 5,5 = 0 \rightarrow N = -5,5 \\ \Sigma F_h = 0 & & V + 2 = 0 \rightarrow V = -2 \\ \Sigma M_B = 0 & & M = V(1 + w) + 2 \cdot 1 = -2w\end{aligned}$$

## d) Tramo EB (Fig. E2.14.f)

La sección elegida se define por la coordenada  $z$  medida desde B, o sea  $0 < z < 1$  en el tramo. La cara considerada es negativa. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}\Sigma F_v = 0 & & N + 5,5 = 0 \rightarrow N = -5,5 \\ \Sigma F_h = 0 & & V = 0 \\ \Sigma M_B = 0 & & M = Vz \rightarrow M = 0\end{aligned}$$

Evaluando las expresiones antes derivadas en todos los tramos, se obtienen los diagramas que se muestran en las Figs. E2.14.g, h, e i. El momento flector máximo negativo, de  $-4$  ton·m, ocurre en el nudo C y el máximo positivo, de  $3,04$  ton·m, ocurre en la viga CD en una sección a distancia  $1,833$  m del nudo D. La sección de momento máximo positivo coincide con la sección de esfuerzo de corte nulo.

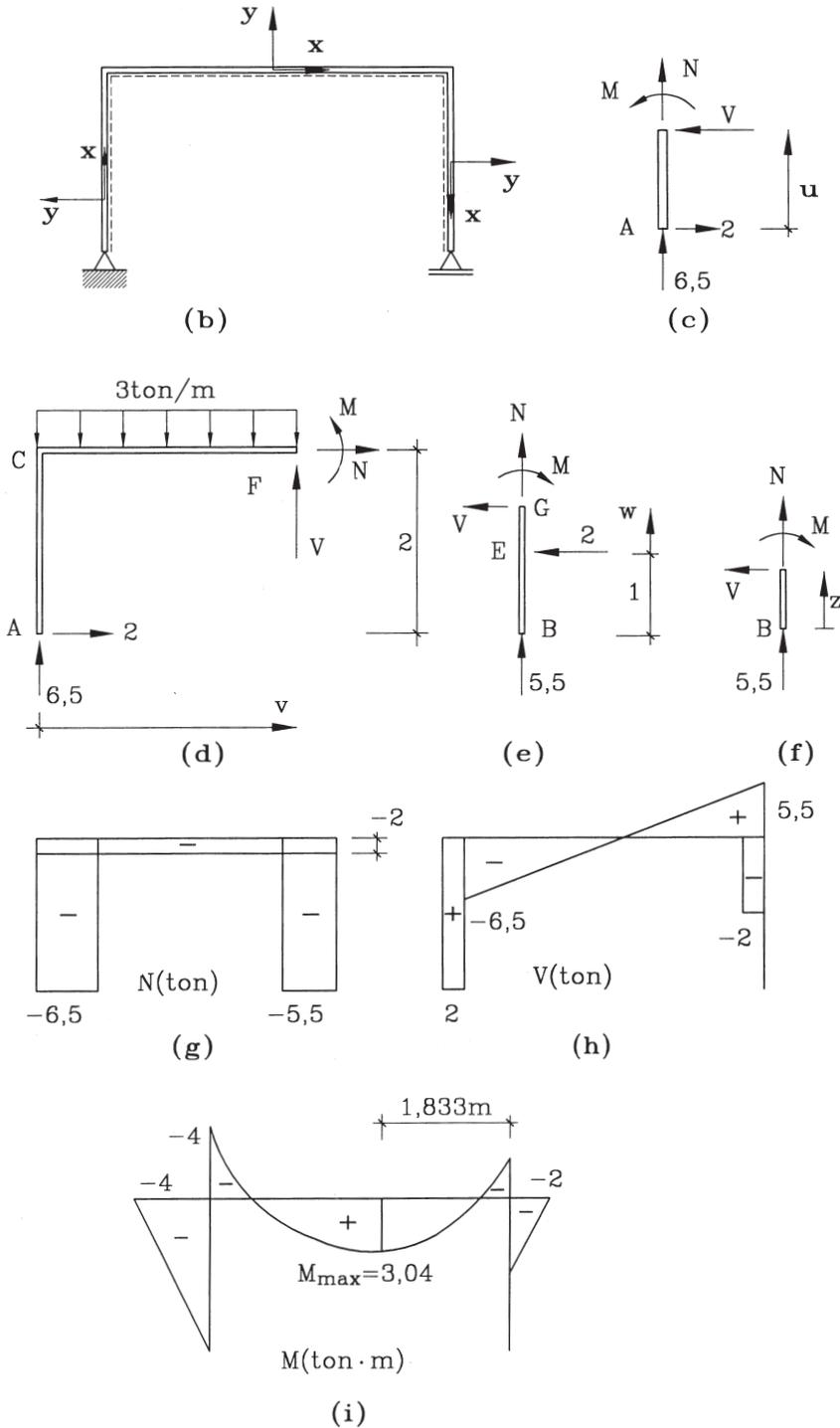
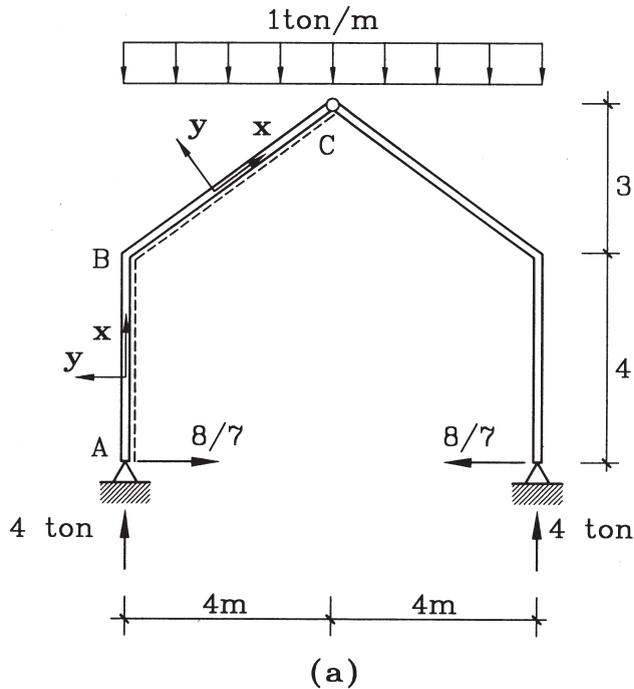


Figura E2.14

**Ejemplo 2.15**

Calcular y dibujar los diagramas de esfuerzos internos del pórtico triarticulado de la Fig. E2.15.a.



**Figura E2.15.a**

**Solución:** Las reacciones en los apoyos ya se calcularon en el Ejemplo 2.11. Los ejes de referencia locales de los elementos se indican en la Fig. E2.15.a, la fibra inferior recorre el pórtico por el interior. Por la simetría de la estructura y de las cargas, los diagramas de esfuerzos internos deben ser simétricos; por ello sólo se analizará la mitad de la estructura, haciendo secciones en los tramos AB y BC.

a) Tramo AB (Fig. E2.15.b)

La sección D se define por su distancia  $u$  al extremo A. Dentro del tramo AB,  $0 < u < 4$ . Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_v = 0 \quad N + 4 = 0 \rightarrow N = -4 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_h = 0 \quad V = 8/7 = 1,14 \text{ ton}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad M + Vu = 0 \rightarrow M = -8/7u$$

Entonces, en la columna AB los esfuerzos normal y de corte son constantes, como muestran las Figs. E2.15.d y e; el momento flector varía linealmente desde 0 en la base (punto A,  $u=0$ ) hasta  $M= -4,57$  (punto B,  $u=4$ ), como muestra la Fig. E.2.15.f.

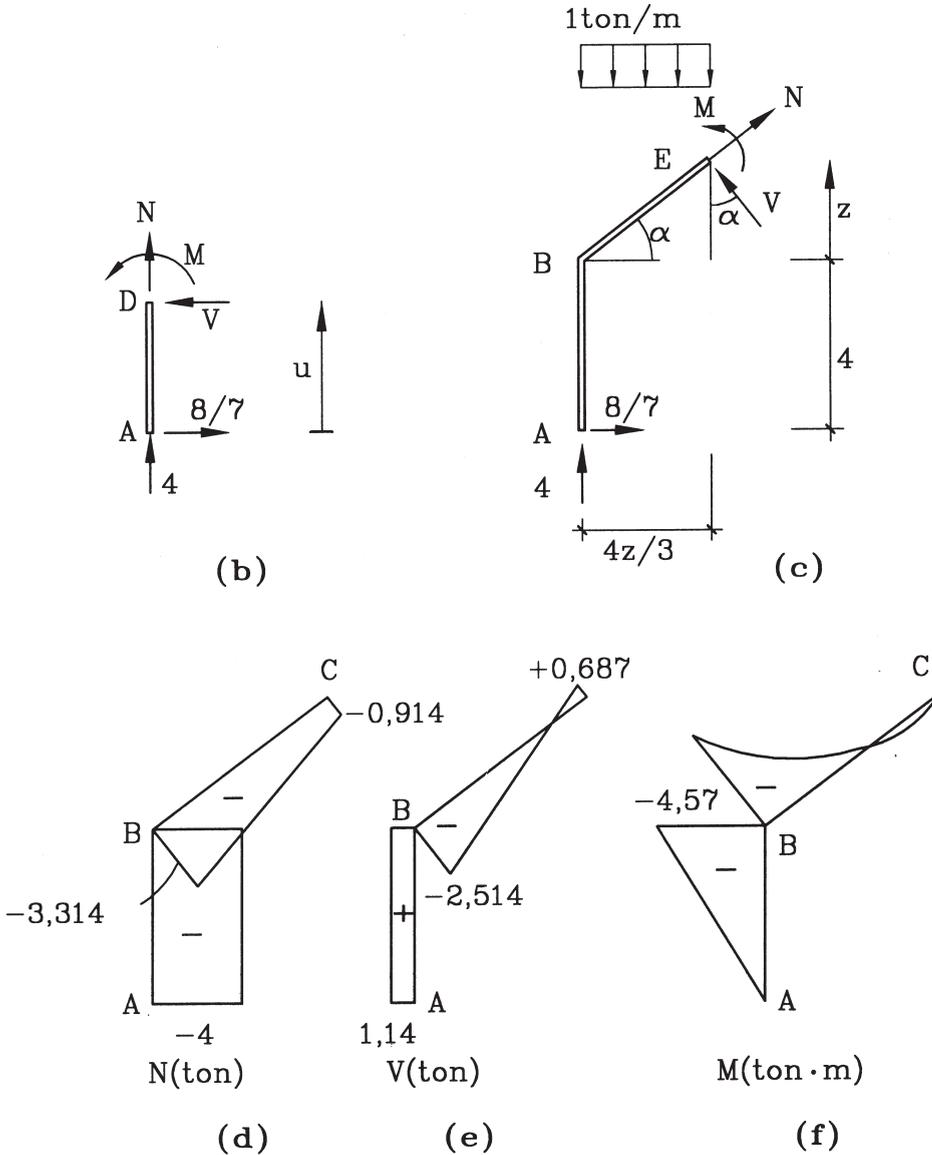


Figura E2.15 (continuación)

