

Chapter Title: ESTÁTICA

Book Title: Fundamentos de ingeniería estructural para estudiantes de arquitectura

Book Subtitle: Tercera edición

Book Author(s): Rafael Riddell C. and Pedro Hidalgo O.

Published by: Ediciones UC. (2015)

Stable URL: <https://www.jstor.org/stable/j.ctt1bhkq3k.3>

---

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact [support@jstor.org](mailto:support@jstor.org).

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at <https://about.jstor.org/terms>



JSTOR

*Ediciones UC* is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Fundamentos de ingeniería estructural para estudiantes de arquitectura*

# I.

---

# ESTÁTICA

## 1.1 Introducción

La *estática* es la parte de la mecánica que estudia las condiciones de equilibrio de los cuerpos, es decir, las condiciones que mantienen el estado de inmovilidad o reposo. La mecánica, parte de la física, es una materia fundamental en los campos de la ingeniería mecánica y de la ingeniería estructural, disciplinas que en la era moderna han contribuido sustancialmente a su desarrollo y aplicación práctica en los problemas tecnológicos que les conciernen.

Arquímedes (287-212 A.C.) nacido en Siracusa, Sicilia, uno de los más grandes intelectos de la humanidad, fue el primero en manejar los conceptos básicos de equilibrio. Aparte de sus contribuciones a la mecánica y a la astronomía, hizo aportes notables en matemáticas y física. Formalizando el llamado método *exhaustivo* de Eudoxio (408-355 A.C.), Arquímedes inventó el *cálculo integral*, y también fue precursor del *cálculo diferencial*, anticipándose en casi 20 siglos a Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716) y Fermat (1601-1665) que lo impulsaron, hasta que finalmente Cauchy (1789-1857) y Riemann (1826-1866) le dieron una base matemática definitiva. En la física, su obra maestra es la hidrostática, que se refiere al estado de equilibrio de los fluidos y flotación de los cuerpos. Cuenta la leyenda que su famoso descubrimiento de que un cuerpo sumergido disminuye aparentemente su peso en igual cantidad que el peso del volumen de líquido desplazado (*el Principio de Arquímedes*), lo hizo mientras se bañaba y observaba flotar su propio cuerpo, por lo que entusiasmado salió corriendo desnudo a las calles gritando “¡eureka, eureka!”, que significa “lo tengo, lo encontré”.

La mención de la obra de Arquímedes en esta introducción no es casual. Sus descubrimientos, inspirados en una notable intuición y motivados por la solución de problemas prácticos, fueron expresados y pueden comprenderse sin tener que recurrir a

un marco teórico y analítico complejo. Cabe mencionar que en la época de Arquímedes el álgebra elemental y la simbología usual de hoy en día eran totalmente desconocidas. Esta forma de pensar se utilizará en la presentación de los temas de análisis, confiando mucho en la intuición física y geométrica, y en la imaginación, para despertar en los estudiantes de arquitectura similar actitud. Es decir, se procurará llegar a los conceptos fundamentales por caminos simples, evitando las complejidades matemáticas, pero sin comprometer el rigor y fidelidad a la esencia de los conceptos mismos.

La estática de los cuerpos rígidos se enmarca en definitiva como caso particular de las Leyes de Newton, presentadas en 1686 en su *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. A pesar de la importancia de las ideas previas de Galileo (1564-1642) sobre las causas del movimiento de un cuerpo, y las del movimiento planetario de Kepler (1571-1630), Isaac Newton es el padre de la dinámica y de la mecánica celeste. Sus ideas del espacio y del tiempo absoluto no fueron objetadas sino hasta más de doscientos años después, cuando Einstein (1879-1955) presentó la Teoría de la Relatividad en 1905.

La primera de las tres leyes del movimiento de Newton establece que: “Todo cuerpo mantiene su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que sea obligado a cambiar ese estado por la acción de una fuerza aplicada sobre él”. Conforme a esta ley, la condición de equilibrio estático exige que la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo sea nula.

La aplicación de la ley requiere la definición del concepto de *fuerza*, que se presenta en las secciones siguientes, y del concepto de *momento*, lo que se hará más adelante. Cabe sin embargo destacar que la condición de resultante nula es necesaria y suficiente para el equilibrio sólo en el caso de *cuerpos rígidos*. Se entienden por tales aquellos que no experimentan deformaciones al ser sometidos a fuerzas. La condición de rigidez infinita no se cumple en los materiales reales, los que por más fuertes que sean, igual experimentan deformaciones. Sin embargo, en la práctica basta con que las deformaciones sean pequeñas, es decir lo suficientemente pequeñas para que la alteración geométrica de la configuración de equilibrio sea despreciable. La necesaria hipótesis de deformaciones pequeñas se cumple normalmente en las construcciones de la práctica, primero porque los materiales tienen rigidez suficiente, y segundo, porque además los criterios de diseño imponen también límites a las deformaciones de las estructuras, por una serie de razones que lo hacen conveniente y que se discutirán en su oportunidad. Con esta aclaración, se entenderá que al hablar del cuerpo rígido se estará haciendo referencia a elementos o estructuras poco deformables.

### **Ejemplo 1.1**

Este ejemplo ilustra la forma en que Arquímedes aplicó el método exhaustivo, precursor del cálculo integral, al cálculo de áreas de contornos curvilíneos y volúmenes limitados por superficies curvas. En este caso se aplica al cálculo del área bajo una parábola, uno de los casos resueltos por Arquímedes.

Una parábola se define por la función  $y=f(x)=a+bx^2$  en que  $a$  y  $b$  son constantes cualesquiera; en el caso de la Fig. E1.1.a  $a=0$ , de modo que para cualquier punto de la curva de coordenadas  $x_0$  e  $y_0$  se cumple  $y_0=bx_0^2$ . El área que se desea calcular es el área achurada en la Fig. E1.1.b, es decir el área  $A$  bajo la curva parabólica en el intervalo limitado por  $x=0$  y  $x=c$ .

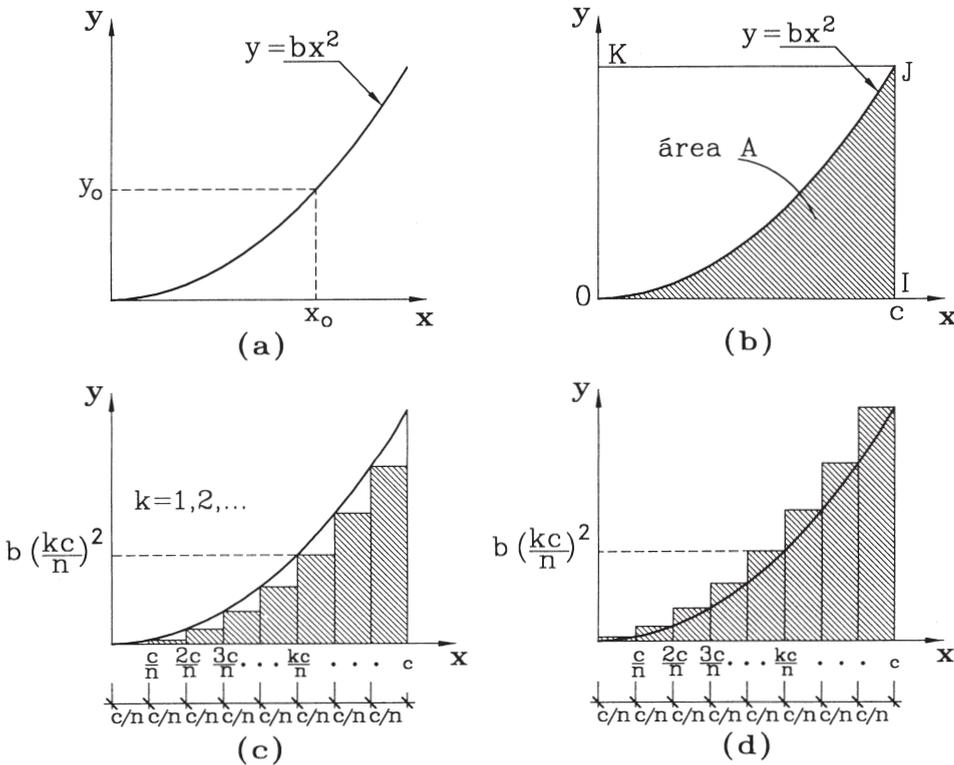


Figura E1.1

**Solución:** Para ello se subdivide el intervalo de  $x$  entre  $0$  y  $c$  en  $n$  partes (en particular  $n=8$  en las Figs. E1.1.c y d) y se calculan dos aproximaciones al área buscada: una por defecto (área achurada en la Fig. E1.1.c) y otra por exceso (área achurada en la Fig. E1.1.d). El área achurada en la Fig. E1.1.c es

$$s_n = \frac{cb}{n} \left(\frac{c}{n}\right)^2 + \frac{cb}{n} \left(\frac{2c}{n}\right)^2 + \frac{cb}{n} \left(\frac{3c}{n}\right)^2 + \dots + \frac{cb}{n} \left(\frac{7c}{n}\right)^2 < A$$

$$s_n = \frac{bc^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] < A$$

mientras el área achurada de la Fig. E1.1.d es

$$S_n = \frac{cb}{n} \left( \frac{c}{n} \right)^2 + \frac{cb}{n} \left( \frac{2c}{n} \right)^2 + \frac{cb}{n} \left( \frac{3c}{n} \right)^2 + \dots + \frac{cb}{n} \left( \frac{8c}{n} \right)^2 > A$$

$$S_n = \frac{bc^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] > A$$

se dice entonces que el área buscada  $A$  está *acotada* entre  $s_n$  y  $S_n$ :

$$s_n < A < S_n$$

y en la medida que se aumente progresivamente el número  $n$  de subdivisiones la aproximación a la curva mejorará y la diferencia entre  $s_n$  y  $S_n$  se hará cada vez más pequeña, determinándose  $A$  con un valor tan preciso como se quiera, quedando el problema resuelto. Sin embargo, estudiando las series  $s_n$  y  $S_n$  puede demostrarse que si se toma un número infinito de términos, las sumatorias *convergen* a un número o *límite* finito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} \right] = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3} \right] = \frac{1}{3}$$

y por lo tanto el área bajo la parábola es exactamente  $A = bc^3/3$ , o sea,  $A$  es un tercio del área del rectángulo OIJK de la Fig. E1.1.b.

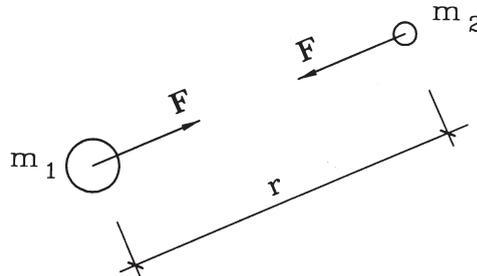
## 1.2 Ley de Gravitación Universal

Las antes mencionadas leyes de Kepler establecen las características *cinemáticas*, es decir geométricas, del movimiento de los planetas en torno al sol. Ellas fueron descubiertas en forma empírica, después de veinte años de observación y cálculos, pero no tenían una base teórica que las sustentara. En efecto, el concepto de fuerza no se había establecido con claridad hasta que Newton lo enmarcó en el contexto de sus Leyes del Movimiento y su Ley de Gravitación Universal. Precisamente, a partir de las leyes de Newton las observaciones de Kepler pueden derivarse o demostrarse con relativa facilidad.

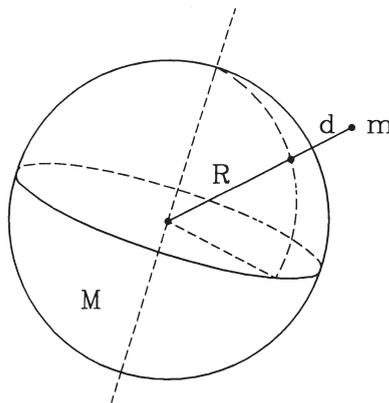
La Ley de Gravitación Universal de Newton establece que “dos partículas materiales en el universo se atraen entre sí con una fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las une”:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (1-1)$$

Las fuerzas  $F$  se ejercen en la línea que une las partículas. La fuerza que actúa en la masa  $m_2$  es la acción de la masa  $m_1$  sobre ella y viceversa (Fig. 1.1). La constante  $G$ , denominada *constante de gravitación universal*, tiene el mismo valor para cualquier pareja de partículas, y debe determinarse experimentalmente. Numerosos experimentos han permitido calcular y mejorar el valor de  $G$ , aceptándose hoy  $G=6,673 \times 10^{-11}$  Newton- $m^2/kg^2$ . Este valor es muy pequeño de manera que la fuerza de atracción entre cuerpos en la superficie de la Tierra es muy pequeña (ver Ejemplo 1.2).



**Figura 1.1** Atracción recíproca de masas



**Figura 1.2** Partícula  $m$  a distancia  $d$  de la superficie terrestre

De la Ley de Gravitación Universal se obtiene la fuerza de atracción sobre un cuerpo de masa  $m$  próximo a la superficie de la Tierra. En efecto, con la notación de la Fig. 1.2 se tiene

$$F = \frac{GMm}{(R + d)^2} \quad (1-2)$$

Utilizando los valores del radio de la Tierra  $R=6.380$  kilómetros y de la masa de la Tierra  $M=5,983 \times 10^{24}$  kilogramos, y suponiendo que  $d$  es muy pequeño frente a  $R$  se obtiene

$$F = \frac{6,673(10^{-11})(5983)(10^{21})}{(6.380.000)^2} \text{ m}$$

$$F = 9,8 \text{ m} \quad (1-3)$$

Esta fuerza, de origen gravitacional, es lo que entendemos como *peso* del cuerpo de masa m. Comparando la Ec. 1-3 con la 2ª Ley de Newton

$$F = ma \quad (1-4)$$

en que F es la fuerza que actúa sobre un cuerpo y “a” la aceleración que este adquiere debido a la acción de dicha fuerza, se define la *aceleración de gravedad*

$$g = 9,8 \text{ metros/seg}^2 \quad (1-5)$$

Cabe notar que g no es constante. En efecto, según la Ec. 1-2 es obvio que depende de R y d. Como el radio de la Tierra no es constante, sino 21 kilómetros menor en los polos que en el Ecuador, g varía con la latitud, siendo menor en el Ecuador y mayor en los polos. A su vez, en la medida que un cuerpo adquiere altitud, d deja de ser despreciable, como se supuso anteriormente, y tanto g como su peso disminuyen. Por otra parte, la distribución de masa de la Tierra no es homogénea de modo que también hay variaciones. Finalmente, también influye en el peso de los cuerpos la aceleración centrípeta debida a la rotación de la Tierra; este efecto, nulo en los polos y máximo en el Ecuador se manifiesta como una pequeña disminución adicional del peso.

Para completar esta sección se discutirá el tema de las *unidades* en que se expresan las cantidades físicas antes definidas. En física, el sistema de medidas más usado es el MKS, sigla que se refiere a las unidades de metro, kilogramo y segundo, que utiliza para las cantidades básicas de longitud, masa y tiempo. La aceleración, que es una cantidad derivada, se define como

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (1-6)$$

en que  $\Delta v$  es el cambio de velocidad que experimenta el objeto considerado en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . A su vez, la velocidad se define como el cambio de posición  $\Delta s$ , o camino recorrido, en el intervalo de tiempo  $\Delta t$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \frac{\text{metros}}{\text{seg}} \quad (1-7)$$

es decir, la velocidad se puede expresar directamente como el cociente entre dos unidades básicas. Se tiene entonces que la aceleración tiene unidades de velocidad partida por tiempo, es decir metros/seg<sup>2</sup>, como se indicó en la Ec. 1-5 para la aceleración de gravedad (notar que el metro se abrevia simplemente con la letra eme, pero ello se ha evitado en esta Sección pues la misma letra se utiliza para designar la masa). Con la aceleración en metros/seg<sup>2</sup> y la masa en kilogramos, la Ec. 1-3 entrega el peso del cuerpo en Newtons

$$\text{Newton} = \frac{\text{metro}}{\text{seg}^2} * \text{kilogramo} \quad (1-8)$$

El Newton es la unidad de fuerza del sistema MKS, ya que está expresado en términos de las unidades básicas del sistema. En la práctica común, y también en ingeniería y construcción, es usual utilizar una unidad diferente, el *kilogramo-peso* o *kilogramo-fuerza*. En esta dimensión responde el lector cuando le preguntan ¿cuánto pesas?, y es la misma que se utiliza cuando en la balanza del supermercado le pesan 2 kilos de fruta.

El kilogramo-peso se define como el peso de un kilogramo masa en condiciones estándar de latitud y altitud. Pero un kilogramo-masa para las mismas condiciones pesa 9,8 Newtons, de acuerdo a la Ec. 1-3, luego

$$1 \text{ kilogramo-peso} = 1 \text{ kilogramo-fuerza} = 9,8 \text{ Newtons} \quad (1-9)$$

Simplemente entonces, el kilogramo-peso y el Newton son unidades de peso diferentes: una persona que pesa 60 kilos también puede responder que pesa 588 Newtons. Para evitar la confusión entre kilogramo-masa, que se abrevia kg, y kilogramo-peso o kilogramo-fuerza, se han sugerido las designaciones kgp o kgf para éstos últimos, sin embargo ello no ha prosperado y en la práctica también se designan simplemente por kg. En este texto se entenderá que siempre el kilogramo a secas, abreviado kg, se refiere a una unidad de fuerza; cuando la distinción es delicada, como en los problemas dinámicos que requieren trabajar con masas, se harán las precisiones pertinentes.

### Ejemplo 1.2

Determinar la fuerza de atracción recíproca entre dos masas de 400 kg cada una separadas 1 metro entre sus centros.

**Solución:** Aplicar la fórmula

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{Gm_1m_2}{r^2} \\
 &= \frac{6,673(10^{-11})(400)(400)}{1^2} \\
 &= 1,07 * 10^{-5} \quad \text{Newtons} \\
 &= 0,11 * 10^{-5} \quad \text{kilogramos-peso} \\
 &= 0,11 * 10^{-2} \quad \text{gramos-peso} \\
 &= 1,1 \quad \text{miligramos-peso}
 \end{aligned}$$

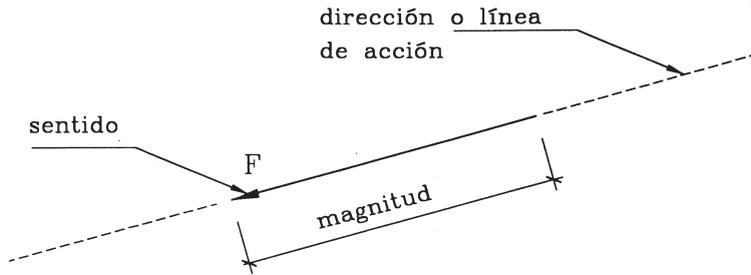
Como puede apreciarse la atracción es muy pequeña: aproximadamente una milésima de gramo-peso. Estas fuerzas tienen la dirección de la línea que une los centros de los cuerpos.

## 1.3 Concepto de Fuerza

### 1.3.1 Propiedades de una Fuerza

Una fuerza tiene tres propiedades: *magnitud*, *dirección* y *sentido*, las que deben ser simultáneamente especificadas para su correcta individualización (Fig. 1.3). La magnitud, o módulo, indica el tamaño o intensidad de la fuerza, por ejemplo, fuerzas de 100 kg, 200 kg y 1.000 kg tienen distinta magnitud. Gráficamente la magnitud se indica mediante la longitud del trazo que la representa, adoptando, si es necesario, una escala determinada. La dirección de la fuerza corresponde a su *línea de acción*, que es la recta en el espacio donde reside la fuerza. El sentido indica hacia qué extremo de la línea de acción apunta la fuerza, lo que se designa gráficamente por una punta de flecha.

La fuerza es un ente que corresponde a lo que en matemáticas se denomina una cantidad *vectorial*, que se diferencia de las cantidades llamadas *escalares* en que estas últimas tienen como única propiedad la magnitud. Ejemplos de cantidades escalares son volumen, masa, temperatura, peso (\$), las que se pueden sumar y restar directamente como cantidades algebraicas. Ejemplos de cantidades vectoriales, aparte de las fuerzas, son, entre otras, velocidad, aceleración y posición en el espacio. Las operaciones con estas cantidades involucran sus tres propiedades, de modo que deben definirse reglas especiales diferentes al álgebra elemental, como se presentará en las Secciones siguientes.



**Figura 1.3** Modelo de fuerza

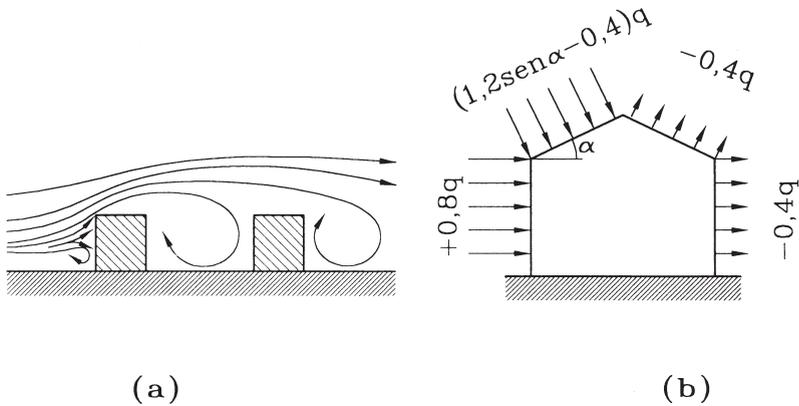
### 1.3.2 Tipos de Fuerzas

En la Sección 1.2 se fundamentó la causa del peso de los cuerpos como la fuerza con que la Tierra los atrae. Este tipo de fuerzas, siempre presentes en las estructuras, se denominan *cargas gravitacionales*, las que obviamente tienen dirección vertical y sentido hacia abajo. Entre éstas se distinguirán las llamadas de *peso propio* o *peso muerto* y las *cargas de uso* o *sobrecargas* o *cargas vivas*. Las cargas de peso propio comprenden todas las cargas permanentes sobre la estructura: el peso propio de los materiales de obra gruesa y terminaciones, y todas las cargas inmóviles de larga duración, como por ejemplo la tierra de relleno de una jardinera del balcón de un edificio. Las sobrecargas comprenden, en el caso de edificios, las personas y el mobiliario. En otras obras, como puentes, la sobrecarga es el tráfico vehicular; en un embalse o en un muro de contención, la carga de uso es la presión del agua o el empuje del terreno respectivamente. Los valores de las sobrecargas para diseño son en general valores extremos, para condiciones extremas de uso de relativamente baja probabilidad de ocurrencia en la vida útil de la estructura (ver Tabla V.1).

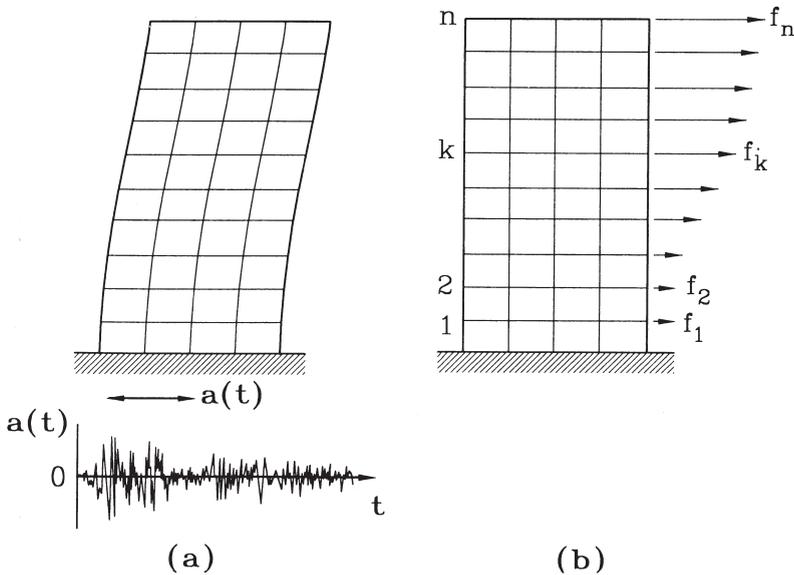
Otro grupo importante de cargas son las llamadas *ambientales*. Entre ellas se encuentran los efectos del viento, sismos, temperatura y nieve, aunque esta última es por cierto también de tipo gravitacional. Las cargas de viento y sismo, y en ciertos casos la nieve, se denominan también *cargas eventuales*, porque corresponden a acciones que son de ocurrencia esporádica.

El viento es una masa de aire que se desplaza con cierta velocidad que al chocar con las construcciones genera presiones y succiones sobre las superficies que recorre. Estas fuerzas dependen de la forma del cuerpo expuesto al viento, ya que aquél puede ofrecer mayor o menor resistencia al paso de éste, y son perpendiculares a las superficies del cuerpo (Fig. 1.4). Las fuerzas de viento dependen de su velocidad, la que aumenta con la altura sobre el nivel del terreno, y de la ubicación de la construcción: en la ciudad, a campo abierto, o frente al mar.

El movimiento del suelo durante un terremoto, tanto en el plano horizontal como en la dirección vertical, ocasiona deformaciones en las estructuras, las que producen esfuerzos internos en los elementos estructurales resistentes. En forma muy simplificada, la acción del sismo sobre un edificio puede asimilarse a un conjunto de fuerzas laterales equivalentes, como muestra la Fig. 1.5. Típicamente, para un edificio la mayor preocupación es el efecto lateral u horizontal del sismo, ya que generalmente hay más que suficiente resistencia vertical que ha debido proveerse para soportar las cargas gravitacionales.



**Figura 1.4** Efecto del viento sobre una construcción



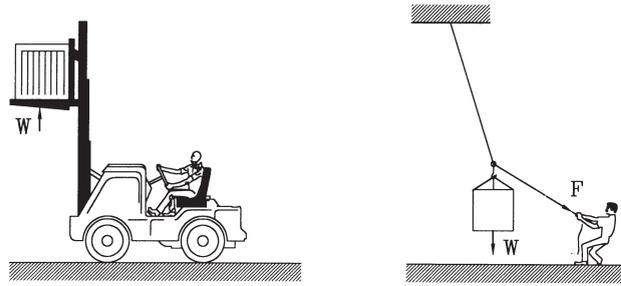
**Figura 1.5** Solicitaciones sísmicas en edificios: a) Caso real, b) Fuerzas laterales equivalentes

En general, las cargas sobre una estructura no se deciden en forma arbitraria, sino hay normas que las especifican. Entre ellas cabe mencionar las siguientes normas chilenas: la NCh1537.Of86 que especifica las cargas permanentes y sobrecargas de uso para el diseño estructural de edificios, la NCh431.Of77 que especifica las sobrecargas de nieve, la NCh432.Of71 para el cálculo de la acción del viento sobre las construcciones, y la NCh433.Of96 para el diseño sísmico de edificios.

Entre las cargas ambientales se mencionó la temperatura. Aunque hay diversas fuentes calóricas, se han clasificado estas cargas así, ya que la fuente primordial de calor es la energía solar, e inversamente, su ausencia genera enfriamiento. El aumento de temperatura genera dilatación de los cuerpos, y su disminución contracción. Si se opone resistencia a estos cambios de volumen, se producen fuerzas que pueden llegar a ser extraordinariamente grandes, tan grandes que pueden producir la rotura de los cuerpos afectos a ellas. Por ello se proveen juntas de dilatación en estructuras y pavimentos, para permitir que las deformaciones térmicas ocurran libremente y no se generen fuerzas. En los puentes se provee un apoyo móvil, montando uno de sus extremos sobre un soporte de material elastomérico, para permitir el cambio de longitud de la estructura (Fig. 1.6). Similar a la temperatura es el efecto de retracción del hormigón, que corresponde a una disminución de su volumen, muy rápida en las primeras etapas del fraguado, pero que continúa por meses y años durante toda la vida del hormigón. Cuando hay oposición a la retracción natural del hormigón, aparecen fuerzas de tracción en él, las que ocasionan la aparición de fisuras, que no son otra cosa que expresión de la rotura del hormigón por tracción, esfuerzo para el cual este material es particularmente débil.



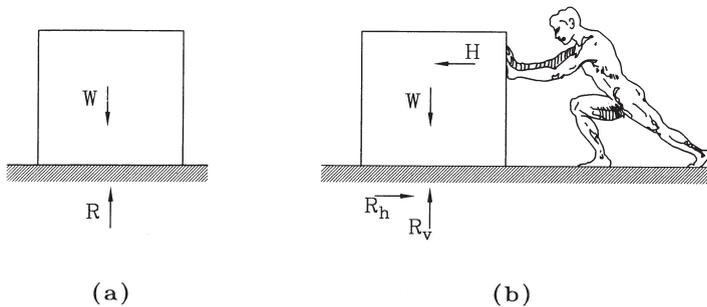
**Figura 1.6** Apoyos de un puente



**Figura 1.7** Fuerzas realizadas por máquinas o el hombre

Otras fuentes de fuerzas son las que realizan las máquinas, y el hombre (Fig. 1.7), las que desde luego pueden ser de las más variadas características.

Una categoría de fuerzas de particular importancia son las llamadas *reactivas*. Estas aparecen como consecuencia del impedimento al desplazamiento de un cuerpo, y pueden a veces ser más difíciles de reconocer pues en cierta forma están ocultas y su presencia debe ser inferida, al contrario de las fuerzas gravitacionales, o una fuerza ejercida por un hombre, por ejemplo, que se manifiestan en forma explícita. Considérese por ejemplo el bloque de peso  $W$  de la Fig. 1.8.a que descansa sobre el piso horizontal. Es fácil imaginar que en el sistema considerado actúa la fuerza vertical  $W$ , pero debemos deducir que sobre el bloque también actúa una fuerza  $R$  de dirección vertical y sentido hacia arriba. Tal fuerza aparece exclusivamente como resultado de la restricción que el piso impone al posible desplazamiento vertical del bloque. En efecto, si el piso no estuviese, el bloque iría viajando en caída libre vertical; como tal movimiento no ocurre debe existir una fuerza que precisamente lo impide. Notar que existe una íntima relación entre la fuerza reactiva y el desplazamiento impedido: *ambos tienen la misma línea de acción pero sentidos opuestos*. Esta relación constituirá un elemento clave para reconocer la presencia de fuerzas reactivas: en general, las condiciones de un problema incluirán ciertas restricciones de desplazamiento, en correspondencia con las cuales deberán existir fuerzas reactivas asociadas que las materialicen. Por supuesto se puede anticipar que en este ejemplo el equilibrio exige  $R=W$ .



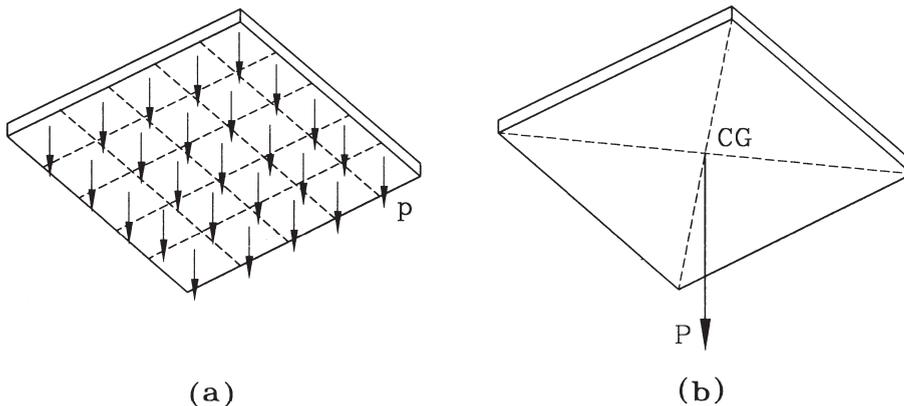
**Figura 1.8** Fuerzas reactivas

En la Fig. 1.8.b se observa el mismo bloque anterior al cual se ha aproximado un hombre a ejercer una fuerza horizontal  $H$ . Si el bloque se mantiene en reposo se deduce que no sólo hay restricción a su movimiento vertical, sino también a su desplazamiento horizontal hacia la izquierda. Como existen dos desplazamientos impedidos, se concluye la existencia de dos fuerzas reactivas asociadas a ellos  $R_v$  vertical y  $R_h$  horizontal. Cabe notar además que la fuerza reactiva  $R_h$  se genera en respuesta a la demanda  $H$ , es decir si ésta no estuviese presente, no existiría  $R_h$ , porque no existiría posibilidad alguna de movimiento en dirección horizontal. Notar también que esta discusión es independiente del mecanismo físico que origina la fuerza  $R_h$ ; si el reposo se ha mantenido puede ser simplemente porque existe suficiente fricción en el contacto del bloque con el piso, o bien porque el bloque está clavado al piso.

### 1.3.3 Centro de Gravedad

A excepción de las partículas, en los cuerpos la masa (materia) está distribuida en la extensión de su volumen, por ello, el peso de un cuerpo está también repartido espacialmente.

Esta distribución del peso puede visualizarse considerando un cuerpo de forma simple, como por ejemplo el tablero rectangular de madera, de espesor constante, que muestra la Fig. 1.9.a. Suponiendo que el material es *homogéneo*, es decir que sus propiedades son las mismas en toda su extensión, cualquier porción de igual volumen tiene el mismo peso. Si imaginariamente se considera el tablero subdividido en 25 partes, como en la Fig. 1.9.a, cada parte pesa  $p=P/25$ , siendo  $P$  el peso total del tablero. Por cierto, puede pensarse en un número muy grande de partes, y cada parte pesará la fracción correspondiente del total, llegándose a una distribución uniforme muy fina del peso total.

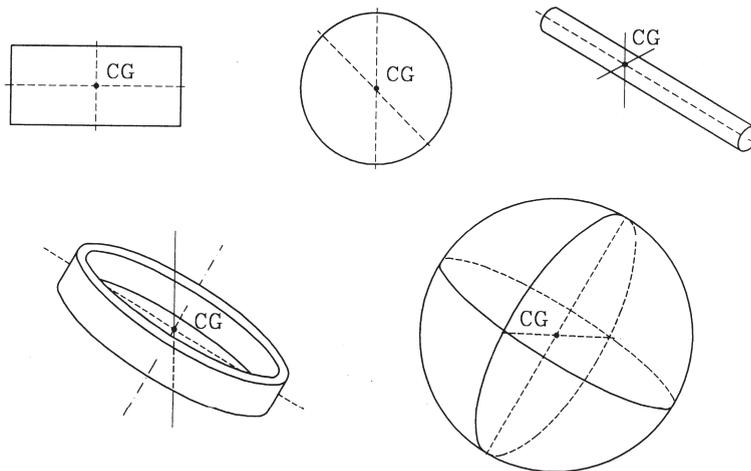


**Figura 1.9** Tablero de madera: a) peso distribuido, b) peso concentrado

Trabajar con la distribución real de la masa de un cuerpo exigiría considerar un número enorme de pequeñas fuerzas correspondientes a su peso distribuido. Ello sería muy complejo, aún para cuerpos de forma simple como el de la Fig. 1.9. Afortunadamente tal complejidad es innecesaria porque desde el punto de vista del equilibrio en todo cuerpo existe un punto, llamado *centro de gravedad*, en el cual puede suponerse actuando concentradamente su peso total, como se muestra en la Fig. 1.9.b para el ejemplo del tablero. Se dice entonces que la fuerza o peso total  $P$  de la Fig. 1.9.b es *estáticamente equivalente* a la distribución uniforme de pesos  $p$  de la Fig. 1.9.a.

El centro de gravedad no es un punto arbitrariamente definido sino un punto que efectivamente tiene una propiedad física muy especial. Por ejemplo, si se quiere equilibrar el tablero apoyándolo en un solo punto (en la punta de un clavo o de un dedo), el único punto que permitirá lograr el equilibrio es el centro de gravedad (CG). Es decir, físicamente, el CG es el “centro” de la masa, o como también podría decirse, es el punto “promedio” de la distribución espacial de la masa.

Esta condición de “centro” o “promedio” permite deducir que siempre que un cuerpo homogéneo tenga un eje de simetría el CG estará sobre dicho eje. Ello porque siempre un eje de simetría divide el cuerpo en dos partes iguales, o sea de igual forma y peso, por lo tanto el “centro” no puede estar a uno ni otro lado de la línea divisoria sino sobre ella. Esto permite localizar en forma inmediata el CG de formas geométricas simples, ya que si hay dos ejes de simetría el CG debe estar en su intersección. Naturalmente en el caso de volúmenes, siempre que exista un plano de simetría el CG estará sobre él. La Fig. 1.10 muestra los CG de varios cuerpos simples: rectángulo, círculo, anillo, barra, esfera. En la Tabla V.2 se presentan propiedades y centros de gravedad de cuerpos comunes.



