

Chapter Title: COMPLEMENTOS DE ANÁLISIS Y COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL

Book Title: Fundamentos de ingeniería estructural para estudiantes de arquitectura

Book Subtitle: Tercera edición

Book Author(s): Rafael Riddell C. and Pedro Hidalgo O.

Published by: Ediciones UC. (2015)

Stable URL: <https://www.jstor.org/stable/j.ctt1bhkq3k.6>

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at <https://about.jstor.org/terms>



JSTOR

Ediciones UC is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Fundamentos de ingeniería estructural para estudiantes de arquitectura*

IV.

COMPLEMENTOS DE ANÁLISIS Y COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL

4.1 Introducción

En los Capítulos I y II de este texto se han entregado los conceptos básicos de la Estática, es decir, las condiciones que deben cumplir tanto las fuerzas externas como los esfuerzos internos que se desarrollan en el interior de un cuerpo, para mantenerlo en un estado de equilibrio estático o reposo. Las estructuras que constituyen el esqueleto resistente de los edificios y de otras obras civiles como puentes, muelles, túneles, embalses, etc. deben mantenerse en reposo frente a la mayoría de las situaciones que les corresponde afrontar, o sea, las fuerzas que actúan sobre las estructuras a causa de estas situaciones, deben satisfacer las condiciones de *equilibrio estático*.

Por otra parte, en la Sección 3.2, se ha discutido la deformación δ que se produce en una barra de módulo de elasticidad E , sección recta A y longitud L , cuando es sometida a una carga axial P , deformación que queda determinada por la Ec. 3-5 para materiales linealmente elásticos. Esta expresión relaciona la fuerza o el esfuerzo interno P con la deformación axial δ que se produce como consecuencia de P , y corresponde a lo que, en general, se denominará una *relación fuerza-deformación*. Relaciones fuerza-deformación similares a la Ec. 3-5 pueden deducirse para el caso de los otros esfuerzos internos, como el momento flector, el esfuerzo de corte y el momento torsor, tal como se detallará en la Sección 4.2. El momento torsor de una barra no se ha introducido hasta ahora ya que es un esfuerzo interno que se desarrolla principalmente en estructuras tridimensionales y que usualmente no es determinante para el diseño de los elementos estructurales. Sin embargo, no se puede olvidar ya que deberá ser considerado en la Sección 7.7 cuando se estudie la respuesta sísmica de estructuras tridimensionales.

Por lo tanto, las fuerzas que actúan sobre las estructuras deben satisfacer los requisitos de equilibrio estático, y las deformaciones resultantes están relacionadas

con las fuerzas a través de las relaciones fuerza-deformación. Sin embargo, todos los sistemas estructurales deben satisfacer además un tercer principio básico: las deformaciones resultantes deben satisfacer la *compatibilidad geométrica*, esto es, las deformaciones de los elementos deben satisfacer las restricciones geométricas impuestas por los vínculos externos y por la continuidad interna que debe respetar el elemento deformado. Esta continuidad interna implica que, cuando el elemento se deforma, no se producen huecos ni fisuras en su interior.

Los tres principios básicos que se han discutido anteriormente, constituyen los fundamentos en que se basa cualquier problema de ingeniería estructural, ya sea que se trate de determinar esfuerzos internos en estructuras, la distribución de tensiones en cualquier punto de un sólido o las deformaciones experimentadas por un elemento. Aunque estos principios ya se presentaron en forma introductoria en el Ejemplo 3.2, hasta ahora no se han utilizado porque fundamentalmente se han abordado estructuras isostáticas y sólo se han calculado deformaciones mediante fórmulas dadas. La solución del problema que se discute a continuación servirá para ilustrar la forma en que estos tres principios se integran y utilizan para resolver los problemas que se presentan en la práctica.

La barra AB es una barra rígida (indeformable) y sin peso, que está articulada en el punto A y es sostenida por dos barras de igual material (módulo de elasticidad E), e igual sección recta A. Se desea determinar las fuerzas axiales en las barras DC y EB y el ángulo que AB forma la barra con la horizontal cuando actúa la carga P en la posición indicada en la Fig. 4.1.a.

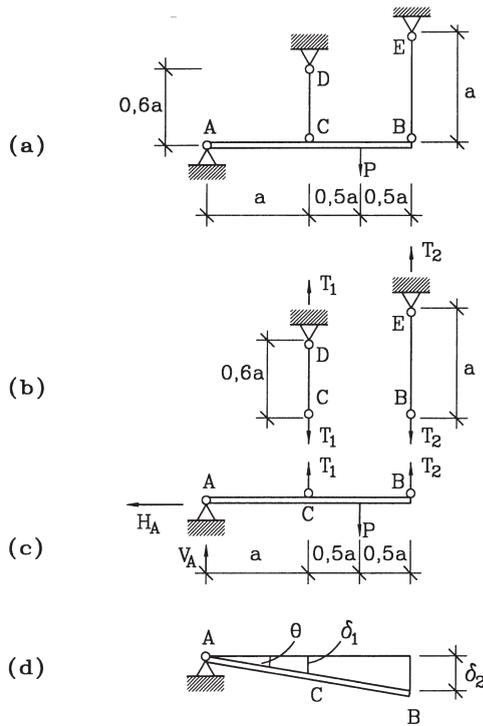


Figura 4.1

Sean T_1 y T_2 las fuerzas axiales de tracción que se desarrollan en las barras DC y EB, respectivamente. El análisis de las fuerzas que actúan sobre las barras DC, EB y AB permite considerar los subsistemas indicados en las Figs. 4.1.b y 4.1.c. Si se aplican las condiciones de equilibrio de las fuerzas que actúan sobre la barra AB, se puede escribir:

$$\Sigma F_{\text{horizontales}} = 0 \quad \rightarrow \quad H_A = 0$$

$$\Sigma F_{\text{verticales}} = 0 \quad \rightarrow \quad V_A + T_1 + T_2 = P \quad (4-1)$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \rightarrow \quad T_1 \cdot a + T_2 \cdot 2a = P \cdot 1,5a \quad (4-2)$$

Como puede observarse, las fuerzas incógnitas V_A , T_1 , T_2 no pueden determinarse usando solamente las ecuaciones proporcionadas por las condiciones de equilibrio estático, ya que sólo se dispone de dos ecuaciones para tres incógnitas. Sin embargo, el problema puede resolverse apelando a las relaciones fuerza-deformación que se cumplen para las barras DC y EB, y a las condiciones de compatibilidad geométrica que deben satisfacer las deformaciones de estas barras al considerar la geometría implícita por la indeformabilidad de la barra AB.