## b) Tramo BC (Fig. E2.15.c)

La sección elegida E se define por su distancia  $z$ , medida verticalmente desde el punto B. Los esfuerzos internos, por definición, tienen la dirección longitudinal del elemento ( $N$ ) y perpendicular al elemento ( $V$ ). Dado que  $\tan\alpha = 3/4$ , la proyección horizontal de la distancia BE es  $4z/3$ ,  $\text{sen}\alpha = 0,6$  y  $\text{cos}\alpha = 0,8$ . Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_v = 0 \quad 4 + V \cos \alpha + N \text{sen} \alpha = 1 \cdot \frac{4z}{3} \quad (\text{i})$$

$$\Sigma F_h = 0 \quad \frac{8}{7} + N \cos \alpha = V \text{sen} \alpha \quad (\text{ii})$$

$$\Sigma M_E = 0 \quad M + \frac{8}{7}(4+z) + 1 \cdot \frac{4z}{3} \cdot \frac{4z}{6} = 4 \cdot \frac{4z}{3} \quad (\text{iii})$$

Las ecuaciones i e ii pueden reescribirse como:

$$0,8V + 0,6N = 1,333z - 4$$

$$-0,6V + 0,8N = -8/7$$

de donde se obtienen:

$$N = 0,800z - 3,314 \quad (\text{iv})$$

$$V = 1,067z - 2,514 \quad (\text{v})$$

Trabajando algebraicamente la ecuación iii se obtiene:

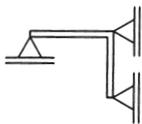
$$M = (264z - 56z^2 - 288)/63 \quad (\text{vi})$$

De la ecuación iv:  $N = -3,314$  para  $z=0$  (punto B) y  $N = -0,914$  para  $z=3$  (punto C). De la ecuación v  $V = -2,514$  para  $z=0$  (punto B) y  $V = 0,687$  para  $z=3$  (punto C). De la ecuación vi,  $M = -4,57$  para  $z=0$  y  $M=0$  para  $z=3$ . Los diagramas correspondientes se presentan en las Figs. E2.15.d, e y f, bastando con mostrar sólo la mitad de la estructura por su simetría con respecto a la vertical por C.

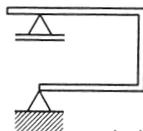
### 2.4 Ejercicios Propuestos

2.01 Indicar y explicar cuantos grados de libertad tiene: a) Una partícula obligada a desplazarse sobre una recta en el espacio, b) un péndulo en el plano, c) una partícula en el espacio obligada a mantenerse sobre una superficie esférica fija, d) un cubo en el espacio con un vértice obligado a desplazarse sobre una recta, e) dos cubos libres en el espacio pero articulados entre sí por un vértice común, f) una esfera en el espacio obligada a ser tangente a un plano dado. (Respuestas: 1, 1, 2, 4, 9, 5)

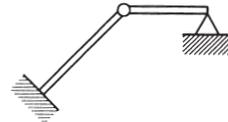
2.02 Para cada uno de los sistemas planos siguientes, indique si la vinculación es isostática, hiperestática o aparente. De justificación a su respuesta. (Respuestas: a) i, b) a, c) h, d) h externa, e) a, f) h)



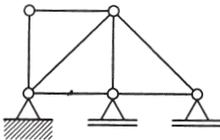
(a)



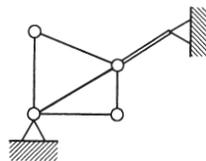
(b)



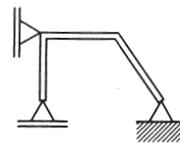
(c)



(d)

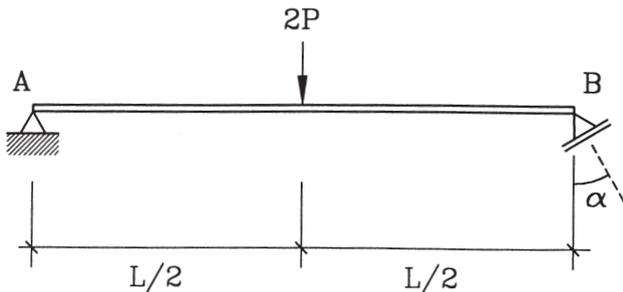


(e)

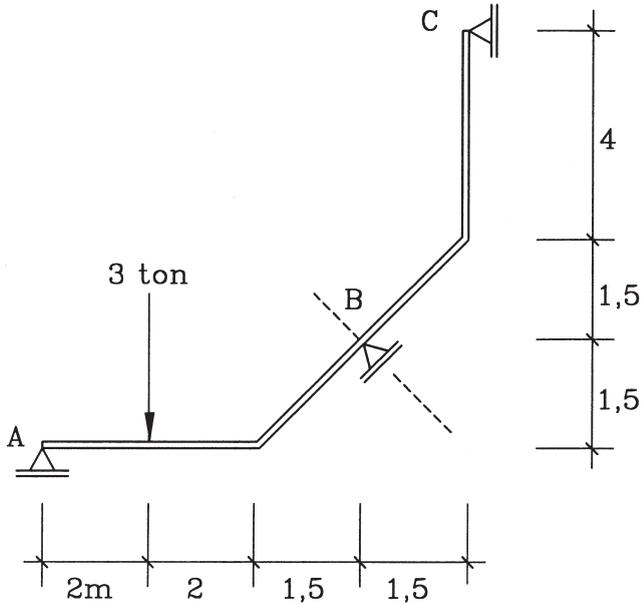


(f)

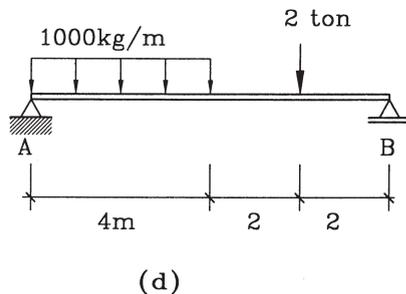
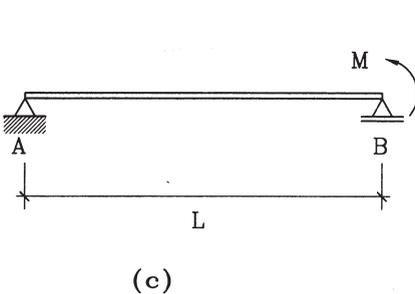
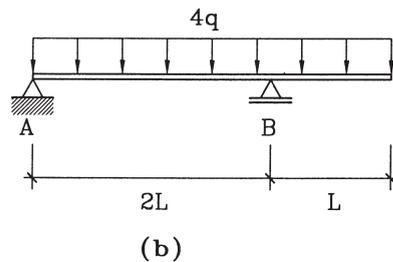
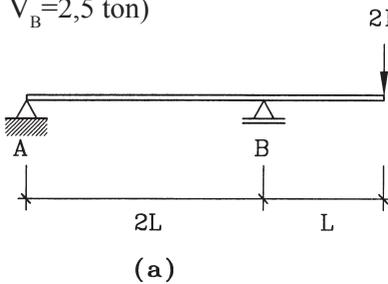
2.03 Calcular las reacciones en los apoyos de la estructura siguiente en función de la inclinación  $\alpha$  de la línea de acción del deslizante en B. ¿Para qué ángulo  $\alpha$  la reacción en B tiene su valor mínimo? Explicar porqué dicha reacción crece sin límite cuando  $\alpha$  se aproxima a  $90^\circ$ , y discutir el caso  $\alpha=90^\circ$ .



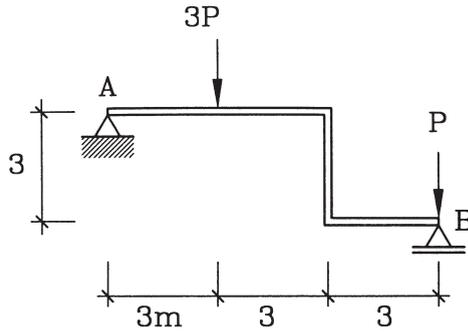
2.04 El sistema de la figura adolece de vinculación aparente. Suponiendo que usted no se ha percatado de ello, plantee las ecuaciones de equilibrio y trate de resolverlas para determinar las reacciones en los apoyos. Comprobará que no es posible y que las ecuaciones conducen a contradicciones.