**Figura 1.10** Centros de gravedad de formas geométricas que presentan simetría

El caso del triángulo merece especial consideración. En un triángulo se definen las *transversales de gravedad* como las líneas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto. La Fig. 1.11.a muestra  $t_c$ , la transversal de gravedad correspondiente al vértice C. Obviamente  $t_c$  no es un eje de simetría, pero tiene la particular propiedad de dividir el triángulo en dos mitades iguales: de igual área y de igual peso si el material es homogéneo. De igual área porque por definición el punto D en la Fig. 1.11.a divide el lado AB en dos partes iguales de longitud  $c/2$ , luego las áreas de los triángulos ADC y BCD son ambas iguales a  $ch/4$  (un medio de la base por la altura). Además las distancias de A y B a  $t_c$  son iguales, y también deben serlo las distancias de los centros de gravedad de los triángulos ADC y DBC a  $t_c$ , luego el CG del triángulo ABC debe estar sobre la línea  $t_c$ . Si se traza cualquiera de las otras dos transversales de gravedad,  $t_a$  por ejemplo, el CG debe estar en la intersección de  $t_a$  y  $t_c$ . Aún más, como lo anterior ocurre para cualquier par de transversales que se escoja ( $t_a$  con  $t_c$ ,  $t_b$  con  $t_c$ , o  $t_a$  con  $t_b$ ) queda demostrado que las tres transversales de gravedad son concurrentes y que el CG es el punto de concurrencia (Fig. 1.11.b). Además, puede demostrarse que el CG intercepta a cada una de las transversales en segmentos cuyas longitudes están en la razón 1:2, es decir, la distancia de C a CG es el doble de la distancia de CG a D.

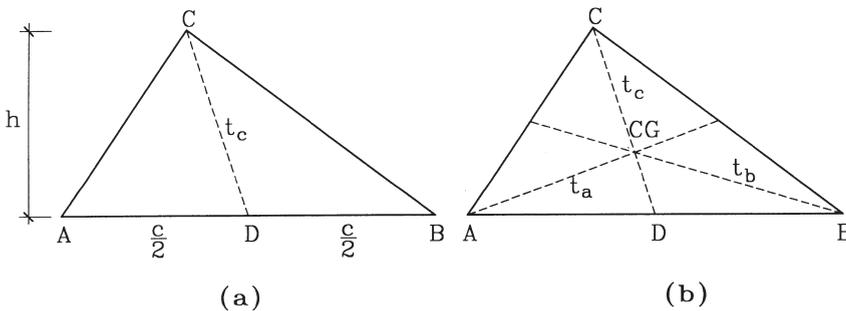


Figura 1.11 Centro de gravedad de un triángulo

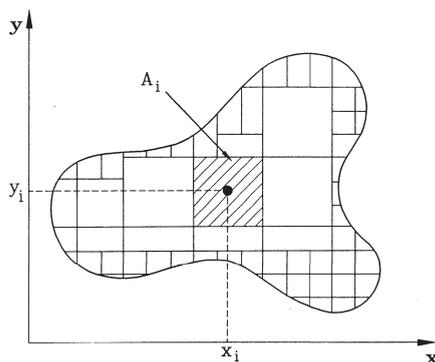


Figura 1.12 Subdivisión discreta de un área plana

A continuación se considera la determinación de la ubicación del centro de gravedad para el caso de cuerpos planos homogéneos. Sea un cuerpo de forma cualquiera como el que se muestra en la Fig. 1.12, el cual se ha subdividido en un número  $n$  de áreas conocidas, en que el área del segmento  $i$  es  $A_i$  y la posición del CG del segmento  $i$  está definida por las coordenadas  $x_i, y_i$ . En los bordes curvos la subdivisión deberá ser más fina, con el objeto de representar la forma del cuerpo de la manera más fiel posible mediante pequeños segmentos de formas regulares, como rectángulos, triángulos o trapecios. Las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo se definen como:

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i P_i}{\sum_{i=1}^n P_i} \quad (1-10)$$

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (1-11)$$

Notar que las definiciones anteriores no son otra cosa que lo que normalmente se conoce como un *promedio ponderado*. En efecto, por ejemplo, lo que se denomina el promedio ponderado acumulado del rendimiento académico de un estudiante universitario tiene exactamente la misma definición:

$$PPA = \frac{\sum_{i=1}^n N_i c_i}{\sum_{i=1}^n c_i} \quad (1-12)$$

en que  $N_i$  es la nota en el curso  $i$ ,  $c_i$  su número de créditos, y  $n$  el número de materias cursadas. El concepto de “ponderación” refleja el hecho que los cursos no tienen igual “peso” pues tienen distinto creditaje, por ello las notas deben ponderarse asignándoles un valor proporcional al creditaje. El promedio “corriente” de notas de igual valor, es decir sin corrección por creditaje u otro factor, es simplemente:

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{n} \quad (1-13)$$

lo que corresponde a considerar  $c_i \equiv 1$  para todo  $i$ .

El método de cálculo implícito en las Ecs. 1-10 y 1-11 obviamente corresponde al concepto aplicado por Arquímedes (Ejemplo 1.1). Naturalmente, por otra parte, las ecuaciones mencionadas se transforman en *integrales* cuando el modelo deja de ser discreto (subdivisión en un número finito de partes) y se aborda como un continuo (subdivisión en infinitas partes).

**Ejemplo 1.3**

Determinar el centro de gravedad de un cartón delgado de la forma que se muestra en la Fig. E1.3.a

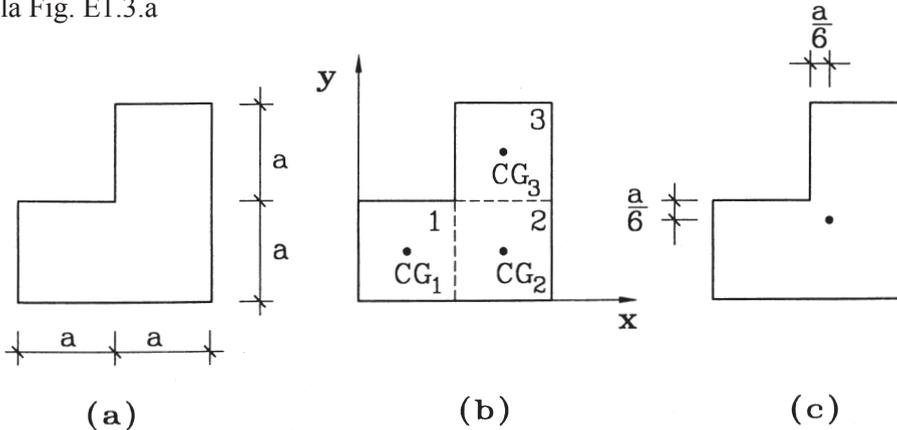


Figura E1.3

**Solución:** Se escoge un sistema de ejes de referencia, como por ejemplo el indicado en la Fig. E1.3.b. Por cierto hay distintas alternativas y libertad para escoger el sistema de ejes, aunque en algunos casos puede haber elecciones más convenientes que simplifiquen los cálculos.

A continuación se subdivide el cuerpo en segmentos de área simples cuyos CG son conocidos. En este caso, se ha subdividido el cartón en tres cuadrados iguales (Fig. E1.3.b) de modo que sus áreas y centros de gravedad son:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= a^2 & x_1 &= \frac{a}{2} & y_1 &= \frac{a}{2} \\
 A_2 &= a^2 & x_2 &= \frac{3a}{2} & y_2 &= \frac{a}{2} \\
 A_3 &= a^2 & x_3 &= \frac{3a}{2} & y_3 &= \frac{3a}{2}
 \end{aligned}$$

luego:

$$x^* = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a^2 + \frac{3a}{2} \cdot a^2 + \frac{3a}{2} \cdot a^2}{a^2 + a^2 + a^2} = \frac{\frac{a^3}{2}(1+3+3)}{3a^2} = \frac{7a}{6}$$

$$y^* = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a^2 + \frac{a}{2} \cdot a^2 + \frac{3a}{2} \cdot a^2}{a^2 + a^2 + a^2} = \frac{\frac{a^3}{2}(1+3+3)}{3a^2} = \frac{5a}{6}$$

El CG calculado se muestra en la Fig. E1.3.c

#### Ejemplo 1.4

Determinar el centro de gravedad del cuerpo plano homogéneo de la Fig. E1.4 que tiene dos perforaciones circulares de radio “a”.

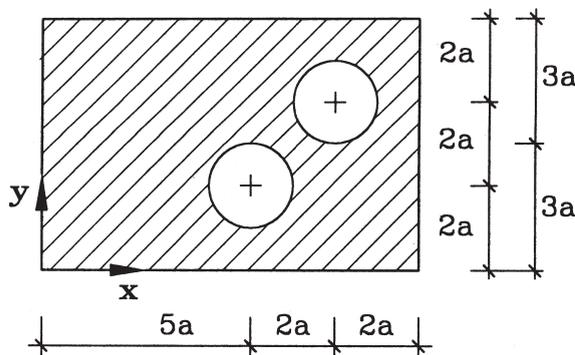


Figura E1.4

**Solución:** Este ejemplo ilustra que en la subdivisión del cuerpo en segmentos pueden considerarse áreas “en exceso” las que por cierto deben simultáneamente sustraerse. En efecto, en este caso los segmentos escogidos y sus áreas son:  $A_1 = 54a^2 = \text{área total}$

del rectángulo, y  $A_2=A_3=\pi a^2$ =área de las perforaciones. Entonces, al utilizar las Ecs. 1-10 y 1-11,  $A_2$  y  $A_3$  deben incorporarse con signo negativo, para restarlas del área  $A_1$  que las incluyó a pesar de ser espacios vacíos:

$$x^* = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{54a^2 \cdot 4,5a - \pi a^2 \cdot 7a - \pi a^2 \cdot 5a}{54a^2 - 2\pi a^2} = 4,3a$$

$$y^* = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{54a^2 \cdot 3a - \pi a^2 \cdot 2a - \pi a^2 \cdot 4a}{54a^2 - 2\pi a^2} = 3a$$

**Ejemplo 1.5**

Determinar el centro de gravedad de un alambre delgado, de peso constante por unidad de longitud, doblado en forma de M como se muestra en la Fig. E1.5.a.

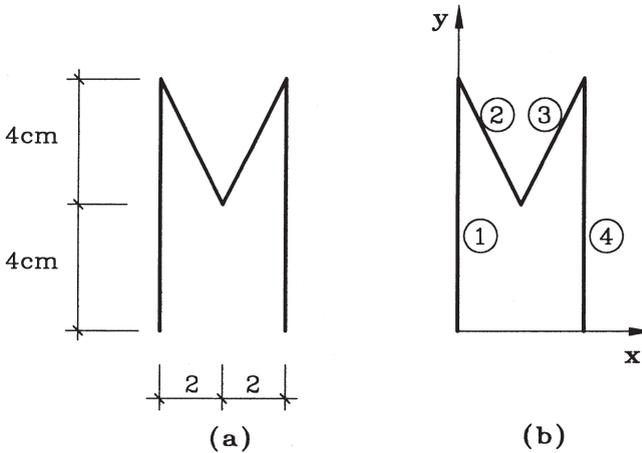


Figura E1.5

**Solución:** Este ejemplo ilustra un caso de distribución de masa sobre una línea. Escogiendo los ejes de referencia y numerando los segmentos como se indica en la Figura E1.5.b, y siendo L la longitud de los segmentos 2 y 3:

$$L = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4,472 \text{ cm}$$

los cálculos se organizan en la siguiente tabla:

Segmento	$L_i$ (cm)	$x_i$	$y_i$	$x_i L_i$	$y_i L_i$
1	8	0	4	0	32
2	4,472	1	6	4,472	26,832
3	4,472	3	6	13,416	26,832
4	8	4	4	32	32
$\Sigma$	24,944			49,888	117,664

$$x^* = \frac{\sum x_i L_i}{\sum L_i} = \frac{49,888}{24,944} = 2 \text{ cm} \quad (\text{resultado obvio por simetría})$$

$$y^* = \frac{\sum y_i L_i}{\sum L_i} = \frac{117,664}{24,944} = 4,717 \text{ cm}$$

### Ejemplo 1.6

Determinar la posición del centro de gravedad de un círculo homogéneo de espesor constante al que se le ha recortado un cuadrado como se muestra en la Fig. E1.6.

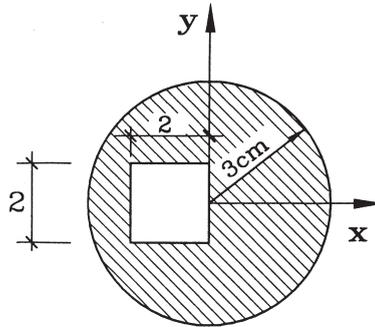


Figura E1.6

**Solución:** Similarmente al procedimiento usado en el Ejemplo 1.4, se tiene:

$$x^* = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\pi(3)^2(0) + (-4)(-1)}{\pi(3)^2 - 4} = 0,165 \text{ cm}$$

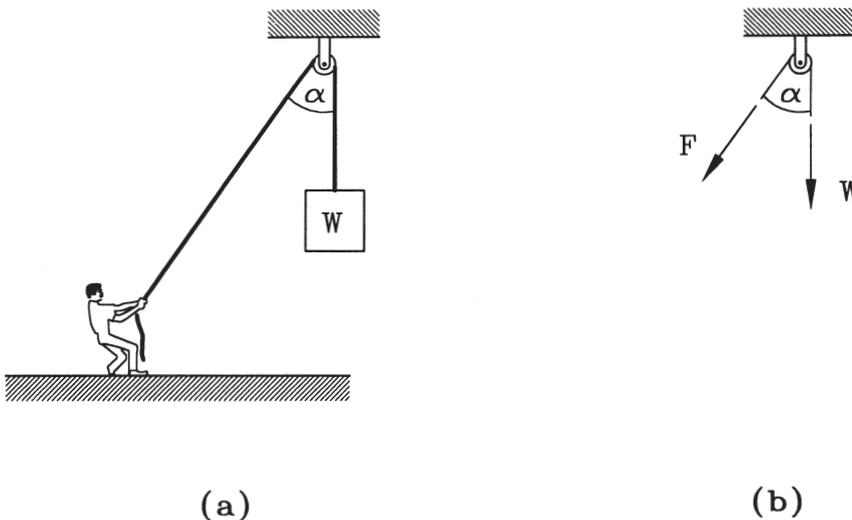
$$y^* = 0 \quad (\text{por simetría con respecto al eje } x)$$

## 1.4 Operaciones con Fuerzas

### 1.4.1 Principio de Transmisibilidad de una Fuerza

El *Principio de Transmisibilidad* establece que desde el punto de vista del equilibrio *una fuerza puede considerarse actuando en cualquier punto de su línea de acción*. Naturalmente, este principio es consistente con el concepto de fuerza definido en la Sección 1.3.1; en efecto, una fuerza queda definida por su dirección o línea de acción, no siendo necesario para el equilibrio explicitar en qué punto específico de ella se ubica. Así, la fuerza de la Fig. 1.3 puede “desplazarse” a cualquier posición dentro de su línea de acción, manteniendo inalterado su efecto estático. Obviamente en lo anterior está implícito que si la fuerza actúa sobre un cuerpo, el principio no permite trasladarla para hacerla actuar sobre otro cuerpo.

La Fig. 1.13.a muestra un hombre que tira de una cuerda para sostener una carga. La Fig. 1.13.b muestra el *modelo* de la situación anterior. La fuerza que realiza el hombre, designada por  $F$ , tiene por línea de acción la dirección de la cuerda, siendo indiferente su posición. Físicamente, puede pensarse en este caso que la fuerza  $F$  que ejercen las manos del hombre se “transmite” sin variación a lo largo de la cuerda, de manera que en cualquier punto que se “corte” ficticiamente la cuerda, para *modelar* el problema, estará actuando igual fuerza  $F$ . Igual discusión puede realizarse en relación la carga de peso  $W$ ; en el modelo,  $W$  se ubicará en cualquier posición de la línea vertical que pasa por el centro de gravedad del cuerpo.



**Figura 1.13** Situación real y su modelo

Es relevante discutir a continuación por qué se precisó que la transmisibilidad de las fuerzas es válida sólo desde el punto de vista del equilibrio. Tal precisión es necesaria porque desde el punto de vista del cuerpo que experimenta la fuerza, el

punto de aplicación de ella sí es relevante. En efecto, los *esfuerzos internos* en un objeto, en general serán diferentes si la fuerza externa se aplica en puntos diferentes. El ejemplo de la Fig. 1.14 ilustra este punto: la Fig. 1.14.a muestra a un hombre al que se le aplica una fuerza  $H$  “empujando” sobre uno de sus brazos, mientras la Fig. 1.14.b muestra al mismo hombre, pero ahora la fuerza  $H$  está “tirando” de su otro brazo. Obviamente lo que “siente” el hombre, es decir, los esfuerzos internos en él, son distintos; sin embargo, para efectos de su equilibrio, las fuerzas que el piso ejerce sobre él son idénticas en ambos casos (siempre que él se mantenga rígidamente erguido en igual posición en las dos situaciones descritas).

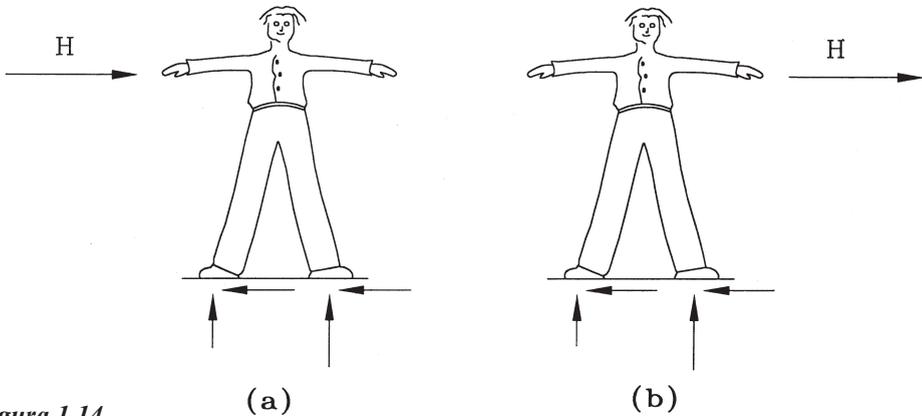


Figura 1.14

### 1.4.2 Composición de Fuerzas

La operación de *composición* de fuerzas corresponde a lo que ordinariamente se llama realizar la “suma” de las fuerzas. La palabra composición, sin embargo, enfatiza que tal operación no es una simple suma, ya que en ella intervienen simultáneamente las tres propiedades de las fuerzas: magnitud, dirección, y sentido. La composición puede realizarse en forma analítica utilizando el álgebra vectorial, pero ello no se hará aquí, ya que tales conocimientos no son requisito para los lectores de este texto; en cambio, se privilegiará una presentación geométrica, que tiene la ventaja adicional de mantenerse más próxima a la realidad física del problema. Un método analítico simple, que sólo requiere el uso de la trigonometría, se verá más adelante en el Ejemplo 1.8.

Sean  $P_1$  y  $P_2$  (Fig. 1.15.a) dos fuerzas concurrentes en el punto  $O$ , su composición se realiza aplicando la *Ley del Paralelogramo* que establece que *la resultante de dos fuerzas concurrentes es la diagonal del paralelogramo formado por ellas*. Notar que dos fuerzas concurrentes son forzosamente *coplanares*. La construcción geométrica se realiza en la forma indicada en la Fig. 1.15.b: por el extremo  $A_1$  de la fuerza  $P_1$  se traza una paralela a la fuerza  $P_2$ , y por el extremo  $A_2$  de la fuerza  $P_2$  se traza una

paralela a la fuerza  $P_1$ , formándose el paralelogramo  $OA_1BA_2$ . La fuerza  $R$  aplicada en  $O$ , de magnitud igual a la diagonal del paralelogramo, de dirección  $OB$ , y sentido de  $O$  a  $B$ , es la *resultante* de  $P_1$  y  $P_2$ , es decir su efecto es enteramente equivalente a la acción conjunta de  $P_1$  y  $P_2$ . Se dice entonces que  $R$  es estáticamente equivalente a  $P_1$  y  $P_2$  y se escribe simbólicamente:

$$\{R\} = \{P_1, P_2\} \tag{1-14}$$

La extensión del procedimiento anterior al caso de varias fuerzas coplanares concurrentes es trivial. Efectivamente, basta con proceder en forma sucesiva con pares de fuerzas. La Fig. 1.16.a muestra en un sistema dado de 3 fuerzas. En la Fig. 1.16.b se muestra la composición de  $P_1$  y  $P_2$  obteniéndose la resultante parcial  $P_{12}$ , y finalmente, en la Fig. 1.16.c se componen  $P_{12}$  con  $P_3$  obteniéndose la resultante final  $R$ . Se tiene entonces:

$$\{R\} = \{P_{12}, P_3\} = \{P_1, P_2, P_3\}$$

Naturalmente el punto  $O$  de la Fig. 1.16.c es coincidente con el punto  $O$  de la Fig. 1.16.a; la presentación en tres figuras separadas sólo ha tenido por objeto mostrar con mayor claridad las etapas de la construcción geométrica.

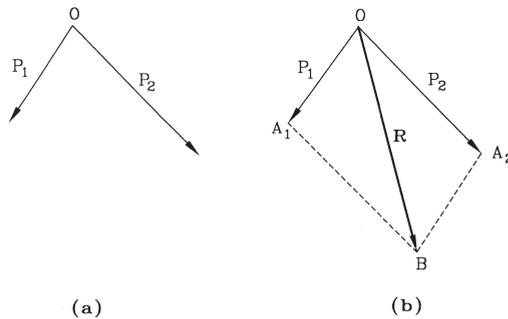


Figura 1.15 Composición de fuerzas

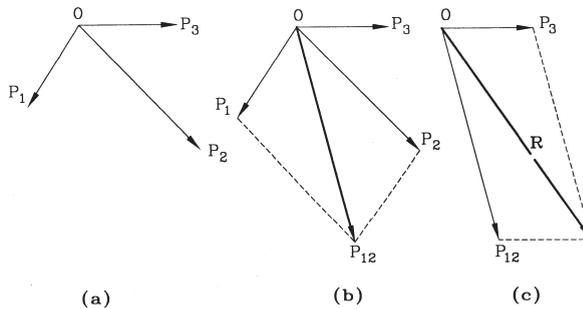
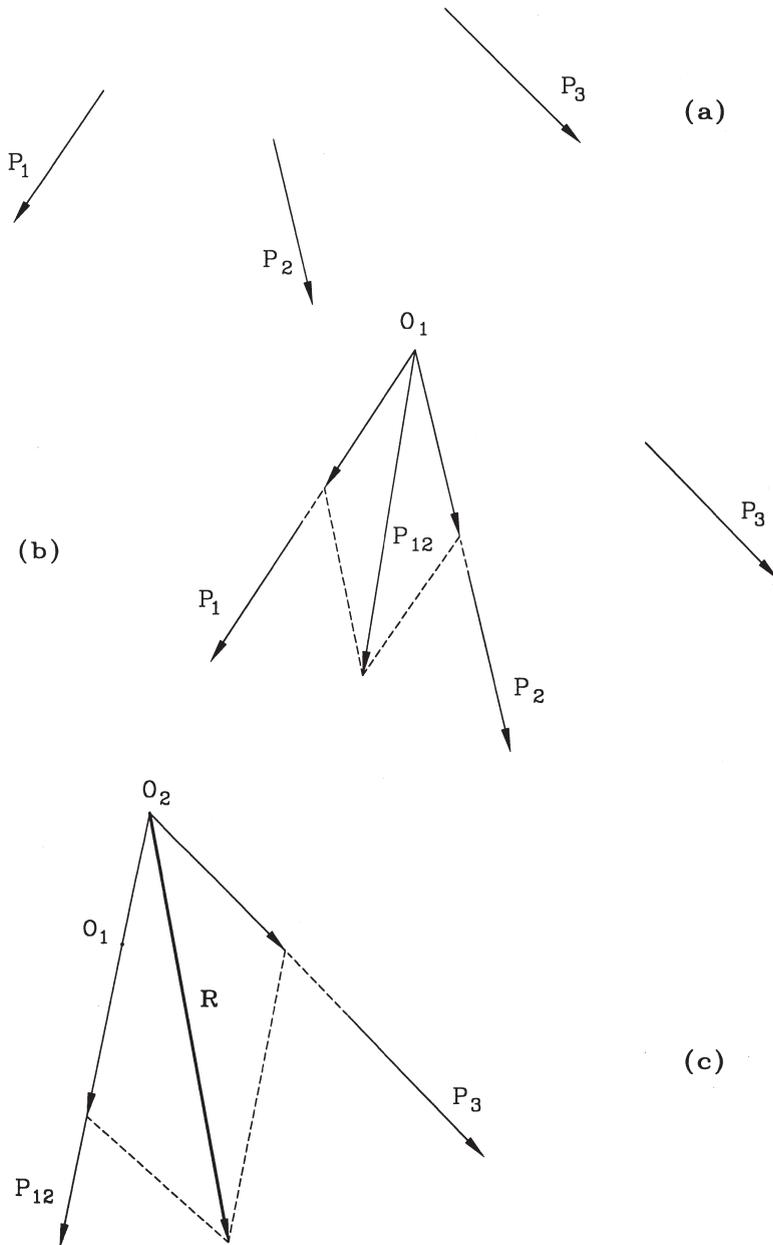


Figura 1.16 Composición de 3 fuerzas concurrentes



**Figura 1.17** Composición de fuerzas no concurrentes

En el caso de fuerzas coplanares no concurrentes a un punto, el procedimiento anterior puede aplicarse con ayuda del principio de transmisibilidad de las fuerzas. Sean tres fuerzas coplanares cualesquiera como  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  de la Fig. 1.17.a. Las fuerzas  $P_1$  y

$P_2$  pueden primero trasladarse a su punto de intersección  $O_1$  (Fig. 1.17.b), y construir allí el paralelogramo correspondiente para encontrar su resultante  $P_{12}$ . A continuación se componen las fuerzas  $P_{12}$  y  $P_3$ , trasladándolas a su punto de intersección  $O_2$  (Fig. 1.17.c), donde se construye su paralelogramo para determinar  $R$ , fuerza estáticamente equivalente al sistema original dado:

$$\{R\} = \{P_{12}, P_3\} = \{P_1, P_2, P_3\}$$

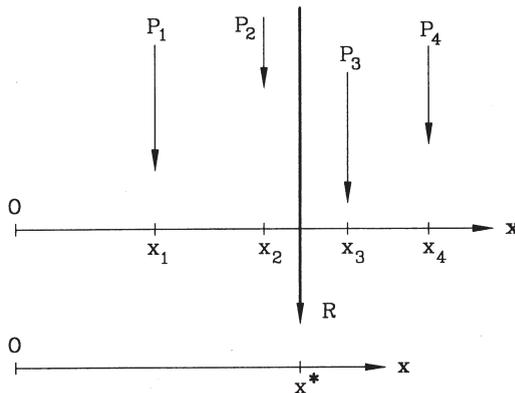
Las construcciones geométricas anteriores no son factibles si las fuerzas son paralelas. En tal caso se puede proceder mediante la construcción del *Polígono Funicular*, que se verá en la Sección 1.4.5, pero también es posible utilizar el concepto de centro de gravedad, como se describe a continuación. Sean varias fuerzas coplanares paralelas  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ , como ilustra la Fig. 1.18, y sean  $x_1, x_2, x_3$ , y  $x_4$  sus distancias a un origen de referencia  $O$ . La resultante de este sistema tiene magnitud  $R$  igual a la suma de las magnitudes de las fuerzas dadas:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

y su línea de acción pasa por el punto de coordenada  $x^*$  tal que (Ec. 1-10):

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i P_i}{\sum_{i=1}^n P_i}$$

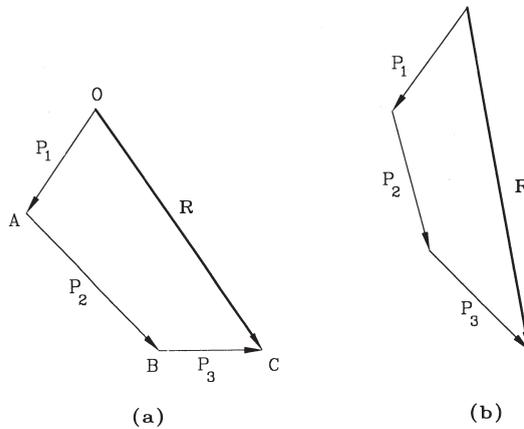
La regla anterior funciona incluso si algunas fuerzas tienen sentido contrario. El caso especial en que la suma algebraica de las magnitudes de las fuerzas es nula, i.e.  $x^* = \infty$ , se interpretará físicamente más adelante.



**Figura 1.18** Composición de fuerzas coplanares paralelas

### 1.4.3 El Polígono de Fuerzas

Una forma geométrica alternativa de encontrar la resultante de un sistema de fuerzas es construir el polígono de ellas, lo que se realiza copiando paralelamente las fuerzas una a continuación de la otra. Por ejemplo, considerando el sistema de fuerzas dado en la Fig. 1.16.a, el *polígono de las fuerzas* corresponde a la línea OABC de la Fig. 1.19.a y la fuerza resultante  $R$  es la que va desde el inicio de la primera fuerza al término de la última, es decir de  $O$  a  $C$ . Obviamente, para realizar la construcción del polígono de fuerzas es inmaterial el orden en que se copian las fuerzas, resultando siempre el mismo punto final para cualquiera de las combinaciones posibles.



**Figura 1.19** Polígonos de fuerzas

Si el sistema de fuerzas es concurrente, como el de la Fig. 1.16.a, la resultante queda completamente determinada pues se conoce un punto de su línea de acción, el punto de concurrencia  $O$ . En el caso de un sistema de fuerzas no-concurrentes como el de la Fig. 1.17.a también se puede construir su polígono, como se muestra en la Fig. 1.19.b; ello permite encontrar la resultante en magnitud y dirección, pero no se conoce su línea de acción ya que no se dispone de un punto de ella. Para definir ese punto hay que realizar la construcción de la Fig. 1.17 o recurrir al polígono funicular que se presentará en la Sección 1.4.5.

Una situación de particular importancia es aquella en que el polígono de fuerzas es *cerrado*, es decir, la última fuerza termina exactamente en el punto de inicio de la primera, como se muestra en la Fig. 1.20. Este caso corresponde a un sistema de fuerzas con *resultante nula*, condición fundamental para el equilibrio de un sistema. Por esta razón, el polígono de fuerzas se utilizará más adelante como una herramienta geométrica fundamental para encontrar relaciones entre las fuerzas en un sistema en equilibrio.

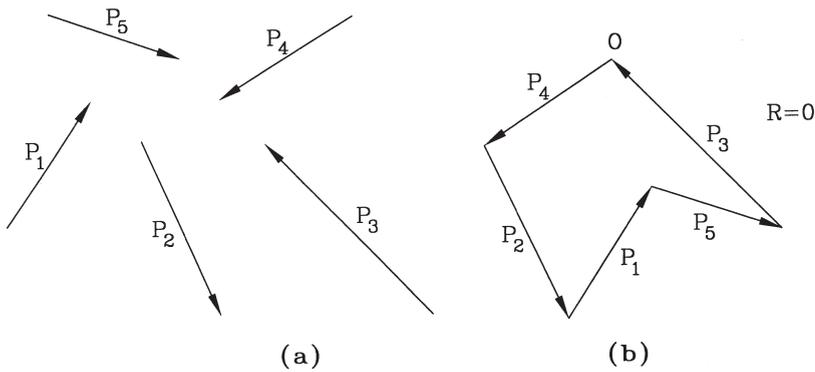


Figura 1.20 Sistema con polígono de fuerzas cerrado

### 1.4.4 Descomposición de Fuerzas

Una fuerza puede *descomponerse* según dos direcciones cualesquiera aplicando la Ley del Paralelogramo en forma inversa. Dada la fuerza  $P$  y las direcciones 1 y 2 de la Fig. 1.21.a, las *componentes*  $P_1$  y  $P_2$  de  $P$  se obtienen completando el paralelogramo que tiene a  $P$  como diagonal, como se muestra en la Fig. 1.21.b. Obviamente se cumple que la fuerza  $P$  es estáticamente equivalente al conjunto de sus dos componentes, es decir:

$$\{P\} = \{P_1, P_2\}$$

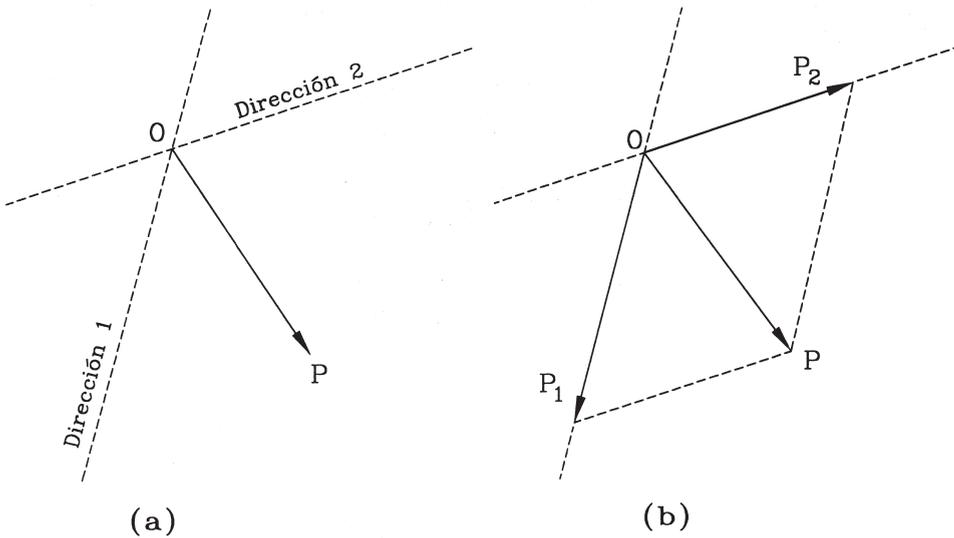
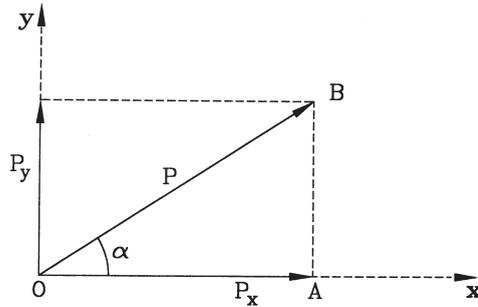


Figura 1.21 Descomposición de una fuerza



**Figura 1.22** Proyecciones ortogonales de una fuerza

Es muy usual y conveniente aplicar la descomposición utilizando dos direcciones perpendiculares entre sí, las que normalmente son referidas como *ejes ortogonales*, o *sistema de ejes cartesiano*. La Fig. 1.22 muestra una fuerza  $P$  que se ha descompuesto en sus componentes  $P_x$  y  $P_y$  según los ejes  $x$  e  $y$ .  $P_x$  y  $P_y$  se denominan también *proyecciones* de  $P$  sobre los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente.

Obviamente:

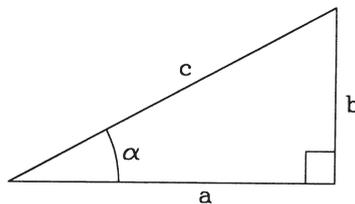
$$\{P\} = \{P_x, P_y\}$$

Las proyecciones ortogonales tienen la ventaja de permitir usar las funciones trigonométricas básicas, que en un triángulo rectángulo, como el de la Fig. 1.23, se definen como:

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \quad (1-15)$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} \quad (1-16)$$

$$\text{tan } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} \quad (1-17)$$



**Figura 1.23** Triángulo rectángulo

y sus inversas

$$\alpha = \text{sen}^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) = \text{arcsen}\left(\frac{b}{c}\right) \quad (1-18)$$

$$\alpha = \text{cos}^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \text{arccos}\left(\frac{a}{c}\right) \quad (1-19)$$

$$\alpha = \text{tan}^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \text{arctan}\left(\frac{b}{a}\right) \quad (1-20)$$

Aplicando las Ecs. 1-15 y 1-16 a la Fig. 1.22 se tiene que:

$$P_x = P \cos\alpha \quad (1-21)$$

$$P_y = P \text{sen}\alpha \quad (1-22)$$

y además, por ser OAB un triángulo rectángulo, en virtud del Teorema de Pitágoras se tiene que las magnitudes de P y de sus componentes cumplen con:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \quad (1-23)$$

La Ec. 1-23 también puede demostrarse elevando al cuadrado y sumando las Ecs. 1-21 y 1-22 y utilizando la conocida identidad trigonométrica:

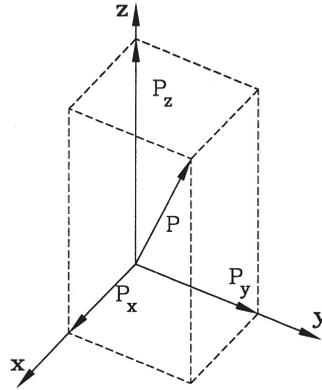
$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1 \quad (1-24)$$

El Ejemplo 1.7 presenta una aplicación directa de la regla de descomposición a la solución gráfica de un problema de estática. El Ejemplo 1.8 presenta una metodología analítica general para la composición de un sistema de fuerzas concurrentes; el método se basa en descomponer primero todas las fuerzas en sus componentes, para después simplemente sumar estas últimas en forma algebraica.