En la Fig. 4.1.d se muestra el ángulo θ que la barra AB forma con la horizontal, cuando las barras DC y EB sufren elongaciones δ_1 y δ_2 respectivamente. Como estas deformaciones δ_1 y δ_2 son provocadas por las fuerzas axiales T_1 y T_2 , respectivamente, las relaciones fuerza-deformación para las barras DC y EB (Ec. 3-5) permiten escribir:

$$\delta_1 = \frac{T_1 \cdot 0,6a}{AE} \qquad \delta_2 = \frac{T_2 \cdot a}{AE}$$

Por lo tanto

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{0,6T_1}{T_2} \qquad (4-3)$$

Pero las deformaciones δ_1 y δ_2 están relacionadas a través de la compatibilidad geométrica exigida por la indeformabilidad de la barra AB. El análisis de la geometría de la Fig. 4.1 .d conduce a:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \qquad (4-4)$$

Las Ecs. 4-3 y 4-4 permiten deducir que:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{0,6T_1}{T_2} = \frac{1}{2}$$

$$T_2 = 1,2 T_1 \qquad (4-5)$$

Si la Ec. 4-5 se reemplaza en la Ec. 4-2 resulta:

$$T_1 + 2T_2 = 1,5P$$

$$T_1 + 2(1,2T_1) = 1,5P$$

$$T_1 = 0,441P$$

$$T_2 = 1,2 T_1 = 0,529P$$

El ángulo θ que la barra AB forma con la horizontal se obtiene del valor de δ_1 (o δ_2) determinado de T_1 (o T_2):

$$\delta_1 = \frac{0,441P \cdot 0,6P}{AE} = 0,265 \frac{Pa}{AE}$$

$$\delta_2 = 0,529 \frac{Pa}{AE} = 2\delta_1$$

Si se considera que los valores prácticos de δ_1 y δ_2 son muy pequeños se puede usar la relación aproximada que se cumple en la Fig. 4.1.d

$$\theta \approx \operatorname{tg}\theta = \frac{\delta_1}{a} \quad \text{o bien} \quad \theta \approx \operatorname{tg}\theta = \frac{\delta_2}{2a}$$

$$\theta = 0,265 \frac{P}{AE}$$

Como puede observarse, el uso de las relaciones fuerza-deformación para las barras deformables DC y EB, y la compatibilidad geométrica que exigen las condiciones del problema, han permitido resolver un problema que no puede ser solucionado usando las ecuaciones de equilibrio solamente.

El hecho de tener la necesidad de recurrir a las relaciones fuerza-deformación y a la compatibilidad geométrica para resolver un problema, permite calificarlo como un problema *estáticamente indeterminado* o *hiperestático*. Dicho de otra forma, se puede definir un problema estáticamente indeterminado como aquel en el que no se pueden determinar las fuerzas usando sólo las ecuaciones de equilibrio estático. Inversamente, en un problema *estáticamente determinado* o *isostático*, las fuerzas externas y los esfuerzos internos pueden obtenerse apelando solamente a las ecuaciones de la estática; todos los casos analizados en el Capítulo II corresponden a estructuras isostáticas o estáticamente determinadas. Sin embargo, estas estructuras no son las más frecuentes en la práctica; los casos que más abundan son los estáticamente indeterminados. En la Sección 4.3 se expone uno de los métodos para resolver este tipo de estructuras. La indeterminación estática se genera cuando la vinculación externa de los sistemas implica, en general, quitar más grados de libertad que los estrictamente necesarios para inmovilizar el sistema, o también en el caso de los sistemas de reticulado, cuando se usan más barras que las estrictamente necesarias para impedir la formación de un mecanismo. Ambos casos han sido discutidos en las Secciones 2.1.4 y 2.2.1 respectivamente.

Si se extiende esta línea de pensamiento, los sistemas estructurales también pueden clasificarse, alternativamente, como geoméricamente determinados o geoméricamente indeterminados. En un sistema *geoméricamente determinado* es posible determinar totalmente la geometría de la estructura deformada usando argumentos geoméricos exclusivamente. Un ejemplo de estos sistemas es el caso de una barra doblemente empotrada en la cual la temperatura aumenta en ΔT grados

Celsius ($^{\circ}\text{C}$). Tal como se indica en la Fig. 4.2, las condiciones de vínculo externo permiten conocer el conjunto de desplazamientos que sufre la estructura; para satisfacer las condiciones de vínculo la barra debe experimentar un acortamiento total δ de su longitud, dado por

$$\delta = \alpha \cdot \Delta T \cdot L \quad (4-6)$$

en que α es el *coeficiente de dilatación térmica* del material de la barra. Por su parte, cada elemento de longitud *infinitesimal* dx de la barra sufre un acortamiento *diferencial*

$$d\delta = \alpha \Delta T dx \quad (4-7)$$

O sea, la deformación axial de la barra completa y de cada elemento de longitud dx son conocidos. Si se usa la relación fuerza-deformación expresada por la Ec. 3-5, se puede determinar la fuerza de compresión P a que queda sometida la barra, pero debe notarse que la determinación de P no es necesaria para poder escribir las Ecs. 4-6 y 4-7 que resuelven la geometría del problema.