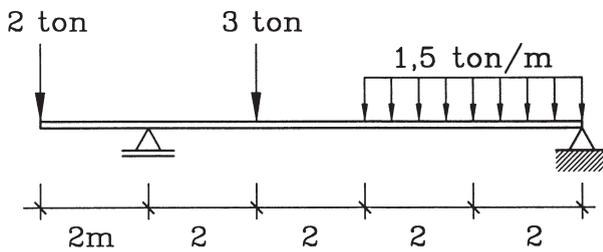
2.05 Calcular las reacciones en los apoyos de las vigas siguientes. (Respuestas: a)  $V_A = -P$ ,  $V_B = 3P$ ; b)  $V_A = 3qL$ ,  $V_B = 9qL$ ; c)  $V_A = M/L$ ,  $V_B = -M/L$ ; d)  $V_A = 3,5 \text{ ton}$ ,  $V_B = 2,5 \text{ ton}$ )



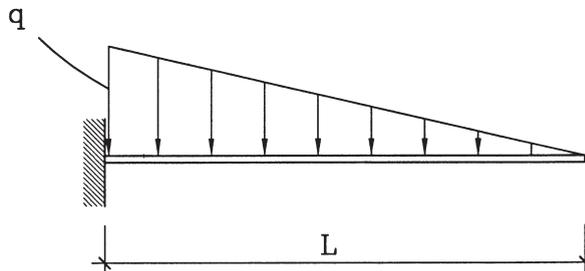
2.06 Calcular las reacciones en los apoyos de la estructura siguiente. (Respuesta:  $V_A = V_B = 2P$ )



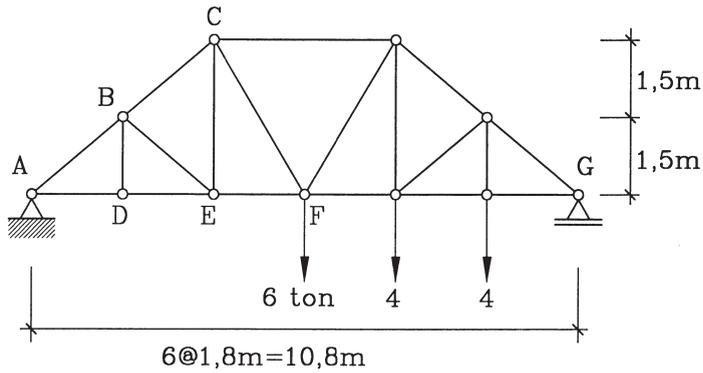
2.07 Calcular las reacciones en los apoyos de la viga siguiente. (Respuesta:  $V_A = 6,25$  ton,  $V_B = 4,75$  ton)



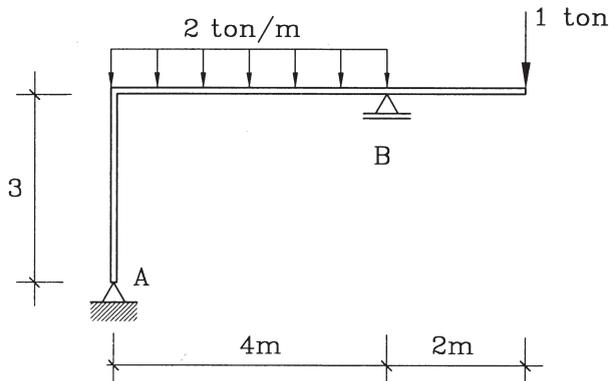
2.08 Calcular las reacciones en el apoyo de la viga en voladizo siguiente. (Respuesta:  $V = qL/2$ ,  $M = qL^2/6$ )



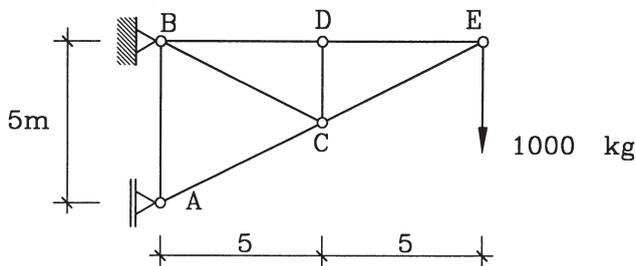
- 2.09 Calcular las reacciones en los apoyos del reticulado de la figura. (Respuestas:  $V_A=5$ ,  $V_G=9$  ton)



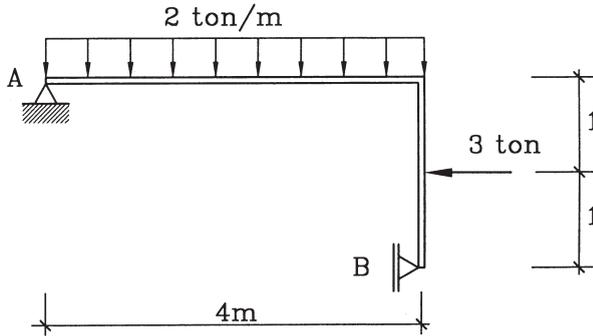
- 2.10 Calcular las reacciones en los apoyos del portal siguiente. (Respuestas:  $R_{ax}=0$ ,  $R_{ay}=3.5$ ,  $R_{by}=5.5$  ton)



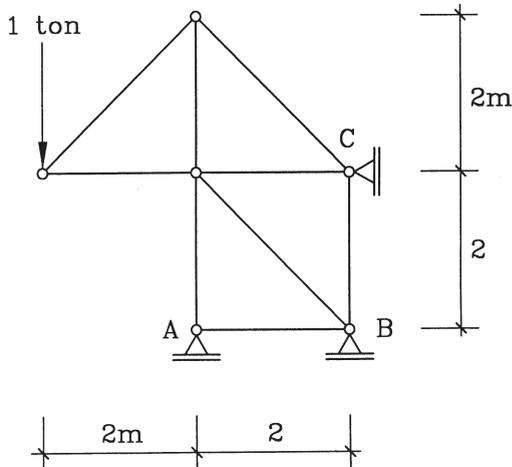
- 2.11 Calcular las reacciones en los apoyos del reticulado de la figura. (Respuestas:  $R_{ax}=2000$ ,  $R_{bx}=-2000$ ,  $R_{by}=1000$  kg)



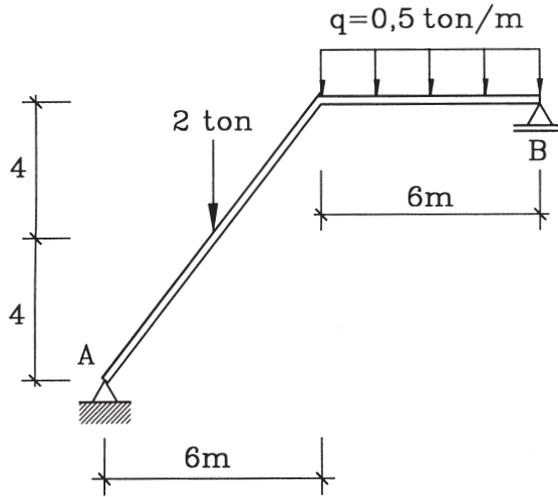
2.12 Calcular las reacciones en los apoyos de la estructura siguiente. (Respuestas:  $R_{ax} = -6,5$ ,  $R_{ay} = 8$ ,  $R_{bx} = 9,5$  ton)



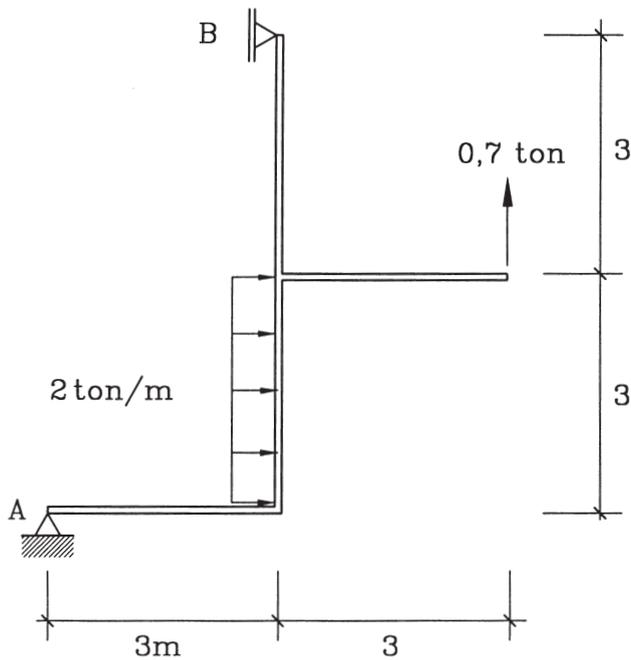
2.13 Calcular las reacciones en los apoyos del reticulado de la figura. (Respuestas:  $R_A = 2$ ,  $R_B = -1$ ,  $R_C = 0$ )



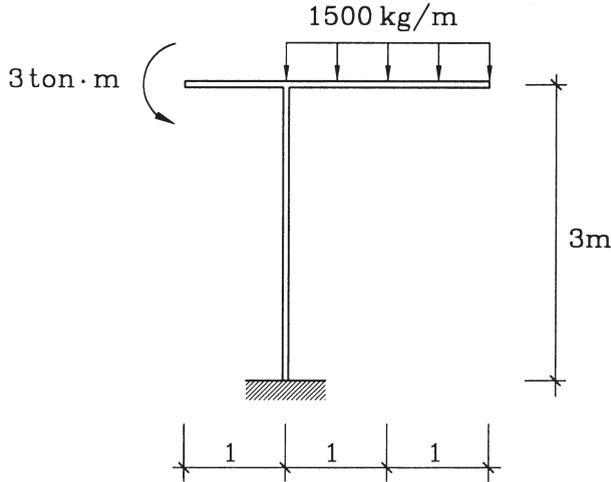
- 2.14 Calcular las reacciones en los apoyos de la estructura siguiente. (Respuestas:  $H_A=0$ ,  $R_A=2,25$ ,  $R_B=2,75$ )



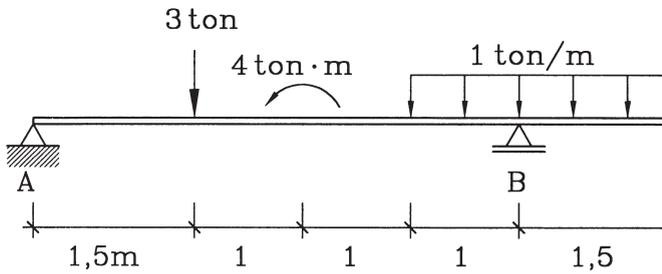
- 2.15 Calcular las reacciones en los apoyos de la estructura siguiente. (Respuestas:  $R_{ax} = -5,2$ ,  $R_{ay} = -0,7$ ,  $R_{bx} = -0,8 \text{ ton}$ )