Finalmente cabe mencionar que en el caso tridimensional, es decir una fuerza en el espacio, se utiliza un sistema de tres ejes coordenados ortogonales, sobre cada uno de los cuales se proyecta la fuerza para obtener las componentes  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  (Fig. 1.24). Es claro que:

$$\{P\} = \{P_x, P_y, P_z\} \quad (1-25)$$

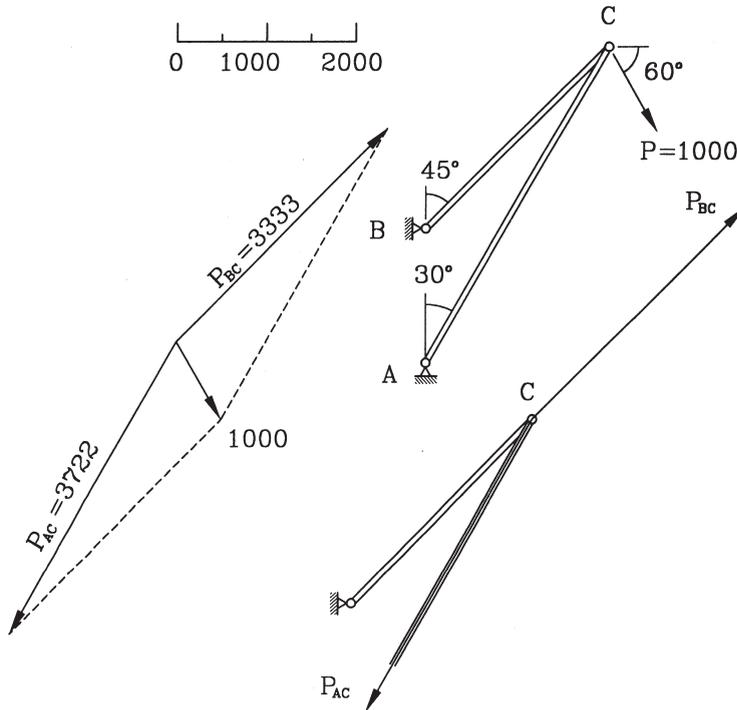
$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \quad (1-26)$$



**Figura 1.24** Proyecciones ortogonales de una fuerza en el espacio

### Ejemplo 1.7

Descomponer la fuerza  $P$  en las direcciones  $AC$  y  $BC$  para determinar los esfuerzos en las barras correspondientes. Para esta construcción se adopta una escala como la indicada en la figura en que una cierta longitud representa a tantas unidades de fuerza. Notar que la solución implica que la barra  $BC$  queda sometida a un esfuerzo interno de tracción, mientras la barra  $AC$  experimenta compresión.



**Figura E1.7**

**Ejemplo 1.8**

Determinar la resultante del sistema de cinco fuerzas concurrentes que se muestra en la Fig. E1.8.a

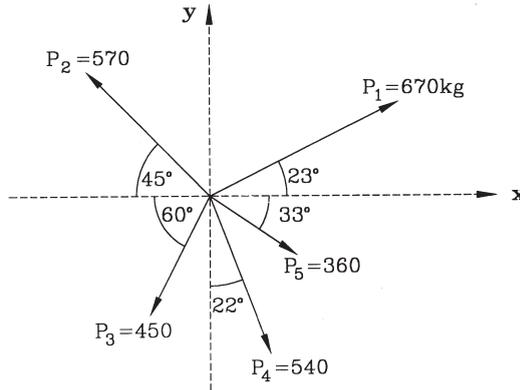


Figura E1.8.a

**Solución:** Los cálculos de las componentes x e y de cada una de las fuerzas se organizan en la Tabla siguiente. Notar que los signos negativos indican componentes que tienen el sentido negativo de los ejes de referencia.

i	$P_i$	$\alpha_i$	$P_i \cos \alpha_i$	$P_i \operatorname{sen} \alpha_i$
1	670	23°	616,74	261,79
2	570	45°	-403,05	403,05
3	450	60°	-225,00	-389,71
4	540	68°	202,29	-500,68
5	360	33°	301,92	-196,07
$\Sigma$			$P_x = 492,90$	$P_y = -421,62$

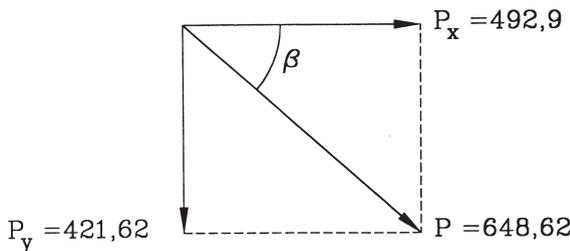


Figura E1.8.b

La suma de las proyecciones de las fuerzas sobre el eje x es la componente  $P_x$  de la resultante, y análogamente  $P_y$  para el eje y. La resultante P, según la Ec. 1-23, tiene magnitud (Fig. E1.8.b):

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \sqrt{492,9^2 + 421,62^2}$$

$$P = 648,62 \text{ kg}$$

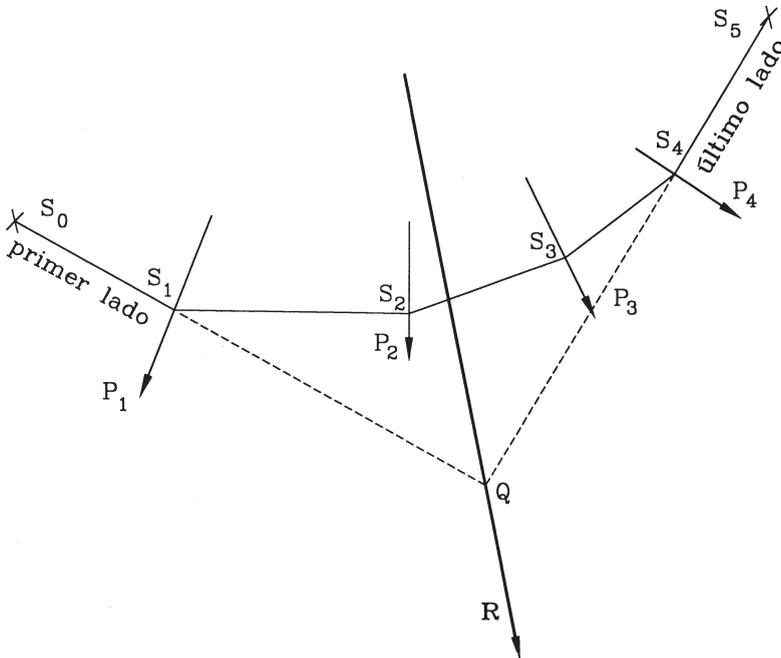
y su dirección queda dada por el ángulo  $\beta$ :

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{P_y}{P_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{421,62}{492,90}\right) = 40,54^\circ$$

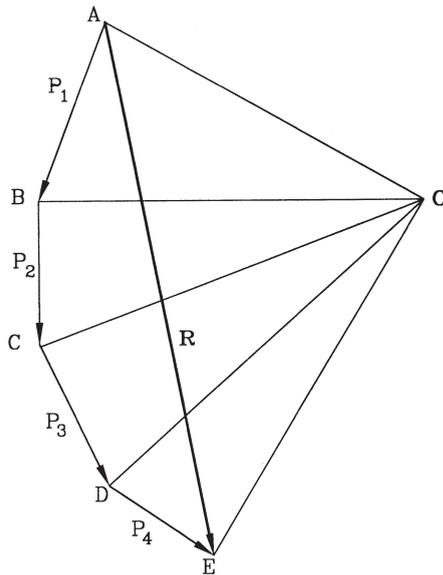
Notar que en la fórmula anterior se usó el valor absoluto de  $P_y$ , ya que no se está utilizando el signo trigonométrico del ángulo  $\beta$  sino sólo su magnitud.

### 1.4.5 El Polígono Funicular

El procedimiento indicado en la Sección 1.4.2 para determinar la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes (Fig. 1.17), que consiste en la aplicación sucesiva de las leyes de transmisibilidad y del paralelogramo, puede reemplazarse por una construcción más conveniente, el polígono funicular, que también es aplicable al caso de un sistema de fuerzas paralelas. Además de ser una solución alternativa para los casos señalados, la mayor importancia de esta construcción radica en que permite profundizar algunos aspectos conceptuales del trabajo con sistemas de fuerzas, y en que ayudará a comprender el funcionamiento de una forma estructural muy notable en la historia de la arquitectura: el arco.



**Figura 1.25.a** Polígono Funicular



**Figura 1.25.b** Polígono de Fuerzas

Sea un sistema de fuerzas coplanares que actúan sobre un cuerpo rígido, tales como  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$  en la Fig. 1.25.a. Las etapas de la construcción del polígono funicular son las siguientes:

- Primero se construye el polígono de fuerzas, ABCDE en la Fig. 1.25.b, con el cual se determina la magnitud y dirección de la resultante  $R$ , pero no se conoce la posición precisa de su línea de acción.
- Se escoge un punto arbitrario en el plano, tal como el punto  $O$  en la Fig. 1.25.b, que se denomina *foco* o *polo*. Desde el foco se trazan los *rayos*  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$ , y  $OE$  a los extremos de las fuerzas  $P_1$  a  $P_4$ .
- Se escoge arbitrariamente un *punto de arranque*, a partir del cual se comenzará a construir el polígono funicular. Este es el punto  $S_0$  en la Fig. 1.25.a.
- Pasando por  $S_0$  se traza una recta paralela al rayo  $OA$ , hasta interceptar la fuerza  $P_1$  en el punto  $S_1$ ; la recta trazada constituye el *primer lado* del polígono funicular. Pasando por  $S_1$  se traza una recta paralela al rayo  $OB$ , hasta interceptar la fuerza  $P_2$ ; la recta  $S_1S_2$  constituye el *segundo lado* del polígono funicular. Y así, sucesivamente, trazando paralelas a  $OC$ ,  $OD$  y  $OE$  se obtienen los lados  $S_2S_3$ ,  $S_3S_4$ , y a partir de  $S_4$  el *último lado* del polígono funicular.
- El punto  $Q$ , intersección de la prolongación del primer y del último lado del polígono funicular, es un punto de la línea de acción de la resultante  $R$ , quedando ésta totalmente determinada. Se tiene entonces que

$$\{R\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

La calificación de “funicular” dada al polígono se debe a que tiene la forma que adoptaría un hilo sin peso, sujeto en sus extremos (puntos  $S_o$  y  $S_s$ ), al ser sometido a las fuerzas  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  actuando en los puntos  $S_1, S_2, S_3$  y  $S_4$ . Claramente dicho hilo se encontraría sometido a un esfuerzo de tracción en toda su longitud.

La analogía con el hilo facilitará explicar el fundamento de la construcción anterior. Para ello, se reconstruirá la Fig. 1.25 indagando sobre el equilibrio parcial de cada una de las fuerzas  $P_i$  dadas. Observando el polígono de fuerzas de la Fig. 1.26.b, y recordando que el punto O fue arbitrariamente elegido, se puede pensar que los rayos BO y OA (con sentido de B hacia O y de O hacia A) representan dos fuerzas arbitrarias  $F_2$  y  $F_1$  respectivamente que tienen la propiedad de equilibrar a la fuerza  $P_1$ ; esto último porque el polígono OABO de las 3 fuerzas  $P_1, F_1$  y  $F_2$  es cerrado, es decir su resultante es nula. Puede pensarse entonces que el primer y segundo lado del polígono de la Fig. 1.26.a corresponden a fuerzas de tracción  $F_1$  y  $F_2$  en el hilo que equilibran a la fuerza  $P_1$ . Análogamente, la fuerza  $P_2$  en la Fig. 1.26.b está en equilibrio con las fuerzas arbitrarias  $F_3$  (con sentido de C hacia O) y  $F_2$  (con sentido de O hacia B), ya que el polígono OBCO es cerrado; las paralelas a OB y CO, es decir los lados segundo y tercero del polígono funicular de la Fig. 1.26.a corresponden a las fuerzas de tracción  $F_2$  y  $F_3$  en el hilo necesarias para equilibrar a la fuerza  $P_2$ . Así, sucesivamente, las fuerzas  $F_3$  y  $F_4$  equilibran a  $P_3$ , y  $F_4$  y  $F_5$  equilibran a  $P_4$ . Ahora bien, observando la Fig. 1.26.a, se aprecia que la fuerza  $F_2$ , que participa en el equilibrio de  $P_1$ , y la fuerza  $F_2$ , que participa en el equilibrio de  $P_2$ , se autoequilibran, ya que constituyen el segundo lado, o hilo continuo, del funicular; análogamente ocurre con las fuerzas  $F_3$  asociadas al tercer lado y  $F_4$  asociadas al cuarto lado.

En resumen, el primer tramo del hilo ejerce una fuerza  $F_1$ , que es la fuerza que debería realizar una persona que sostuviera el hilo desde el punto  $S_o$ , y el último tramo del hilo ejerce una fuerza  $F_5$ , que habría que ejercer externamente para sostenerlo desde el punto  $S_s$ . Por supuesto si  $F_1$  y  $F_5$  equilibran al conjunto de fuerzas  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$ , ellas equilibran a su resultante R, y por lo tanto R pasa por el punto de intersección de las líneas de acción de  $F_1$  y  $F_5$ ; tal equilibrio también queda explícito en el polígono de fuerzas (Fig. 1.26.b), donde  $F_1, R$  y  $F_5$  constituyen un polígono cerrado (OAEO), o sea,

$$\{R\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\} = -\{F_1, F_5\}$$

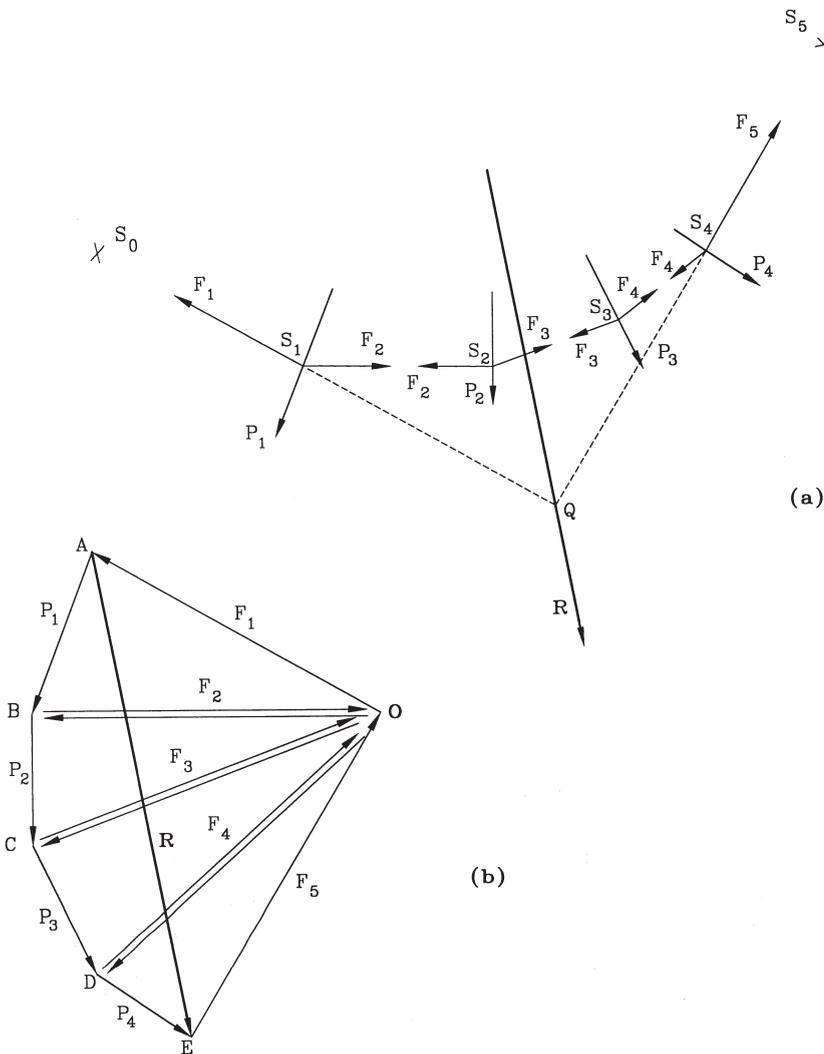
$$\{R, F_1, F_5\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, F_1, F_5\} = 0$$

En los lados 2º, 3º y 4º el hilo experimenta esfuerzos internos de tracción de magnitud  $F_2, F_3$  y  $F_4$  respectivamente.

Como la elección de la ubicación del foco del polígono de fuerzas es arbitraria, se pueden trazar infinitos polígonos funiculares distintos para un mismo sistema de fuerzas. El hecho de que la intersección del primer y último lado ocurra siempre sobre la misma línea recta constituye una propiedad notable. En geometría, a un conjunto

de puntos que satisfacen una misma condición se le denomina *lugar geométrico*; en este caso, la propiedad señalada puede expresarse diciendo que “el lugar geométrico de los puntos de intersección de los primeros y últimos lados de los infinitos polígonos funiculares que pueden trazarse para un sistema de fuerzas dado, es una línea recta, la que corresponde a la línea de acción de la resultante del sistema de fuerzas”.

Hay varias otras propiedades de los polígonos funiculares que no se incluyen aquí porque escapan al objetivo de este texto. En la Sección siguiente se aplicará el polígono funicular en la forma denominada *línea de presión*, que tiene especial significación para la comprensión del funcionamiento de las estructuras en *arco*, *bóvedas* y *cúpulas*.



**Figura 1.26** Polígono Funicular: Equilibrios Parcial y Global

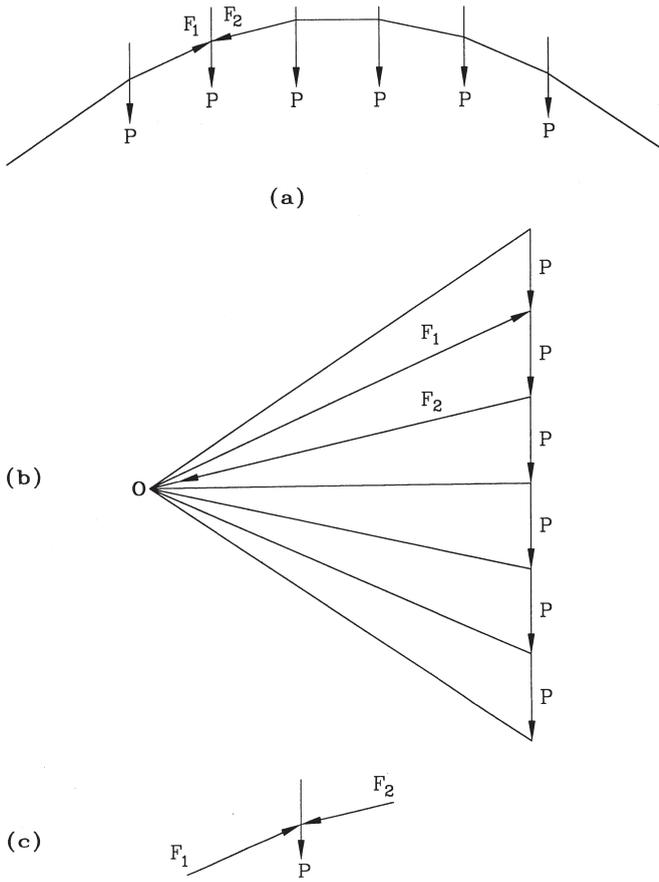
### 1.4.6 La Línea de Presión y el Arco

Dado un conjunto de fuerzas, puede construirse para ellas un polígono funicular invertido, como muestra la Fig. 1.27. La inversión se logra escogiendo el foco a la izquierda del polígono de fuerzas, es decir, al lado contrario de lo hecho en la Fig. 1.25. Además, puede darse mayor o menor curvatura al polígono funicular escogiendo el foco más cerca o más lejos del polígono de fuerzas. Las fuerzas dadas no tienen que ser de igual magnitud, ni paralelas, ni equidistantes, como ocurre en la Fig. 1.27.a, pero tal selección no resta generalidad a las conclusiones que se obtendrán a continuación. Sin embargo, el caso de fuerzas verticales es muy frecuente pues corresponde al caso común de cargas gravitacionales.

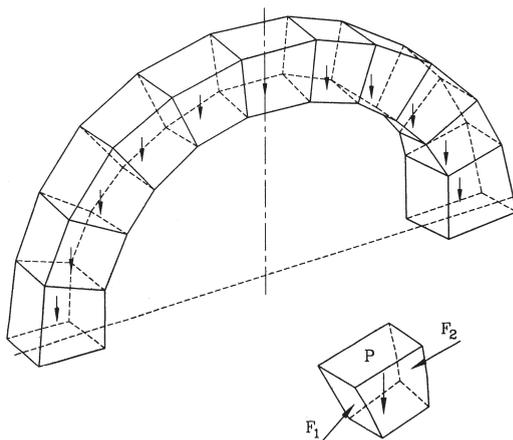
Si se analiza el equilibrio individual de una fuerza, por ejemplo la segunda, la Fig. 1.27.c muestra que ella se mantiene en equilibrio con las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$ , cuyas magnitudes son las que entrega la Fig. 1.27.b. Claramente, las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  son de compresión, y lo mismo ocurre para todos los pares de fuerzas necesarias para el equilibrio de cada una de las fuerzas verticales dadas. Al contrario de lo que ocurrió en la Sección 1.4.5, ahora todos los lados del polígono funicular están en compresión, por ello se le llama “línea de presión”.

Si consideramos un arco de bloques pétreos como el de la Fig. 1.28 concluimos entonces que todos los elementos que lo componen están comprimidos y no se producen tracciones en las caras de contacto entre ellos, es decir, no hay tendencia a la separación. Para ello, la línea de presión debe pasar por el eje del arco, más precisamente por los centros de gravedad de las secciones en contacto o muy próxima a ellos. Esto permite usar materiales como la piedra o el ladrillo, de gran resistencia a la compresión pero débiles en tracción, incluso sin necesidad de disponer un mortero de pegamento entre ellos.

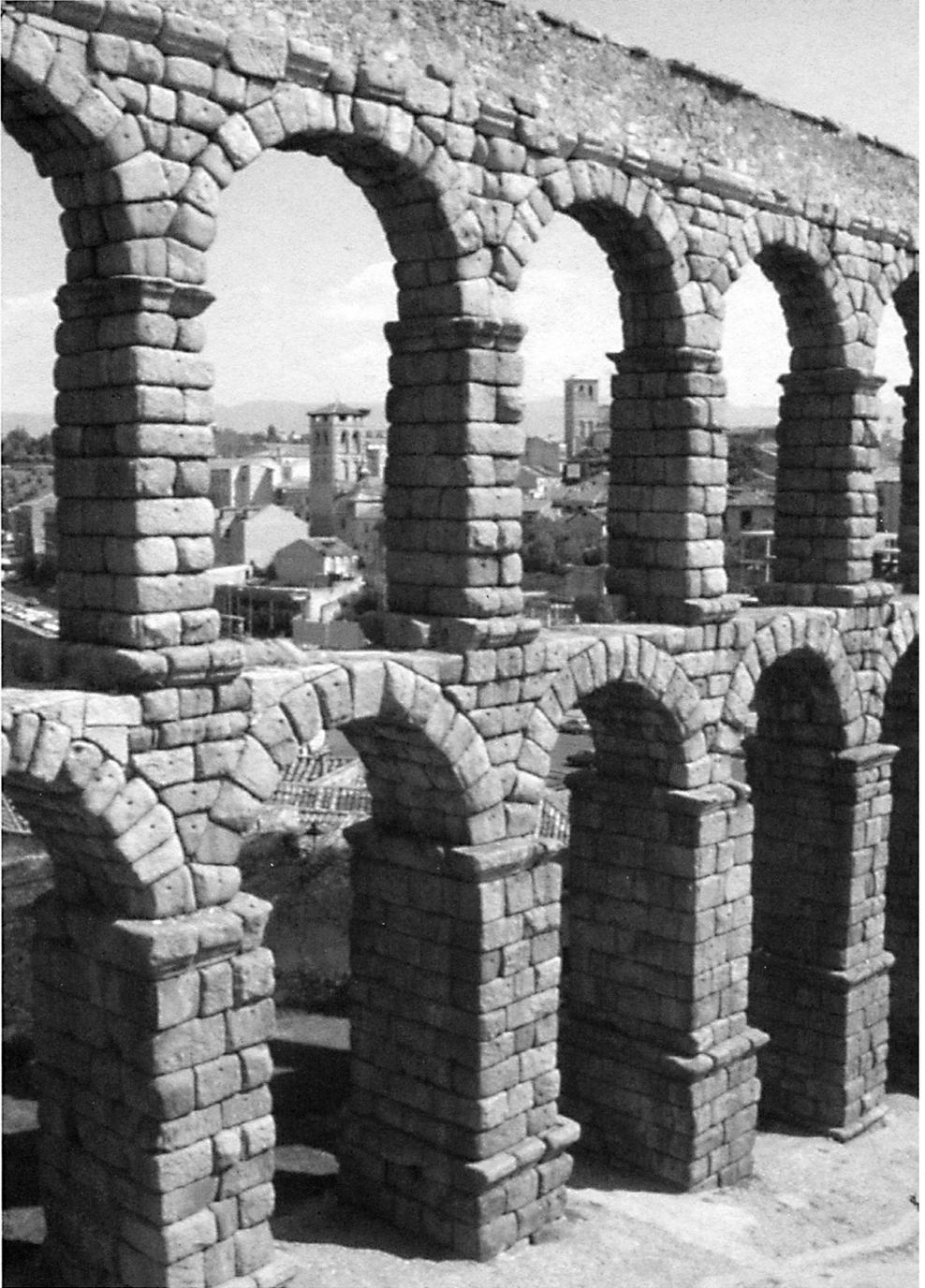
La invención del arco representa un salto tecnológico en la arquitectura pues permite salvar luces mayores que las que podían obtenerse con un dintel macizo de roca. La luz de éste en flexión quedaba limitada por su baja resistencia a la tracción, fallando por fractura en la mitad de la luz. A su vez las dimensiones de los dinteles o vigas de piedra quedaban también limitadas por la dificultad de encontrar grandes bloques de roca sana de una pieza, transportarlos, y alzarlos a su posición en la obra. Mayores luces podían obtenerse con vigas de madera, pero tales construcciones no tenían la durabilidad de la roca por su natural degradación con el tiempo y por su vulnerabilidad al fuego.



**Figura 1.27** Polígono Funicular Invertido o Línea de Presión



**Figura 1.28** Arco de Bloques Pétreos



Fotografía: Michel Van Sint-Jan

*Figura 1.29* Acueducto Romano de Segovia

Los primeros indicios de arcos y bóvedas se remontan a Mesopotamia, en las planicies aluviales del Tigris y del Éufrates (hoy Irak). Poca información se tiene sobre Babilonia, las únicas referencias están dadas por un plano de la ciudad de Nipur grabado en tablillas (1.500 A.C.) y por descripciones proporcionadas por el historiador griego Heródoto (486-406 A.C.). La madera y piedras eran escasas, no así la arcilla que ocuparon para fabricar ladrillos, además de utensilios y tablillas para escribir. Este hecho pudo haber obligado a los babilonios a descubrir las técnicas del abovedado. Conocieron la bóveda de barril o de túnel (cubierta cilíndrica apoyada en dos muros rectos paralelos) y la sucesión de arcos. Los asirios (1800-609 A.C.) en Mesopotamia construyeron palacios con cielos abovedados. El arco más destacado de la época es la puerta de Ishtar, que fue reconstruida por Nabucodonosor II (?-562 A.C.), estaba hecha de ladrillos vidriados de color azul decorados con figuras amarillas; el arco restaurado está hoy en el Museo Estatal en Berlín.

Los etruscos, que emigraron posiblemente de Asia Menor, establecieron durante el primer milenio A.C. una civilización en la península itálica, donde fueron paulatinamente dominados por los romanos a partir del siglo V A.C. Los etruscos usaron el arco en puertas, corredores y puentes, y lo transmitieron a los romanos. Éstos fueron los primeros en desarrollar el arco a escala masiva, utilizando el *arco de medio punto* (semicircular) en anfiteatros, palacios y acueductos (Fig. 1.29), aunque sus templos en general mantuvieron el estilo de columna y dintel de los griegos. Los romanos también inventaron el *arco de triunfo* como monumento conmemorativo de conquistas o personajes importantes. Variadas formas de arco fueron desarrolladas posteriormente por los arquitectos islámicos, y en Europa occidental la arquitectura gótica se caracterizó por el arco *apuntado* u *ojival*, que minimizó el empuje lateral y permitió construir muros altos y delgados con ventanales, creando los imponentes espacios interiores de las catedrales góticas.

Como se ha mencionado, arcos, bóvedas y cúpulas (bóveda semiesférica) ejercen sobre su base una fuerza lateral o empuje hacia fuera. Ello se desprende claramente de la Fig. 1.27. En efecto, el primer y último lado de la línea de presión, necesarios para sostener el arco, corresponden a fuerzas de compresión inclinadas con componentes vertical y horizontal; fuerzas iguales a éstas, pero de sentido contrario, son las que el arco ejerce sobre sus apoyos. Mientras más plano es el arco, como la línea de presión de la Fig. 1.27, más intenso es el empuje horizontal; inversamente en la medida que el arco es más alto, el empuje se reduce. La fuerza vertical no es problema, pero el empuje horizontal debe ser rígidamente soportado; para ello son comunes los muros laterales, como en los arcos de triunfo, también llamados contrafuertes. En arcos contiguos, los empujes laterales de ambos arcos se autoequilibran, y sólo persisten las componentes verticales que se transmiten a la columna. En el caso de las cúpulas, la presión horizontal puede ser resistida por un anillo o zuncho metálico que circunde su base.

En el Coliseo de Roma, construido entre los años 70-82 D.C. por el Emperador Vespasiano, y modificado en el año 223 D.C. (Fig. 1.30), se aprecian los contrafuertes triangulares en el extremo de la secuencia de arcos.

## 1.5 Equilibrio de una Partícula

Ya en la Sección 1.2 se hizo mención a la *partícula*, que corresponde a un modelo matemático que representa una cantidad de materia que no ocupa lugar en el espacio, pero tiene una posición precisa en él. Recordando el concepto geométrico de *punto*, puede decirse que una partícula es un punto material. Por otra parte, cuando se habla de un “modelo” no se pretende implicar que se trata de una reproducción a escala de una realidad física, sino que se trata de una concepción abstracta simplificada del objeto físico. La simplificación radica en que se han eliminado todos aquellos aspectos de la realidad que son intrascendentes para el problema en estudio.

Las bondades de un modelo dependen de las preguntas que se desea responder. Por ejemplo, la Tierra y los planetas pueden modelarse como partículas para efectos de estudiar sus órbitas alrededor del sol, pero ciertamente el modelo de partícula de la Tierra no servirá para estudiar la trayectoria de un vehículo espacial que regresa a ella.

En estática, hay un hecho fundamental inherente al modelo de partícula: las fuerzas aplicadas a ella son concurrentes. Por ello, aunque será común modelar cuerpos de dimensiones finitas como partículas, la condición fundamental para ello es la concurrencia de las fuerzas. En caso contrario las dimensiones reales del cuerpo no pueden ignorarse, y las condiciones de equilibrio de la partícula son insuficientes.

De acuerdo a la 2ª Ley de Newton (Ec. 1-4) una partícula experimentará una aceleración a no ser que la fuerza que actúa sobre ella sea nula. Entonces, si  $F$  es la fuerza que actúa sobre una partícula, es condición *necesaria* y *suficiente* para su equilibrio que:

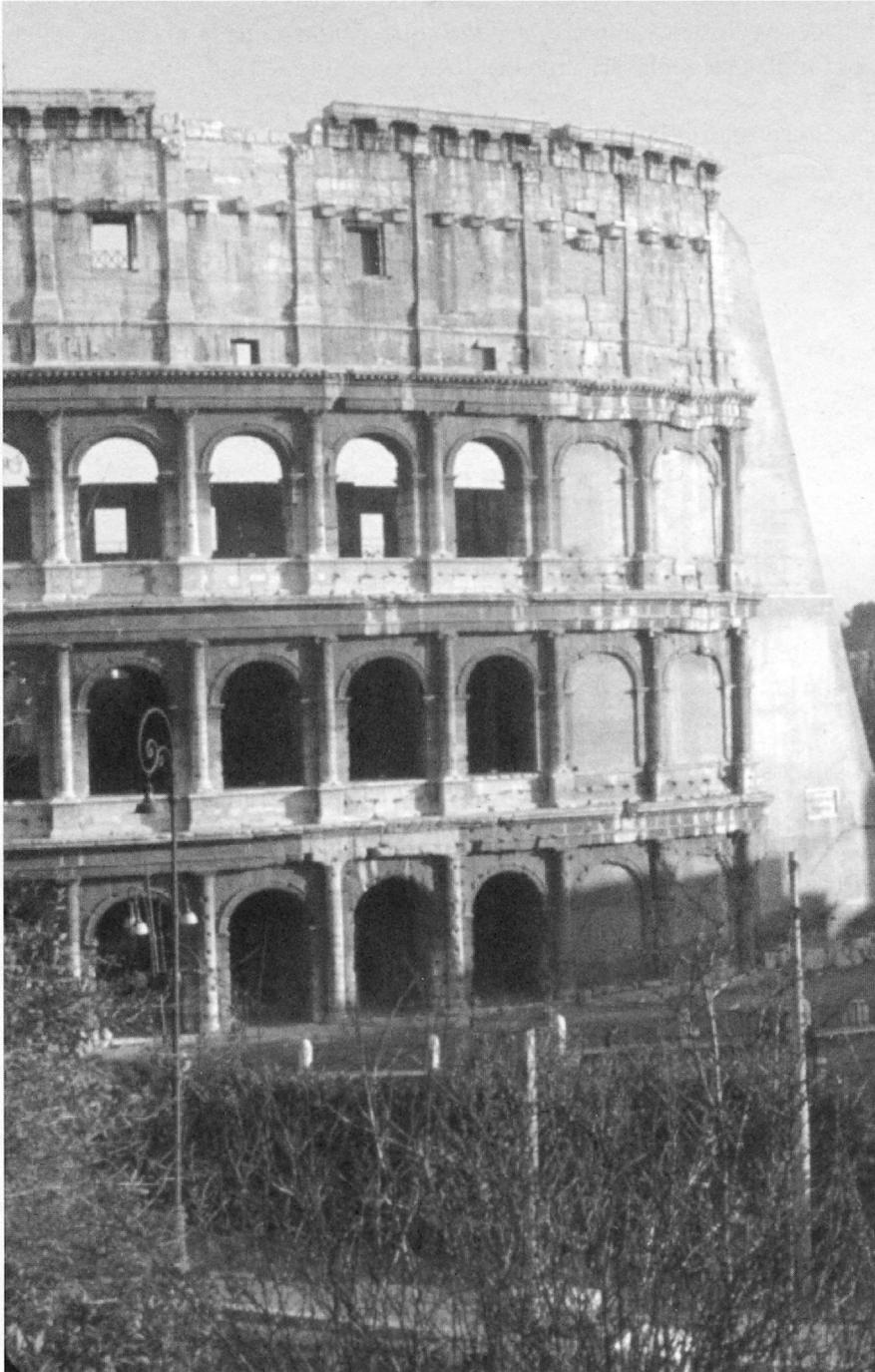
$$F = 0 \quad (1-27)$$

Si sobre una partícula actúan  $n$  fuerzas  $F_i$ , es condición necesaria y suficiente para el equilibrio que la resultante  $R$  del sistema de fuerzas sea nula:

$$\{R = 0\} = \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n\} \quad (1-28)$$

Simbólicamente, la condición anterior puede escribirse como:

$$R = \sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad (1-29)$$



Fotografía: Michel Van Sint-Jan

**Figura 1.30** Coliseo Romano

pero teniendo presente que las cantidades involucradas en la sumatoria corresponden a cantidades vectoriales que no pueden sumarse simplemente en forma algebraica sino conforme a las reglas descritas en la Sección 1.4.