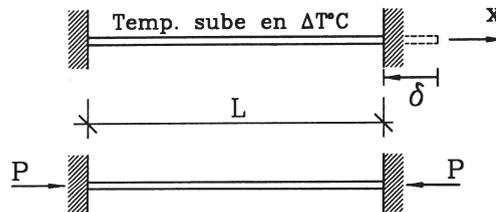


Figura 4.2

Por otra parte, todas las estructuras incluidas en el Capítulo II, así como el ejemplo de la Fig. 4.1 caen dentro de la clasificación de sistemas *geoméricamente indeterminados*, entendiéndose por tales sistemas aquellos en que la determinación de la geometría de la estructura deformada debe recurrir necesariamente a los tres principios fundamentales que se han discutido al comienzo de esta Sección. Se ha omitido la profundización de esta línea de pensamiento, ya que los métodos que se discuten en la Sección 4.3 están orientados a la solución de estructuras cuya indeterminación se juzga desde el punto de vista estático, en contraposición a juzgarla desde una perspectiva geométrica.

4.2 Cálculo de Deformaciones

Se resumen a continuación las deformaciones producidas por los cuatro diferentes tipos de esfuerzos internos para el caso en que el comportamiento del material se mantiene dentro del rango lineal-elástico. Las expresiones básicas se entregan a

nivel de sección, es decir, la deformación producida por cada esfuerzo interno en una rebanada de espesor dx de un elemento tipo “barra”; éste es un elemento esbelto que tiene una dimensión –su longitud– mucho mayor que las dimensiones de su sección. También se hace la extensión al caso de las deformaciones a nivel de elemento, indicando la forma en que ellas se calculan en la práctica.

4.2.1 Deformaciones a Nivel de Sección

a) Esfuerzo Axial (tracción o compresión)

En la Fig. 4.3.a se muestra la rebanada de espesor dx sometida a un esfuerzo axial de tracción P . Este esfuerzo produce un incremento $d\Delta$ del espesor dx de la rebanada. Si se usa la deformación unitaria de la rebanada

$$\varepsilon = \frac{d\Delta}{dx}$$

la Ley de Hooke discutida en la Sección 3.2.3 permite escribir

$$\sigma = \frac{P}{A} = E\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{d\Delta}{dx} = \frac{P}{AE} \quad (4-8)$$

en que E es el módulo de elasticidad del material y A es el área de la sección recta del elemento.

Sin embargo, la deformación unitaria ε también puede originarse en un cambio de temperatura ΔT ($^{\circ}\text{C}$) experimentado por la rebanada. En tal caso, si α es el coeficiente de dilatación térmica del material,

$$\varepsilon = \frac{d\Delta}{dx} = \alpha\Delta T \quad (4-9)$$

en que ε y ΔT son positivos si la temperatura aumenta, mientras que son negativos si la temperatura disminuye.

b) Momento Flector

La Fig. 4.3.b muestra la rebanada deformada por flexión; en ella se indica el ángulo $d\theta$ que forman las caras de la rebanada cuando ella es sometida a un momento flector M .

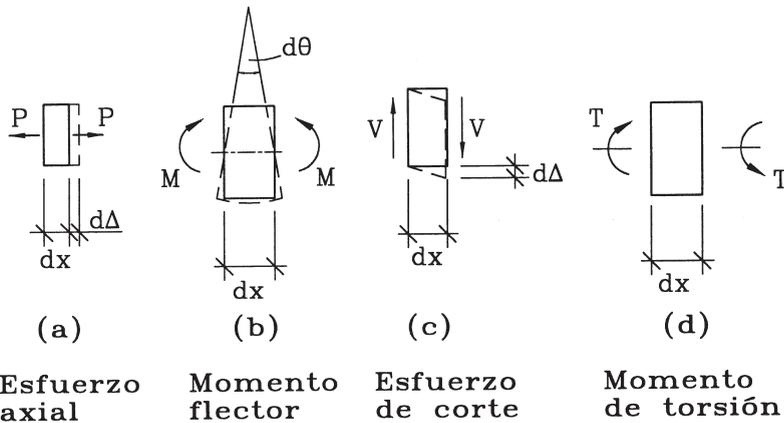


Figura 4.3 Deformaciones de una rebanada de espesor dx

Si el momento M es nulo, el ángulo $d\theta$ también es nulo. La magnitud de $d\theta$ está dada por:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (4-10)$$

en que I es el momento de inercia de la sección respecto del eje neutro (notar que $d\theta/dx$ es equivalente a $1/\rho$ definido en la Ec. 3-42).

c) Esfuerzo de Corte

En la Fig. 4.3.c se muestra la rebanada deformada por la acción del esfuerzo de corte V . Este esfuerzo produce un desplazamiento relativo $d\Delta$ entre las caras de la rebanada, dado por:

$$\frac{d\Delta}{dx} = k \frac{V}{GA} \quad (4-11)$$

en que k es una constante que depende de la forma de la sección y G es el *módulo de elasticidad por cizalle* que, para un material lineal-elástico e isótropo, se puede escribir en función del módulo de elasticidad E :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4-12)$$

siendo ν el *módulo de Poisson* del material, que se define como el cociente entre la deformación transversal y la deformación longitudinal que experimenta un elemento.

Algunos valores de la constante k son 1,20 para una sección rectangular o cuadrada llena, 10/9 para una sección circular llena, y 1,00 para una sección doble T si se usa para A el área del alma de la sección.

d) Momento de Torsión

Finalmente, en la Fig. 4.3.d se pretende ilustrar una deformación por torsión de una rebanada, que en rigor es un fenómeno que debe apreciarse en forma tridimensional. En este caso, la deformación por torsión se expresa a través del ángulo $d\phi$ de rotación relativa entre las caras de la rebanada, la cual se determina de:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{GJ} \tag{4-13}$$

en que T es el momento de torsión y J es una propiedad de la sección de la rebanada. Si ésta es una sección circular, J es el momento polar de inercia de la sección determinado en torno del eje de torsión.

4.2.2 Deformaciones a Nivel de Elemento y de Sistema Completo

Una vez conocidas las deformaciones de las rebanadas que componen un elemento, se puede proceder a determinar la deformación total del elemento a través de un proceso matemático que es equivalente, físicamente, a pegar todas las rebanadas deformadas para obtener la deformación del elemento completo. Este proceso matemático de acumular las deformaciones de rebanadas que tienen espesor diferencial dx , recibe el nombre de *integración*, y equivale a efectuar la suma cuando el espesor de las rebanadas tiende a cero y el número de rebanadas componentes tiende a infinito.