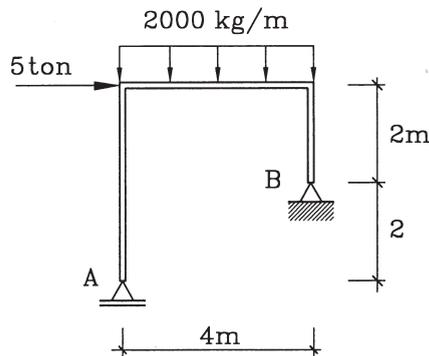
2.16 Calcular las reacciones en la base del marco siguiente. (Respuestas:  $V=3$  ton,  $M=0$ )



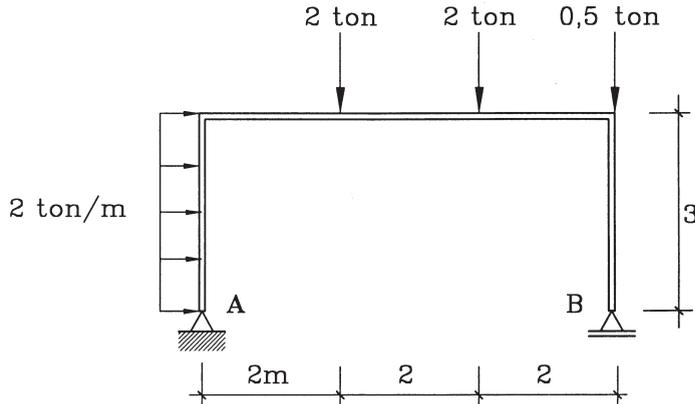
2.17 Calcular las reacciones en los apoyos de la viga siguiente. (Respuesta:  $V_A=V_B=2,75$ ton)



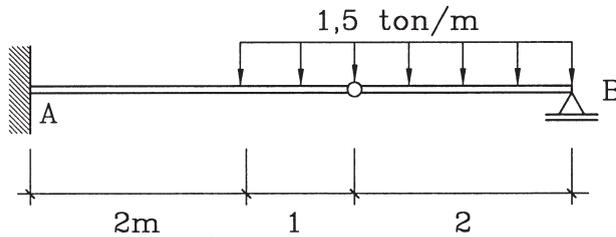
2.18 Calcular las reacciones en los apoyos del pórtico siguiente. (Respuestas:  $R_{ay}=1,5$ ;  $R_{by}=6,5$ ;  $R_{bx}=-5$ )



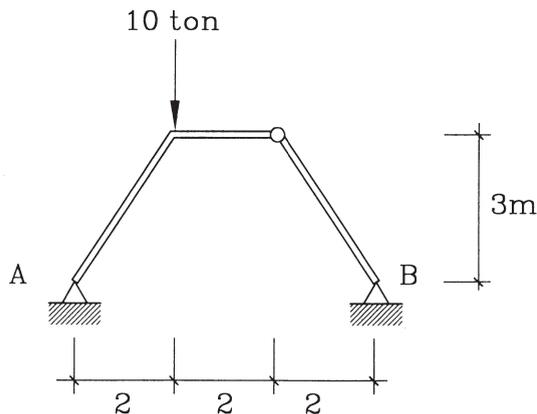
- 2.19 Calcular las reacciones en el pórtico de la figura. (Respuestas:  $R_{ax} = -6$ ,  $R_{ay} = 0,5$ ,  $R_{by} = 4$  ton)



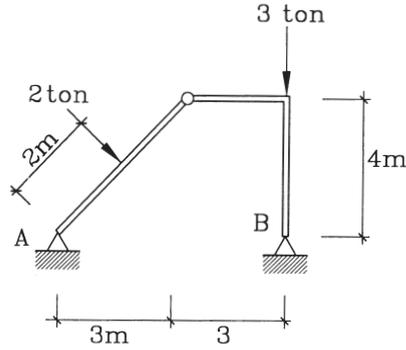
- 2.20 Calcular las reacciones en los apoyos de la viga siguiente. (Respuestas:  $H_A = 0$ ,  $V_A = 3$  ton,  $M_A = 8,25$  ton-m contra los punteros del reloj,  $V_B = 1,5$ )



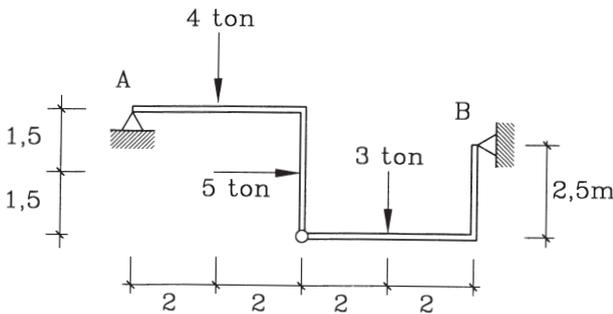
- 2.21 Calcular las reacciones en los apoyos de la estructura de la figura. (Respuestas:  $R_{ax} = 20/9$ ,  $R_{ay} = 20/3$ ,  $R_{bx} = -20/9$ ,  $R_{by} = 10/3$ )



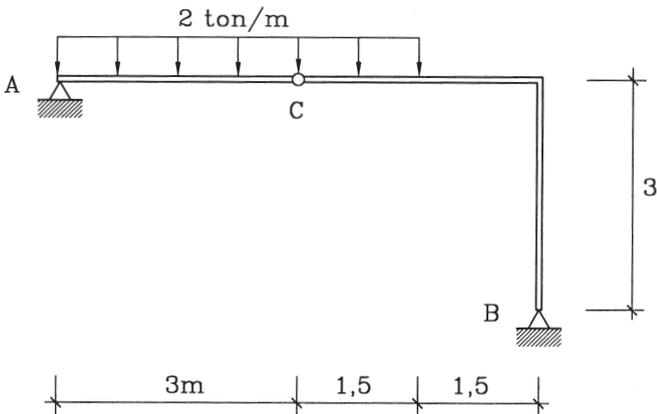
2.22 Calcular las reacciones en los apoyos del pórtico triarticulado de la figura. (Respuestas:  $R_{ax} = -1,1$ ;  $R_{ay} = 0,53$ ;  $R_{bx} = -0,5$ ;  $R_{by} = 3,67$ )



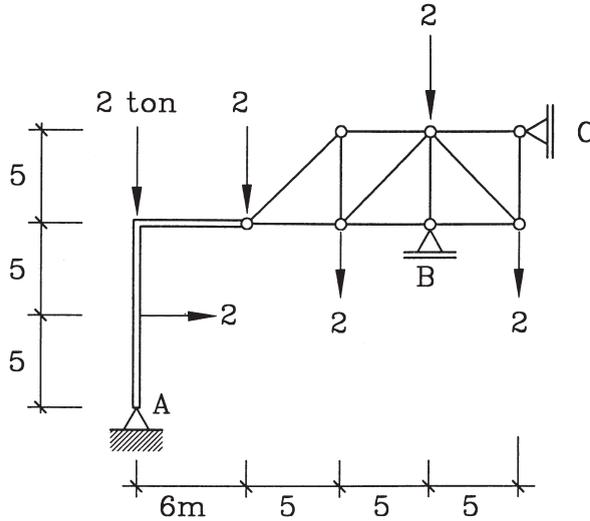
2.23 Calcular las reacciones en los apoyos de la estructura de la figura. (Respuestas:  $R_{ax} = -6,18$  ton,  $R_{ay} = 4,76$ ,  $R_{bx} = 1,18$ ,  $R_{by} = 2,24$ )



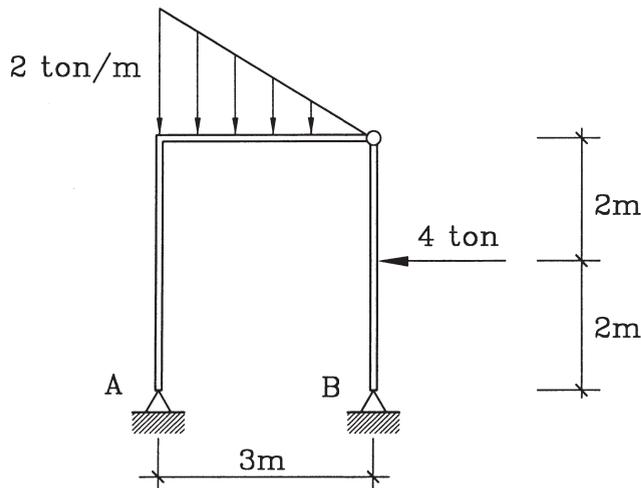
2.24 Determinar las reacciones externas e internas en la estructura de la figura. (Respuestas:  $R_{ax} = 5,25$  ton,  $R_{ay} = 3$ ,  $R_{bx} = -5,25$  ton,  $R_{by} = 6$ ,  $Y = 3$ ,  $X = -5,25$ )



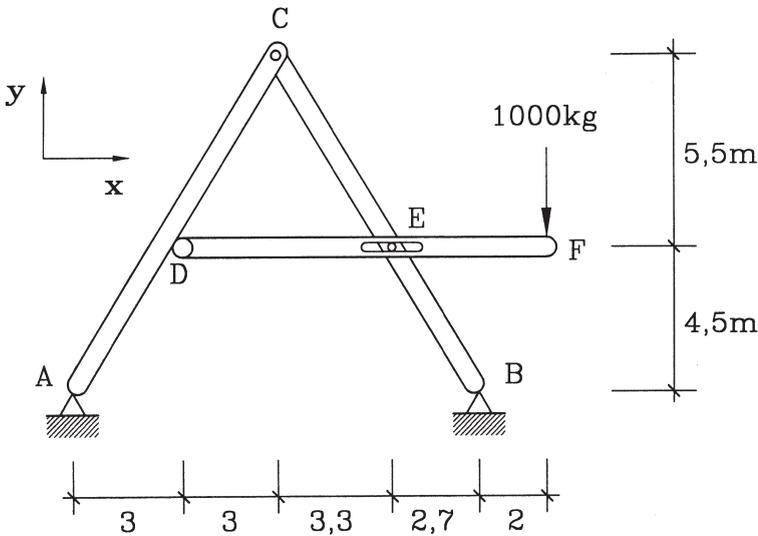
2.25 Determinar las reacciones en los apoyos de la cadena de dos láminas siguientes. (Respuestas:  $R_{ax}=1,14$  ton,  $R_{ay}=5,57$ ,  $R_{by}=4,43$ ,  $R_{cx}=-3,14$ )