La ecuación vectorial anterior puede expresarse escalarmente en términos de las componentes de las fuerzas. En referencia a un sistema cartesiano de ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en el espacio tridimensional, la Ec. 1-29 se transforma en las tres ecuaciones escalares:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0 \quad (1-30.a)$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0 \quad (1-30.b)$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0 \quad (1-30.c)$$

En la Ec. 1-30.a  $R_x$  es la componente  $x$  de la resultante, y  $F_{1x}$ ,  $F_{2x}$ , hasta  $F_{nx}$  son las componentes según  $x$  de las fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$ , hasta  $F_n$  respectivamente. Similar significado tienen las Ecs. 1-30.b y c pero en referencia a las proyecciones de las fuerzas en los ejes “ $y$ ” y “ $z$ ” respectivamente. En forma todavía más simplificada, es común que las condiciones de equilibrio (Ecs. 1-30) se escriban usando la notación:

$$\Sigma F_x = 0 \quad (1-31.a)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad (1-31.b)$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad (1-31.c)$$

Al presentar la condición de equilibrio de una partícula (Ec. 1-27), se mencionó su categoría de condición necesaria y suficiente. La distinción entre necesidad y suficiencia es un aspecto de *lógica* que es relevante abordar aquí, ya que volverá a presentarse al establecer las condiciones de equilibrio de los sistemas de partículas y de los cuerpos rígidos en la Sección 1.7. Se dice que la condición B es *necesaria*, si dado A implica B ( $A \Rightarrow B$ ). En este caso, si la partícula está en equilibrio es necesario que  $F=0$ ; es decir la condición  $F=0$  es *necesaria* para el equilibrio de la partícula. Inversamente, se dice que la condición B es *suficiente* si dado B implica A ( $A \Leftarrow B$ ). En este caso, si  $F=0$  se concluye que la partícula está en equilibrio, es decir la condición  $F=0$  es *suficiente* para el equilibrio de la partícula. Una condición necesaria y suficiente ( $A \Leftrightarrow B$ ) es de mayor categoría que una que es solamente necesaria ( $A \Rightarrow B$ ). Un ejemplo sencillo de este último caso se desprende de la proposición siguiente: Si sale agua del grifo (A), la llave está abierta (B); es decir, que la llave esté abierta es condición necesaria, pero no suficiente, ya que ello no es garantía de que salga agua, y la proposición inversa es falsa.

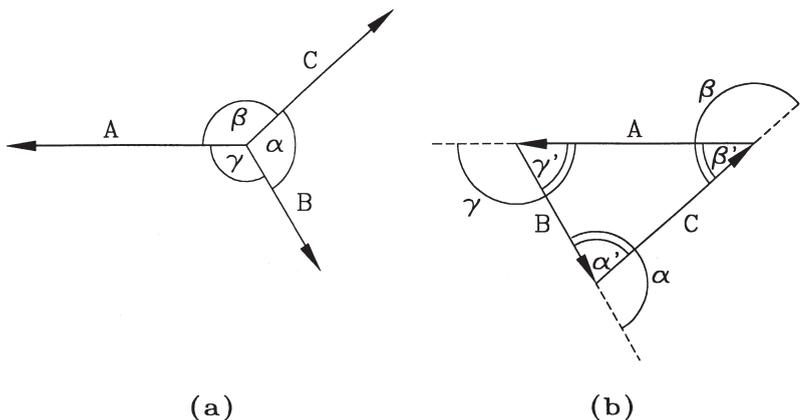
Adicionalmente a las ecuaciones de equilibrio de la partícula, explicitadas en la forma de las Ecs. 1-28, 1-29, 1-30 ó 1-31, existen formas alternativas de expresarlas, como también ciertas propiedades que son con frecuencia útiles. Estas se resumen en los teoremas siguientes:

- a) Teorema del Polígono de Fuerzas: *Si una partícula está en equilibrio bajo la acción de varias fuerzas, el polígono de ellas es cerrado.* La conclusión es obvia, ya que la condición geométrica de polígono cerrado es equivalente a que la resultante sea nula.
- b) Teorema de la Coplanariedad: *Si una partícula está en equilibrio bajo la acción de 3 fuerzas, las fuerzas son coplanares.* Ello se demuestra reconociendo que dos de las fuerzas definen un plano, por tanto la tercera fuerza no podría estar fuera del plano pues sería imposible equilibrar su componente perpendicular al plano de las otras dos.
- c) Teorema del Triángulo: *Si una partícula está en equilibrio bajo la acción de 3 fuerzas, éstas pueden representarse en magnitud y dirección por los lados de un triángulo.* Esta es conclusión directa de los teoremas anteriores, ya que el polígono cerrado es un triángulo plano.
- d) Teorema de Lamy: *Si una partícula está en equilibrio bajo la acción de 3 fuerzas, la magnitud de cada una de ellas es proporcional al seno del ángulo formado por las otras dos (Fig. 1.31.a y Ec. 1-33).* De la trigonometría se tiene el conocido Teorema del Seno en un triángulo plano (Fig. 1.31.b):

$$\frac{A}{\text{sen}\alpha'} = \frac{B}{\text{sen}\beta'} = \frac{C}{\text{sen}\gamma'} \tag{1-32}$$

pero  $\text{sen}(180 - \alpha) = \text{sen}\alpha$ , luego

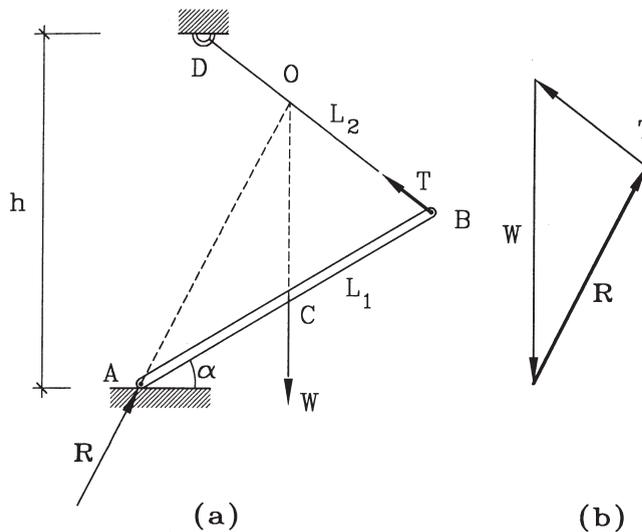
$$\frac{A}{\text{sen}\alpha} = \frac{B}{\text{sen}\beta} = \frac{C}{\text{sen}\gamma} \tag{1-33}$$



**Figura 1.31** Teorema de Lamy

- e) Teorema del Cuerpo Sometido a 3 Fuerzas: *Si un cuerpo está en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas, las fuerzas son coplanares y sus líneas de acción son o bien concurrentes o paralelas.* Aunque este teorema sólo puede probarse haciendo uso de las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido, que se verán más adelante, se ha enunciado en forma anticipada porque constituye una poderosa herramienta para la solución de problemas de estática. En efecto, cuerpos de dimensiones finitas, que no son realmente partículas, pueden siempre tratarse como tales si están sometidos a tres fuerzas y éstas no son paralelas. El equilibrio exige la coplanariedad y la concurrencia de las fuerzas, por lo que estos problemas se reducen a considerar el equilibrio de una partícula hipotética ubicada en el punto de concurrencia de las fuerzas.

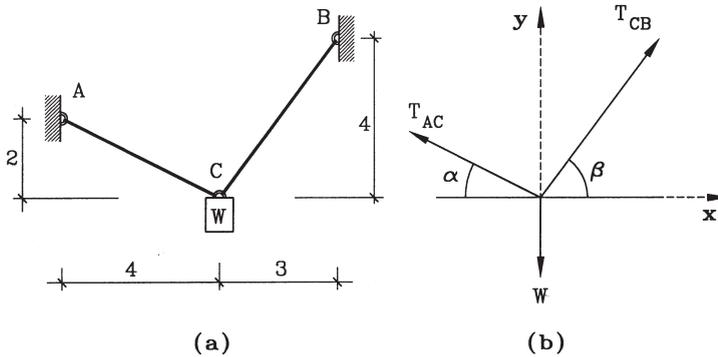
Un ejemplo simple de lo anterior es el estudio del equilibrio de la barra homogénea de largo  $L_1$  de la Fig. 1.32.a, que se apoya en el piso en su extremo A, formando ángulo  $\alpha$  con la horizontal, y cuelga de un hilo de largo  $L_2$  atado a su extremo B. Considerando que el peso  $W$  de la barra puede suponerse actuando verticalmente en su punto medio C, y que la dirección del hilo es conocida, y por tanto conocida la línea de acción de la fuerza T en el hilo, el equilibrio requiere forzosamente que la reacción R del piso sobre la barra pase por el punto O intersección de W y T. El cálculo de las magnitudes de R y T es muy simple, pudiendo por ejemplo obtenerse del polígono de fuerzas (triángulo) como muestra la Fig. 1.32.b. La solución analítica de este problema se presenta en el Ejemplo 1.12 al término de esta Sección.



**Figura 1.32** Barra de dimensiones finitas modelada como partícula

**Ejemplo 1.9**

Un bloque de peso  $W$  cuelga de dos cuerdas livianas como se muestra en la Fig. E1.9.a. Determinar las fuerzas que deben realizar las cuerdas.

**Figura E1.9**

**Solución:** Corresponde a un caso de tres fuerzas concurrentes en el punto C, el que puede modelarse como una partícula en la forma que muestra la Fig. E1.9.b. En esta figura aparecen los siguientes elementos: la fuerza conocida  $W$ , las fuerzas incógnitas  $T_{AC}$  y  $T_{CB}$ , y los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . Los valores de los ángulos no han sido dados directamente, pero quedan perfectamente determinados por las dimensiones geométricas indicadas en la Fig. E1.9.a. En efecto, en base a las pendientes de las cuerdas pueden determinarse los ángulos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{4} \rightarrow \alpha = \tan^{-1}(0,50) = 26,56^{\circ}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3} \rightarrow \beta = \tan^{-1}(1,33) = 53,13^{\circ}$$

Alternativamente, sin calcular directamente  $\alpha$  y  $\beta$ , se pueden obtener las funciones trigonométricas que intervendrán en las ecuaciones de equilibrio. Para ello se requiere previamente determinar las longitudes de las cuerdas:

$$L_{AC} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$L_{CB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha &= \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} & \cos\alpha &= \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \operatorname{sen}\beta &= \frac{4}{5} & \cos\beta &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

Aplicando las ecuaciones equilibrio en términos de las componentes según direcciones x e y (Ecs. 1-30 ó 1-31) se tiene:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow T_{AC} \cos\alpha = T_{CB} \cos\beta$$

$$T_{AC} \frac{2}{\sqrt{5}} = T_{CB} \frac{3}{5}$$

$$T_{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{10} T_{CB}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_{AC} \operatorname{sen}\alpha + T_{CB} \operatorname{sen}\beta = W$$

$$\left( \frac{3\sqrt{5}}{10} T_{CB} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + T_{CB} \frac{4}{5} = W$$

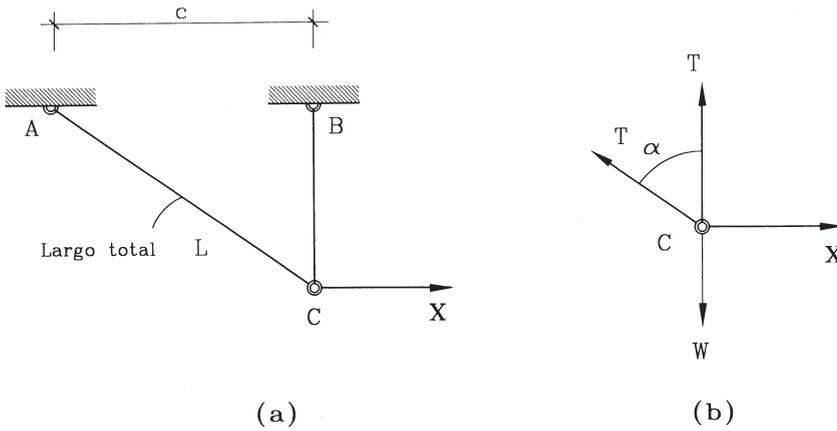
$$T_{CB} \left( \frac{3}{10} + \frac{8}{10} \right) = W$$

$$T_{CB} = \frac{10}{11} W = 0,91W$$

$$T_{AC} = \frac{3\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{10}{11} W = 0,61W$$

### Ejemplo 1.10

Un hilo liviano de largo L está unido a dos puntos A y B a la misma altura y a distancia c. Por el hilo puede deslizarse libremente un anillo pequeño de peso W. Determinar la fuerza horizontal que hay que aplicar al anillo para que se mantenga en equilibrio verticalmente bajo el punto B. Calcular la fuerza que desarrolla el hilo. Suponer que las fuerzas sobre el anillo son concurrentes.

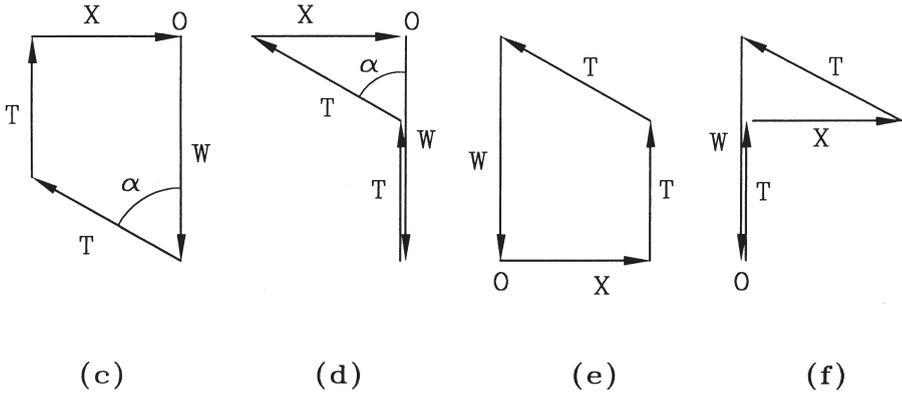


**Figura E1.10**

**Solución:** El problema planteado se muestra en la Fig. E1.10.a. Como el anillo puede correr libremente por el hilo, si no se aplicara la fuerza horizontal indicada ( $X=0$ ) el equilibrio se lograría con el anillo ubicado sobre el eje de simetría entre A y B (simetral de AB). Dependiendo de la magnitud de la fuerza X se puede lograr el equilibrio en distintas posiciones, de manera que el caso planteado es una de las infinitas situaciones posibles. Como se trata de un hilo continuo, sin fricción en su contacto con el anillo, la fuerza T en el hilo es constante en toda su longitud, de manera que la acción del hilo sobre el anillo es como se muestra en la Fig. E1.10.b.

En la Fig. E1.10.b aparecen el peso conocido W, las fuerzas incógnitas T y X, y el ángulo  $\alpha$  que es un parámetro geométrico que debe determinarse con los datos L y c, y de la condición de que el triángulo ABC es rectángulo. Conocido  $\alpha$ , T y X pueden obtenerse de las dos ecuaciones de equilibrio según componentes horizontales y verticales, de manera análoga al ejemplo anterior. En este caso, sin embargo, se aprovechará de ilustrar otro método: el uso del polígono de fuerzas.

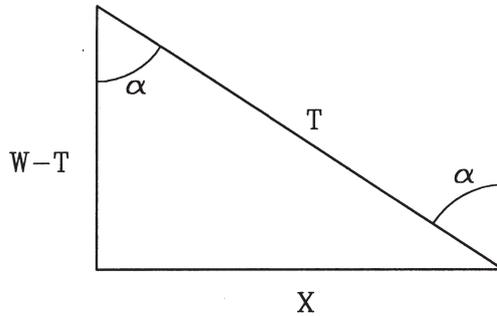
Recordando que la condición de equilibrio de la partícula es que el polígono de fuerzas sea cerrado, pueden construirse varios polígonos dependiendo del orden en que se tomen las fuerzas. De hecho, como en este caso hay 4 fuerzas, existen 24 posibilidades distintas de escoger su secuencia, aunque varias de ellas repiten las mismas formas poligonales. Las Figs. E1.10.c, d, e y f muestran cuatro de estas posibilidades, todas construidas con el punto O como punto de inicio; algunas fuerzas se han desplazado ligeramente para apreciar mejor la secuencia de construcción. Notar, sin embargo, que la construcción sólo es posible si  $T < W$ , ya que sin este supuesto no puede lograrse un polígono cerrado.

**Figura E1.10**

Todos los polígonos de fuerzas conducen al triángulo de la Fig. E1.10.g, al cual puede aplicarse el Teorema de Lamy, o simplemente las relaciones obvias en proyecciones horizontal y vertical respectivamente:

$$X = T \operatorname{sen} \alpha$$

$$W - T = T \operatorname{cos} \alpha$$

**Figura E1.10.g**

Considerando el triángulo rectángulo ABC de la Fig. E1.10.a se tiene:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{AC}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{L - AC}{AC} = \frac{L}{AC} - 1$$

falta entonces determinar AC, lo que puede hacerse aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo ABC:

$$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$$

$$(AC)^2 = (L-AC)^2 + c^2$$

$$(AC)^2 = L^2 - 2L \cdot AC + (AC)^2 + c^2$$

$$AC = \frac{L^2 + c^2}{2L}$$

entonces:

$$\text{sen}\alpha = \frac{2Lc}{L^2 + c^2}$$

$$\text{cos}\beta = \frac{2L^2}{L^2 + c^2} - 1$$

Reemplazando la ecuación anterior en la segunda ecuación de equilibrio se tiene:

$$W - T = T \left( \frac{2L^2}{L^2 + c^2} - 1 \right)$$

$$W - T = T \frac{2L^2}{L^2 + c^2} - T$$

$$W = T \frac{2L^2}{L^2 + c^2}$$

$$T = \frac{W(L^2 + c^2)}{2L^2}$$

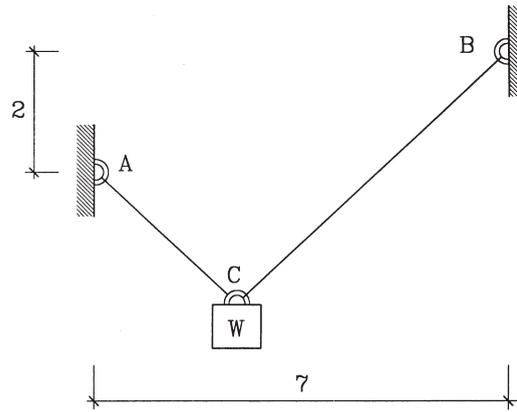
y reemplazando el resultado anterior en el primera ecuación de equilibrio se tiene:

$$X = T \text{sen}\alpha = \frac{W(L^2 + c^2)}{2L^2} \cdot \frac{2Lc}{L^2 + c^2}$$

$$X = \frac{Wc}{L}$$

**Ejemplo 1.11**

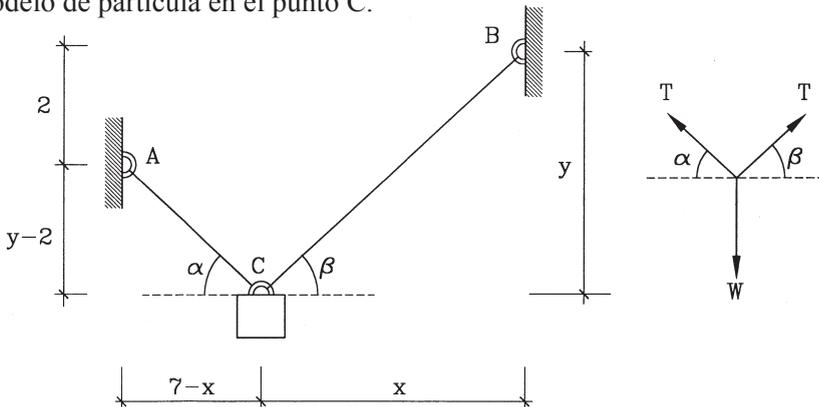
Considérese el mismo Ejemplo 1.9 pero con la diferencia que las dos cuerdas independientes se han reemplazado por una cuerda continua de igual largo total. Suponiendo contacto liso entre la cuerda y la armella del bloque, calcular la fuerza de tracción a que queda sometida la cuerda.



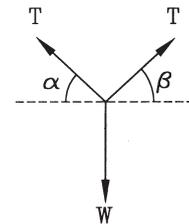
(a)

**Figura E1.11.a**

**Solución:** En este caso la posición de equilibrio no corresponde a aquella de la Fig. E1.9.a porque la armella C se desplazará sobre la cuerda hasta que el bloque adopte la posición más baja posible. Pero esta posición no es conocida *a priori* y debe ser calculada. Situaciones como ésta ocurren con cierta frecuencia en los problemas de estática, y se dice que en ellas *la configuración de equilibrio*, o *geometría del estado de equilibrio*, no es conocida de antemano. Entonces la solución del problema involucra el cálculo de incógnitas geométricas, además de las típicas fuerzas incógnitas. En la Fig. E1.11.b se plantea entonces la configuración de equilibrio en términos de las incógnitas  $x$  e  $y$ , mientras en la Fig. E1.11.c se muestran las fuerzas del modelo de partícula en el punto C.



(b)



(c)

**Figura E1.11.b y c**

De estas dos figuras se concluye que el problema tiene 3 incógnitas:  $T$ ,  $x$  e  $y$  (notar que los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  no son incógnitas adicionales, ya que si se conocieran  $x$  e  $y$ , ellos quedarían perfectamente determinados). Para poder resolver el problema se requieren entonces 3 ecuaciones, estas son:

- i) La longitud total de la cuerda es la misma del Ejemplo 1.9, es decir según la Fig. E1.9.a:

$$L = CB + AC = \sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{2^2 + 4^2} = 5 + \sqrt{20} = 9,4721$$

Pero, de la Fig. E1.11.b:

$$CB = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$AC = \sqrt{(7-x)^2 + (y-2)^2}$$

luego

$$9,472 = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(7-x)^2 + (y-2)^2}$$

- ii) Equilibrio de componentes horizontales en la Fig. E1.11.c:

$$T \cos \alpha = T \cos \beta$$

lo que implica que  $\alpha = \beta$  y por lo tanto puede plantearse otra ecuación en términos de  $x$  e  $y$ , por ejemplo utilizando  $\tan \alpha = \tan \beta$  se tiene

$$\frac{y-2}{7-x} = \frac{y}{x}$$

de donde puede despejarse  $x$  como

$$x = \frac{7y}{2(y-1)}$$

- iii) Equilibrio de componentes verticales en la Fig. E1.11.c:

$$T \text{sen} \alpha + T \text{sen} \beta = W$$

$$2T \text{sen} \beta = W$$

$$T = \frac{W}{2 \text{sen} \beta}$$

que entregará el valor de  $T$  una vez calculado  $\beta$  a partir de  $x$  e  $y$ .

Las ecuaciones derivadas en i e ii permiten calcular x e y. En efecto, introduciendo la segunda en la primera se obtiene una ecuación para y:

$$\begin{aligned}
 9,4721 &= \sqrt{\left[\frac{7y}{2(y-1)}\right]^2 + y^2} + \sqrt{\left[7 - \frac{7y}{2(y-1)}\right]^2 + (y-2)^2} \\
 9,4721 &= \sqrt{\frac{7^2 y^2}{2^2 (y-1)^2} + \frac{y^2 2^2 (y-1)^2}{2^2 (y-1)^2}} + \sqrt{\left[\frac{7y-14}{2(y-1)}\right]^2 + (y-2)^2} \\
 9,4721 &= \frac{y}{2(y-1)} \sqrt{7^2 + 2^2 (y-1)^2} + \sqrt{\left[\frac{7(y-2)}{2(y-1)}\right]^2 + \frac{2^2 (y-2)^2 (y-1)^2}{2^2 (y-1)^2}} \\
 9,4721 &= \frac{y}{2(y-1)} \sqrt{7^2 + 2^2 (y-1)^2} + \frac{y-2}{2(y-1)} \sqrt{7^2 + 2^2 (y-1)^2} \\
 9,4721 &= \frac{2y-2}{2(y-1)} \sqrt{7^2 + 2^2 (y-1)^2} \\
 9,4721 &= \sqrt{49 + 4(y-1)^2} \\
 (9,4721)^2 &= 49 + 4(y-1)^2 \\
 4y^2 - 8y - 36,7214 &= 0 \\
 y &= \frac{8 \pm \sqrt{8^2 + 4 \cdot 4 \cdot 36,7214}}{2 \cdot 4} = 4,1907 \\
 x &= \frac{7y}{2(y-1)} = 4,5969
 \end{aligned}$$

Puede entonces determinarse el ángulo  $\beta$  de:

$$\begin{aligned}
 \tan \beta &= \frac{y}{x} \\
 \beta &= \arctan\left(\frac{4,1907}{4,5969}\right) \rightarrow \beta = 42,35^\circ \rightarrow \text{sen} \beta = 0,6737
 \end{aligned}$$

y finalmente

$$T = \frac{W}{2\text{sen}\beta}$$

$$T = 0,742W$$

### Ejemplo 1.12

Determinar analíticamente las fuerzas R y T del problema de la Fig. 1.32 si  $W=100$  kg,  $L_1=117$  cm,  $L_2=92$  cm,  $\alpha=31^\circ$ , y  $h=112$  cm.

**Solución:** Cabe primero destacar que la solución gráfica que muestra la Fig. 1.32.b es extremadamente simple, ya que basta con adoptar una escala para representar la dimensión de la fuerza W y las direcciones de las fuerzas R y T se toman paralelamente de las direcciones que ellas tienen en la Fig. 1.32.a. Los valores de R y T se leen a la misma escala en la Fig. 1.32.b. La solución analítica que sigue, en cambio, es más elaborada ya que requiere determinar previamente los ángulos  $\beta$  y  $\gamma$  (Fig. E1.12) haciendo uso de las condiciones geométricas del problema. Para ello considérese la Fig. E1.12, donde se tiene que:

$$L_1 \text{sen } \alpha + L_2 \text{sen } \beta = h$$

$$\text{sen}\beta = \frac{h - L_1 \text{sen}\alpha}{L_2} = \frac{112 - 117 \text{sen}31}{92} = 0,5624$$

$$\beta = \text{arcsen}(0,5624) = 34,22^\circ$$

Por otra parte,  $\tan \gamma = \frac{EO}{AE}$  con

$$EO = AC \cos \alpha = \frac{L_1}{2} \cos \alpha = \frac{117}{2} \cos 31 = 50,144$$

$$AE = AB \text{sen} \alpha + OB \text{sen} \beta = L_1 \text{sen} \alpha + OB \text{sen} \beta$$

Pero,  $OB \cos \beta = BC \cos \alpha = AC \cos \alpha = 50,144$ , luego

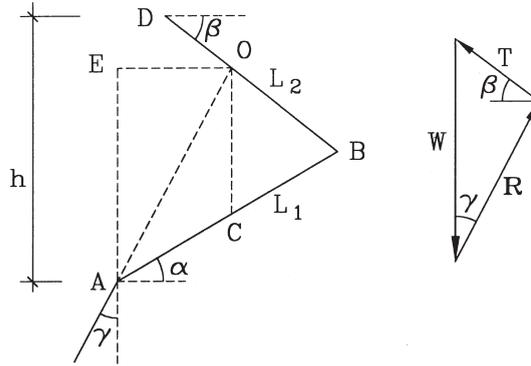
$$OB = \frac{50,144}{\cos \beta} = \frac{50,144}{\cos 34,22} = 60,64$$

Reemplazando en la expresión de AE se tiene

$$AE = 117 \text{sen } 31 + 60,64 \text{sen } 34,22 = 94,36$$

luego

$$\tan \gamma = \frac{50,144}{94,36} = 0,5314 \rightarrow \gamma = \arctan(0,5314) = 28^\circ$$



**Figura E1.12**

Finalmente, utilizando el polígono de fuerzas en la Fig. E1.12, haciendo equilibrio de fuerzas en direcciones horizontal y vertical respectivamente, se tiene:

$$T \cos \beta = R \operatorname{sen} \gamma$$

$$T \operatorname{sen} \beta + R \cos \gamma = W$$

Reemplazando la primera ecuación en la segunda queda:

$$\frac{R \operatorname{sen} \gamma}{\cos \beta} \operatorname{sen} \beta + R \cos \gamma = W$$

$$R (\operatorname{sen} 28 \tan 34,22 + \cos 28) = 100$$

$$R = \frac{100}{1,2022} = 83,18 \text{ kg}$$

$$T = \frac{R \operatorname{sen} \gamma}{\cos \beta} = 83,18 \frac{\operatorname{sen} 28}{\cos 34,22} = 47,22 \text{ kg}$$

## 1.6 Equilibrio de un Sistema de Partículas

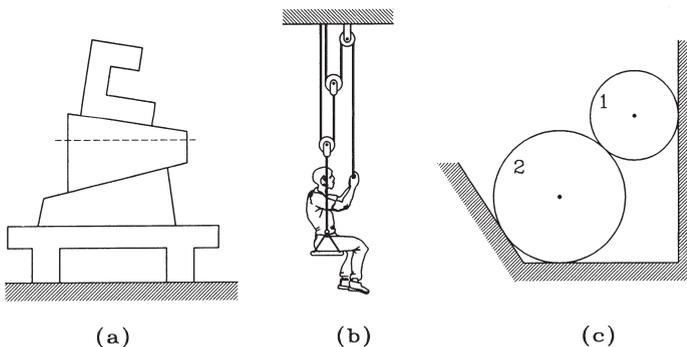
### 1.6.1 Noción de Sistema

Cualquier sistema que contenga más de una partícula es un sistema de partículas. Lo más común es que los sistemas estén constituidos por diversos cuerpos, los que a su vez pueden tener distintas partes conformadas por infinitas partículas. Lo importante para el análisis del equilibrio es tener claro cuál es el *sistema* que se

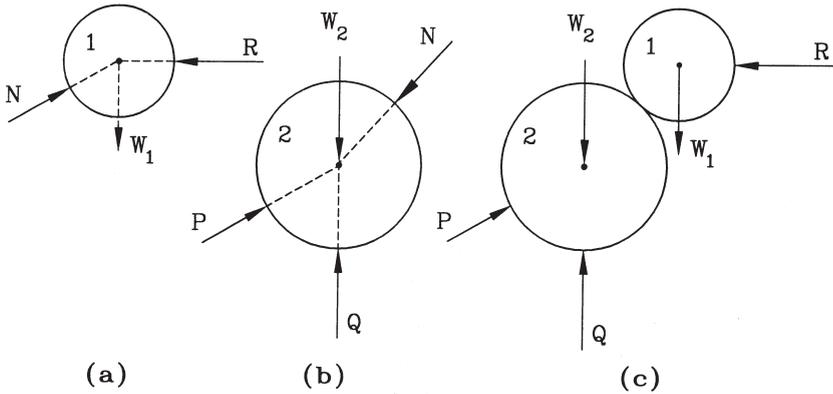
está considerando, al que se aísla arbitrariamente para centrar la atención en él. La Fig. 1.33 muestra diversos sistemas en que el lector puede ejercitarse identificando cuántas partes los componen.

A continuación se analizará en detalle el sistema de la Fig. 1.33.c. Supóngase que interesa analizar el equilibrio del cilindro 1; esta parte, o subsistema del conjunto total, pasa a ser el *sistema* u objeto en que se centra el interés. Para el análisis del sistema seleccionado se prepara el llamado *diagrama de cuerpo libre*, en el cual se presenta el cuerpo de interés aislado de los otros cuerpos que interactúan con él. La interacción se representa por medio de las fuerzas que los cuerpos externos al sistema ejercen sobre el cuerpo de interés. Como se aprecia en la Fig. 1.34.a, sobre el cilindro 1 actúan las fuerzas externas siguientes:  $N$ , reacción del cilindro 2 sobre el cilindro 1,  $R$ , reacción de la pared vertical sobre el cilindro 1, y su propio peso  $W_1$ . Se define entonces como *fuerza externa* de un sistema aquella que es ejercida por una partícula ajena al sistema, mientras que una fuerza que actúa sobre una partícula de un sistema es *interna* cuando es ejercida por otra partícula del mismo sistema. En la Fig. 1.34.a no aparece ninguna fuerza interna, porque no se han representado las fuerzas de contacto entre las infinitas partículas que constituyen la materia del cilindro 1. Cabe destacar también que el peso  $W_1$  es una fuerza externa porque es ejercida por la atracción gravitacional de la Tierra, cuerpo externo al cilindro 1. Ciertamente, para estudiar el equilibrio del cilindro 1, se le puede modelar como una partícula hipotética ubicada en su centro de gravedad, donde concurren las tres fuerzas que actúan sobre él.

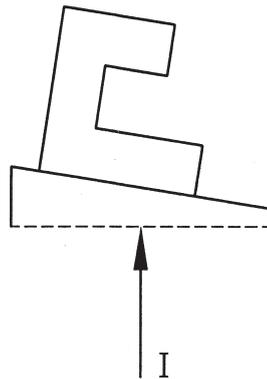
Análogamente, si se considera el sistema constituido por el cilindro 2 de la Fig. 1.33.c, las fuerzas externas a él son su propio peso  $W_2$ , la acción  $N$  que le ejerce el cilindro 1, y  $P$  y  $Q$  reacciones del piso y la pared que lo sostienen (Fig. 1.34.b). Finalmente, si el sistema considerado incluye ambos cilindros, como ilustra la Fig. 1.34.c, las fuerzas externas son  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $P$ ,  $Q$ , y  $R$ ; notar que en este subsistema no debe incluirse la interacción interna  $N$  por ser precisamente una fuerza interna del sistema.



**Figura 1.33** Sistemas de varios componentes



**Figura 1.34** Posibles subsistemas del sistema de la Fig. 1.33.c



**Figura 1.35** Subsistema del sistema de la Fig. 1.33.a

Naturalmente el sistema a considerar no tiene por qué limitarse a incluir cuerpos completos. Por ejemplo, podría ser de interés analizar la porción sobre la línea segmentada de la Fig. 1.33.a, lo que equivale a seccionar la cuña correspondiente mediante un plano horizontal. Como muestra la Fig. 1.35, este tipo de análisis puede ser requerido si se desea determinar la fuerza interna  $I$  global que se transmite a través del plano o sección interna. La evaluación de esfuerzos internos en elementos estructurales es un tema de gran relevancia que se estudiará en detalle en el Capítulo 2.

## 1.6.2 Condiciones de Equilibrio

*Es condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un sistema de partículas, que cada una de las partículas que lo constituyen esté individualmente en equilibrio.* Esta es una verdad evidente que no necesita demostración, sin embargo desde el

punto de vista operativo resulta impracticable plantear las condiciones de equilibrio para las infinitas partículas de un sistema. Por ello, resulta conveniente indagar sobre condiciones más generales que permitan sacar conclusiones sobre el equilibrio del sistema.

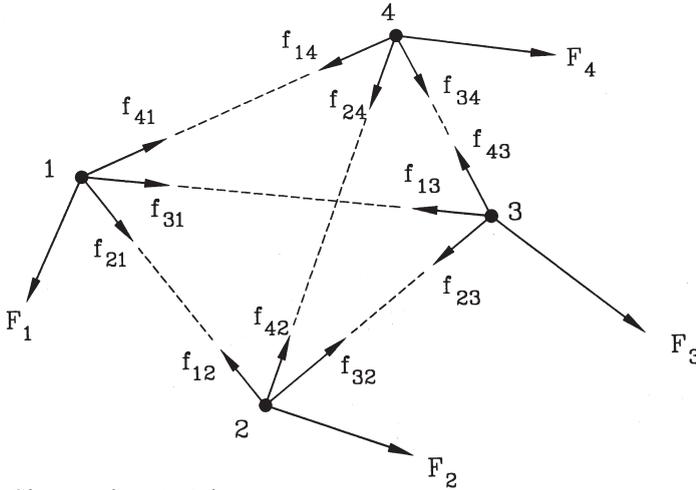


Figura 1.36 Sistema de partículas

Considérese para ello el sistema de cuatro partículas sin peso de la Fig. 1.36. En particular, sobre la partícula 1 actúa una fuerza externa designada por  $F_1$  y fuerzas internas de interacción  $f_{21}$ ,  $f_{31}$  y  $f_{41}$  que le ejercen las partículas 2, 3 y 4 respectivamente. Si cada partícula está en equilibrio, se pueden escribir 4 ecuaciones simbólicas (Ec. 1-29):

$$F_1 + f_{21} + f_{31} + f_{41} = 0$$

$$F_2 + f_{12} + f_{32} + f_{42} = 0$$

$$F_3 + f_{13} + f_{23} + f_{43} = 0$$

$$F_4 + f_{14} + f_{24} + f_{34} = 0$$

recordando que estas ecuaciones no son algebraicas porque las cantidades involucradas son fuerzas que aparte de magnitud tienen dirección y sentido. Sumando las 4 ecuaciones anteriores se tiene:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + f_{21} + f_{31} + f_{41} + f_{12} + f_{32} + f_{42} + f_{13} + f_{23} + f_{43} + f_{14} + f_{24} + f_{34} = 0 \quad (1-34)$$

Por ser las fuerzas de interacción entre dos partículas iguales en dirección y magnitud, pero de sentido contrario, se tiene que  $f_{ij} = -f_{ji}$  luego

$$f_{ij} + f_{ji} = 0$$

es decir, todas ellas se anulan en pares respectivos, luego la Ec. 1-34 queda

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0 \quad (1-35)$$

ecuación simbólica que indica que *es condición necesaria para el equilibrio de un sistema de partículas que la suma de fuerzas externas sea nula*, insistiendo nuevamente que dicha suma es vectorial y no algebraica. Por otra parte, si la Ec. 1-35 se introduce en la Ec. 1-34, se concluye que *es condición necesaria para el equilibrio de un sistema de partículas que la suma vectorial de las fuerzas internas sea nula*.