Por ejemplo, para elementos deformados por un esfuerzo axial P, tracción o compresión, la deformación unitaria de cada rebanada está determinada por la Ec. 4-8 y el proceso de integración para la longitud L del elemento para obtener la deformación total δ , alargamiento o acortamiento, se escribe como:

$$\delta = \int_0^L \epsilon dx = \int_0^L \frac{P}{AE} dx$$

Si la carga axial P, el área de la sección A y el módulo de elasticidad E son constantes a lo largo de la longitud L

$$\delta = \frac{P}{AE} \int_0^L dx = \frac{PL}{AE}$$

que es la misma Ec. 3-5 discutida en el Capítulo anterior.

Esta ecuación puede usarse para obtener, por ejemplo, deformaciones de barras que componen estructuras de reticulado. Una vez conocidas las deformaciones de las barras componentes, existen métodos para determinar la geometría de la deformación de la estructura de reticulado completa, métodos que no se detallarán en este texto pero que se pueden consultar en cualquier texto de Análisis Estructural (Hidalgo, 1992, Capítulo 4).

El mismo proceso descrito anteriormente para integrar o acumular las deformaciones por esfuerzo axial, puede realizarse para el caso de las deformaciones por flexión, o sea, aquellas producidas por el momento flector. Estas son las deformaciones más importantes o de mayor magnitud en las estructuras de vigas o pórticos. Para un elemento barra como el indicado en la Fig. 4.4, constituido por un material de módulo de elasticidad E y con una sección recta con momento de inercia I respecto del eje neutro, el proceso físico de pegar las rebanadas deformadas es equivalente, matemáticamente, a resolver la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (4-14)$$

en que δ es la deformación transversal de la barra debida a flexión y $M=M(x)$ es la función momento flector que es variable con x .

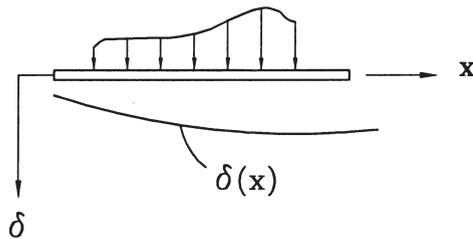


Figura 4.4 Deformaciones de un elemento barra

En la Tabla V.4 se entrega el resultado de aplicar este procedimiento al cálculo de las deformaciones por flexión de varias vigas de uso común, que tienen propiedades E que son constantes cualquiera sea el valor de x . También se entregan en esta tabla las funciones momento flector $M(x)$, esfuerzo de corte $V(x)$, los valores máximos de la deformada δ , y los valores de los ángulos ϕ que la tangente a la deformada forma con la recta horizontal en los apoyos de las vigas. La información proporcionada en la Tabla V.4 es fundamental para abordar el problema de la solución de vigas estáticamente indeterminadas que se trata en la Sección 4.3. El lector debe notar que los 22 casos ilustrados en la Tabla V.4, los once primeros corresponden a vigas estáticamente determinadas o isostáticas mientras que la segunda mitad son vigas estáticamente indeterminadas o hiperestáticas.

En los casos ilustrados en la Tabla V.4 no se ha incluido la influencia de las deformaciones por esfuerzo de corte de las rebanadas (Ec. 4-11) en el cálculo de la deformación transversal δ de las vigas. Estas deformaciones son mucho menores, en general, que las debidas al momento flector y se hacen tanto menores en la medida que la altura de flexión de la sección es menor comparada con la longitud o luz L del

elemento. Si la altura es menor que $0,1L$, las deformaciones por esfuerzo de corte son despreciables frente a las de flexión. Sin embargo, esta simplificación no es válida para todos los elementos que componen las estructuras; por ejemplo, en los muros resistentes las deformaciones por esfuerzo de corte son tanto o más importantes que las deformaciones por flexión; por ejemplo, el Ejercicio 7.46 que se propone al final del Capítulo 7 incluye tanto la influencia de las deformaciones por flexión como aquellas por esfuerzo de corte. Los métodos para determinar las deformaciones por esfuerzo de corte, así como métodos prácticos para encontrar las deformaciones por flexión se pueden consultar en el texto “Análisis Estructural”, citado anteriormente.

En dicho texto también se discute en detalle el cálculo de la geometría de la deformada de estructuras de pórticos, conformados por vigas y columnas, tanto para el caso de pórticos planos como pórticos tridimensionales. En este último caso es usual que, además de las deformaciones por flexión, esfuerzo de corte y esfuerzo axial de vigas y columnas, también se desarrollen deformaciones de estos elementos debidas al momento torsor, las que deben determinarse usando la Ec. 4-13. Estos tópicos involucran una cierta complejidad que no se ha estimado prudente incluir en este texto para estudiantes de arquitectura, ya que los conceptos esenciales de la solución de estructuras estáticamente indeterminadas se pueden desarrollar apelando solamente a las deformaciones por flexión y a las deformaciones por esfuerzo axial, tal como se ilustra a continuación.

4.3 Estructuras Estáticamente Indeterminadas

Existen diferentes métodos para resolver la determinación de reacciones, esfuerzos internos y deformaciones de estructuras indeterminadas. En este texto, la presentación se limita a la presentación del método más simple para solucionar esta indeterminación cuando ella se aprecia desde el punto de vista de la estática, o sea, desde el punto de vista de la determinación de las fuerzas que intervienen en el problema. Por esta razón, este método recibe el nombre de *método de las fuerzas*.

4.3.1 El Método de las Fuerzas

Como ya se ha ilustrado en la Sección 4.1, una estructura estáticamente indeterminada o hiperestática se caracteriza por el hecho que las fuerzas que intervienen en el problema (reacciones externas, esfuerzos internos) no pueden ser determinadas usando solamente las ecuaciones proporcionadas por el equilibrio estático. Por lo tanto, es imprescindible recurrir además a las relaciones fuerza-deformación y a las condiciones de compatibilidad geométrica.

Para ilustrar el procedimiento de solución se usará la viga indicada en la Fig. 4.5.a, la cual tiene propiedades EI constante y luz L . En el apoyo empotrado A y en el apoyo deslizante B se desarrollan cuatro reacciones de vínculo: M_A , V_A , V_B y H_A .