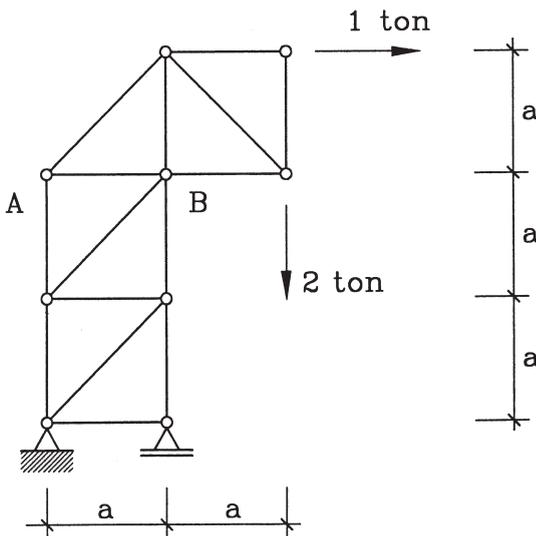
2.26 Calcular las reacciones en los apoyos de la estructura de la figura. (Respuestas:  $R_{ax}=2$ ,  $R_{ay}=14/3$ ,  $R_{bx}=2$ ,  $R_{by}=-5/3$  ton)



2.27 La estructura de la figura está formada por el arco triarticulado ABC y la viga DEF, que se articula en D al elemento AC y se apoya en E en un perno fijo al elemento BC. Se pide determinar las acciones internas ejercidas por la viga sobre el arco en los puntos D y E, y las reacciones externas en A y B. (Respuestas:  $Y_d=746$  kg;  $Y_e = -1746$ ;  $R_{ax}=123,8$ ;  $R_{ay} = -166,65$ ;  $R_{bx} = -123,8$ ;  $R_{by}=1166,65$ )

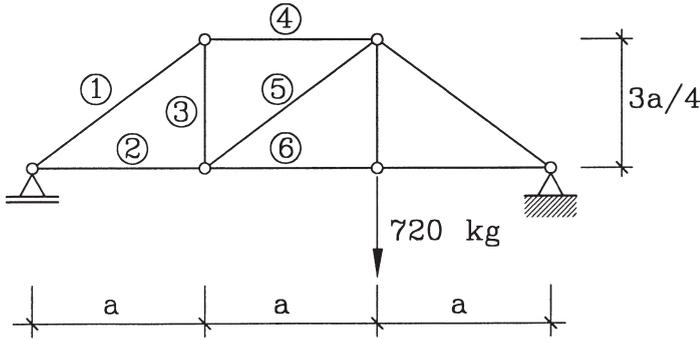


2.28 Encontrar la fuerza interna en la barra AB del reticulado de la figura. (Respuesta: -3 ton)



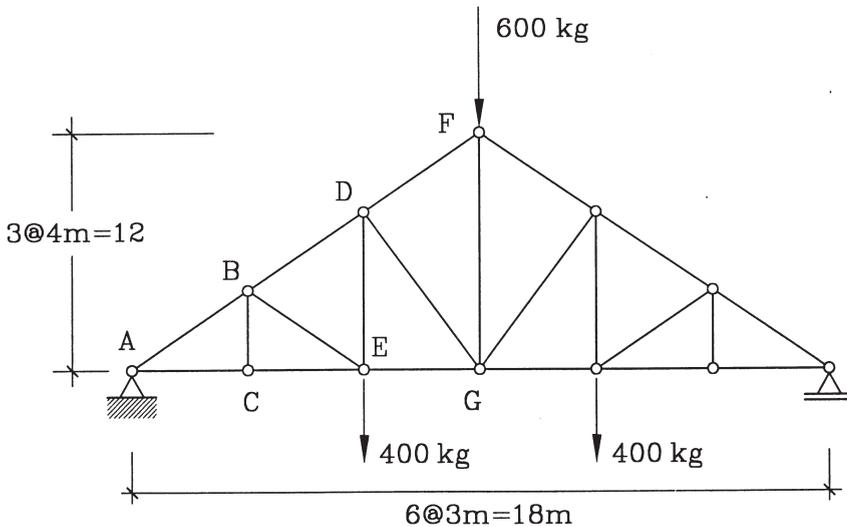


- 2.31 Calcular los esfuerzos en las barras 1 a 6 del reticulado de la figura. (Respuestas:  $T_1=T_5=-400$ ,  $T_2=320$ ,  $T_3=240$ ,  $T_4=-320$ ,  $T_6=640$  kg)

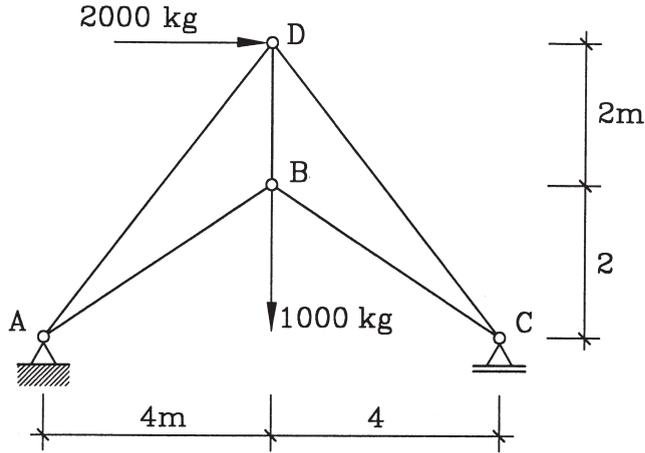


- 2.32 Calcular los esfuerzos en todas las barras del Ejercicio 2.11. (Respuestas:  $AC=CE=-2236$  kg,  $BD=DE=2000$ ,  $AB=1000$ ,  $BC=CD=0$ )

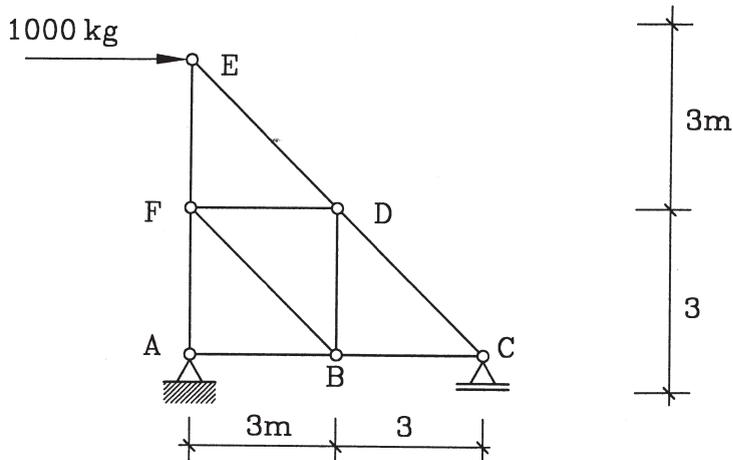
- 2.33 Calcular los esfuerzos en todas las barras del reticulado de la figura. (Repuestas: Por ser estructura simétrica cargada simétricamente los esfuerzos internos son también simétricos. Basta resolver las barras indicadas:  $AB=BD=-875$  kg,  $AC=CE=EG=525$  kg,  $BC=BE=0$ ,  $DE=400$  kg,  $DG=-284,8$  kg,  $DF=-708,3$  kg,  $FG=533,3$ kg)



- 2.34 Calcular los esfuerzos en las barras del reticulado de la figura. (Respuestas:  $AB=BC=3354,1 \text{ kg}$ ,  $BD=4000$ ,  $AD=-1414,2$ ,  $DC=-4242,6$ )

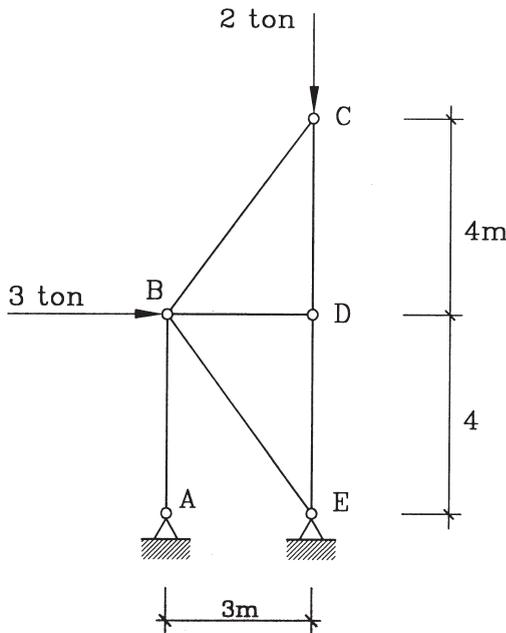


- 2.35 Calcular los esfuerzos en las barras del reticulado siguiente. (Respuesta:  $AB=BC=AF=FE=1000 \text{ kg}$ ,  $CD=DE=-1414$ ,  $BD=DF=FB=0$ )

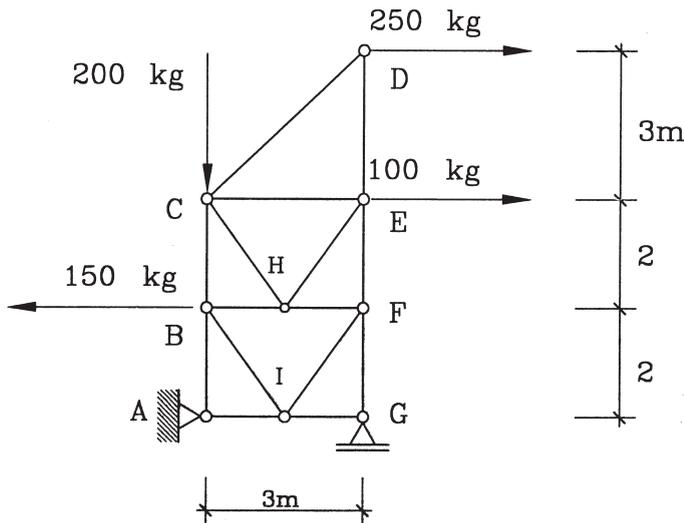


- 2.36 Calcular los esfuerzos en las barras AB, BC, AD, DE, EF, BD, BE y EC del reticulado del Ejercicio 2.09. (Respuestas:  $AB=BC=-7,81 \text{ ton}$ ,  $AD=DE=EF=6 \text{ ton}$ ,  $BD=BE=EC=0$ )