Como se discutió en la Sección 1.5, el que las condiciones anteriores sean solamente *necesarias* significa que si el sistema está en equilibrio ellas se cumplen, pero, el que ellas se cumplan no garantiza el equilibrio, es decir ellas no son condiciones *suficientes* para el equilibrio.

Un ejemplo simple, que ilustra el carácter de estas condiciones, es el siguiente. Considérese dos partículas 1 y 2 sin masa unidas por un elástico, como muestra la Fig. 1.37, a las que se aplican fuerzas externas  $F$  iguales y de sentido opuesto, que producen reacciones internas  $f$  en el elástico; si las fuerzas  $f$  no son capaces de equilibrar a cada una de las partículas, es decir  $f < F$ , las partículas estarán en movimiento en la medida que se estira el elástico. Como puede verse, el sistema no está en equilibrio a pesar que se cumple que la suma de fuerzas externas es nula

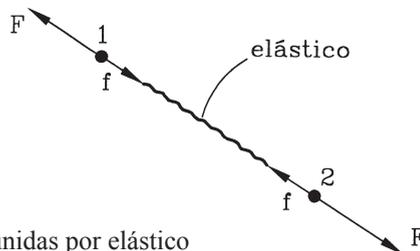
$$F - F = 0$$

y también que la suma de fuerzas internas es nula

$$f - f = 0$$

Similarmente, pueden enunciarse condiciones necesarias de equilibrio en términos de la suma de *momentos* de las fuerzas internas y externas del sistema de partículas. Sin embargo, como el concepto de *momento* se presentará recién en la Sección 1.8 esta discusión se omitirá aquí.

Finalmente, es importante destacar que si el sistema de partículas es rígido, es decir, la unión entre ellas es indeformable, las condiciones que antes eran sólo necesarias pasan a ser también suficientes, de manera que las ecuaciones de equilibrio globales garantizan el equilibrio. Es lo que ocurriría si en vez de un elástico en la Fig. 1.37 hubiese una barra rígida entre las partículas 1 y 2.



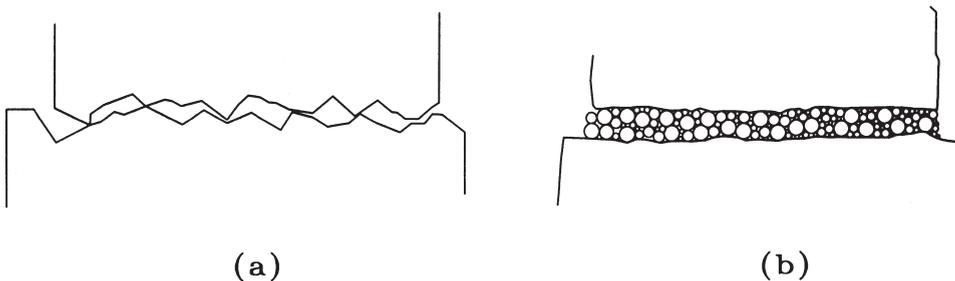
**Figura 1.37** Partículas unidas por elástico

## 1.7 Roce

Se denomina *roce* o *fricción* a la oposición natural al deslizamiento relativo entre dos objetos en contacto. La cualidad de las superficies que desarrollan este fenómeno se denomina *rugosidad* o *aspereza*. Por el contrario, las superficies incapaces de desarrollar fricción se llaman *lisas*, como ya se ha mencionado antes en algunos ejemplos. En realidad siempre existe roce, de manera que la idealización de contacto liso corresponde a un modelo simplificado que puede ser útil en muchos casos.

Las fuerzas de roce permiten realizar acciones tan simples como caminar, lo que sería imposible sobre una superficie perfectamente lisa. Sin la fricción tampoco podrían moverse los vehículos, los clavos no permanecerían en su sitio, no existirían las dunas de arena, los lápices se escaparían de nuestros dedos, los objetos se caerían de las repisas, etc. Por otra parte, en muchas aplicaciones el roce tiene efectos indeseados que es necesario minimizar, por ejemplo, en las máquinas origina desgaste de las superficies en contacto y pérdida de energía, ya que las fuerzas opuestas al movimiento deben contrarrestarse permanentemente. Por ello en esos casos se utilizan superficies cuidadosamente pulimentadas, sistemas de rodamientos, y lubricación.

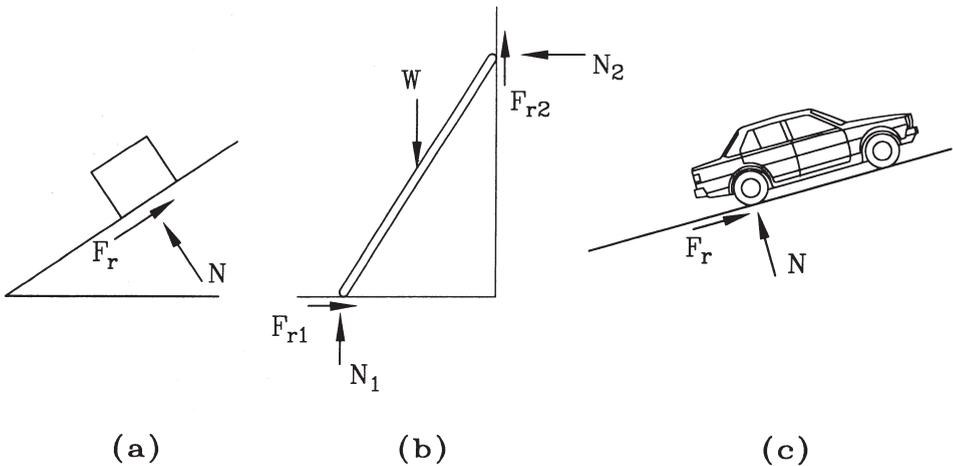
El *roce seco* se refiere a la fuerza tangencial de contacto entre dos superficies secas que deslizan o tienden a deslizar una respecto a la otra. Se sabe que el roce seco se debe principalmente a la irregularidad de las superficies en contacto y a la atracción molecular de los materiales involucrados. El *roce fluido* se refiere a la fricción entre capas de un fluido, como ocurre entre un eje y su asiento lubricado con aceite. La lubricación tiene por objeto separar las superficies en contacto para minimizar el roce (Fig. 1.38). En algunos casos la lubricación no es deseada, como ocurre con el agua en el pavimento, pues reduce considerablemente las fuerzas de fricción; una medida para evitar la formación de la película de agua que separa el pavimento del neumático es el dibujo de éstos, el que obliga al agua a desplazarse hacia los intersticios del neumático, manteniendo el contacto efectivo de éste con el pavimento. Por otra parte, el polvo o arena sobre el pavimento puede causar un efecto similar al lubricante.



**Figura 1.38** Superficies en contacto ampliadas: a) terminación irregular en contacto seco, b) terminación suave lubricada

A su vez, debe distinguirse el *roce estático*, que se desarrolla entre superficies en reposo una con respecto a la otra, del *roce cinético*, que actúa entre superficies en movimiento relativo. A continuación se describirán las propiedades del roce estático:

- a) Las fuerzas de roce son *reactivas* (ver la Sección 1.3.2) porque se oponen a la ocurrencia de un desplazamiento. Como fuerza reactiva, la fricción responde a una *demanda*. En efecto, en la situación que se presenta en la Fig. 1.8.a no existe fuerza de fricción porque no hay demanda que la haga necesaria, independientemente del grado de rugosidad de los cuerpos en contacto. En la situación que se presenta en la Fig. 1.8.b, al aplicar el hombre una fuerza  $H$  se moviliza de inmediato una fuerza de roce  $R_h$ , de igual dirección pero de sentido contrario, para lograr el equilibrio horizontal del sistema. Es claro que  $R_h$  depende de la demanda  $H$ , a mayor  $H$  mayor  $R_h$ , porque siempre  $R_h = H$  para mantener el equilibrio.
- b) La fuerza de roce es *tangencial* a las superficies en contacto, es decir queda contenida en el plano de deslizamiento potencial. Como fuerza reactiva, que se opone al deslizamiento relativo, la fuerza de roce es paralela a la dirección del desplazamiento impedido. La Fig. 1.39 muestra las fuerzas de roce  $F_r$  en tres situaciones típicas; también se muestran las componentes normales de la reacción ( $N$ ) que por cierto están presentes. En el caso de apoyo liso  $F_r = 0$  y sólo existe reacción normal  $N$ .



**Figura 1.39** Dirección tangencial del roce

- c) La fuerza de roce que puede desarrollarse entre dos cuerpos tiene un valor límite máximo:

$$F_{\max} = \mu N \tag{1-36}$$

en que  $\mu$  es el *coeficiente de roce estático*, que depende de los materiales en contacto y las condiciones de sus superficies, y de  $N$ , que es la fuerza *normal* de contacto perpendicular a la superficie tangencial de deslizamiento potencial. Cuando la fuerza de fricción  $F_r$  excede  $F_{\max}$  se rompe el equilibrio estático y se inicia el deslizamiento. Generalmente el deslizamiento continúa porque el *coeficiente de roce cinemático*  $\mu_c$  es aún menor que  $\mu$ . Cuando la fuerza de fricción es idéntica a  $F_{\max}$  se dice que el cuerpo se encuentra en la *condición límite de equilibrio o a punto de deslizar*. Cuando la fuerza de fricción  $F_r$  es menor que  $F_{\max}$  el cuerpo puede encontrarse en equilibrio.

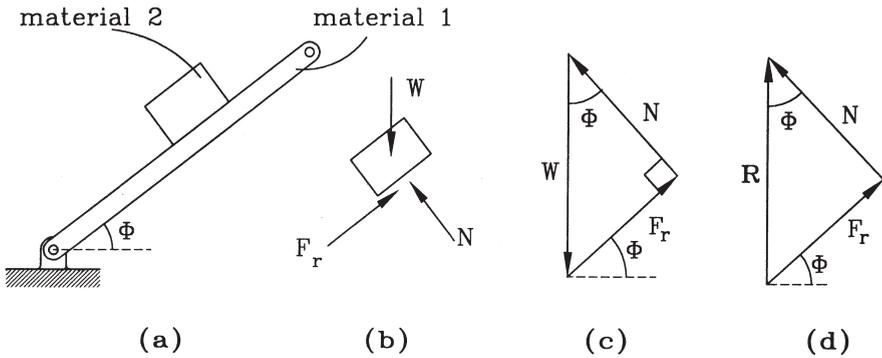
Valores típicos del coeficiente de roce se presentan en la Tabla 1.1. Debe notarse sin embargo que ellos sólo tienen valor referencial, ya que pueden variar ampliamente dependiendo de las distintas calidades de cada material, del acabado de las superficies y su limpieza, de la temperatura, y por cierto en alto grado de la presencia de agua o lubricación.

- d) El coeficiente de roce  $\mu$ , es independiente de la fuerza normal  $N$  y no depende del área de contacto de los cuerpos involucrados. El hecho de que el contacto se realice en un área pequeña, manteniendo  $N$  constante, sólo involucra una presión de contacto mayor, pero no altera a  $\mu$  ni a la fuerza de roce máxima  $F_{\max}$ .

**TABLA 1.1** Valores Típicos del Coeficiente de Roce Estático

Material	Seco	Mojado	Con Aceite
Bronce con bronce	0,2	0,1	–
Goma sobre asfalto	0,6	0,3	0,1
Goma sobre hormigón	0,7	0,4	0,2
Goma sobre hielo	0,1	–	–
Madera sobre metal	0,4 – 0,5	–	–
Teflón sobre teflón	0,05	–	–
Cuerda de cáñamo sobre madera	0,7	–	–
Metal sobre metal	0,5 – 1,0	–	–

Como se mencionó antes, el valor de  $\mu$  para cada caso específico es muy incierto. Afortunadamente, sin embargo, su valor puede determinarse mediante un experimento muy simple. Este consiste en disponer una rampa de inclinación variable hecha de uno de los materiales y colocar sobre ella el segundo material, como ilustra la Fig. 1.40.a. Para cualquier inclinación  $\phi$ , las fuerzas que actúan sobre el bloque y el correspondiente polígono de fuerzas se muestran en las Figs. 1.40.b y c.



**Figura 1.40** Determinación del coeficiente de roce

El experimento consiste en aumentar progresivamente el ángulo  $\phi$  hasta alcanzar  $\phi_{\max}$  compatible con el equilibrio, es decir hasta que se inicie el deslizamiento del bloque. En referencia a la Fig. 1.40.c, con  $\phi = \phi_{\max}$  y utilizando el Teorema de Lamy, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\frac{W}{\text{sen}90^\circ} = \frac{F_r}{\text{sen}\phi_{\max}} = \frac{N}{\text{sen}(90 - \phi_{\max})}$$

utilizando la segunda igualdad se tiene

$$F_r = N \tan \phi_{\max} \quad (1-37)$$

pero por ser la situación límite de equilibrio, la fuerza de fricción alcanzó su valor máximo, luego

$$F_r = F_{r\max} = \mu N \quad (1-38)$$

igualando las Ecs. 1-37 y 1-38 se tiene

$$\mu = \tan \phi_{\max} \quad (1-39)$$

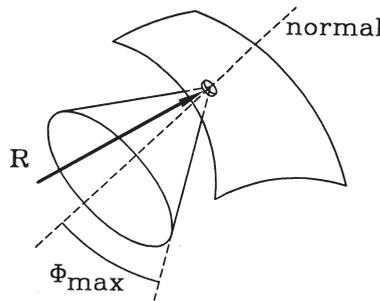
con lo cual, medido  $\phi_{\max}$  en el experimento, se obtiene el coeficiente de roce  $\mu$  entre ambos materiales.

La explicación del experimento anterior se presta para introducir el concepto de *ángulo de roce*, que corresponde a la inclinación máxima respecto a la normal que puede adoptar la fuerza interna total entre dos superficies en contacto. En la Fig. 1.40.b la reacción se planteó en términos de las componentes normal al plano  $N$  y tangencial al plano  $F_r$ . Por supuesto la reacción total  $R$  es la suma de ellas dos, como muestra la Fig. 1.40.d, y por cierto  $R$  es vertical, e igual en magnitud y sentido contrario a  $W$ , pues el equilibrio exige  $R=W$ . Como puede apreciarse en la Fig. 1.40.d,  $R$  forma ángulo  $\phi$  con la normal, o sea, forma ángulo  $\phi$  con el plano inclinado. El experimento

antes descrito puede entonces interpretarse diciendo que en la medida que se aumenta la inclinación de la rampa, se obliga a cambiar la inclinación de R con respecto al plano inclinado, aunque su magnitud se mantiene siempre constante igual a W y su dirección se mantiene siempre vertical. La pérdida de equilibrio al alcanzar  $\phi_{max}$  se explica entonces porque las superficies en contacto no son capaces de desarrollar una reacción interna con inclinación mayor a  $\phi_{max}$ . La máxima inclinación, o ángulo de roce, se relaciona con el coeficiente de fricción según la Ec. 1.39, de donde:

$$\phi_{max} = \arctan (\mu) \tag{1-40}$$

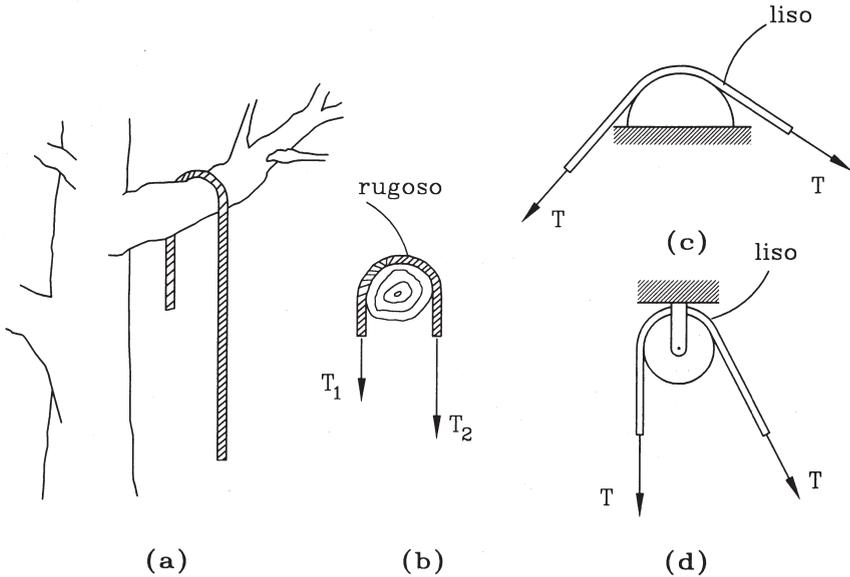
La interpretación geométrica del ángulo de roce máximo  $\phi_{max}$  es el llamado *cono de roce*. Si se tiene una partícula sobre una superficie cualquiera, para mantenerla en equilibrio en contacto con la superficie, la reacción R de la superficie sobre la partícula debe encontrarse sobre o al interior del cono generado por las infinitas rectas que forman ángulo  $\phi_{max}$  con la normal a la superficie en el punto de contacto (Fig. 1.41). Cuando R está justo sobre el cono, la partícula se encuentra en estado límite de equilibrio.



**Figura 1.41** Cono de roce

Otra aplicación de la fricción se encuentra en el caso de cuerdas o correas en contacto con superficies rugosas. Por ejemplo, la Fig. 1.42.a muestra una cuerda real pesada que descansa en reposo sobre la rama de un árbol, aunque sin duda el peso de las partes colgantes es diferente como muestra la Fig. 1.42.b. Este tipo de fricción se utiliza mucho en máquinas, para transmitir el movimiento de un elemento rotatorio a otro, casos muy conocidos son la correa del ventilador de un automóvil, o la correa de la antigua máquina de coser movilizada con los pies. Una importante aplicación industrial es la correa transportadora, que consiste en una banda sin fin para acarrear granos, minerales, o productos molidos en general; el movimiento de la banda de goma se mantiene por contacto rugoso con un cilindro motriz accionado por un motor.

Por el contrario, hay ocasiones en que se desea minimizar el roce de contacto, utilizándose para ello dispositivos como las poleas. Cuando puede ignorarse el roce, por ser despreciable, se usan modelos de contacto liso, como muestran las Figs. 1.42.c y d; la propiedad fundamental en este caso es que la tensión T de la cuerda se mantiene constante, independiente de la longitud de contacto con el apoyo liso y de los ángulos de despegue de la cuerda a ambos lados de la curva de apoyo.



**Figura 1.42** Cuerdas en contacto rugoso (a y b) y lisos (c y d)

Para analizar el estado de equilibrio límite de una cuerda liviana en contacto con una superficie cualquiera rugosa, considérese la Fig. 1.43. La cuerda está en contacto con la curva entre los puntos A y B donde se despega de ella, siendo *tangente* a la curva en dichos puntos. En A y B se han trazado las *normales* a la curva (perpendiculares a la tangente), las que se intersectan en O formando el ángulo  $\beta$ . Suponiendo que la cuerda está a punto de deslizarse hacia la izquierda, a lo largo del camino entre A y B se desarrollan fuerzas de fricción en el contacto, designadas por  $f$ , que se oponen al deslizamiento (sentido contrario a  $T$ ), y fuerzas normales  $n$ . Estas fuerzas, que podrían considerarse actuando en pequeños segmentos de la cuerda, no son constantes sino dependen de la curvatura de la superficie en el punto de contacto; en efecto, a mayor curvatura mayores son  $n$  y  $f$  ( $f = \mu n$ ), mientras que si no hay curvatura (contacto plano)  $n$  y  $f$  son nulas. Por simplicidad, en la Fig. 1.43 se muestran con las mismas letras a todo el largo del contacto, pero en rigor son distintas en cada punto. Claramente  $T > T_0$  ya que, para romper el equilibrio, la fuerza  $T$  debe vencer a  $T_0$  más todas las fuerzas de fricción a lo largo del contacto. La evaluación de la relación entre  $T$  y  $T_0$  requiere usar cálculo integral (ver Riley y Sturges, 1995), lo que se omitirá aquí, llegándose a la expresión:

$$T = T_0 e^{\mu\beta} \quad (1-41)$$

En que  $e$  es un número notable en matemáticas que corresponde a la *base* de los *logaritmos naturales* (la función logaritmo natural, designada por  $\ln$ , es tal que si

para dos números reales dados se cumple que  $\ln(a)=b$  implica que  $e^b=a$ ). El número  $e$  corresponde al resultado de la serie infinita

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2,7182818284590\dots \tag{1-42}$$

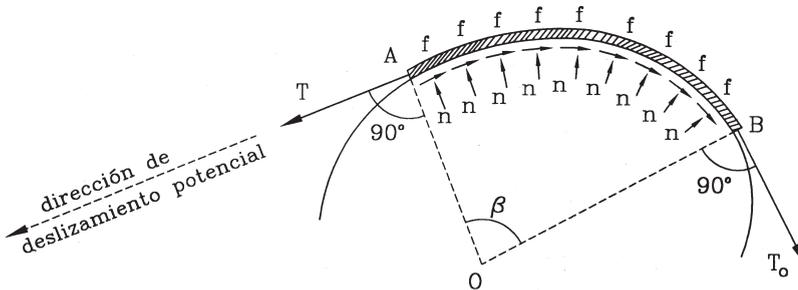


Figura 1.43 Cuerda sobre superficie rugosa

Por su parte  $\beta$ , como muestra la Fig. 1.43, es el ángulo de contacto, o ángulo entre las normales en los puntos de tangencia, el que debe expresarse en *radianes*. Los radianes son una unidad de medida de ángulos: una circunferencia completa, es decir un ángulo de  $360^\circ$ , equivale a  $2\pi$  radianes. La conversión de  $\beta$  de grados a radianes se obtiene entonces de la proporción

$$\frac{\beta(\text{rad})}{\beta(^{\circ})} = \frac{2\pi}{360} \tag{1-43}$$

**Ejemplo 1.13**

Un bloque de peso  $W$  se encuentra sobre un plano inclinado en  $10^\circ$  como muestra la Fig. E1.13.a. El coeficiente de fricción entre ambos materiales es  $\mu=0,3$ . a) ¿Está el bloque en equilibrio?; b) ¿Para qué inclinación del plano se rompería el equilibrio?; c) En la condición límite de equilibrio, ¿cuál es la magnitud de las componentes normal y tangencial de la reacción? y ¿cuál es la reacción total?

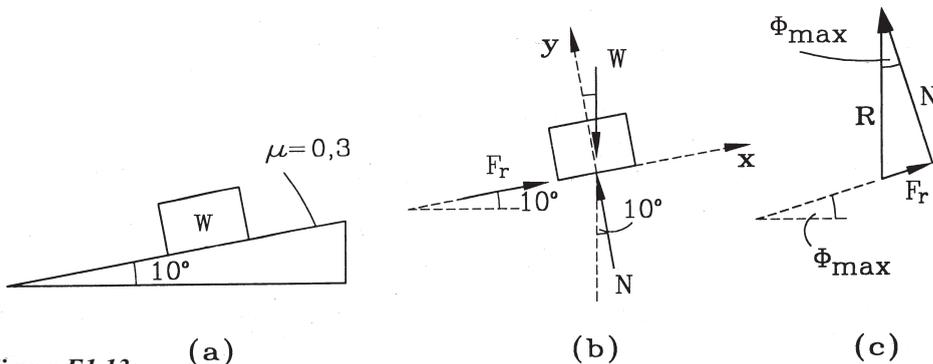


Figura E1.13

**Solución:**

- a) La única forma de que el bloque pierda el equilibrio es que no haya suficiente fricción para sostenerlo. Entonces, para responder la pregunta hay que analizar las reacciones del plano sobre el bloque. Para ello considérese la Figura E1.13.b, que muestra el diagrama de cuerpo libre del bloque con las fuerzas externas que actúan sobre él. Se muestra también un sistema de ejes de referencia respecto de los cuales las ecuaciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_x = 0 \quad F_r = W \operatorname{sen} 10^\circ = 0,174 W$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad N = W \operatorname{cos} 10^\circ = 0,985 W$$

La máxima fuerza de roce que podría desarrollarse es

$$F_{\max} = \mu N = 0,3 \cdot 0,985 W = 0,295 W$$

como  $F_r < F_{\max}$  el bloque está en equilibrio.

- b) La máxima inclinación posible corresponde al ángulo de roce (Ec. 1-40):

$$\phi_{\max} = \arctan(\mu) = \arctan(0,3) = 16,7^\circ$$

También podrían haberse usado las ecuaciones de la parte (a) con la incógnita  $\phi_{\max}$  en vez de  $10^\circ$ :

$$F_r = W \operatorname{sen} \phi_{\max}$$

$$N = W \operatorname{cos} \phi_{\max}$$

pero por tratarse de la condición límite de equilibrio  $F_r = \mu N$ , luego

$$W \operatorname{sen} \phi_{\max} = \mu N = \mu W \operatorname{cos} \phi_{\max}$$

$$\operatorname{sen} \phi_{\max} = \mu \operatorname{cos} \phi_{\max}$$

$$\tan \phi_{\max} = \mu$$

que corresponde a la Ec. 1-39 que conduce a la misma ecuación usada antes.

- c) Usando las ecuaciones de la parte (b) se tiene:

$$F_r = W \operatorname{sen} 16,7^\circ = 0,287 W$$

$$N = W \operatorname{cos} 16,7^\circ = 0,958 W$$

- d) La reacción total es la composición (suma) de  $F$  y  $N$  (Fig. E1.13.c). La componente horizontal de  $R$  es:

$$R_h = F_r \cos\phi_{\max} - N \sin\phi_{\max}$$

$$R_h = W \sin\phi_{\max} \cos\phi_{\max} - W \cos\phi_{\max} \sin\phi_{\max} = 0$$

y la componente vertical es:

$$R_v = F_r \sin\phi_{\max} + N \cos\phi_{\max}$$

$$R_v = W \sin^2\phi_{\max} + W \cos^2\phi_{\max} = W$$

o sea,  $R=R_v=W$ , lo que era obvio ya que para equilibrar el peso  $W$  vertical se requiere una reacción también vertical, de sentido opuesto y magnitud  $W$ . Este último resultado no rige sólo para la condición límite de equilibrio sino para cualquier inclinación  $\phi$  del plano inclinado tal que  $\phi \leq \phi_{\max}$ .

**Ejemplo 1.14**

Sobre dos planos inclinados en  $30^\circ$  y  $60^\circ$  descansan bloques de peso  $W$  y  $1000\text{ kg}$  respectivamente (Fig. E1.14.a). El contacto es liso en el plano de la izquierda y rugoso con coeficiente  $\mu=0,5$  en el plano de la derecha. Los bloques están unidos por una cuerda liviana que pasa por una polea lisa en la arista  $C$ . Determinar qué valores del peso  $W$  permiten el equilibrio del sistema.

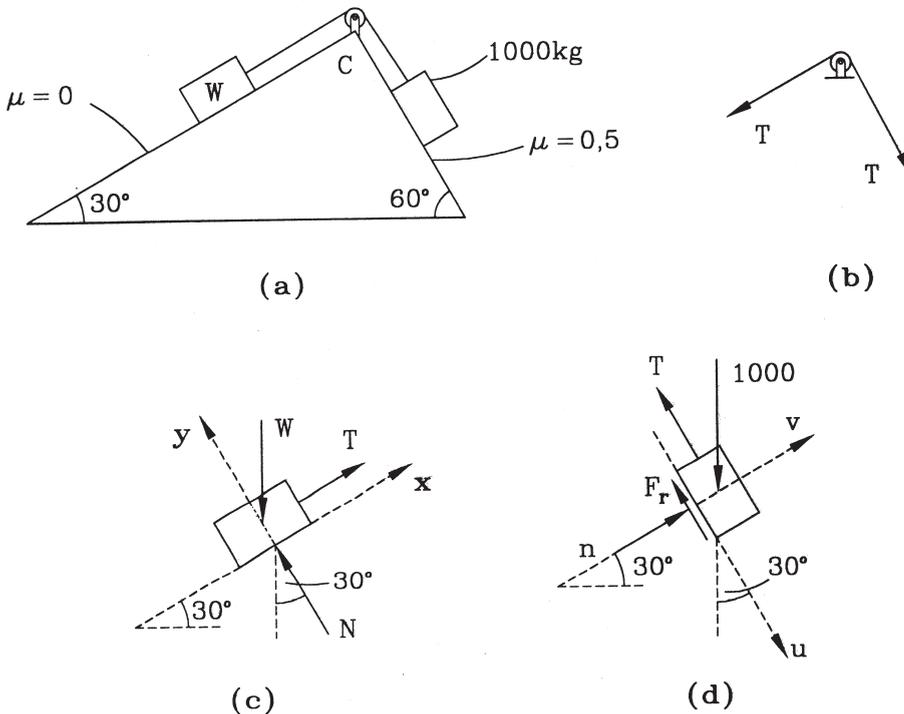


Figura E1.14

**Solución:** Considérese los diagramas de cuerpo libre de los tres elementos relevantes del sistema. En el caso de la polea, por ser lisa, la fuerza que transmite la cuerda se mantiene constante, y se ha designado por  $T$  (Fig. E1.14.b). En el caso del bloque de peso  $W$  (Fig. E1.14.c) la reacción del plano sobre el bloque es únicamente la normal  $N$ , ya que el contacto es liso; y las ecuaciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_x = 0 \quad T = W \operatorname{sen}30^\circ = 0,500 W \quad (\text{i})$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad N = W \operatorname{cos}30^\circ = 0,866 W \quad (\text{ii})$$

En el caso del bloque de peso 1000 kg considérese primero la condición límite de equilibrio en que el bloque tiende a deslizar hacia abajo del plano inclinado, por esta razón en la Fig. E1.14.d la fuerza de roce  $F_r$  (componente tangencial de la reacción) se ha colocado en el sentido negativo del eje  $u$ , es decir, en sentido opuesto al desplazamiento potencial; en otras palabras,  $F_r$  ayuda a que el bloque no caiga. Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_u = 0 \quad T + F_r = 1000 \operatorname{cos}30^\circ = 866 \quad (\text{iii})$$

$$\Sigma F_v = 0 \quad n = 1000 \operatorname{sen}30^\circ = 500 \quad (\text{iv})$$

pero por ser condición límite de equilibrio y utilizando la ecuación iv se tiene

$$F_r = \mu N = 0,5 \cdot 500 = 250 \text{ kg} \quad (\text{v})$$

que se introduce en la ecuación iii para obtener  $T = 866 - F_r = 616 \text{ kg}$ . Con este valor de  $T$ , la ecuación i queda:

$$616 = 0,5 W$$

$$W = 1232 \text{ kg}$$

Este valor de  $W$  es el necesario para justo impedir que el bloque de 1000 kg caiga hacia abajo. Si se aumenta el valor de  $W$  se seguirá manteniendo el equilibrio (disminuyendo  $F_r$ ), pero si  $W$  es muy grande puede llegar a levantar el bloque de 1000 kg hacia arriba perdiéndose nuevamente el equilibrio. En este nuevo estado límite de equilibrio el diagrama de la Fig. E1.14.d sigue siendo válido, excepto que  $F_r$  tiene sentido contrario pues ahora debe oponerse al deslizamiento potencial hacia arriba. Todas las ecuaciones de equilibrio antes planteadas son válidas, excepto la iii que ahora queda

$$T - F_r = 1000 \operatorname{cos}30^\circ = 866 \quad (\text{vi})$$

Utilizando la ecuación v se obtiene  $T=866+F_f=1116$  kg, y de la ecuación i se obtiene  $W=2232$  kg. Se concluye entonces que el sistema está equilibrio si

$$1232 \leq W \leq 2232 \text{ kg}$$

### Ejemplo 1.15

A un bloque de peso  $W$ , que descansa en un plano rugoso inclinado en  $\alpha$  con el plano horizontal, se le aplica una fuerza  $F$  horizontal paralela al plano, a) Si el sistema está en equilibrio, determinar la magnitud y dirección de la fuerza de fricción; b) Determinar la máxima fuerza  $F$  que se puede aplicar y la dirección en que se iniciará el desplazamiento al romperse el equilibrio.

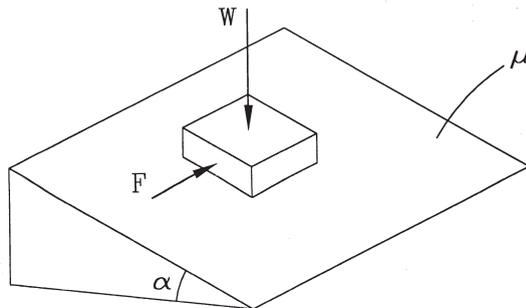
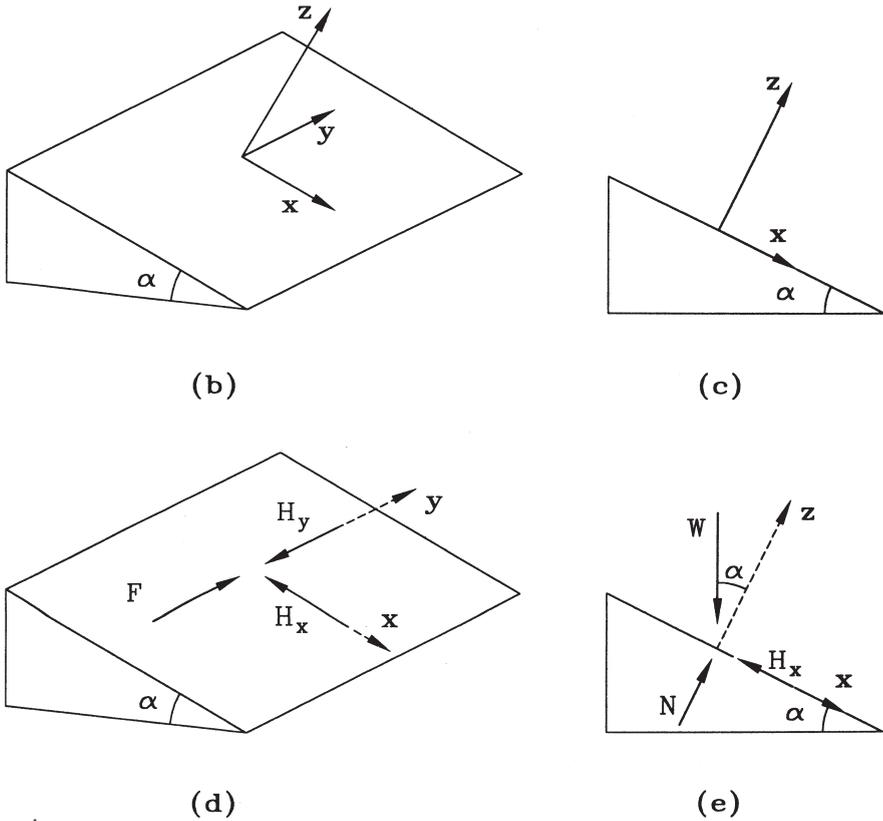


Figura E1.15.a

**Solución:** Este es un problema de tipo espacial por lo que deberá utilizarse un sistema de ejes de referencia tridimensional. Además, por tratarse de un cuerpo sometido a sólo 3 fuerzas ( $W$ ,  $F$  y la reacción  $R$  del plano sobre él), éstas deben ser concurrentes y el cuerpo puede modelarse como partícula. Considérese entonces el sistema de ejes que muestra la Fig. E1.15.b en que el plano  $xy$  coincide con el plano inclinado, el eje  $z$  es perpendicular a él, y el eje  $y$  es horizontal. La Fig. E1.15.c muestra los mismos ejes vistos en un plano de perfil.