Sin embargo, si se aplica la condición que la suma de fuerzas horizontales sea nula, resulta $H_A=0$ con lo cual se tienen sólo tres reacciones de vínculo incógnitas. Al aplicar las restantes ecuaciones de la estática se obtiene:

$$\Sigma F_{\text{vert}} = 0 \quad \rightarrow \quad V_A + V_B = qL \quad (4-15)$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \rightarrow \quad V_B L + M_A = \frac{qL^2}{2} \quad (4-16)$$

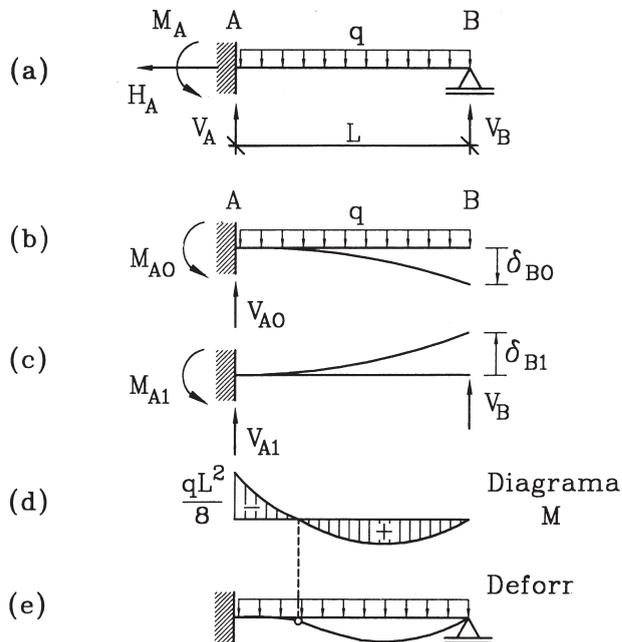


Figura 4.5 Ejemplo de solución de un sistema estáticamente indeterminado.

Como puede observarse, sólo se dispone de dos ecuaciones para encontrar las incógnitas V_A , V_B y M_A . O sea, hay una incógnita de más, por lo que se dice que el problema es *una vez estáticamente indeterminado* o *una vez hiperestático*. La estrategia que se describe a continuación está orientada a determinar una de estas incógnitas, en este caso V_B , ya que es obvio que si se conoce una de las incógnitas las otras dos se pueden determinar de las Ecs. 4-15 y 4-16.

La solución del problema planteado en la Fig. 4.5.a se puede obtener si se superponen las soluciones de las vigas indicadas en las Figs. 4.5.b y c. Estas dos vigas son

estáticamente determinadas ya que en ellas se ha eliminado el vínculo deslizante que impide el desplazamiento vertical del punto B. En la viga de la Fig. 4.5.b se ha mantenido la carga distribuida q , mientras que en la viga de la Fig. 4.5.c sólo actúa la incógnita V_B asociada al vínculo en B que se ha eliminado; más aún, cabe puntualizar que la superposición de las estructuras se mantiene dentro del rango lineal y elástico. Por lo tanto, las siguientes fuerzas se determinan usando las ecuaciones de equilibrio estático:

$$\begin{aligned} V_{A0} &= qL & M_{A0} &= \frac{qL^2}{2} \\ V_{A1} &= -V_B & M_{A1} &= -V_B \cdot L \end{aligned}$$

y las deformaciones δ_{B0} y δ_{B1} se obtienen de los casos 2 y 1 de la Tabla V.4, respectivamente, como resultado de aplicar las relaciones fuerza-deformación incluyendo solamente las deformaciones por flexión.

$$\delta_{B0} = \frac{qL^4}{8EI} \qquad \delta_{B1} = \frac{V_B L^3}{3EI} \qquad (4-17)$$

Como puede observarse, hasta ahora se han aplicado dos de los principios básicos de la ingeniería estructural: *equilibrio estático* y *relaciones fuerza-deformación*. La solución del problema planteado en la Fig. 4.5.a se obtiene al exigir una condición de *compatibilidad geométrica* que no se ha respetado en las vigas de las Figs. 4.5.b y c; esta condición es que el punto B no debe experimentar desplazamientos verticales. El hecho que este desplazamiento exista en las vigas de las Figs. 4.5.b y 4.5.c es consustancial con el hecho de haber eliminado el vínculo deslizante en B. Por lo tanto, al superponer los resultados (deformaciones) de dichas vigas (Ecs. 4-17) la compatibilidad geométrica requiere que el desplazamiento vertical total del punto B debe ser nulo. Como δ_{B0} y δ_{B1} son de sentido contrario, debe cumplirse:

$$\delta_{B0} = \delta_{B1} \qquad (4-18)$$

Esta ecuación adicional permite encontrar la incógnita V_B . Efectivamente al reemplazar los valores de δ_{B0} y δ_{B1} indicados en las Ecs. 4-17 se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{qL^4}{8EI} &= \frac{V_B L^3}{3EI} \\ V_B &= \frac{3qL}{8} \end{aligned}$$

Obtenido el valor de la incógnita V_B , las Ecs. 4-15 y 4-16 permiten determinar las incógnitas V_A y M_A :

$$V_A = qL - \frac{3qL}{8} = \frac{5qL}{8}$$

$$M_A = \frac{qL^2}{2} - \frac{3qL^2}{8} = \frac{qL^2}{8}$$

El proceso anterior es absolutamente equivalente a obtener los valores de M_A y V_A de la viga de la Fig. 4.5.a, a partir del valor de V_B . Idéntico resultado se obtiene de superponer los resultados de las vigas de las Figs. 4.5.b y c, una vez conocida la fuerza V_B . En la Fig. 4.5.d se muestra el diagrama de momentos de la viga, mientras que en la Fig. 4.5.e se ilustra la *deformada* o deformación final de la viga. La ecuación de la deformada, el momento flector positivo máximo y su ubicación, así como el ángulo que la tangente a la deformada en B forma con la horizontal pueden obtenerse del caso 14 de la Tabla V.4, que es la misma viga usada para ilustrar el método de las fuerzas.