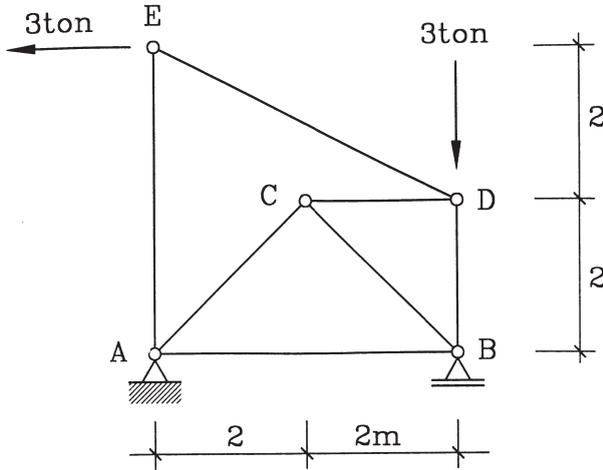
2.37 Calcular las reacciones en los apoyos y los esfuerzos en todas las barras del reticulado de la figura. (Respuestas:  $R_{ax}=0$ ,  $R_{ay}=-4$ ,  $R_{ex}=-3$ ,  $R_{ey}=6$ ,  $BC=BD=0$ ,  $CD=DE=-2$ ,  $AB=4$ ,  $BE=-5$  ton)



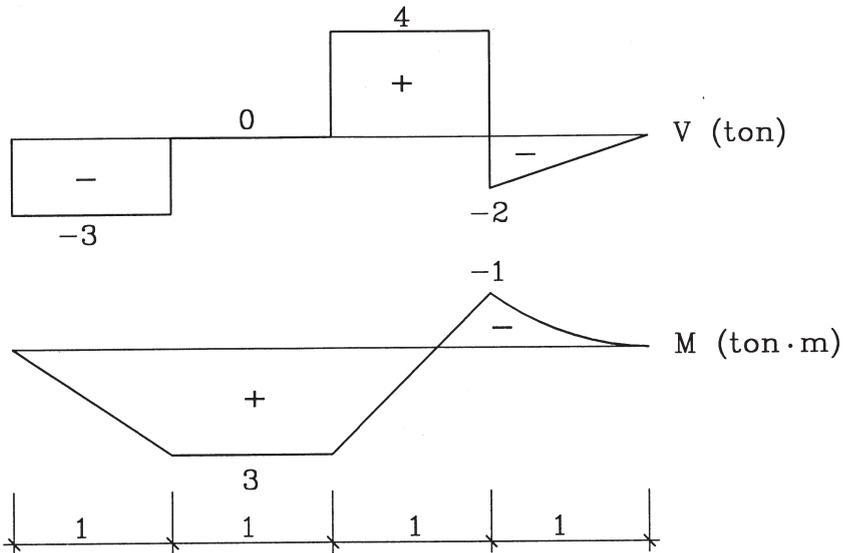
2.38 Calcular las reacciones y los esfuerzos en todas las barras del reticulado de la figura. (Respuestas:  $R_{ax}=-200$ ;  $R_{ay}=-416,7$ ;  $R_{gy}=616,7$ ;  $AB=416,7$ ;  $AI=200$ ;  $GI=0$ ;  $GF=-616,7$ ;  $BC=283,3$ ;  $BH=250$ ;  $IF=166,7$ ;  $E3=-166,7$ ;  $FE=-483,3$ ;  $FH=-100$ ;  $DC=353,5$ ;  $DE=-250$ ;  $CE=-75$ ;  $CH=-291,7$ ;  $HE=291,7$  kg)



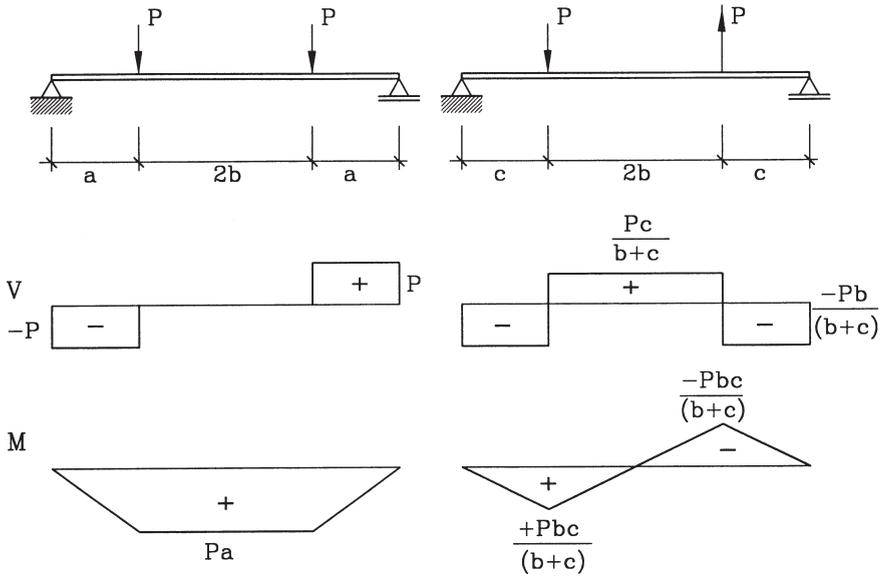
2.39 Calcular los esfuerzos en todas las barras del reticulado de la figura. (Respuestas: EA= -1500 kg, ED=3354, DC= -3000, DB= -1500,CA= -2121, CB=2121, AB= -1500)



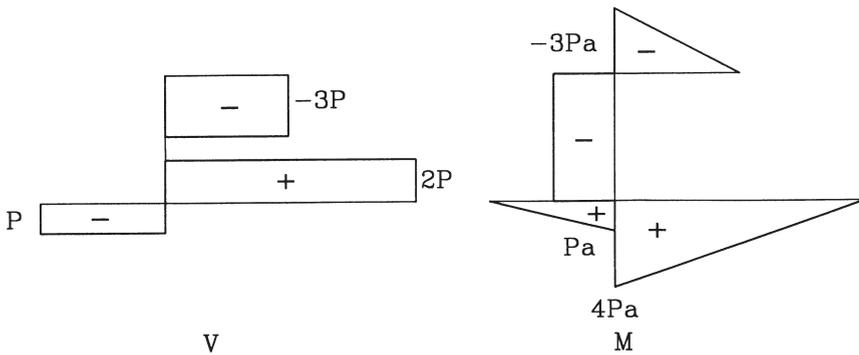
2.40 Calcular los diagramas de esfuerzo de corte y momento flector de la viga del Ejemplo 2.1, verificando que ellos son los que se indican a continuación.



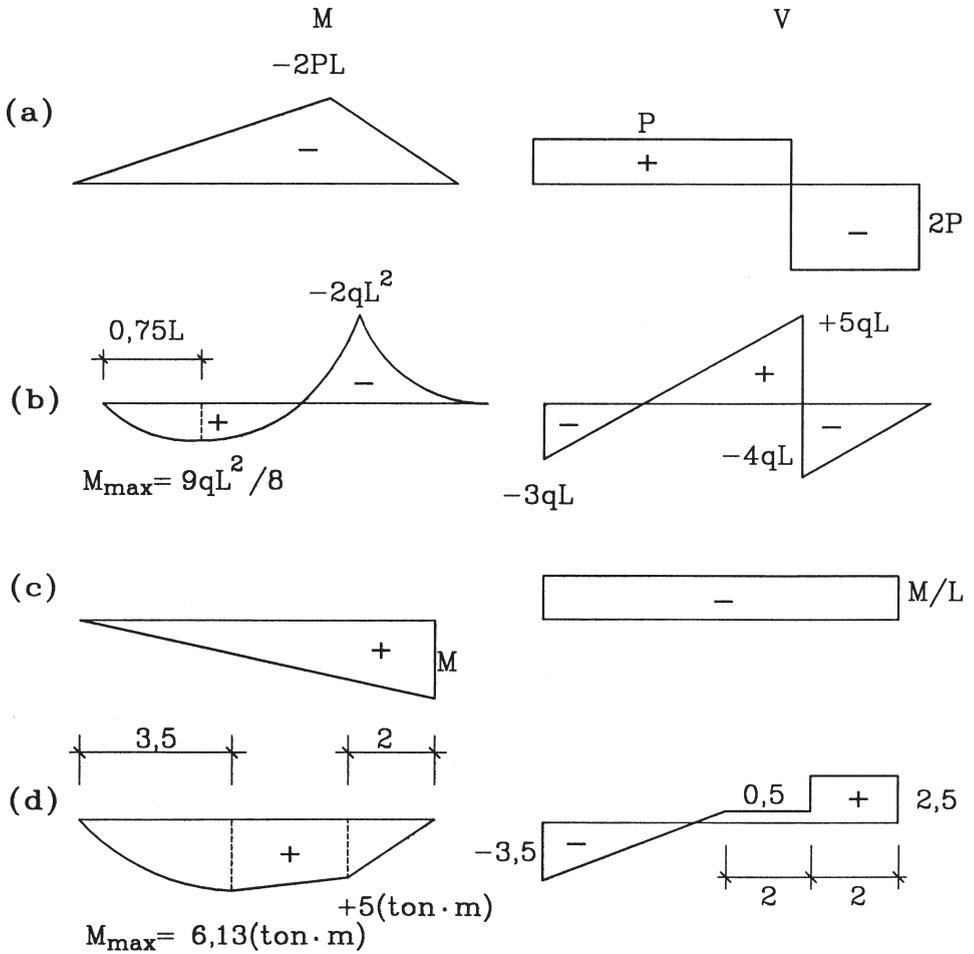
2.41 Calcular y dibujar los diagramas de esfuerzo de corte y momento flector de las vigas siguientes, verificando que los diagramas son los que se indican.