A su vez, las Figuras E1.15.d y e muestran las fuerzas dadas y las reacciones correspondientes. Las fuerzas de fricción  $H_x$  y  $H_y$ , que actúan en el plano de contacto de ambos cuerpos (tangenciales), corresponden a las componentes de la fuerza de fricción total  $H$ , también tangencial, pero de dirección desconocida. La reacción normal  $N$ , de dirección  $z$ , se aprecia en el plano de perfil. Por cierto la reacción  $R$  total del plano sobre el bloque corresponde a la composición de las 3 componentes de reacción:

$$\{R\} = \{N, H_x, H_y\}$$



**Figura E1.15**

Las ecuaciones de equilibrio son muy simples, en efecto:

$$\Sigma F_x = 0 \quad H_x = W \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{i})$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad H_y = F \quad (\text{ii})$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad N = W \operatorname{cosen} \alpha \quad (\text{iii})$$

a) La fricción total  $H$  es la composición de las fuerzas tangenciales  $H_x$  y  $H_y$ , como muestra la Fig. E1.15.f. Como el triángulo  $OAB$  es rectángulo, se tiene:

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}$$

$$H = \sqrt{W^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + F^2} \quad (\text{iv})$$

$$\beta = \arctan \frac{AB}{OA} = \arctan \frac{H_y}{H_x} = \arctan \left( \frac{F}{W \text{sen} \alpha} \right)$$

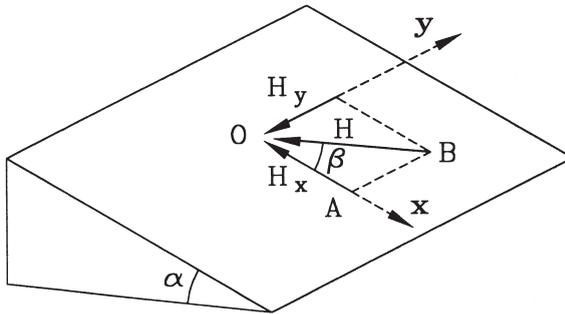


Figura E1.15.f

b) En la condición límite de equilibrio la reacción tangencial total H alcanza la fricción máxima que puede desarrollarse  $H_{\text{max}} = \mu N$ . Luego, utilizando la ecuación iii:

$$H_{\text{max}} = \mu W \cos \alpha$$

e introduciendo en la ecuación iv se tiene:

$$H_{\text{max}} = \mu W \cos \alpha = \sqrt{W^2 \text{sen}^2 \alpha + F_{\text{max}}^2}$$

$$\mu^2 W^2 \cos^2 \alpha = W^2 \text{sen}^2 \alpha + F_{\text{max}}^2$$

$$F_{\text{max}} = W \sqrt{\mu^2 \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha}$$

y el deslizamiento se iniciará en la dirección de esta fuerza:

$$\beta = \arctan \left( \frac{F_{\text{max}}}{W \text{sen} \alpha} \right)$$

**Ejemplo 1.16**

Determinar la fuerza X necesaria para sostener un peso de 1000 kg mediante una cuerda liviana que da dos vueltas completas a un tronco rugoso con coeficiente de fricción  $\mu=0,5$ . ¿Qué fuerza soporta la rama del árbol?

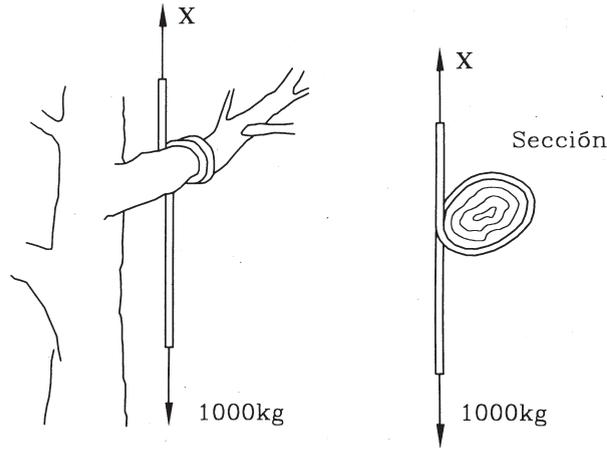


Figura E1.16

**Solución:** Se supone que el peso está a punto de deslizarse hacia abajo, es decir la fuerza  $X$  será la mínima necesaria para sostenerlo. Utilizando la Ec. 1-41 con  $T=1000$  kg,  $T_0=X$  y  $\beta=2\cdot 2\pi=4\pi$  radianes, se tiene:

$$1000 = X e^{\mu\beta} = X e^{0.5\cdot 4\pi}$$

$$X = \frac{1000}{e^{2\pi}} = 1,9 \text{ kg}$$

La fuerza que soporta la rama es la diferencia  $1000-X$ , es decir 998,1 kg.

### Ejemplo 1.17

Un cuerpo de 100 kg de peso cuelga de una cuerda liviana que pasa por sobre un mesón y sostiene un peso  $W$  en su otro extremo. El coeficiente de roce entre la cuerda y la mesa es 0,4. Determinar el peso  $W$  para que el peso de 100 kg: a) no descienda, b) suba

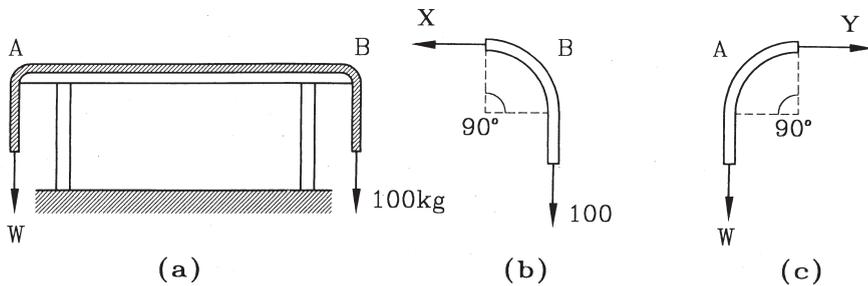


Figura E1.17

**Solución:**

- a) Se trata de aplicar el peso  $W$  mínimo posible para impedir el desplazamiento de la cuerda hacia la derecha, o sea, se supone que el sistema está a punto de deslizar hacia la derecha. Aplicando la Ec. 1-41 en la esquina B, donde se tiene un cambio de ángulo de la cuerda  $\beta = \pi/2$  se tiene

$$100 = Xe^{0,4(\pi/2)}$$

$$X = 53,35 \text{ kg}$$

En la zona horizontal del mesón no hay fricción porque no hay curvatura, luego en la esquina A  $Y=X$ , y aplicando nuevamente la Ec. 1-41:

$$Y = 53,35 = We^{0,4(\pi/2)}$$

$$W = 28,46 \text{ kg}$$

- b) Para la condición inversa se puede seguir un procedimiento análogo al anterior, sin embargo basta con darse cuenta que el cociente entre las fuerzas en ambos extremos es ahora justamente el inverso. Luego, para que la cuerda se desplace hacia la izquierda se requiere aplicar

$$W = \left( \frac{100}{28,46} \right) 100 = 351,36 \text{ kg}$$

De ambos resultados puede concluirse que si  $28,46 \leq W \leq 351,36 \text{ kg}$  el sistema está en equilibrio.

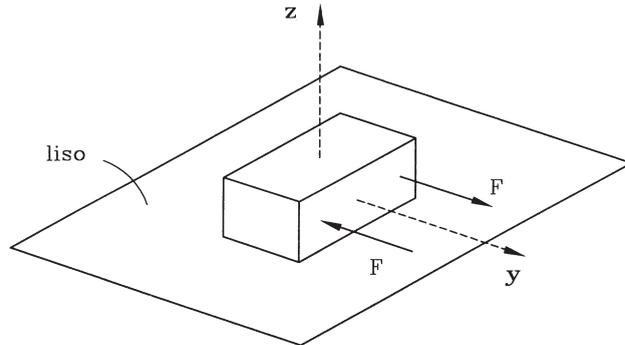
## 1.8 Concepto de Momento

### 1.8.1 Introducción

Considérese el cuerpo de peso  $W$  de la Fig. 1.44 que descansa sobre un plano liso horizontal. Sobre el cuerpo actúan dos fuerzas  $F$  horizontales, paralelas, de igual magnitud, pero de sentido opuesto. En la dirección vertical  $z$  habrá equilibrio del cuerpo con una reacción vertical igual y contraria al peso  $W$  ( $R=W$ ). Lo notable ocurre en la dirección  $y$ , pues también se cumple la ecuación de equilibrio

$$F - F = 0$$

pero intuitivamente queda claro que, siendo el plano liso, el cuerpo no permanecerá en reposo sino tenderá a girar en el sentido de los punteros del reloj. Pareciera paradójal que cumpliéndose las ecuaciones de equilibrio éste no se logra, pero no lo es, la falacia está en considerar al cuerpo como partícula, lo que es ilegítimo porque las fuerzas aplicadas no son concurrentes.



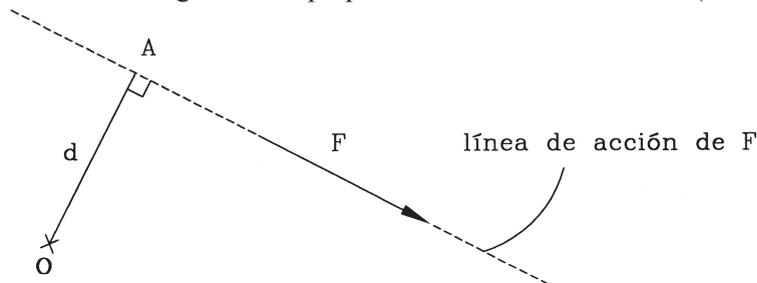
**Figura 1.44**

Las conclusiones inmediatas son, primero, que el equilibrio de fuerzas no basta para garantizar el equilibrio de un cuerpo, y segundo, que el concepto mismo de fuerza es insuficiente para describir el estado de un cuerpo tridimensional como el bloque de la Fig. 1.44. Para completar la descripción del estado de cuerpos tridimensionales sometidos a sistemas generales de fuerzas, es necesario introducir el concepto de *momento*, lo que se hará en las secciones siguientes.

### 1.8.2 Momento de una Fuerza con Respecto a un Punto

Dada una fuerza  $F$  (magnitud, línea de acción, y sentido) y un punto cualquiera  $O$ , se define el *momento de la fuerza con respecto al punto  $O$*  como el producto de la fuerza por su distancia al punto  $O$  (Fig. 1.45).

Debe notarse que la línea de acción de la fuerza (recta cualquiera en el espacio) y el punto cualquiera  $O$  definen un plano. La distancia  $d$  del punto a la recta se mide en dicho plano como la longitud de la perpendicular desde  $O$  a la recta ( $d=OA$ ).



**Figura 1.45** Momento de una fuerza con respecto a un punto

### 1.8.3 Traslado de una Fuerza Fuera de su Línea de Acción

A las operaciones fundamentales con fuerzas descritas en la Sección 1.4 puede ahora agregarse una nueva y poderosa operación: Dada una fuerza  $F$  actuando en la línea de acción  $L_1$ , ella puede trasladarse a una línea de acción paralela  $L_2$ , incorporando el momento de la fuerza original con respecto a cualquier punto  $O$  de  $L_2$  (Fig. 1.46). Se

dice entonces que el sistema inicial y el sistema final son estáticamente equivalentes, es decir, desde el punto de vista del equilibrio su efecto es idéntico:

$$\{F_{enL_1}\} = \{F_{enL_2}, M\} \quad \text{con } M = Fd \quad (1-44)$$

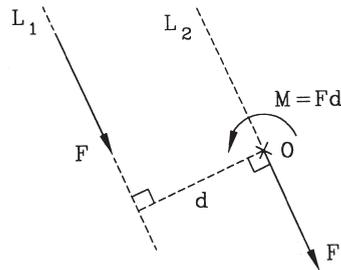


Figura 1.46 Traslado de una fuerza a una nueva línea de acción

Notar que el punto O es arbitrario pues, donde quiera que se escoja sobre  $L_2$ , el resultado es el mismo, ya que  $d$  es simplemente la distancia entre las dos rectas paralelas, es decir la longitud de la perpendicular a ambas rectas en el plano que ellas definen.

### 1.8.4 Pareja de Fuerzas y Propiedades del Momento

Se denomina *pareja de fuerzas* a dos fuerzas de igual magnitud, de líneas de acción paralelas, y sentido opuesto. Ejemplo de una pareja es la que actúa sobre el bloque de la Fig. 1.44. Para entender el efecto de una pareja considérese la de la Fig. 1.47.a. A continuación se aplica la operación descrita en la sección anterior, trasladando la fuerza en la línea de acción  $L_1$  a la línea de acción  $L_2$ . El resultado de esta operación se muestra en la Fig. 1.47.b. Los sistemas de las Figs. 1.47.a y b son obviamente estáticamente equivalentes. Pero en el sistema de la Fig. 1.47.b las dos fuerzas opuestas actuantes en la línea de acción  $L_2$  se anulan entre sí, luego, el sistema de la Fig. 1.47.b es equivalente a un momento único  $M=Fd$  o *momento puro* como ilustra la Fig. 1.47.c. Como este último sistema es estáticamente equivalente al de la Fig. 1.47.a se concluye que una pareja de fuerzas es equivalente a un momento puro, es decir una acción con fuerza resultante nula pero que tiende a producir un giro del cuerpo sobre el cual se aplica.

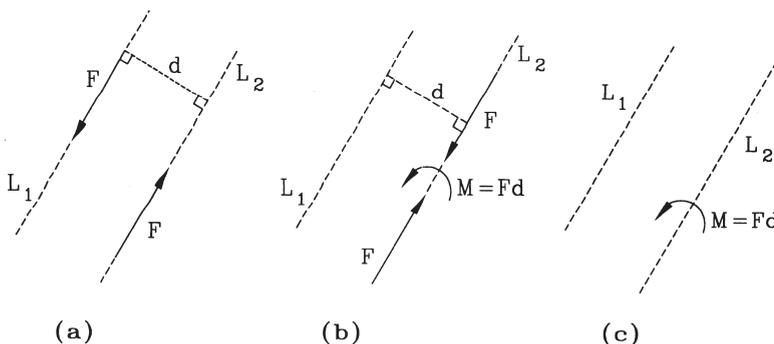
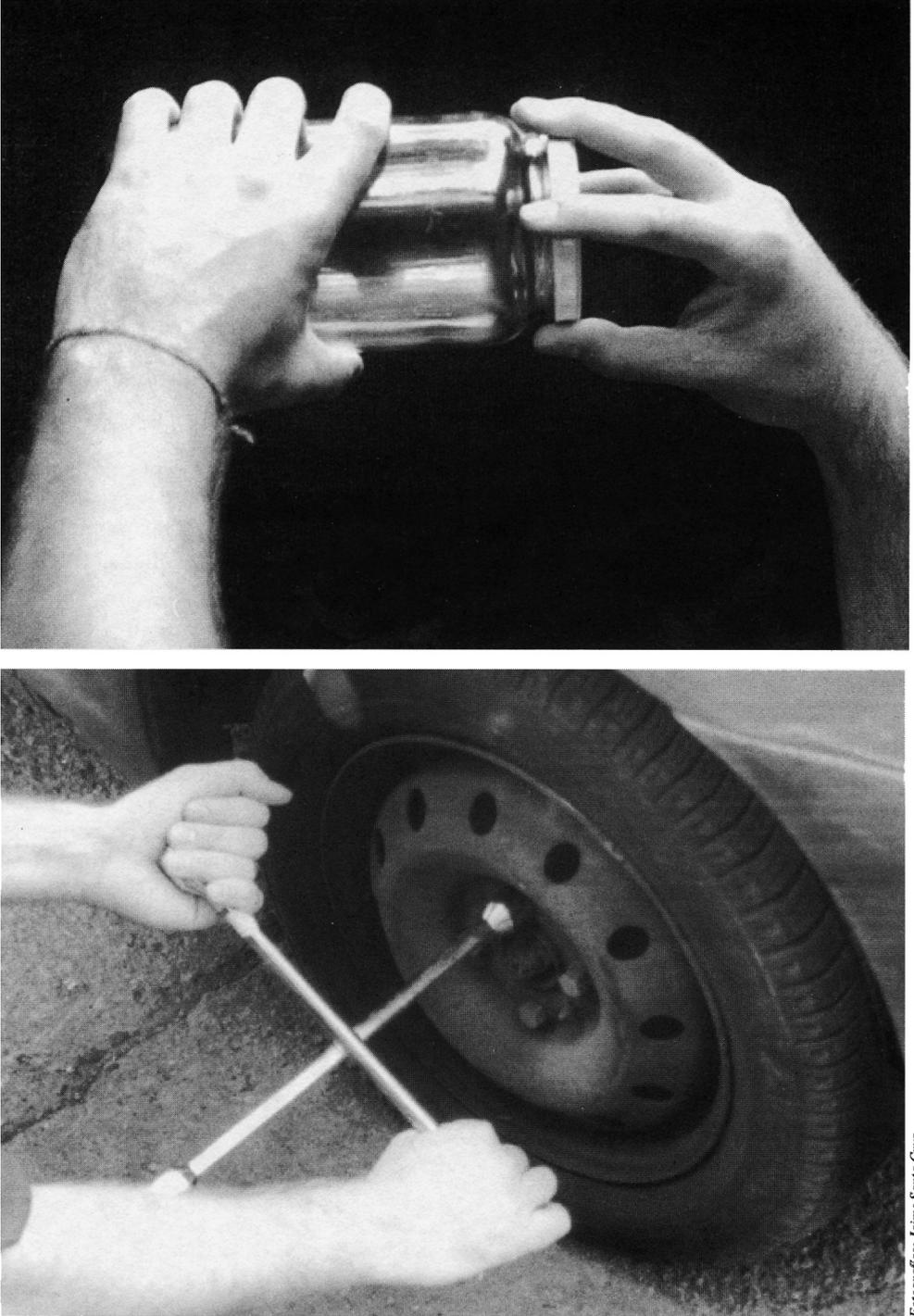


Figura 1.47 Pareja de fuerzas



Fotografías: Jaime Santa Cruz

*Figura 1.48* Ejemplos de momentos puros

La acción de momento puro es muy usual y nuestros dedos la realizan con gran habilidad en múltiples ocasiones: para girar la perilla del volumen de una radio, para sacar o poner la tapa de un frasco, para retirar un tornillo suelto. También se utilizan herramientas especiales para ejercer momentos puros, como la llave sacabujías o la llave de cruz para soltar o apretar los pernos de las ruedas de un vehículo. La Fig. 1.48 muestra un par de estos ejemplos, en el caso de la tapa del frasco, los 5 dedos ejercen fuerzas tangenciales a ella, posiblemente de distintas magnitudes, las que sumadas tienen resultante nula, pero ejercen un momento puro para atornillar o desatornillar la tapa; notar que el efecto del momento es producir un giro en torno a un eje perpendicular a la tapa. Por su parte, el mecánico aplica fuerzas iguales y contrarias, que ejercen un momento puro neto sobre la tuerca; nuevamente una acción que produce un giro en torno al eje de la herramienta y al eje del perno.

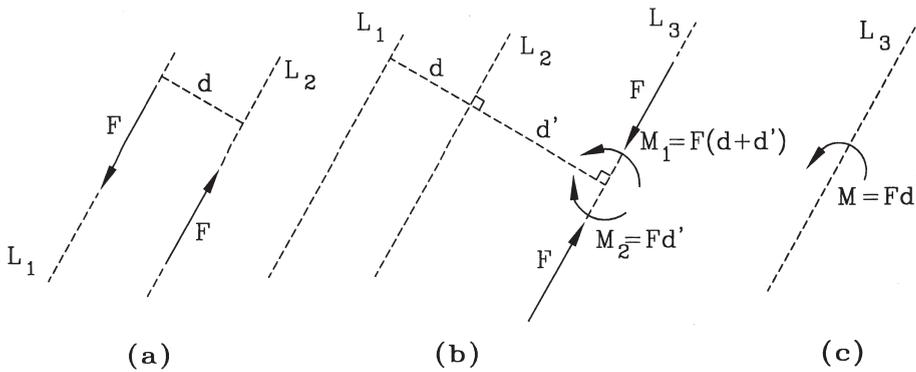


Figura 1.49

Una propiedad fundamental de una pareja de fuerzas es que puede trasladarse a cualquier posición en el plano y su efecto, desde el punto de vista del equilibrio, es el mismo. En el ejemplo de la Fig. 1.47 se hizo ver que la pareja dada era equivalente a un momento puro en torno a cualquier punto de la recta  $L_2$ . Tomando la misma pareja inicial (Fig. 1.49.a) se trasladarán ambas fuerzas, desde  $L_1$  y  $L_2$  respectivamente a una tercera línea de acción paralela  $L_3$ , a distancia  $d'$  de  $L_2$ , y contenida en el plano de  $L_1$  y  $L_2$ , es decir, en el plano de la pareja (Fig. 1.49.b). El traslado de  $F$  de  $L_1$  a  $L_3$  incorpora el momento  $M_1 = F(d + d')$ , y el traslado de  $F$  de  $L_2$  a  $L_3$  incorpora el momento  $M_2 = Fd'$ . En  $L_3$  las fuerzas  $F$  de sentido opuesto se cancelan, y los momentos se suman algebraicamente pues  $M_2$  tiene sentido contrario a  $M_1$ , luego el momento puro resultante es:

$$M = M_1 - M_2 = F(d + d') - Fd' = Fd$$

Es decir, la pareja original es equivalente a un momento puro en  $L_3$  (Fig. 1.49.c). Obviamente la operación anterior puede hacerse a cualquier recta  $L_3$  contenida en

el plano de la pareja original, es decir para cualquier valor de la distancia  $d'$ , y el resultado será el mismo: un momento puro  $M=Fd$ . Se concluye entonces que el efecto de una pareja de fuerzas es equivalente a un momento puro actuando en cualquier posición del plano de la pareja; esta propiedad se conoce como *principio de transmisibilidad de una pareja de fuerzas*. Es decir el momento equivalente a la pareja reside en cualquier parte del plano, así como una fuerza reside en cualquier parte de su línea de acción. Por otra parte, el valor invariante  $Fd$  corresponde a la magnitud de la pareja, lo que significa que la intensidad del momento puede variarse modificando la magnitud de la fuerza  $F$ , o la distancia  $d$ , o ambas. Finalmente, como ya se mencionó, un momento tiene también sentido (claramente al mover la perilla de la radio podemos hacerlo en uno u otro sentido). Típicamente, en el plano se utiliza con frecuencia la identificación del sentido de un momento como *a favor de los punteros del reloj*, o en el caso opuesto, *en contra de los punteros del reloj*.

En conclusión, el ente *momento* es similar al ente *fuerza*. Ambos tienen las propiedades de magnitud, dirección, y sentido, como se comparan en la Tabla 1.2.

Finalmente, cabe mencionar que el plano que alberga a un momento puede tener dirección cualquiera en el espacio y puede ser necesario expresar el momento en sus componentes según los ejes de un sistema de referencia tridimensional. Sin embargo, conforme a los objetivos de este texto y por simplicidad, aquí se trabajará casi exclusivamente con problemas planos que no requieren la representación vectorial de los momentos.

**TABLA 1.2** Comparación de los entes Fuerza y Momento

	<b>Fuerza</b>	<b>Momento</b>
Magnitud	F	M
Dirección	su línea de acción (transmisibilidad de la fuerza)	el plano en que actúa (transmisibilidad del momento)
Sentido	+ ó - en su línea de acción	+ ó - en su plano (en contra o a favor de los punteros del reloj)

### 1.8.5 Reducción de un Sistema General de Fuerzas. Caso Plano

Dado un sistema de fuerzas cualquiera en un plano, su reducción consiste en simplificarlo a una fuerza única  $R$  y a un momento único  $M_O$  en torno a un punto arbitrario  $O$  previamente escogido, de modo que el sistema original y el sistema resultante son estáticamente equivalentes:

$$\{R, M_O\} = \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n\} \quad (1-45)$$

El procedimiento consiste en aplicar la operación descrita en la Sección 1.8.3 para todas las fuerzas dadas, trasladando cada una de ellas a una línea de acción que pasa por el punto O. Finalmente se tiene un conjunto de fuerzas concurrentes en O, para el cual se obtiene su resultante R, más el conjunto de momentos de cada una de las fuerzas en torno al punto O, cuya suma algebraica es el momento total  $M_O$ . En general el sistema reducido será tal que  $R \neq 0$  y  $M_O \neq 0$ , sin embargo, en el caso de un sistema de fuerzas plano, el sistema resultante puede siempre transformarse en uno referido a un nuevo punto P tal que  $M_p = 0$  y

$$\{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n\} = \{R, M_O\} = \{R, M_p = 0\}$$

Existen entonces tres alternativas para el sistema reducido resultante:

$R \neq 0$	$M = 0$	(fuerza resultante única)
$R = 0$	$M \neq 0$	(momento puro resultante)
$R = 0$	$M = 0$	(sistema nulo)

por cierto el último caso corresponderá a lo que se llama un sistema de fuerzas en equilibrio. El procedimiento de reducción de un sistema de fuerzas plano se ilustra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 1.18**

El sistema de fuerzas de la Figura E1.18.a, referido a los ejes x e y, corresponde a todas las fuerzas (acciones y reacciones) que actúan sobre un cuerpo plano. Se pide: a) reducir el sistema de fuerzas dado a una fuerza y un momento en el punto  $O_1$ ; b) transformar el sistema anterior en uno estáticamente equivalente a él pero con la fuerza pasando por el punto  $O_2$ ; c) ¿existe una línea de acción de la fuerza tal que el momento del sistema pueda anularse?; d) ¿está el cuerpo en equilibrio?.

**Solución:**

a) La traslación paralela de todas las fuerzas al punto  $O_1$  corresponde a tener un sistema de fuerzas concurrentes en dicho punto. La resultante (suma) de este sistema de fuerzas se obtendrá haciendo la suma de las componentes horizontales y verticales, y posteriormente componiendo éstas para hallar la resultante R. En particular la fuerza  $F_1$  se puede descomponer en

$$F_{1x} = -F_1 \text{sen}15^\circ = -90,6 \text{ kg}$$

$$F_{1y} = -F_1 \text{cos}15^\circ = -338,1 \text{ kg}$$

y la distancia de  $F_1$  al punto  $O_1$  es  $d_1=52$  cm, de manera que el momento de  $F_1$  con respecto al punto  $O_1$  es

$$M_1 = 350 \cdot 52 = 18200 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

tomándose como positivo los momentos contra los punteros del reloj. Procediendo de igual forma para cada una de las fuerzas, se construye la siguiente tabla:

i	$F_{ix}(\text{kg})$		$F_{iy}(\text{kg})$		$M_i = F_i \cdot d_i (\text{kg} \cdot \text{cm})$
1	$-F_1 \text{ sen}15$	= -90,6	$-F_1 \text{ cos}15$	= -338,1	$350 \cdot 52,0 = 18200$
2		0,0		-250,0	$250 \cdot 12,0 = 3000$
3		380,0		0,0	$-380 \cdot 62,0 = -23560$
4	$F_4 \text{ cos}45$	= 353,6	$-F_4 \text{ cos}45$	= -353,6	$-500 \cdot 32,5 = -16250$
5	$-F_5 \text{ sen}30$	= -200,0	$F_5 \text{ cos}30$	= 346,4	$400 \cdot 22,5 = 9000$
$\Sigma$	$R_x$	= 443,0	$R_y$	= -595,3	$M_{O1} = -9610$

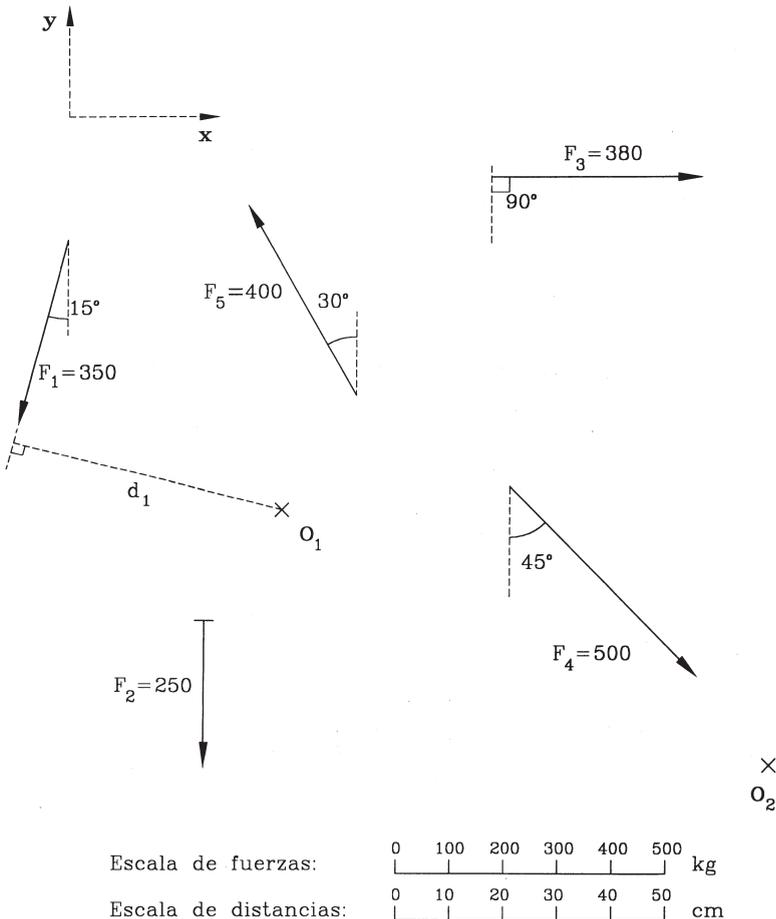


Figura E1.18.a

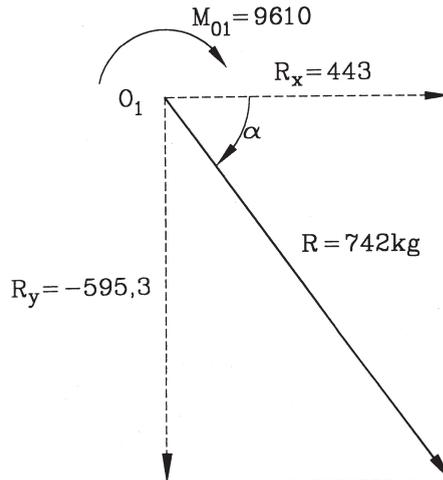
La última línea de la tabla es la suma de las 5 líneas anteriores. La resultante total  $R$  es entonces (Fig. E1.18.b):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 742 \text{ kg}$$

que forma ángulo  $\alpha$  con la horizontal

$$\alpha = \arctan\left(\frac{-595,3}{443}\right) = -53,34^\circ$$

El sistema de fuerzas dado es equivalente a  $R$  actuando en  $O_1$  junto al momento  $M_{O_1}$  como muestra la Fig. E1.18.b. Notar que  $M_{O_1}$  se puso en su sentido verdadero a favor de los punteros del reloj, por ello en la figura se ha omitido el signo negativo del resultado de la Tabla.



**Figura E1.18.b**

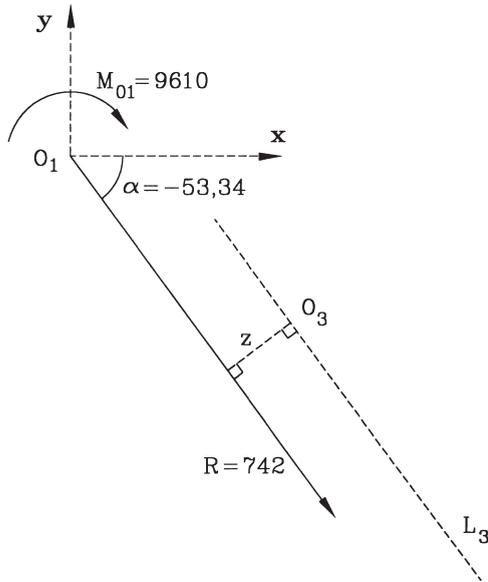
- b) Lo que se pide es trasladar el sistema resultante en  $O_1$  (Fig. E1.18.b) al punto  $O_2$ . Para ello hay que dibujar a escala la resultante  $R$  en la Fig. E1.18.a y medir la distancia de su línea de acción al punto  $O_2$ . Esto no se muestra aquí, pero se obtiene  $d=22$  cm, pasando la línea de acción de  $R$  hacia la izquierda del punto  $O_2$ . La nueva resultante en  $O_2$  es la misma  $R$  anterior, pero el momento en  $O_2$  es:

$$M_{O_2} = M_{O_1} + Rd$$

$$M_{O_2} = -9610 + 742 \cdot 22 = 6714 \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

Los sistemas  $\{R_{O_1}, M_{O_1}\}$  y  $\{R_{O_2}, M_{O_2}\}$  son estáticamente equivalentes entre sí y equivalentes al sistema original dado:

$$\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\} = \{R_{O_1}, M_{O_1}\} = \{R_{O_2}, M_{O_2}\}$$



**Figura E1.18.c**

c) Volviendo al sistema reducido de la Fig. E1.18.b, se ve en la Fig. E1.18.c que si la resultante se traslada a la línea de acción  $L_3$  a distancia  $z$  tal que

$$z = \frac{M_{O_1}}{R} = \frac{9610}{742} = 12,95 \text{ cm}$$

se tiene que en la nueva posición el sistema tiene la misma resultante  $R$  pero el momento, por ejemplo con respecto al punto  $O_3$  es:

$$M_{O_3} = -9610 + 742 z = 0$$

Entonces el sistema originalmente dado se ha reducido a su expresión más simple, una única fuerza  $R=742$  kg actuando en la línea de acción  $L_3$  y un momento nulo:

$$\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\} = \{R_{O_3}, M_{O_3} = 0\} = \{R_{O_3}\}$$

d) El cuerpo no está en equilibrio porque a pesar de haberse anulado el momento persiste una resultante  $R=R_{O_3} \neq 0$ .

### 1.8.6 Equilibrio de un Cuerpo Rígido

Como puede anticiparse de la discusión y ejemplo de la Sección anterior un cuerpo estará en equilibrio cuando el sistema de fuerzas que actúa sobre él corresponda a un sistema nulo: tanto la fuerza resultante como el momento resultante son ambos nulos. Obviamente esto es lo que requiere la 2ª Ley de Newton para que el sistema permanezca en reposo sin experimentar aceleración traslacional ni angular (aceleraciones asociadas a desplazamiento y rotación respectivamente).

Se tiene entonces que *es condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un cuerpo rígido sometido a un sistema cualquiera de  $n$  fuerzas externas  $F_i$ , que la resultante de las fuerzas sea nula, y que la suma de los momentos de las fuerzas con respecto a un punto  $O$  arbitrario sea también nula*. Simbólicamente, las condiciones anteriores se escriben como

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0 \quad (1-46)$$

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \mathbf{d}_i = 0 \quad (1-47)$$

teniendo presente que las cantidades involucradas en las sumatorias anteriores son vectoriales y no pueden sumarse en forma algebraica directa. La Ec. 1-46 es la misma que la Ec. 1-29 condición equilibrio de una partícula. Para el caso de un cuerpo rígido debe cumplirse también la Ec. 1-47 que en el caso de una partícula se satisface automáticamente porque las fuerzas son concurrentes.

Como se discutió en la Sección 1.5, la Ec. 1-46 es equivalente a tres ecuaciones escalares (Ecs. 1-30 ó 1-31) que corresponden a las condiciones de equilibrio en términos de las componentes (o proyecciones) de las fuerzas con respecto a cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas tridimensional. Del mismo modo, la ecuación de momentos (Ec. 1-47) equivale también a tres ecuaciones escalares en términos de las componentes (o proyecciones) de los momentos con respecto al sistema de referencia tridimensional. En resumen, las ecuaciones escalares de equilibrio de un cuerpo rígido en el espacio son *seis*.

Un gran número de casos de equilibrio de cuerpos rígidos en el espacio pueden tratarse como *problemas planos*, e incluso, cuando tal simplificación no es posible, los problemas pueden al menos parcialmente descomponerse para ser analizados en varios planos separadamente. Por problema plano se entiende aquel en que las fuerzas del sistema pueden suponerse contenidas en un plano, aunque no necesariamente los cuerpos involucrados sean planos (como por ejemplo el caso de la Fig. 1.33.c). Con frecuencia también se presentan casos en que el espesor del problema, o su tercera dimensión, es despreciable frente al tamaño de los cuerpos en el plano de sus dos dimensiones predominantes, como se discutirá más adelante en relación con el

equilibrio de estructuras “planas”. La simplicidad de los problemas planos los hace particularmente atractivos para madurar los conceptos fundamentales de equilibrio; su simplicidad radica en que las Ecs. 1-46 y 1-47, que como se dijo antes representan seis ecuaciones escalares, se reducen a tres. En efecto, si el plano de las fuerzas del sistema es el plano  $xy$ , la tercera de las Ecs. 1-46 (Ec. 1-30.c ó 1-31.c) es irrelevante, por su parte, de las tres ecuaciones de momento, sólo queda una. Las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido plano son entonces:

$$\Sigma F_x = 0 \quad (1-48.a)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad (1-48.b)$$

$$\Sigma M_O = 0 \quad (1-48.c)$$

en que  $O$  es punto cualquiera del plano de las fuerzas.

### Ejemplo 1.19

Un hombre y un niño de pesos 70 y 32 kg respectivamente se encuentran sobre una pasarela provisoria de 100 kg de peso y 5 m de longitud como muestra la Fig. E1.19.a. Determinar las reacciones en los apoyos de la viga.