4.3.2 Solución de Estructuras Estáticamente Indeterminadas

El método de solución de vigas indeterminadas discutido anteriormente puede aplicarse a muchos casos de vigas con diferentes condiciones de carga y geometría y otras condiciones de vinculación. También es de aplicación general a otros tipos de estructuras como pórticos y estructuras de reticulado, tanto planas como tridimensionales. Sin embargo, esta presentación se circunscribe a las estructuras de vigas para no introducir complicaciones adicionales que dificulten la comprensión del método. Los ejemplos siguientes servirán para profundizar el aprendizaje del método de las fuerzas.

Ejemplo 4.1

Determinar el diagrama de momentos de la viga indicada en la Fig. E4.1.a. La viga AB tiene propiedades EI constantes y luz 2L. El tirante DC, del cual cuelga el punto C de la viga, tiene módulo de elasticidad E, sección recta $A = 3I/L^2$ y longitud L.

Solución: Al igual que en el caso resuelto anteriormente, esta estructura es una vez estáticamente indeterminada. Por una parte, la incógnita H_A es nula, (suma de fuerzas horizontales igual a cero), y sólo se tienen dos ecuaciones de equilibrio adicionales para encontrar las incógnitas V_A , V_B , y el esfuerzo axial X en el tirante DC.

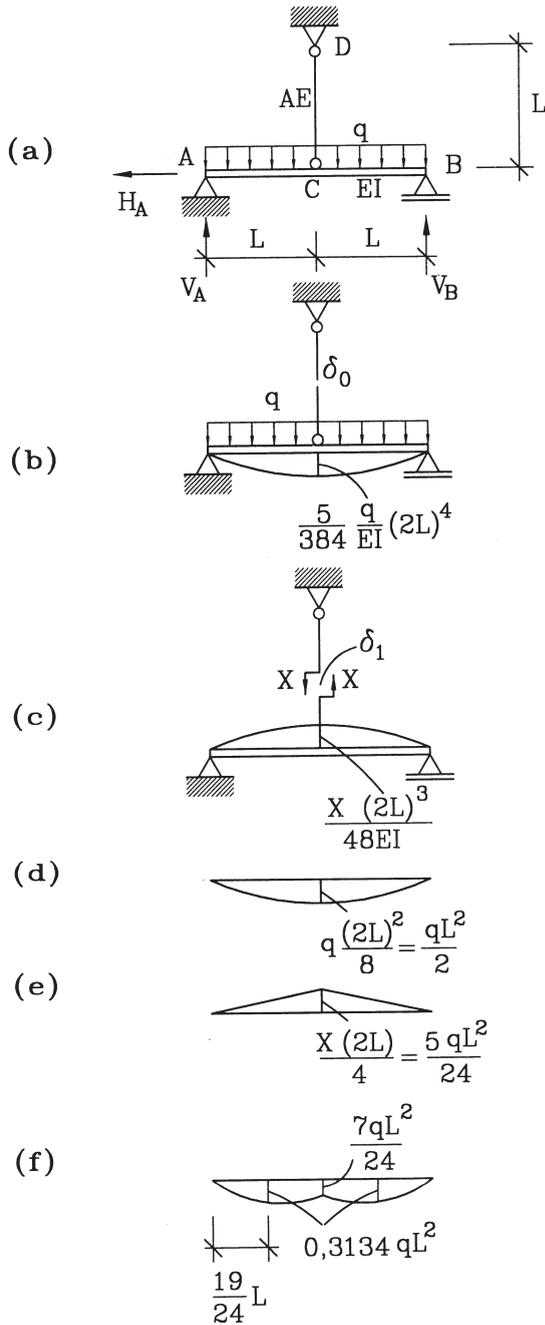


Figura E4.1

La solución que se detalla a continuación está orientada a encontrar la incógnita X . Para ello se postula que la solución del problema se puede obtener superponiendo las soluciones de los casos de las Figs. E4.1.b y c. En ambos casos el tirante DC se ha cortado, lo que hace aparecer distanciamientos δ_0 y δ_1 entre los puntos cortados, respectivamente. En el caso de la Fig. E4.1.b la separación δ_0 entre los puntos cortados es igual a la deformación del punto central C de la viga AB, ya que el tirante no experimenta deformación axial alguna. De acuerdo al caso 8 de la Tabla V.4:

$$\delta_0 = \frac{5q(2L)^4}{384EI} = \frac{5qL^4}{24EI}$$

En el caso de la Fig. E4.1.c, el acercamiento δ_1 entre los puntos cortados se obtiene de sumar la deformación de flexión de la viga y la deformación axial del tirante sometido a la fuerza de tracción X .

Usando el caso 7 de la Tabla V.4 para la primera de estos componentes de la deformación, se obtiene, (recordar que $A=3I/L^2$):

$$\delta_1 = \delta_{\text{viga}} + \delta_{\text{tirante}}$$

$$\delta_1 = \frac{X(2L)^3}{48EI} + \frac{XL}{AE} = \frac{XL^3}{6EI} + \frac{XL^3}{3I} = \frac{XL^3}{2EI}$$

La condición de compatibilidad geométrica que resuelve el problema debe aplicarse a las deformaciones originadas por el vínculo que se ha eliminado en las Figs. E4.1.b y c, el cual está asociado a la incógnita estática X . En el problema propuesto, la distancia entre los puntos cortados del tirante es nula, (o sea, en el problema propuesto real el tirante no se ha cortado); por lo tanto al superponer los casos de las Figs. E4.1.b y c debe cumplirse que dicha distancia se haga cero:

$$\delta_0 \text{ (separación)} = \delta_1 \text{ (acercamiento)}$$

$$\frac{5qL^4}{24EI} = \frac{XL^3}{2EI}$$

$$X = \frac{5qL}{12}$$

Una vez encontrada la incógnita X , el diagrama de momentos puede obtenerse sin problemas. En este caso, se ha determinado superponiendo los diagramas de momento de las vigas de las Figs. E4.1.b y c, los que se indican en las Figs. E4.1.d y e, respectivamente. El diagrama de momentos final se muestra en la Fig. E4.1.f.