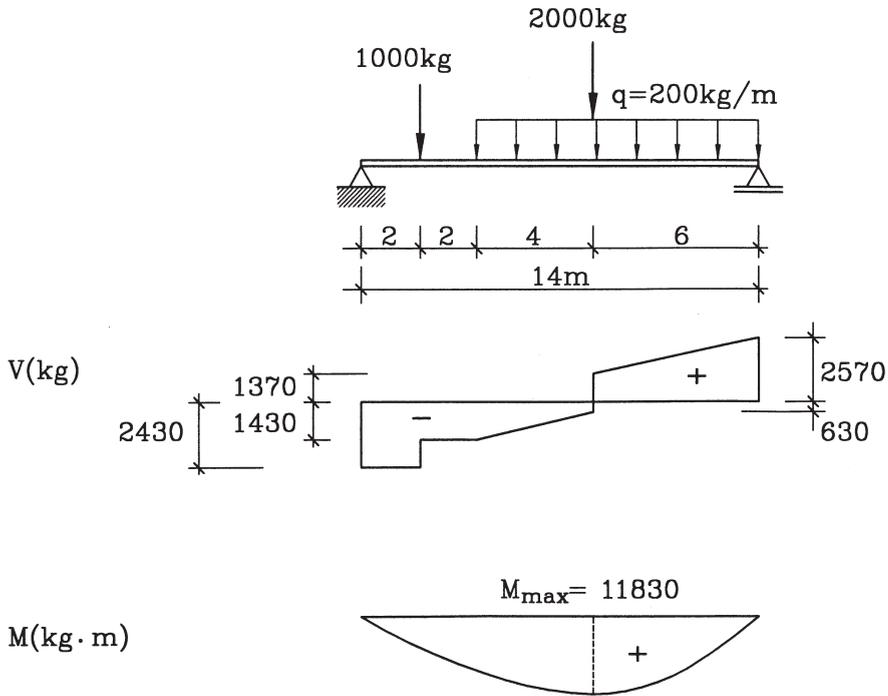
2.42 Calcular los diagramas de esfuerzo de corte y momento flector de la estructura del Ejemplo 2.2, verificando que ellos son los siguientes.



2.43 Demuestre que los diagramas de momento flector y esfuerzo de corte de las vigas del Ejercicio Propuesto 2.05 son los que se indican.

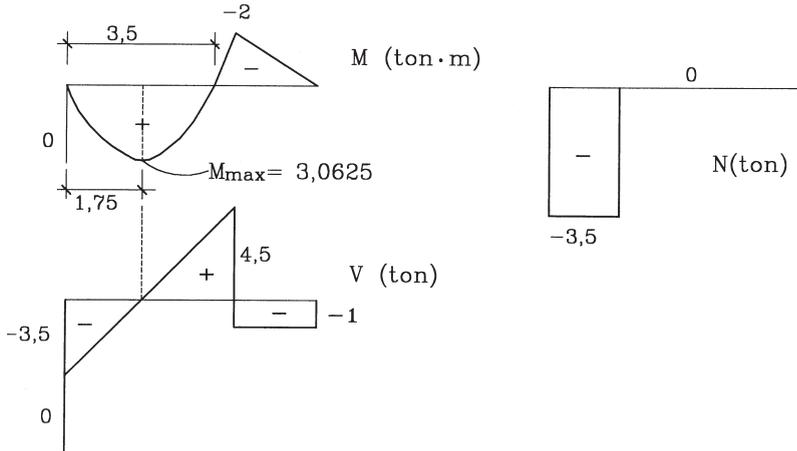


2.44 Calcular y verificar que los diagramas de esfuerzo de corte y momento flector de la viga dada son los indicados.

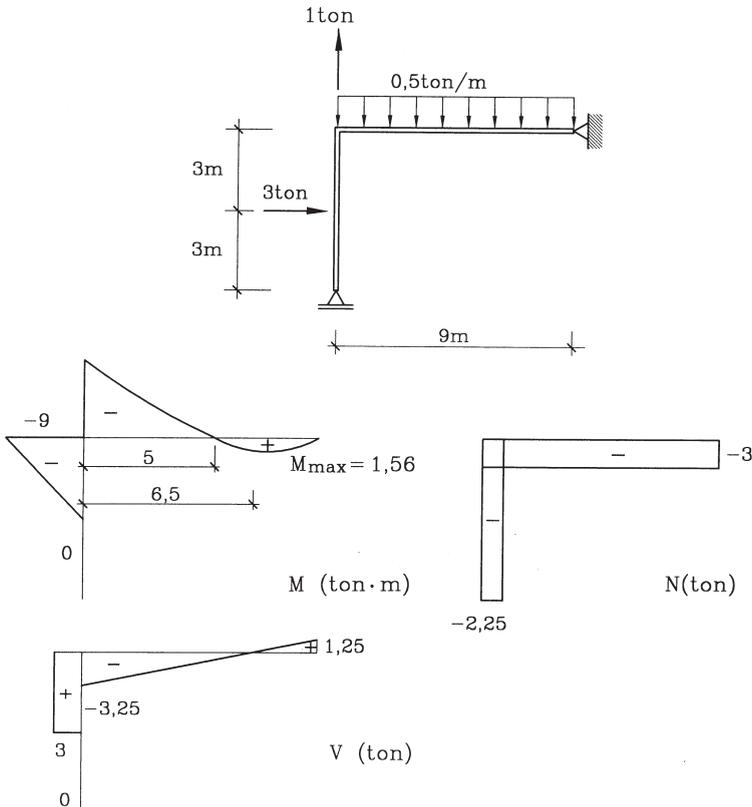


2.45 Para la viga del Ejercicio Propuesto 2.08 demostrar que el esfuerzo de corte está dado por la expresión  $V = -qx^2/2L$  y el momento flector por  $M = -qx^3/6L$ , en que  $x$  es la distancia medida desde el extremo derecho de la viga a la sección considerada. Dibujar los diagramas correspondientes.

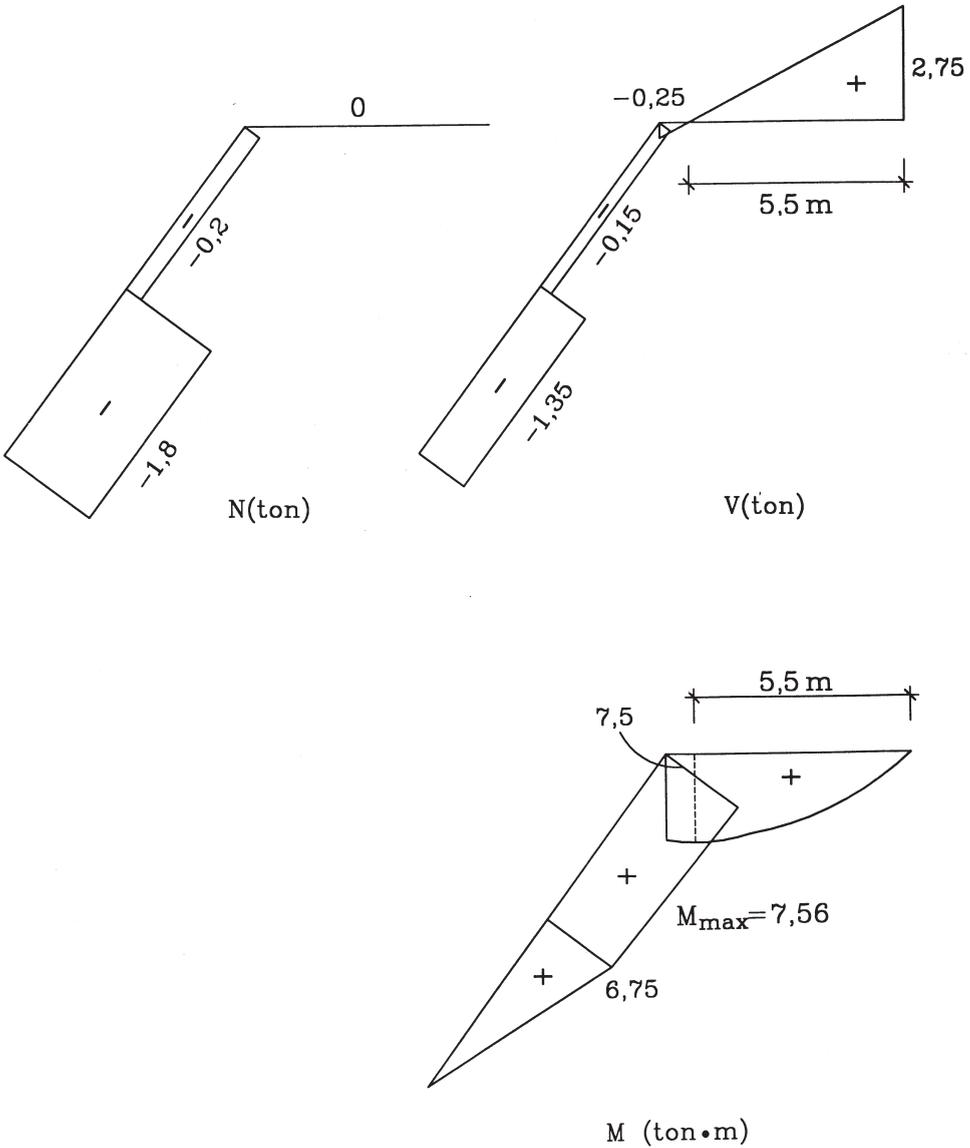
2.46 Calcular y verificar que los diagramas de esfuerzo normal, esfuerzo de corte, y momento flector del portal del Ejercicio Propuesto 2.10 son los indicados.