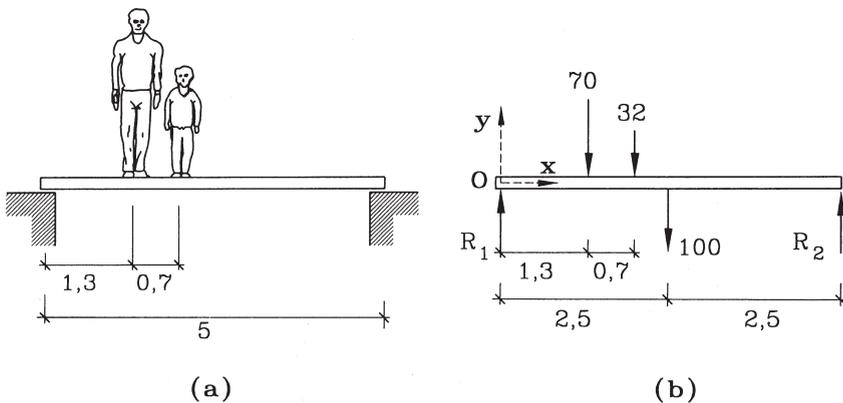


Figura E1.19

**Solución:** La Fig. E1.19.b muestra el modelo de cuerpo libre de la viga indicando las fuerzas que actúan sobre ella. Se han supuesto sólo dos fuerzas de reacción verticales en los extremos de la viga, ya que no hay solicitaciones horizontales. A las reacciones se les ha supuesto un sentido hacia arriba, opuesto al sentido de las cargas gravitacionales. Las ecuaciones de equilibrio relevantes son las Ecs. 1-48.b y c:

$$\Sigma F_y = 0 \quad R_1 + R_2 = 70 + 32 + 100 = 202$$

$$\Sigma M_O = 0 \quad 5R_2 = 70 \cdot 1,3 + 32 \cdot 2 + 100 \cdot 2,5$$

de la segunda ecuación se obtiene  $R_2=405/5=81$  kg, valor que introducido en la primera da  $R_1=121$ kg.

**Ejemplo 1.20**

A una barra homogénea de 4 m de longitud y 100 kg de peso, que se apoya como se muestra en la Fig. E1.20.a, se le aplica una carga vertical P en su extremo A. Los contactos son rugosos con coeficiente  $\mu=0,6$ . Se pide: a) Plantear las ecuaciones de equilibrio; b) Estudiar para que valor de P se rompa el equilibrio (por deslizamiento de la barra o porque su extremo B se levanta del piso).

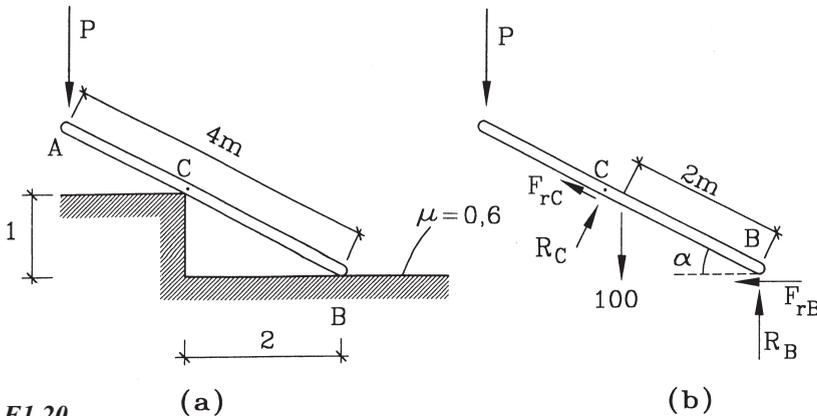


Figura E1.20

**Solución:** La Fig. E1.20.b muestra el diagrama de cuerpo libre de la barra con todas las fuerzas externas que actúan sobre ella. Las reacciones  $R_C$  y  $R_B$  son las “normales” (perpendiculares) a los planos de deslizamiento tangencial, y las fuerzas de roce  $F_{rB}$  y  $F_{rC}$  son por supuesto tangenciales, es decir perpendiculares a las normales, y de sentido opuesto al deslizamiento potencial. El peso de la barra actúa en su centro de gravedad (punto medio). El ángulo  $\alpha$  es conocido pues  $\text{tg}\alpha=1/2$ , o sea  $\alpha=26,565^\circ$ .

a) Las ecuaciones de equilibrio (Ecs. 1-48) son las siguientes:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 & \quad F_{rB} + F_{rC} \cos \alpha = R_C \sin \alpha \\ \Sigma F_y = 0 & \quad R_B + R_C \cos \alpha + F_{rC} \sin \alpha = P + 100 \\ \Sigma M_C = 0 & \quad F_{rB} \cdot 1 - R_B \cdot 2 + 100(2 - 2 \cos \alpha) - P(4 \cos \alpha - 2) = 0 \end{aligned}$$

La primera observación que procede hacer es que este sistema de 3 ecuaciones tiene 5 incógnitas: P y las 4 componentes de reacción, luego no puede resolverse. Incluso si la fuerza P fuera un dato conocido tampoco podrían calcularse las 4 reacciones incógnitas. Por ello, las condiciones a que se refiere la parte “b” del problema deberán aportar nuevas ecuaciones que permitan resolver el sistema de ecuaciones.

## b) Caso de deslizamiento de la barra:

La condición de deslizamiento corresponde al caso límite de equilibrio, luego se cumple que:

$$F_{rB} = \mu R_B$$

$$F_{rC} = \mu R_C$$

dos ecuaciones adicionales que sumadas a las 3 anteriores permiten resolver para las 5 incógnitas antes mencionadas, obteniéndose:  $R_B = -19,18$  kg,  $F_{rB} = -11,51$  kg,  $R_C = 128,64$  kg,  $F_{rC} = 77,18$  kg,  $P = 30,40$  kg. Pero, la reacción  $R_B$  no puede ser negativa, ya que el piso no podría ejercer una fuerza de ese sentido pues antes la barra se levantaría despegándose del piso en el punto B. Este es justamente el segundo caso que hay que analizar, ya que la situación de deslizamiento no ocurre.

## c) Caso de levantamiento de la barra en B:

El diagrama de la Fig. E1.20.b sigue siendo válido con la modificación que  $R_B$  y  $F_{rB}$  no existen pues no hay contacto en B. O sea, se ha supuesto que se está justo iniciando el despegue del extremo B de la barra que se encuentra a una distancia ínfima del piso.

Las ecuaciones de equilibrio se obtienen de las mismas anteriores haciendo  $R_B = 0$  y  $F_{rB} = 0$ . Se tiene entonces:

$$F_{rC} \cos \alpha = R_C \sin \alpha$$

$$R_C \cos \alpha + F_{rC} \sin \alpha = P + 100$$

$$100(2 - 2 \cos \alpha) = P(4 \cos \alpha - 2)$$

sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas de donde se obtienen  $P = 13,38$  kg,  $R_C = 101,41$  kg, y  $F_{rC} = 50,71$  kg. Lo que indica que para  $P = 13,38$  se rompe el equilibrio por levantamiento del extremo B de la barra. Notar también que cuando esto ocurre  $F_{rC} \neq \mu R_C$ , como era de esperar, porque esta situación no tiene nada que ver con una condición límite de equilibrio por deslizamiento.

**Ejemplo 1.21**

Una escalera de 3 m de largo y peso 35 kg se apoya formando un ángulo de  $60^\circ$  como se muestra en la Fig. E1.21.a. La pared es lisa pero existe fricción con el suelo con coeficiente de roce  $\mu$ . Se pide: a) Determinar las reacciones en el piso y en el muro cuando un hombre de 75 kg de peso sube hasta una distancia de 2 m medida desde el extremo inferior de la escalera; b) Determinar el coeficiente de roce  $\mu$  necesario para que el hombre pueda llegar al extremo superior de la escalera.

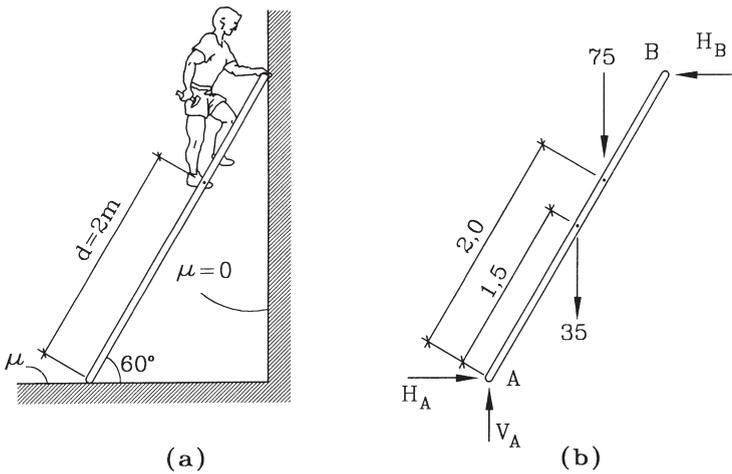


Figura E1.21

**Solución:** La Fig. E1.21.b muestra el diagrama de cuerpo libre de la escalera. La reacción en B es perpendicular al muro por ser contacto liso. En la base A existe tanto reacción normal  $V_A$  como componente tangencial de roce  $H_A$ .

a) Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas verticales, horizontales y momentos son respectivamente:

$$\Sigma F_v = 0 \quad V_A = 75 + 35 = 110 \tag{i}$$

$$\Sigma F_h = 0 \quad H_A = H_B \tag{ii}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad H_B \cdot 3 \text{ sen}60^\circ = 35 \cdot 1,5 \text{ cos}60^\circ + 75 \cdot 2 \cdot \text{cos}60^\circ \tag{iii}$$

$$H_B = H_A = 39$$

b) Considérese que cuando el hombre llega arriba se alcanza el estado límite de equilibrio. Las ecuaciones i e ii son las mismas anteriores. En la ecuación iii sólo se modifica la distancia d que ahora es 3 m, luego:

$$H_B \cdot 3 \text{ sen}60^\circ = 35 \cdot 1,5 \text{ cos}60^\circ + 75 \cdot 3 \cdot \text{cos}60^\circ$$

$$H_B = 53,4 = H_A$$

Notar como aumenta la fuerza de roce a medida que el hombre sube. En la condición límite de equilibrio el roce alcanza el valor máximo que puede desarrollar, o sea:

$$H_A = \mu V_A$$

$$\square = \frac{53,4}{110} = 0,4855$$

Naturalmente para este valor del coeficiente de roce la escalera estará “a punto de deslizarse” cuando el hombre llegue al extremo superior. Si se desea evitar el riesgo de caída, debería haber un coeficiente de roce mayor que el valor mínimo necesario calculado. Sin embargo, puede pensarse que en una situación real también existirá rugosidad en el contacto con el muro, y la fuerza de roce correspondiente ayudará al equilibrio. Como ejercicio el lector puede rehacer el problema pero con fricción tanto en A como en B. Se dará cuenta que no puede resolver la parte “a”, ¿por qué?. Al resolver la parte “b” por cierto encontrará que el coeficiente de roce necesario es menor que el antes calculado.

### Ejemplo 1.22

La Fig. E1.22.a muestra un teclé, que es un aparejo para levantar objetos de gran peso en forma manual. Típicamente el teclé se cuelga de un marco móvil que permite trasladarlo a distintos lugares en un taller; en la figura se muestra suspendido de un techo fijo. La parte superior del aparato se compone de dos poleas solidarias (unidas a un mismo eje) de radios diferentes. Una cadena sin fin pasa por las poleas, las que son dentadas para enganchar los eslabones de la cadena e impedir su deslizamiento. Al tirar el hombre de la cadena, las poleas superiores giran juntas, pero el punto A de la polea de radio mayor avanza más que el punto B de la de radio menor, lo que tiene por efecto que la polea C y la carga suban. Notar que el hombre tira hacia un lado de la cadena y el otro lado queda suelto. Si los radios de las poleas solidarias son  $r_1=10$  cm y  $r_2=8$  cm, determinar la fuerza que debe hacer el hombre para levantar un peso  $W=300$  kg. Despreciar los pesos de la cadena y de las poleas.

**Solución:** Del diagrama de cuerpo libre de la polea C (Fig. E1.22.b), despreciando el peso de la polea, se tiene que las cadenas que la soportan realizan cada una fuerzas de  $W/2$ . Estas fuerzas se transmiten a la polea superior como se muestra en la Fig. E1.22.c. Hacia el lado de la cadena suelta, la fuerza es  $Q=0$ , ya que se está despreciando el peso de la cadena. La fuerza que realiza el hombre es  $F$ ; nuevamente, despreciando el peso de la cadena,  $F$  actúa como se indica en la Fig. E1.22.c. Tomando momentos en torno al punto O se tiene:

$$F \cdot r_1 + \frac{W}{2} r_2 = \frac{W}{2} r_1$$

$$F = \frac{W(r_1 - r_2)}{2r_1}$$

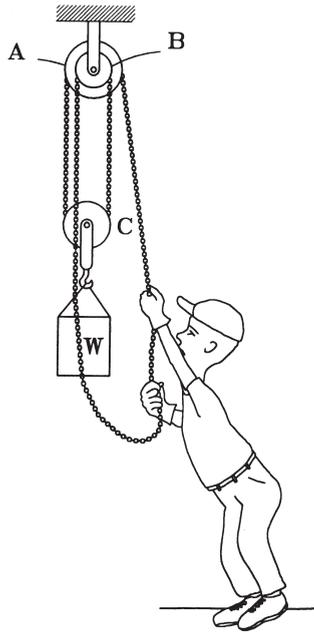
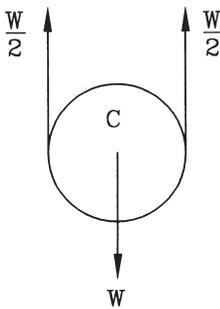


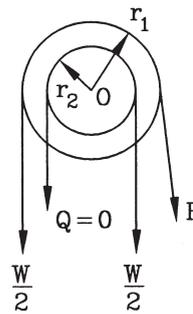
Figura E1.22.a

Notar que si  $r_2$  se aproxima a  $r_1$  la fuerza  $F$  se hace cada vez más pequeña. En particular si  $r_2=r_1$  resulta  $F=0$ , es decir el hombre no realizaría esfuerzo, pero el aparato sería inútil porque la carga no subiría aunque se dieran vueltas y vueltas a la cadena. Para los datos especificados en el enunciado se obtiene

$$F = \frac{300(10-8)}{2 \cdot 10} = 30 \text{ kg}$$



(b)

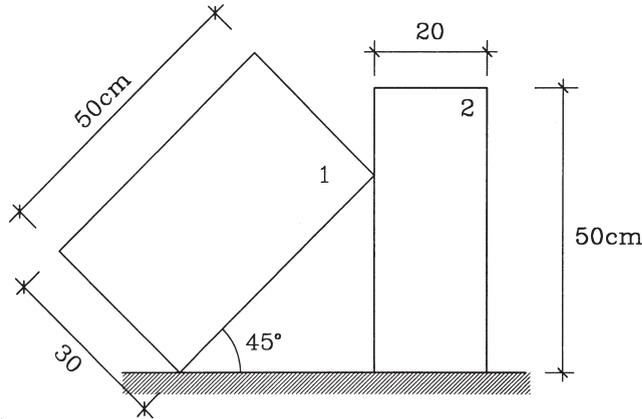


(c)

Figura E1.22 (continuación)

**Ejemplo 1.23**

Un cajón homogéneo de 150 kg de peso ha volcado apoyándose en otro cajón de 100 kg de peso. El coeficiente de fricción de los cajones con el suelo es  $\mu=0,4$ . El contacto entre ambos cajones es liso. Determinar si el sistema está en equilibrio.



*Figura E1.23.a*

**Solución:**

i) Equilibrio del cajón 1

La Fig. E1.23.b muestra el diagrama de cuerpo libre del cajón 1. En el piso hay reacciones normal y de roce, no así en C donde el contacto es liso. Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas son:

$$\Sigma F_h = 0 \quad F_{rA} = N_C$$

$$\Sigma F_v = 0 \quad N_A = 150$$

La ecuación de momentos conviene tomarla con respecto al punto A; para ello hay que calcular previamente la distancia "d" de la fuerza de 150 kg al punto A:

$$d = AB \cos 45^\circ - OB \cos 45^\circ$$

$$d = 25 \cos 45^\circ - 15 \cos 45^\circ = 10 \cos 45^\circ$$

luego:

$$\Sigma M_A = 0 \quad 150 d = N_C \cdot AC \cdot \cos 45^\circ$$

$$N_C = \frac{150 \cdot 10}{50} = 30 \text{ kg}$$

$$F_{rA} = N_C = 30 \text{ kg}$$

La máxima fuerza de roce que puede desarrollarse es  $F_{r_{\max}} = \mu N_A = 0,4 \cdot 150 = 60$  kg; como  $F_{rA} < F_{r_{\max}}$  el cajón 1 está en equilibrio.

ii) Equilibrio del cajón 2

Este cuerpo podría perder el equilibrio de dos formas: por deslizamiento o por volcamiento. Para analizar el deslizamiento considérese la Fig. E1.23.c; las ecuaciones de equilibrio de fuerzas son:

$$\Sigma F_v = 0 \quad N = 100$$

$$\Sigma F_h = 0 \quad F_r = 30$$

La fuerza de fricción máxima que puede desarrollarse es  $F_{r_{\max}} = \mu N = 0,4 \cdot 100 = 40$  kg; como  $F_r < F_{r_{\max}}$  el cajón 2 no desliza.

Para analizar el volcamiento considérese la Fig. E1.23.d. El volcamiento ocurrirá por giro en torno a la arista D del cajón, tendiendo éste a levantarse manteniendo contacto con el suelo solamente a través de la arista D. Por ello, las reacciones del piso deberán actuar justo en D. Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas son las mismas anteriores. La ecuación de equilibrio de momentos en torno a D requeriría:

$$30 \cdot AC \cos 45^\circ = 100 \frac{20}{2}$$

lo que no se cumple porque  $1060,7 \neq 1000$ , luego el cajón 2 vuelca. Entonces el cajón 1 tampoco está en equilibrio porque no puede afirmarse en el cajón 2.

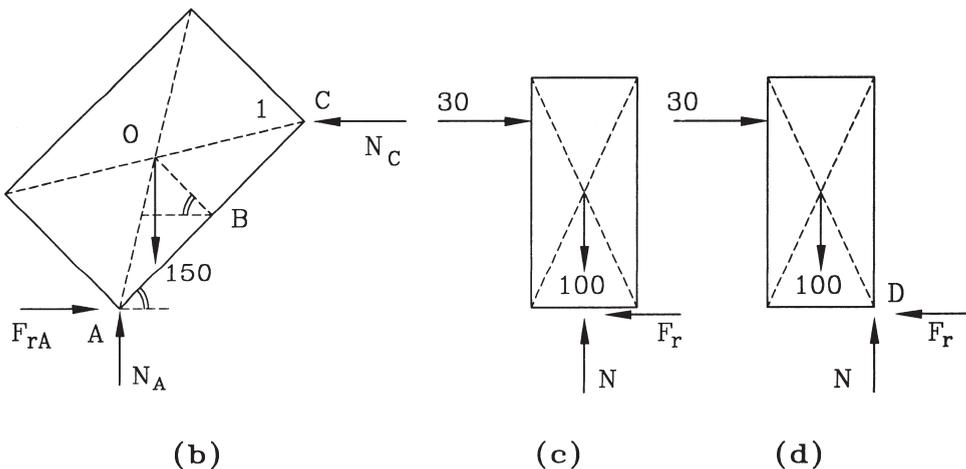
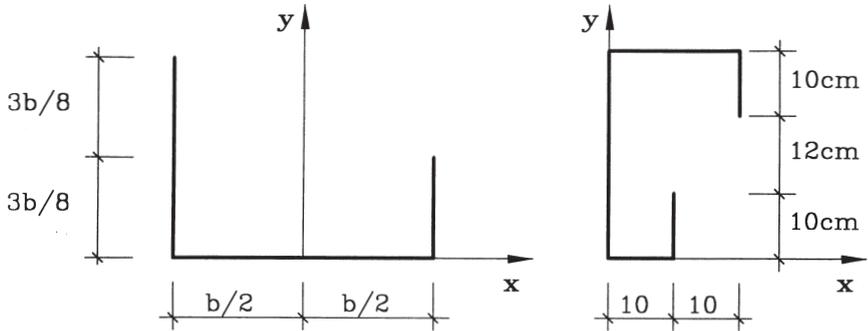


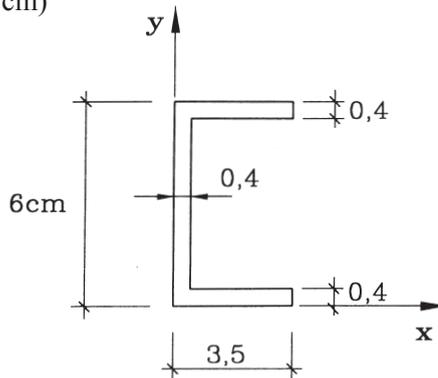
Figura E1.23 (continuación)

## 1.9 Ejercicios Propuestos

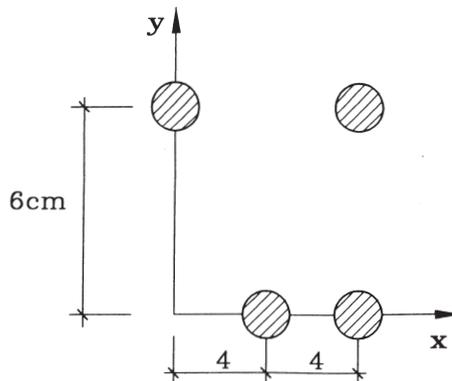
- 1.01 Localizar los centros de gravedad de los alambres delgados que se indican en la figura. (Respuesta:  $x^*=-3b/34$ ,  $y^*=45b/272$ ;  $x^*=6,71$  cm,  $y^*=17,95$  cm)



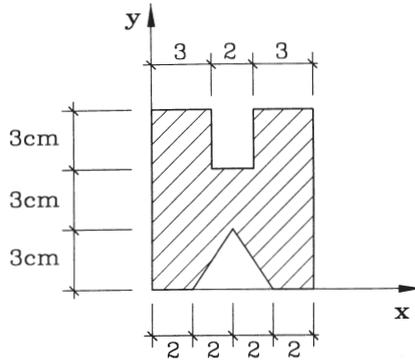
- 1.02 Hallar el centro de gravedad del área mostrada en la figura. (Respuesta:  $x^*= 1,09$  cm,  $y^*=3$  cm)



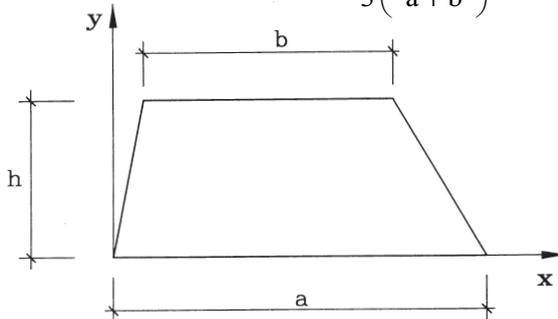
- 1.03 Encontrar el centro de gravedad de los 4 círculos de radio 1 cm ubicados como se indica. (Respuesta:  $x^*=5$  cm,  $y^*=3$  cm)



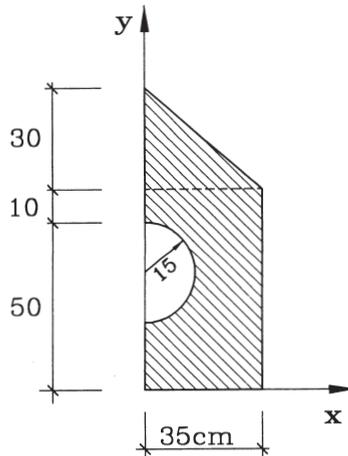
- 1.04 Encontrar el centro de gravedad de la superficie sombreada de la figura. (Respuesta:  $x^*=4$  cm,  $y^*=4,55$  cm)



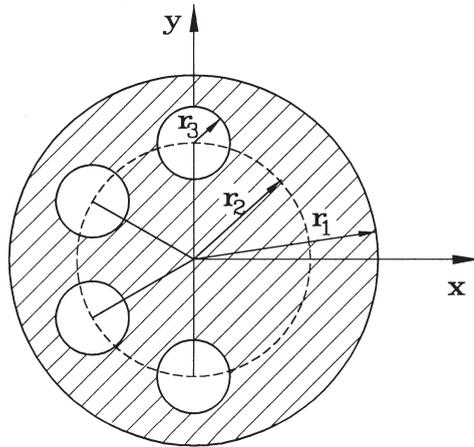
- 1.05 Demuestre que el centro de gravedad de un área trapezoidal de bases  $a$  y  $b$  y altura  $h$  tiene una coordenada  $y^*$  igual a  $\frac{h}{3} \left( \frac{a+2b}{a+b} \right)$



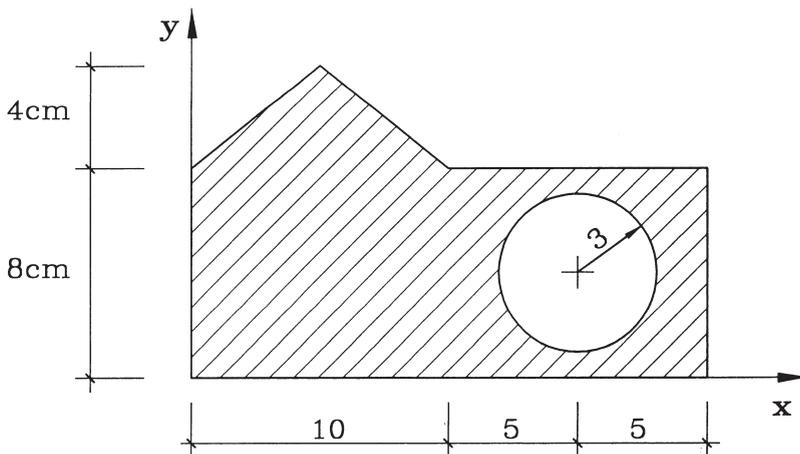
- 1.06 Encontrar el centro de gravedad del área de la figura achurada (usar centro de gravedad de un sector semicircular de Tabla V.2). (Respuesta:  $x^*=17,88$  cm,  $y^*=38,47$  cm)



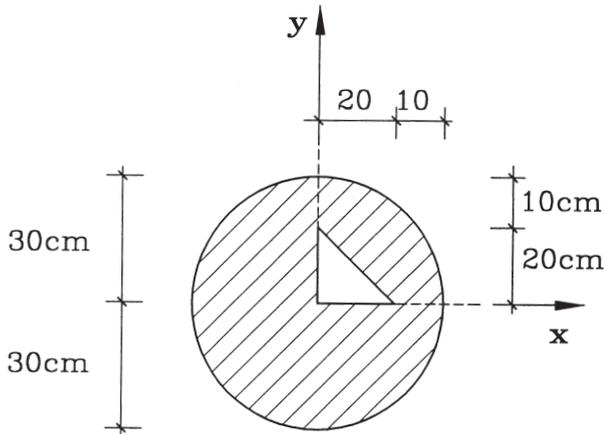
- 1.07 Un disco de radio  $r_1=50$  cm y espesor unitario tiene cuatro agujeros como se muestra en la figura. Los centros de los agujeros están sobre una circunferencia de radio  $r_2=30$  cm formando ángulos de  $60^\circ$ . Determine el centro de gravedad del disco en el plano  $x, y$ . (Respuesta:  $x^*=13 r_3^2 / (625 - r_3^2)$ ,  $y^*=0$  cm)



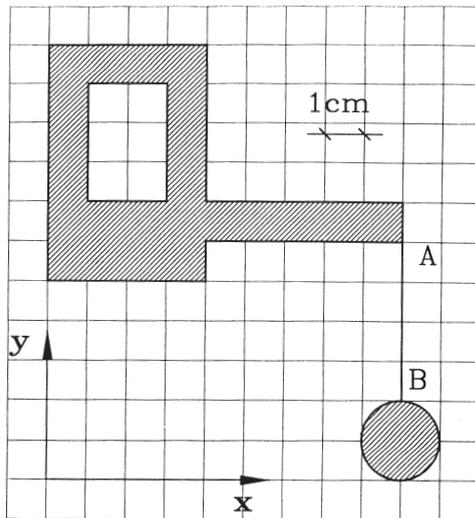
- 1.08 Encontrar el centro de gravedad del área de la figura achurada. (Respuesta:  $x^*=8,4$  cm,  $y^*=4,7$  cm)



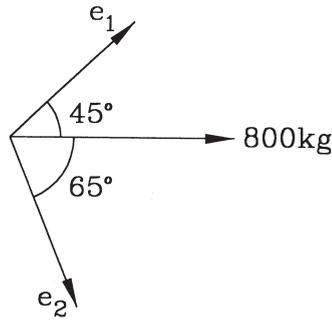
- 1.09 Determinar el centro de gravedad de una placa circular de material homogéneo y espesor constante con una perforación triangular como se muestra. (Respuesta:  $x^*=y^*=-0,5074$ )



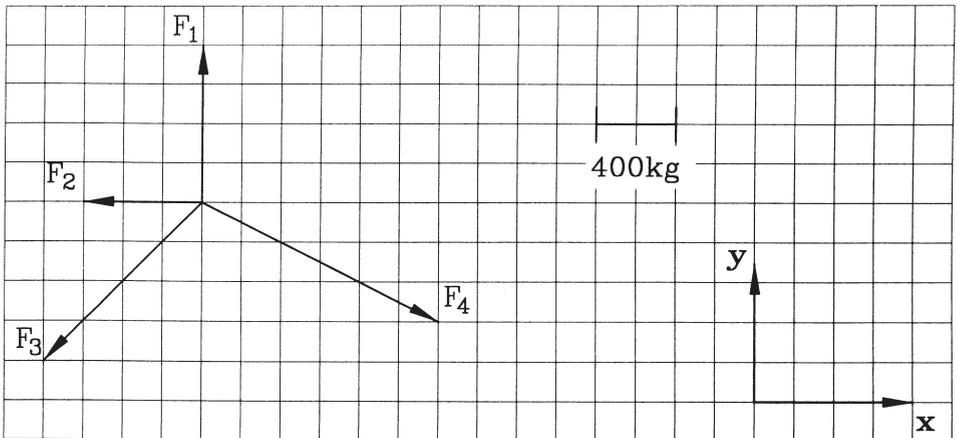
- 1.10 Determinar las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo plano que se indica, el cual está dibujado a escala. Cada  $\text{cm}^2$  de área (achurada) pesa 15 gramos y cada cm de longitud de la barra AB pesa 5 gramos. (Respuesta:  $x^*=3,95$  cm,  $y^*=6,62$  cm)



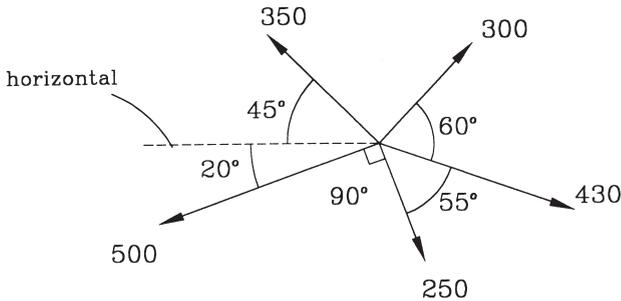
- 1.11 Descomponga la fuerza de 800 kg en dos componentes a lo largo de las direcciones  $e_1$  y  $e_2$  indicadas. Use solución gráfica y compruebe analíticamente. (Respuesta:  $F_1=771,58$  kg,  $F_2=601,99$  kg)



- 1.12 Sobre una partícula actúa el sistema de fuerzas  $F_1=800$  kg,  $F_2=600$  kg,  $F_3=1131,4$  kg y  $F_4=1341,6$  kg. Determinar la resultante del sistema e indicar cuáles son sus componentes en las direcciones  $x$  y  $y$ . Determinar las componentes de la resultante en un nuevo sistema de ejes  $x'$  y  $y'$  correspondiente al sistema  $xy$  original girado en  $45^\circ$  en sentido trigonométrico positivo. Use solución gráfica y compruebe analíticamente. (Respuesta:  $F_x = -200$  kg,  $F_y = -600$  kg,  $F_{x'} = -565,69$  kg,  $F_{y'} = -282,84$  kg)



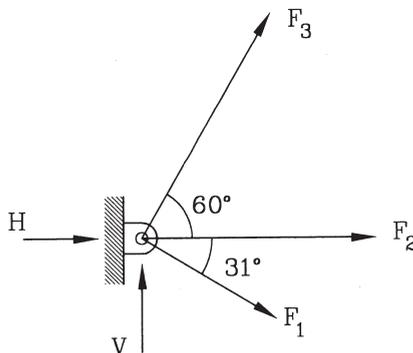
- 1.13 Sobre una partícula actúa el sistema de 5 fuerzas coplanarias indicado. Se pide:  
 a) determinar analíticamente su resultante, b) dibujar el polígono de fuerzas y su resultante. (Respuesta:  $R=57,77$ ,  $\alpha=265,7^\circ$ )



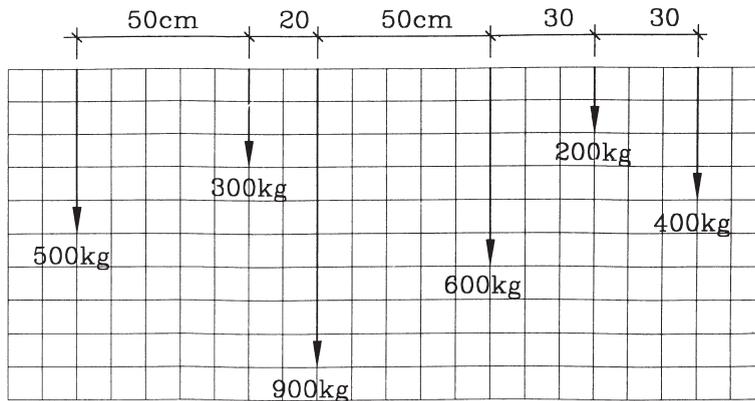
- 1.14 Sea un sistema de fuerzas  $F_i$  que actúan en un plano vertical, formando ángulos  $\alpha_i$  medidos desde la dirección x horizontal, y aplicadas en los puntos  $P_i$  cuyas coordenadas se indican. Usando el polígono funicular determinar gráficamente la resultante e indicar el punto de coordenadas  $(x, 0)$  por donde pasa la línea de acción de la resultante.

$F_i$ (kg)	$\alpha_i$ (°)	$P_i$ (metros)
4200	240	(-2,0, -0,5)
2500	270	(+0,5, +6,5)
1950	-70	(+3,0, -4,6)
1200	270	(+4,0, -5,0)
3000	-45	(+6,0, +1,0)

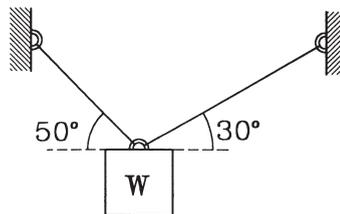
- 1.15 Sobre un soporte fijo a la pared actúan las fuerzas  $F_1=50$ ,  $F_2=80$  y  $F_3=90$  formando ángulos  $\alpha=31^\circ$  y  $\beta=60^\circ$ . Determine: a) la magnitud y dirección de la resultante  $R = \{F_1, F_2, F_3\}$ , b) las componentes horizontal y vertical de R y dibújelas actuando sobre el soporte en sus sentidos positivos, c) las reacciones V y H de la pared sobre el soporte y dibújelas actuando sobre el soporte en sus sentidos positivos. (Respuesta:  $R=175,8$ ,  $\alpha=17,27^\circ$ ,  $R_H=167,9$ ,  $R_V=52,2$ )



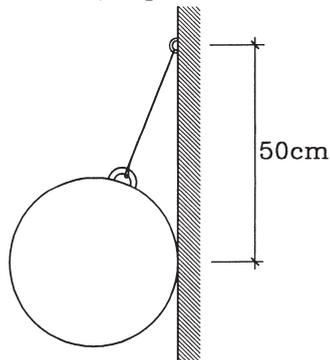
- 1.16 Determinar la resultante del sistema de fuerzas paralelas dado: a) mediante solución geométrica utilizando polígono funicular, b) utilizando el concepto de centro de gravedad.