Ejemplo 4.2

Encontrar la reacción vertical en el apoyo deslizando C de la viga indicada en la Fig. E4.2.a. La viga AB tiene propiedades EI constantes y luz $2L$.

Solución: En esta viga existen 7 reacciones de vínculo externo, para las cuales se pueden plantear 3 ecuaciones de equilibrio estático. En rigor, la viga es 4 veces estáticamente indeterminada o 4 veces hiperestática. Sin embargo, si se desprecian las deformaciones por esfuerzo axial de la viga, las que en la práctica son muy pequeñas, los puntos A y B de la viga no tratan de moverse horizontalmente y, en consecuencia, no se activan las restricciones al desplazamiento horizontal en los empotramientos A y B. Si se recuerda que las reacciones de vínculo externo se generan porque los vínculos se oponen a los desplazamientos o giros de los puntos vinculados, se llega a la conclusión que las reacciones horizontales H_A y H_B deben ser nulas. Por lo tanto, la hipótesis de despreciar las deformaciones axiales de la viga reduce el grado de indeterminación estática a 3, ya que ahora sólo se dispone de dos ecuaciones de la estática.

Sin embargo, el grado de indeterminación estática puede reducirse a uno con la ayuda de los casos resueltos en la Tabla V.4. Hasta ahora, la estrategia para resolver problemas estáticamente indeterminados ha consistido en considerar el problema propuesto como la superposición de subsistemas estáticamente determinados. Sin embargo, estrictamente hablando, estos subsistemas solamente necesitan haber sido resueltos y conocer su solución; el hecho de haber usado hasta ahora estructuras estáticamente determinadas es porque se pueden resolver usando las ecuaciones de la estática, pero si se conoce la solución de estos subsistemas, aun cuando ellos sean estáticamente indeterminados, ellos pueden ser perfectamente usados como los subsistemas que se superponen para obtener la solución del problema propuesto. Esta es la estrategia que se usa a continuación, en la cual se considera a la reacción vertical en C, V_C , como la única incógnita del problema.

Por lo tanto, en las Figs. E4.2.b y c se muestran los subsistemas que al superponerse conducen a la solución del problema propuesto. En ambos casos se ha eliminado la rótula deslizando en C; la viga de la Fig. E4.2.b mantiene las cargas aplicadas mientras la viga de la Fig. E4.2.c sólo incluye la acción de la incógnita V_C . La estrategia de solución está directamente asociada al hecho que ambos subsistemas anteriores tienen solución conocida, como lo ilustran los casos 20 y 18 de la Tabla V.4, respectivamente.

Efectivamente, las deformaciones por flexión δ_0 y δ_1 se obtienen de los casos 20 y 18 antes mencionados:

$$\delta_0 = \frac{5q(2L)^4}{384EI} = \frac{qL^4}{24EI}$$

$$\delta_1 = \frac{V_c(2L)^3}{192EI} = \frac{V_cL^3}{24EI}$$

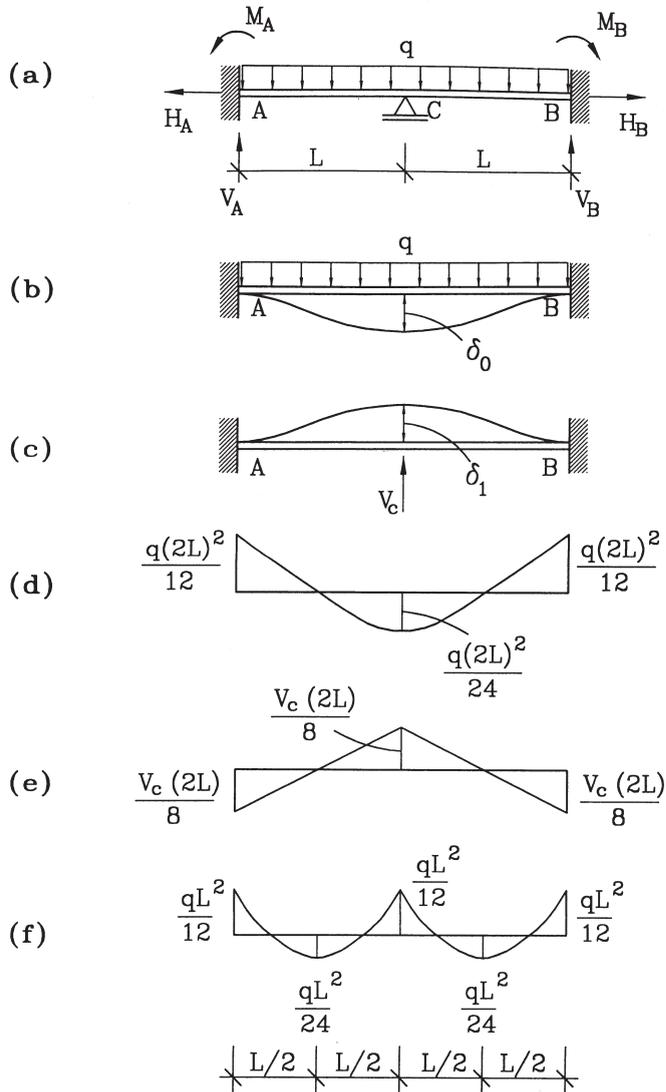


Figura E4.2

Al superponer los sistemas de las Figs. E4.2.b y c debe restituirse la condición de compatibilidad geométrica que no se ha respetado, o sea, que el desplazamiento vertical del punto C debe ser nulo. Esto implica:

$$\delta_0 = \delta_1$$

$$\frac{5q(2L)^4}{24EI} = \frac{V_c L^3}{24EI}$$

$$V_c = qL$$

Los diagramas de momento de los subsistemas b y c se indican en las Figs. E4.1.d y e, respectivamente. Si se superponen estos diagramas de momento con el valor de V_c determinado anteriormente, se obtiene el diagrama de momentos final indicado en la Fig. E4.2.f.

Ejemplo 4.3

Determinar el diagrama de momentos de la viga indicada en la Fig. E4.3.a, (caso 19 de la Tabla V.4). La viga tiene EI constante y luz L.