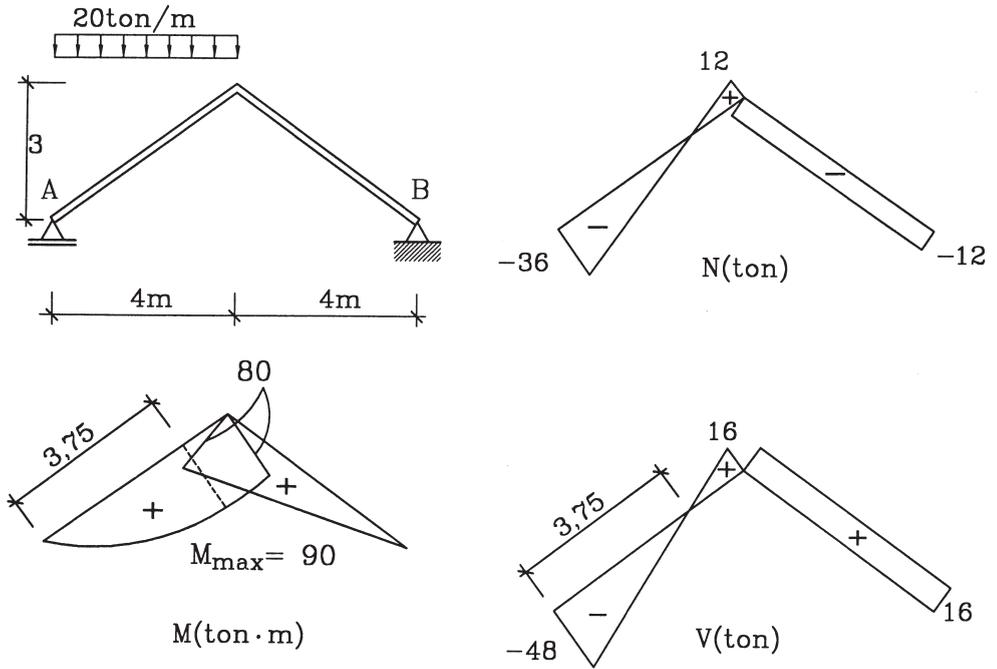
2.47 Calcular y verificar que los diagramas de esfuerzo normal, esfuerzo de corte y momento flector del portal de la figura son los indicados.



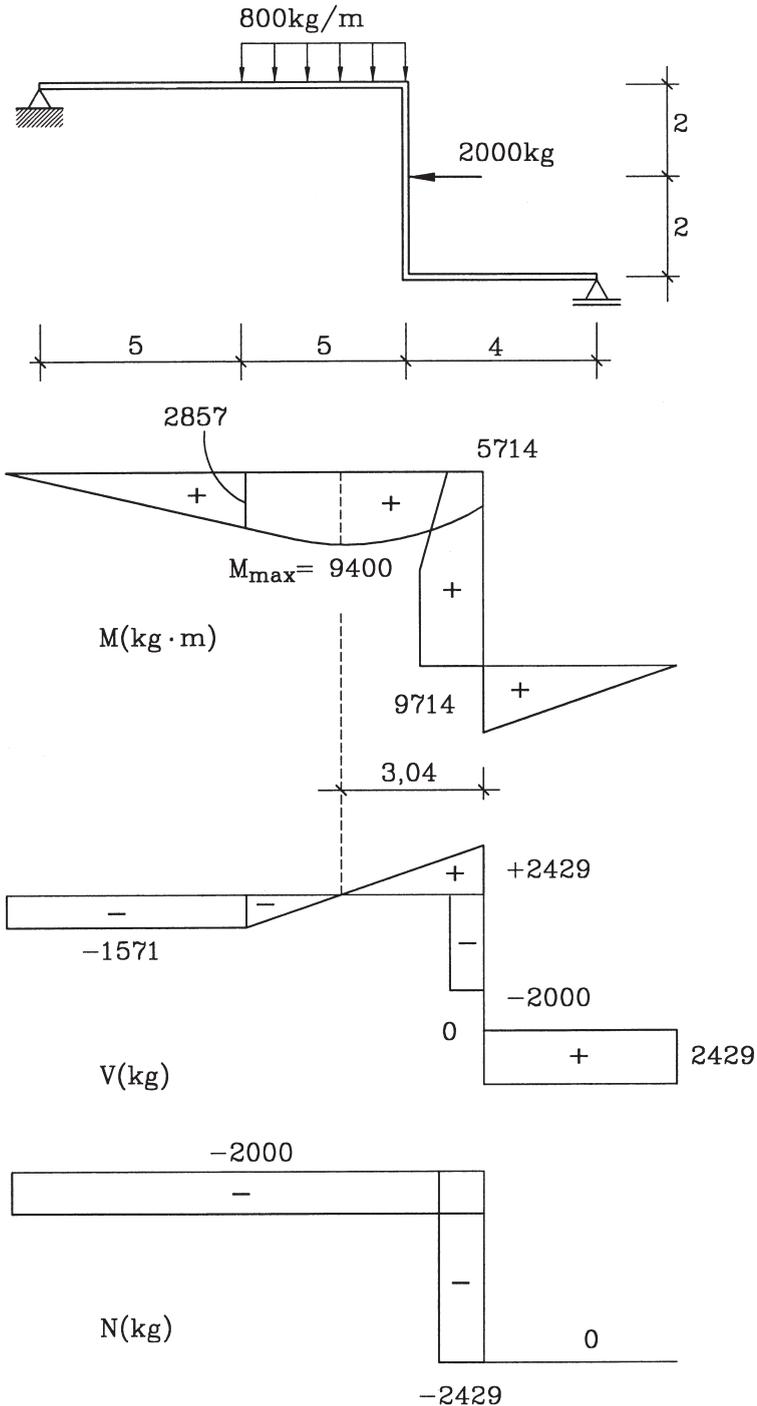
2.48 Calcular los diagramas de esfuerzo normal, esfuerzo de corte, y momento flector de la estructura del Ejercicio Propuesto 2.14 verificando que ellos son los siguientes.



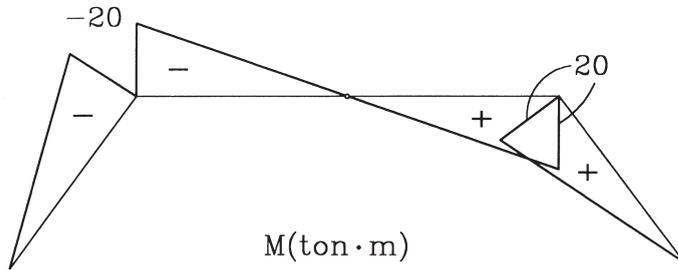
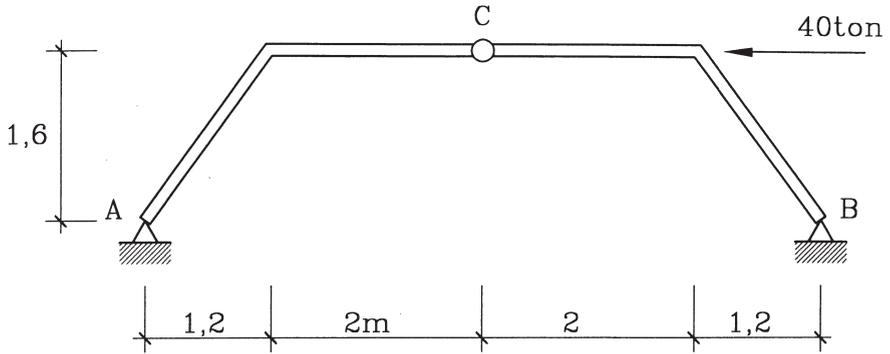
- 2.49 Calcular los diagramas de esfuerzos internos de la estructura dada, verificando que ellos son los indicados. (Respuestas:  $R_{ay}=60$ ,  $R_{by}=20$ ,  $R_{bx}=0$ )



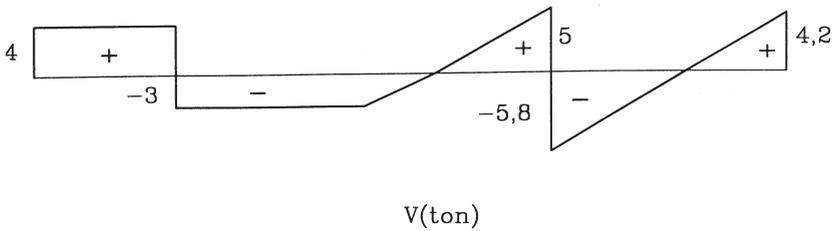
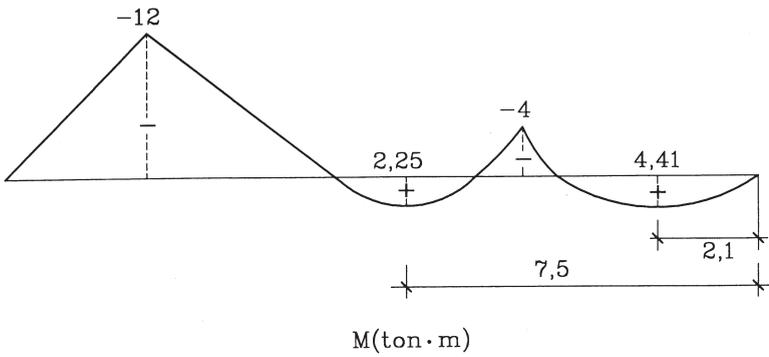
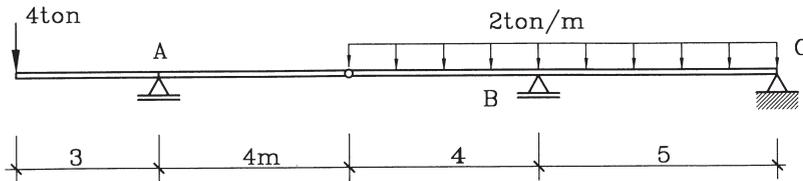
2.50 Calcular los diagramas de esfuerzos internos de la estructura dada verificando que ellos son los indicados.



- 2.51 Calcular las reacciones en los apoyos y el diagrama de momentos del arco inarticulado de la figura. (Respuestas:  $R_{ax}=20$  ton,  $R_{by}=-10$  ton; diagrama M como se indica)



2.52 Calcular las reacciones y los diagramas de esfuerzo de corte y momento flector de la viga de dos láminas de la figura. (Respuestas:  $V_A=7$  ton,  $V_B=10,8$ ,  $V_C=4,2$ ; diagramas como se muestran)



- 2.53 Calcular los diagramas de esfuerzos internos del pórtico triarticulado de la figura. (Respuestas:  $R_{ax}=0,25$  ton,  $R_{ay}=0,75$ ,  $R_{bx}=-0,25$ ,  $R_{by}=0,25$ ; diagramas según se muestra)