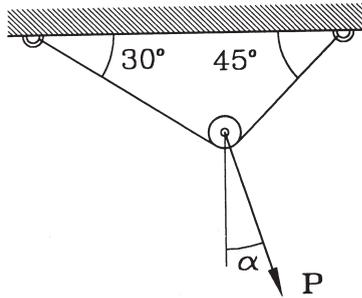
- 1.17 Un bloque de peso  $W$  se sostiene mediante dos cables livianos. Determinar las fuerzas en los cables. (Respuesta:  $0,879W$ ;  $0,652W$ )



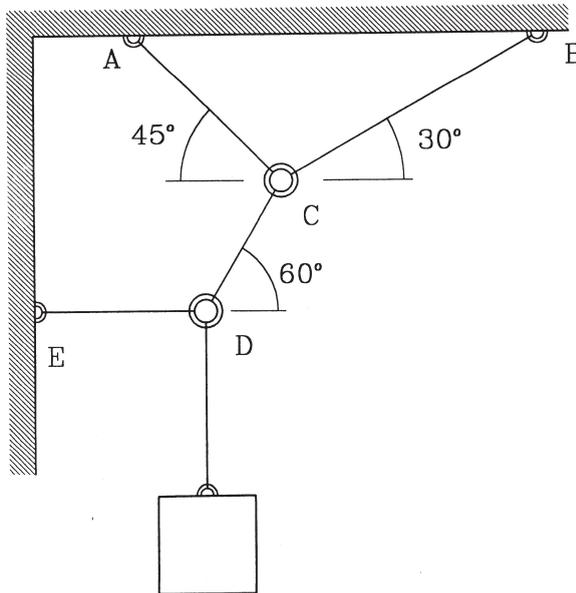
- 1.18 Una esfera que pesa 10 kg y tiene 15 cm de radio cuelga de un cable liviano y se apoya sobre una pared lisa. Determinar la fuerza  $T$  en el cable y la reacción de la pared sobre la esfera. (Respuesta: 10,44; 3)



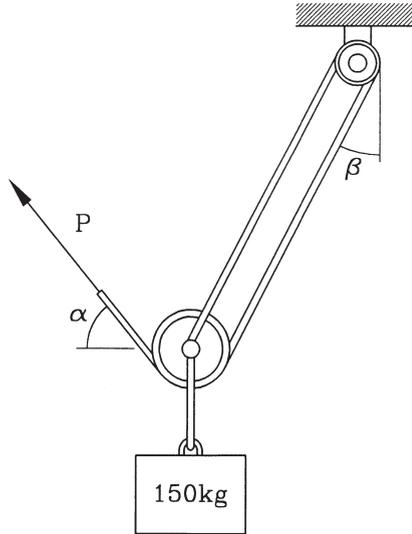
- 1.19 Sobre una pequeña rueda que puede moverse libremente sobre un hilo liviano se aplica una fuerza  $P$ . Demuestre que sólo hay equilibrio si  $\alpha=7,5^\circ$ , y que en el estado de equilibrio la fuerza de tracción del cable es 82,1% de  $P$ .



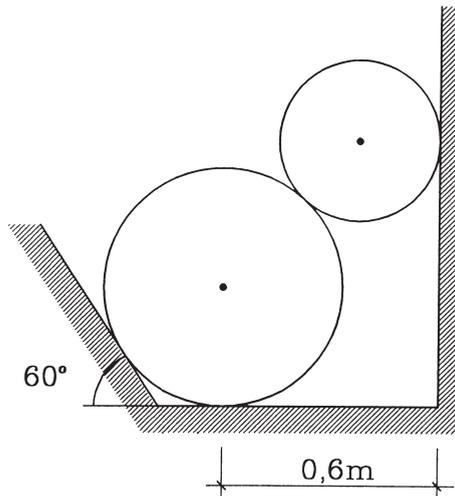
- 1.20 Un cuerpo que pesa 1000 kg cuelga del sistema de cables flexibles y livianos representados en la figura. Determinar las fuerzas en los cables AC, BC, CD y DE. (Respuesta:  $T_{AC}=597,72$  kg,  $T_{BC}=1154,70$  kg,  $T_{CD}=1154,70$  kg,  $T_{DE}=577,35$  kg)



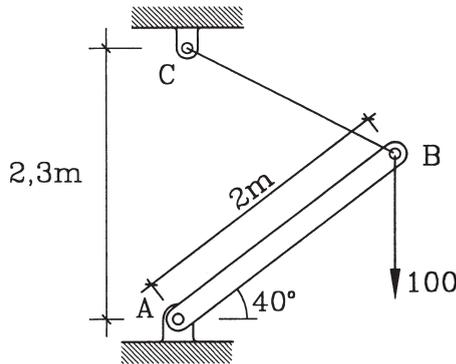
- 1.21 El polipasto de la figura soporta un peso de 150 kg. Sabiendo que  $\beta=20^\circ$ , hallar la magnitud y la dirección  $\alpha$  de la fuerza P que debe ejercerse en el extremo libre de la cuerda para mantener el equilibrio. (Respuesta: 57,5;  $46,84^\circ$ )



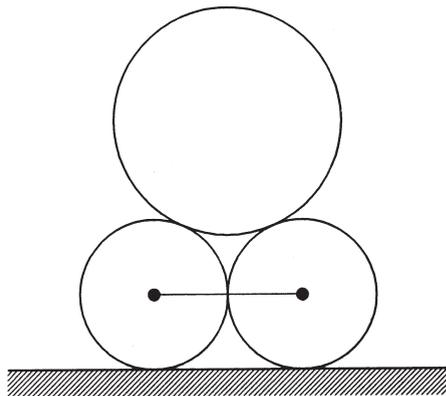
- 1.22 Un cilindro de peso 15 kg y radio 20 cm descansa sobre otro cilindro de peso 20 kg y radio 30 cm como se muestra. Calcule todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro inferior. (Respuesta: 25 kg, 23,45 kg y 23,1 kg)



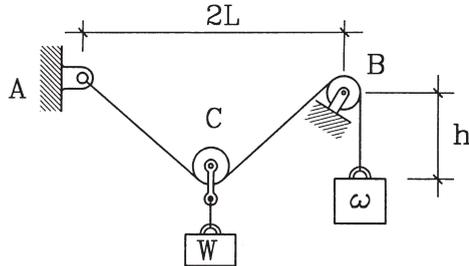
- 1.23 La barra AB y el hilo BC de la figura no tienen peso. Del punto B se cuelga un peso de 100 kg. Calcular los esfuerzos en la barra y el hilo. (Respuesta: -87; 79,9)



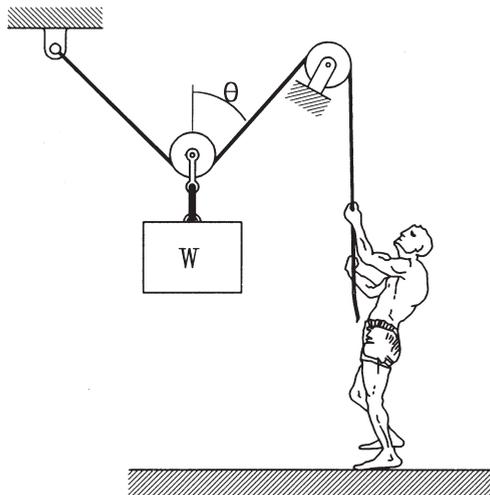
- 1.24 Dos discos de radio 6 cm y peso P se amarran de sus centros por medio de un hilo sin peso y sostienen sobre ellos a un tercer disco de radio 9 cm y peso 2P. El largo del hilo es tal que la fuerza de contacto entre los discos inferiores es nula. Todos los contactos son lisos. Determine: a) la fuerza que soporta el hilo, b) la reacción del suelo sobre cada uno de los discos inferiores, c) la fuerza de interacción entre un disco inferior y el superior. (Respuesta:  $T=0,436P$ ,  $N=2P$ ,  $R=1,09P$ )



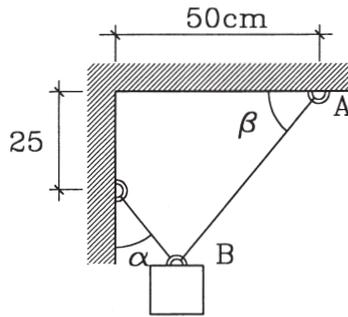
- 1.25 El cable liviano del sistema de la figura tiene una longitud  $a$ . Uno de sus extremos está amarrado a un apoyo fijo en A y el otro a un peso  $\omega$  después de pasar por una polea lisa en B. Sobre el cable se mueve libremente la rueda C que sostiene el peso  $W$ . Demuestre que en la posición de equilibrio  $h = a - \frac{4L}{\sqrt{4 - W^2 / \omega^2}}$ . Demuestre que sólo hay equilibrio si  $\omega > W/2$ .



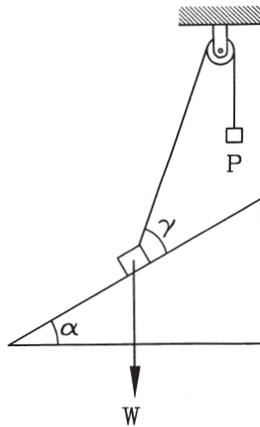
- 1.26 Un hombre que pesa 80 kg tira en dirección vertical de una cuerda liviana con el objeto de levantar un bloque de peso 25 kg. Calcule la Fuerza  $F$  que hace el hombre y grafíquela en función del ángulo  $\theta$ . Comente las características del gráfico. ¿Cuál es el valor de la fuerza  $T_0$  en la cuerda y el ángulo  $\theta_0$  cuando el hombre no puede seguir levantando el peso? (Respuesta:  $T = 12,5 / \cos\theta$ ,  $T_0 = 80$ ,  $\theta_0 = 81^\circ$ )



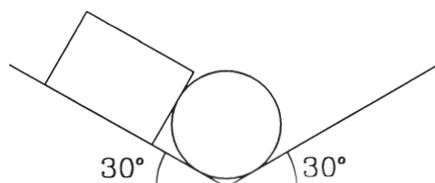
- 1.27 Un bloque que pesa 10 kg se suspende de una pared y del cielo mediante una cuerda liviana de 80 cm de largo. El gancho puede deslizarse libremente sobre la cuerda. Determinar el esfuerzo en la cuerda y los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . (Respuesta: 6,4 kg,  $\alpha=38,68^\circ$ ,  $\beta=51,32^\circ$ )



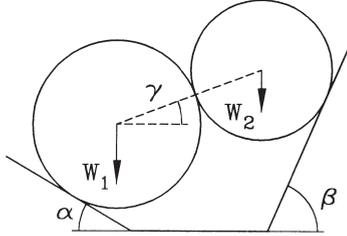
- 1.28 Un peso  $W$  se encuentra descansando sobre un plano liso inclinado en  $\alpha=30^\circ$  con la horizontal, atado a una cuerda que pasa sobre la polea lisa  $A$  y sostiene en su otro extremo un peso  $P=0,7W$ . ¿Qué ángulo  $\gamma$  forma la cuerda con el plano en la posición de equilibrio?. Demostrar que el problema sólo tiene solución si  $P \geq 0,5W$ . (Respuesta:  $\gamma=44,41^\circ$ )



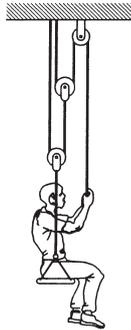
- 1.29 Un cilindro de peso 100 y un bloque de peso 200 descansan sobre dos planos inclinados como se muestra. Todos los contactos son lisos. Calcular todas las reacciones externas e internas. (Respuesta:  $N_1=173$ ,  $N_2=0$ ,  $N_3=173$ ,  $R=100$ )



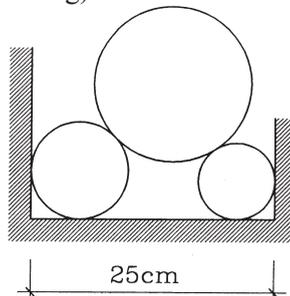
- 1.30 Dos cilindros lisos de pesos  $W_1$  y  $W_2$  descansan en contacto dentro del espacio formado por dos planos inclinados en  $\alpha$  y  $\beta$  con respecto al plano horizontal. Encontrar las reacciones de los planos sobre los cilindros y la fuerza interna de contacto entre ambos cilindros. (Respuesta:  $R_1=(W_1+W_2)\text{sen}\beta/\text{sen}(\alpha+\beta)$ ,  $R_2=(W_1+W_2)\text{sen}\alpha/\text{sen}(\alpha+\beta)$ ,  $\tan\gamma=(W_2\text{cot}\alpha-W_1\text{cot}\beta)/(W_1+W_2)$ ,  $F=R_2\text{sen}\beta/\text{cos}\gamma$ )



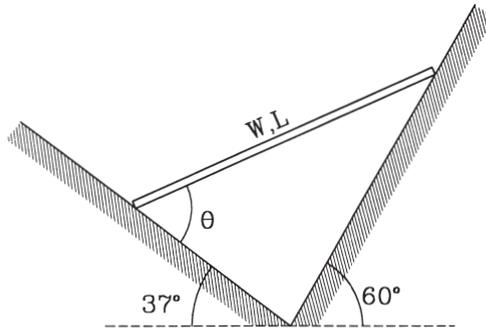
- 1.31 Determinar la fuerza que debe ejercer sobre la cuerda un hombre de peso  $W$  para sostenerse a sí mismo. Determinar la fuerza total que se traspasa al techo. Despreciar el peso de la silla, cuerdas y poleas. (Respuesta:  $W/5$ ,  $W$ )



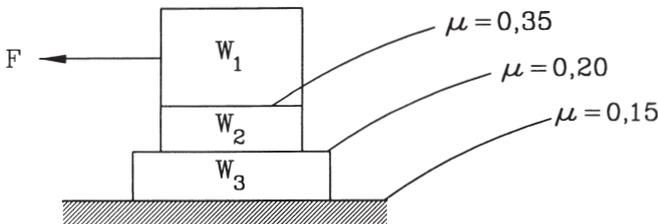
- 1.32 Tres cilindros de diámetros 8, 10 y 16 cm pesan 222, 350 y 890 kg respectivamente. Determinar las fuerzas que ejercen las paredes y el piso sobre los cilindros inferiores y las fuerzas de interacción entre éstos y el cilindro superior. Todas las superficies son lisas. Se sugiere determinar primero los ángulos del triángulo cuyos vértices son los centros de los cilindros. (Respuesta: Ángulos:  $47,43^\circ$ ;  $52,92^\circ$ ;  $79,65^\circ$ ; Reacciones:  $V_1=696$ ,  $V_2=766$ ,  $H=361$ ,  $R_1=500$ ,  $R_2=653$  kg)



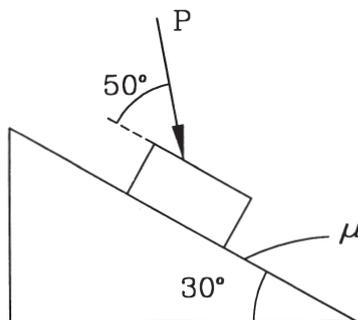
- 1.33 Determine el ángulo  $\theta$  para el cual la barra de peso  $W$  y largo  $L$  estará en equilibrio si los contactos son ambos lisos. Determinar las reacciones de los planos sobre la barra. En ambos casos trate la barra como partícula. (Respuesta:  $\theta=57,55^\circ$ ,  $0,606W$ ,  $0,873W$ )



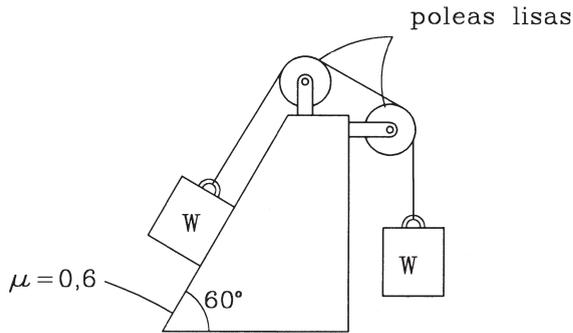
- 1.34 Los tres bloques de la figura pesan  $W_1=200$  kg,  $W_2=100$  kg y  $W_3=150$  kg. Los coeficientes de fricción en los contactos son los indicados. Determinar la fuerza  $F$  que rompe el equilibrio del sistema. (Respuesta: 60 kg)



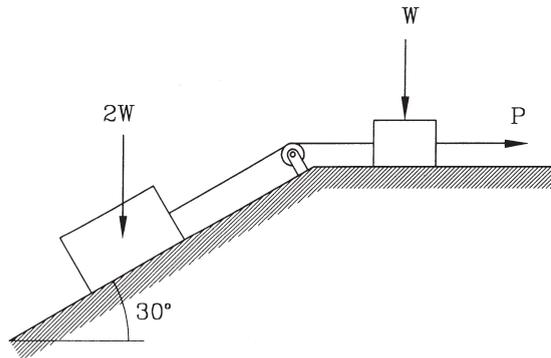
- 1.35 A un bloque de peso 100 kg que se encuentra sobre un plano inclinado en  $30^\circ$  se le aplica una fuerza  $P=20$  kg como se indica. El coeficiente de fricción entre los cuerpos es 0,65. Verificar si el bloque está en equilibrio. (Respuesta: sí)



- 1.36 Dos bloques de peso  $W$  unidos por una cuerda liviana están montados como muestra la figura. Verificar si están en equilibrio. (Respuesta: sí)



- 1.37 En el sistema de la figura los contactos entre los bloques y los planos en que se apoyan son rugosos con coeficiente de roce igual a 0,3. La cuerda sin peso que uno los bloques pasa por una polea lisa. Se pide: a) Si  $P=0$ , ¿está el sistema en equilibrio?, b) ¿Qué valor de  $P$  se requiere para hacer deslizar los bloques?. (Respuesta: no;  $1,82W$ )

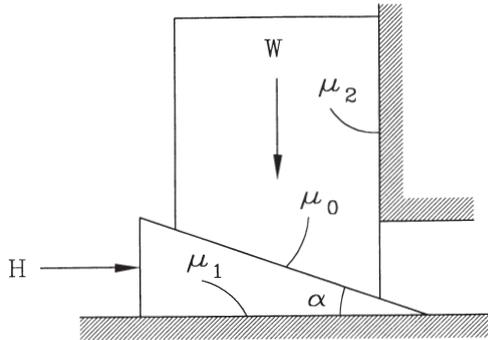


- 1.38 Sobre una cuña sin peso que sostiene un bloque de peso  $W$  se aplica una fuerza horizontal  $H$ . Existe rugosidad en todos los contactos con coeficientes de roce  $\mu_0 = \tan \lambda_0$ ,  $\mu_1 = \tan \lambda_1$  y  $\mu_2 = \tan \lambda_2$ . Demostrar que la mínima fuerza  $H$  necesaria para mantener el equilibrio es

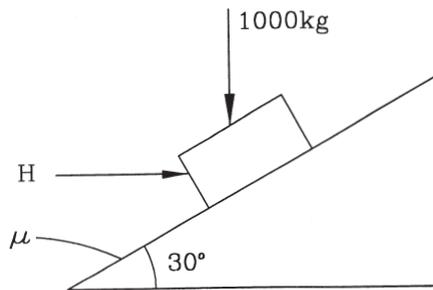
$$H = \frac{\text{sen}(\alpha - \lambda_0 - \lambda_1) \cos \lambda_2}{\cos(\alpha - \lambda_0 - \lambda_2) \cos \lambda_1} W$$

y la fuerza  $H$  necesaria para levantar el bloque es

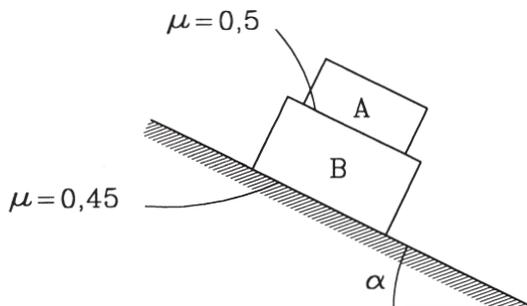
$$H = \frac{\text{sen}(\alpha + \lambda_0 + \lambda_1) \cos \lambda_2}{\cos(\alpha + \lambda_0 + \lambda_2) \cos \lambda_1} W$$



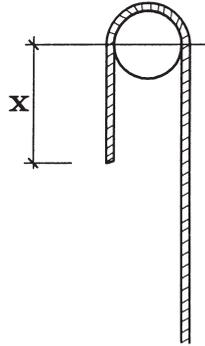
- 1.39 Sobre un bloque de 1000 kg de peso, que descansa sobre un plano inclinado en  $30^\circ$ , se aplica una fuerza horizontal H. El coeficiente de roce entre el bloque y el plano es  $\mu=0,5$ . Determinar la magnitud de H requerida para: a) mantener el equilibrio, b) que la fuerza de fricción sea nula, c) iniciar el deslizamiento del bloque hacia arriba. (Respuesta: 60 kg, 577 kg, 1514 kg)



- 1.40 Los bloques A y B de 30 y 20 kg de peso respectivamente, descansan en equilibrio en un plano inclinado en  $\alpha=20^\circ$ . Los coeficientes de fricción son los indicados. Se pide: a) Determinar las fuerzas reactivas sobre los bloques A y B; b) Si se aumenta la inclinación del plano inclinado, ¿para qué ángulo  $\alpha$  se rompe el equilibrio? ¿cómo se rompe el equilibrio?. (Respuesta: a)  $N_A=28,19$  kg,  $F_{rA}=10,26$  kg,  $N_B=46,98$  kg,  $F_{rB}=17,1$  kg;  $\alpha=24,2^\circ$ , desliza B sobre el plano inclinado manteniéndose A solidario con B)

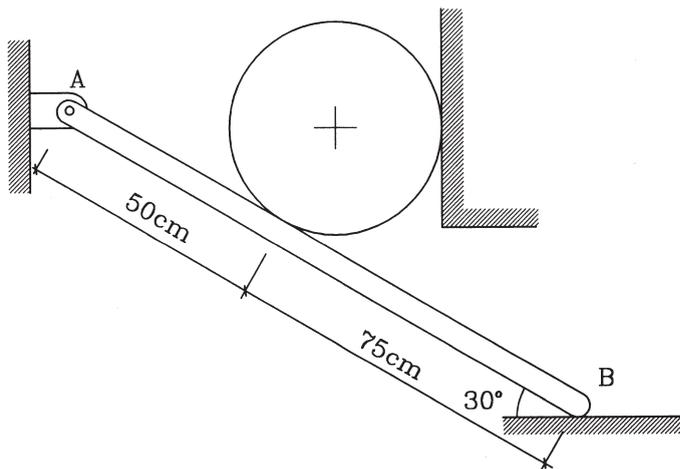


- 1.41 Una cuerda de 2 metros de largo que pesa 3600 gramos (1 cm de cuerda pesa 18 gr) descansa sobre un cilindro rugoso de 20 cm de diámetro y coeficiente de roce  $\mu=0,3$ . Determinar el mínimo largo  $x$  necesario para mantener el equilibrio. (Respuesta: 47,3 cm)

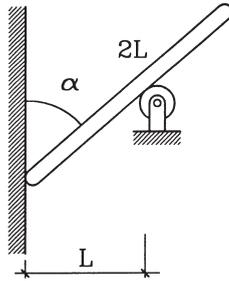


- 1.42 Si se mantienen las mismas condiciones del Ejercicio 1.23, excepto que ahora la barra AB pesa 30 kg, recalcula la fuerza en el hilo y calcule las reacciones en el apoyo A. (Respuesta:  $T=91,9$ ,  $H_A=76,6$ ,  $V_A=79,3$ )

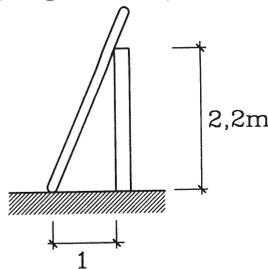
- 1.43 Un cilindro se apoya sobre una barra y un muro en la forma que se indica en la figura. El cilindro pesa 500 kg y la barra 100 kg. Si todas las superficies son lisas, determinar las reacciones en los apoyos A y B de la barra. (Respuesta:  $H_A=288,7$  kg,  $V_A=283,3$  kg,  $V_B=316,7$  kg)



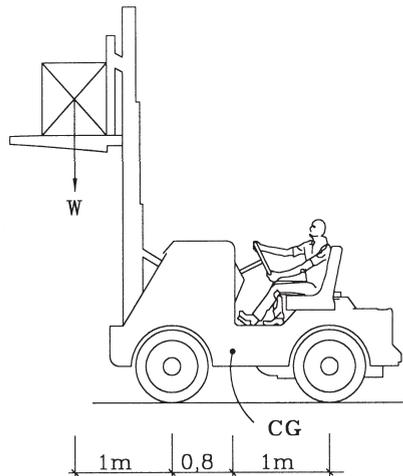
- 1.44 Una barra de longitud  $2L$  y peso  $W$  se apoya en una polea lisa y en una pared rugosa. El coeficiente de fricción entre la barra y la pared es  $0,5$ . Comprobar si para  $\alpha=60^\circ$  la barra está en equilibrio. (Respuesta: no)



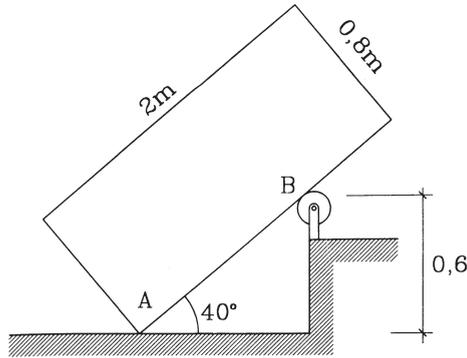
- 1.45 Una barra de metal de  $3\text{ m}$  de largo y  $28\text{ kg}$  de peso se apoya sobre un piso de baldosas mojadas, y por lo tanto muy resbaloso (contacto liso), y sobre un muro de hormigón (contacto rugoso con coeficiente de roce igual a  $0,3$ ). ¿Está la barra en equilibrio?. (Respuesta: no)



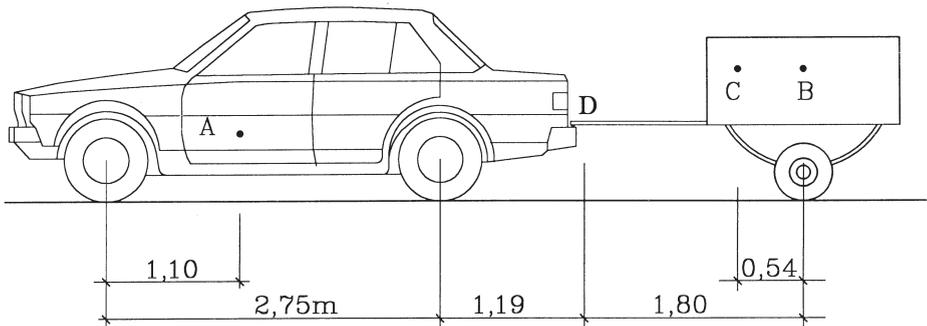
- 1.46 La grúa horquilla de la figura tiene una tara de  $5000\text{ kg}$  y su centro de gravedad (CG) se ubica como se muestra. Determinar la carga neta máxima que puede levantar ubicada en la posición indicada. Determinar las reacciones en las ruedas para la carga bruta máxima. (Respuestas:  $W_{\text{max}} = 4000\text{ kg}$ , reacciones  $4500$  y  $0$ )



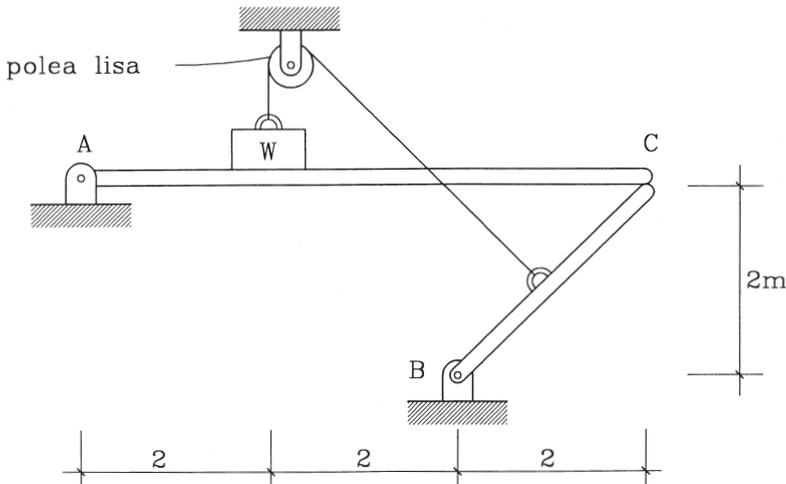
- 1.47 Una placa de madera de 2 metros de largo, 0,8 m de ancho y peso 25 kg, se mantiene en un plano vertical apoyándose en el piso rugoso con coeficiente de roce 0,2 y en un rodillo liso en B. El punto de contacto B está a 0,6 m de altura sobre el piso. Calcular las reacciones en B y en A. ¿Está la placa en equilibrio?. (Respuesta:  $N_B=13,64$  kg,  $H_A=8,77$  kg,  $V_A=14,55$ ; no)



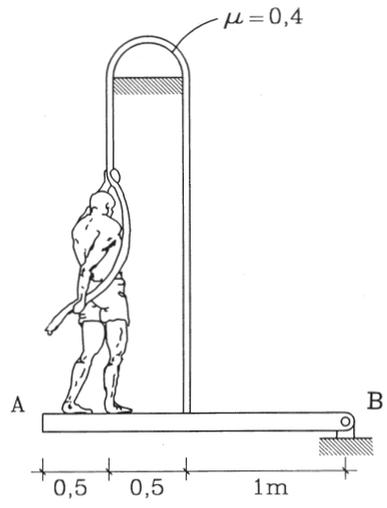
- 1.48 Un vehículo que pesa 1400 kg incluidos sus pasajeros remolca un carro de 180 kg de peso. La ubicación de los centros de gravedad A y B de cada uno se muestran en la figura. El carro se carga con 200 kg en bultos distribuidos en forma no-homogénea, quedando el centro de gravedad C de la carga en la posición indicada. La barra de tiro del carro puede girar libremente en torno a la rótula de enganche D. Determinar: a) Las reacciones en las ruedas del vehículo sin el carro; b) Las reacciones en todas las ruedas cuando se engancha el carro. (Respuesta: 420, 280 kg; 407, 323, 160 kg)



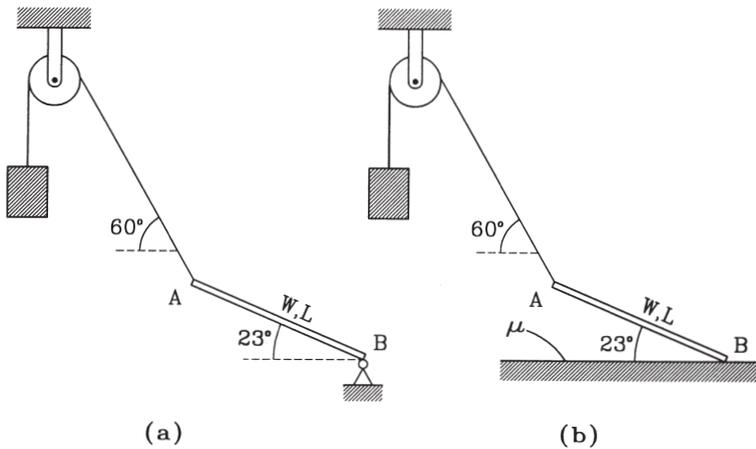
- 1.49 El sistema de la figura consta de dos barras AC y BC que pesan 240 y 113 kg respectivamente y pueden girar libremente en torno a las articulaciones A y B. Tienen contacto liso en C y se sostienen por medio de la cuerda liviana tensada por un peso W que a su vez descansa en la barra AC. Si  $W=1000$  kg, calcular la fuerza que ejerce la cuerda y la reacción interna en C. ¿Qué valor mínimo debe tener W para que el sistema no colapse?. (Respuesta: 489,6 kg, 290 kg; 249,5 kg)



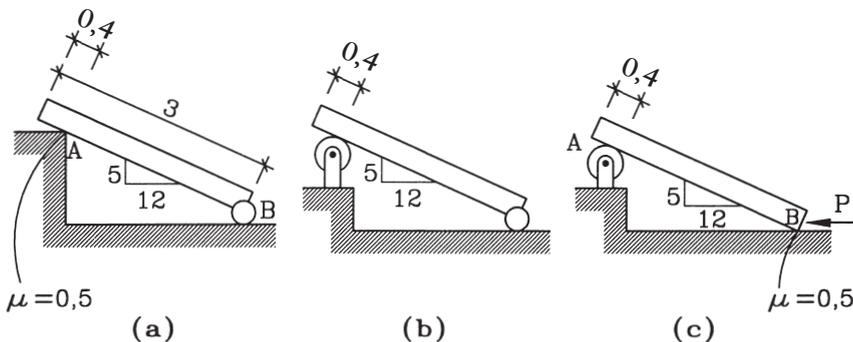
- 1.50 La barra uniforme AB de la figura pesa 40 kg y puede girar libremente en torno a la articulación en B. El hombre pesa 80 kg y tira de la cuerda que sostiene la barra. La cuerda pasa por un semicilindro fijo con coeficiente de roce 0,4. Calcular la fuerza mínima vertical que debe hacer el hombre para mantener el equilibrio. (Respuesta: 31,91 kg)



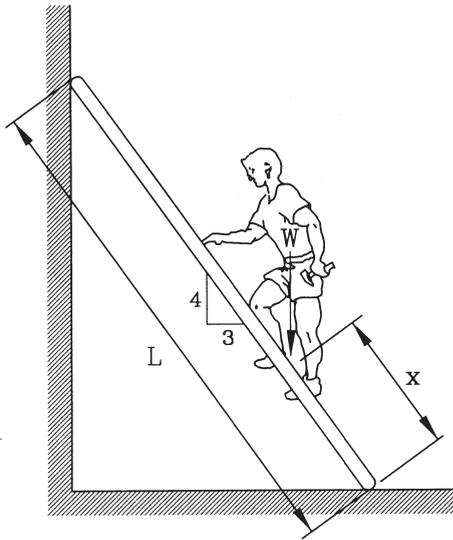
- 1.51 La barra AB de la figura "a" tiene peso  $W$ , largo  $L$ , y está articulada en el punto B. El extremo A se sostiene mediante un hilo liviano, que pasa por una polea lisa, del cual cuelga un bloque en su otro extremo. Se pide: a) Determinar cuánto debe pesar el bloque para que la barra AB esté en equilibrio, b) Suponiendo que el bloque tiene efectivamente el valor antes calculado, pero en vez de estar la barra articulada en B sólo se apoya en un plano rugoso con coeficiente  $\mu=0,7$  como muestra la figura "b". ¿Está la barra en equilibrio?. (Respuesta: a)  $0,765W$ ; b) No, porque la reacción horizontal necesaria para el equilibrio  $0,382W$  excede la máxima fuerza de fricción que puede desarrollarse en el contacto  $0,236W$ )



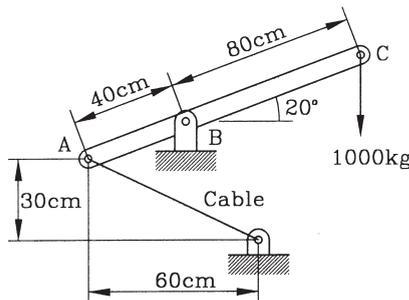
- 1.52 Una viga homogénea que pesa  $1000$  kg, tiene  $3$  m de longitud, es paralela a un plano vertical, y se apoya de las distintas maneras indicadas. Los rodillos y las poleas son lisos; en los otros contactos hay roce con los coeficientes de fricción indicados. Se pide: a) en la figura "a" calcular las reacciones en los apoyos; b) en la figura "b", ¿está la viga en equilibrio?; c) en la figura "c", determinar el máximo valor de  $P$  compatible con el equilibrio. (Respuesta: a) normal a la barra en A  $532,6$  kg, tangencial  $221,9$  kg, vertical en B  $423$  kg; b) No; c) normal a la barra en A  $532,5$  kg, vertical en B  $508,5$  kg,  $P_{\max}=459,3$  kg)



- 1.53 Un hombre de peso  $W$  ha colocado una escalera sin peso de longitud  $L$  con la pendiente indicada y empezado a ascender por ella. Si los coeficientes de fricción entre la escalera y el piso y entre la escalera y la pared son ambos de  $0,25$ , encuentre cuánto puede subir el hombre (distancia  $x$  en la figura) antes de que la escalera resbale. Compruebe y explique por qué antes de ocurrir la condición límite de equilibrio por deslizamiento no es posible encontrar las reacciones del piso y la pared. (Respuesta:  $x=0,376L$ ; hay 4 incógnitas y sólo 3 ecuaciones, es decir, es un problema hiperestático).



- 1.54 La barra de la figura está sostenida por una articulación en B y por un cable en A. Encuentre: a) la tensión en el cable, b) las reacciones en B. (Respuesta: a) 2588, b)  $V=2157$ ,  $H=2315$ )



- 1.55 Una rueda de radio  $3r$  y peso  $W$  se encuentra sobre un plano inclinado rugoso y está sujeta por una cuerda enrollada a su eje de radio  $r$  (la cuerda de varias vueltas sobre el eje de modo que no puede deslizar sobre él), a) Si la rueda está en equilibrio, determinar la reacción del plano sobre ella y la tensión en la cuerda, b) Determinar el coeficiente de fricción mínimo requerido para que sea posible el equilibrio. (Respuesta: a)  $N=W\cos\alpha$ ,  $F_r=0,5W\sin\alpha$ ,  $T=3F_r$ ; b)  $\mu=0,5\operatorname{tg}\alpha$ )