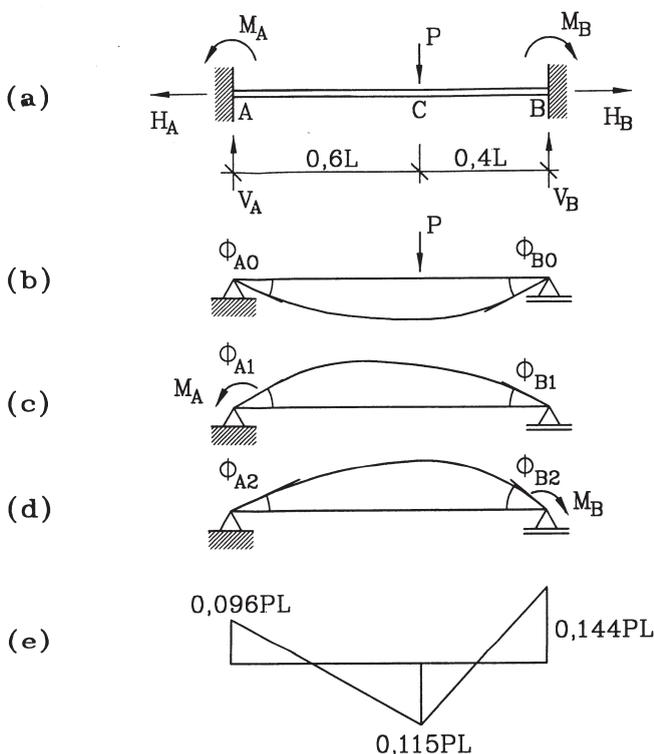


Figura E4.3

Solución: Si se enumeran las reacciones de vínculo indicadas en la Fig. E4.3.a, se puede observar que existen 6 incógnitas de reacción externa y se dispone de sólo 3 ecuaciones de la estática. Sin embargo, si se desprecian las deformaciones axiales de la viga $H_A=H_B=0$, el número de incógnitas se reduce a 4 y el número de ecuaciones de la estática a 2. Por lo tanto, se trata de un problema dos veces estáticamente indeterminado y se resolverá como tal.

La estrategia de solución está asociada a la elección de los momentos de empotramiento M_A y M_B como incógnitas estáticas. Por lo tanto, la viga propuesta se descompone en los tres casos indicados en las Figs. E4.3.b, c y d, en los cuales se han eliminado los vínculos que impedían los giros en los empotramientos A y B. La viga de la Fig. E4.3.b mantiene la carga aplicada, mientras las incógnitas M_A y M_B actúan en las vigas de las Figs. E4.3.c y d, respectivamente.

La condición de compatibilidad geométrica que debe exigirse cuando se superpongan los subsistemas b, c y d, debe aplicarse a las deformaciones originadas por la eliminación de los vínculos que impedían los giros en A y en B, esto es, a los giros que las tangentes a las deformadas forman con la recta horizontal en A y B.

Los giros ϕ_{A0} y ϕ_{B0} de la viga Fig. E4.3.b se obtienen del caso 7 de la Tabla V.4:

$$\phi_{A0} = \frac{P \cdot 0,6 \cdot 0,4L^2}{6LEI} (2L - 0,6L) = \frac{0,056PL^2}{EI}$$

$$\phi_{B0} = \frac{P \cdot 0,6 \cdot 0,4L^2}{6LEI} (2L - 0,4L) = \frac{0,064PL^2}{EI}$$

Los giros ϕ_{A1} y ϕ_{B1} de la viga de la Fig. E4.3.c se obtienen del caso 9 de la Tabla V.4:

$$\phi_{A1} = \frac{M_A L}{3EI} \qquad \phi_{B1} = \frac{M_A L}{6EI}$$

Usando el mismo caso 9 para la viga de la Fig. E4.3.d:

$$\phi_{A2} = \frac{M_B L}{6EI} \qquad \phi_{B2} = \frac{M_B L}{3EI}$$

Al superponer las vigas b, c y d de la Fig. E4.3 se deben exigir dos condiciones de compatibilidad geométrica: el giro que la tangente a la deformada forma con la recta horizontal debe ser nulo tanto en A como en B, lo cual conduce a las siguientes dos ecuaciones:

$$\phi_{A0} - \phi_{A1} - \phi_{A2} = 0$$

$$\phi_{B0} - \phi_{B1} - \phi_{B2} = 0$$

Reemplazando los valores obtenidos de las relaciones fuerza-deformación se obtiene:

$$\frac{0,056PL^2}{EI} - \frac{M_A L}{3EI} - \frac{M_B L}{6EI} = 0$$

$$\frac{0,064PL^2}{EI} - \frac{M_A L}{6EI} - \frac{M_B L}{3EI} = 0$$

o sea: $2M_A + M_B = 0,336PL$

$$M_A + 2M_B = 0,384PL$$

Como puede observarse, la solución pasa en este caso por resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Su solución es:

$$M_A = 0,096PL$$

$$M_B = 0,144PL$$

resultado que es idéntico al que se presenta como caso 19 de la Tabla V.4. Una vez obtenidos los valores de M_A y M_B , las reacciones V_A y V_B se obtienen aplicando las ecuaciones de equilibrio estático a la viga de la Fig. E4.3.a

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow V_A L + M_B = M_A + P \cdot 0,4L$$

$$V_A = \frac{M_A - M_B}{L} + 0,4P = -0,048P + 0,4P = 0,352P$$

$$\Sigma F_{\text{vert}} = 0 \rightarrow V_A + V_B = P$$

$$V_B = P - 0,352P = 0,648P$$

En este caso, el diagrama de momentos final que se indica en la Fig. E4.3.e, se ha obtenido directamente de la viga de la Fig. E4.3.a a partir de los valores de V_A , V_B , M_A y M_B . El momento bajo la carga P es:

$$M = V_A \cdot 0,6L - M_A = PL(0,352 \cdot 0,6 - 0,096) = 0,115PL$$

4.3.3 Necesidad de la Indeterminación Estática

La mayoría de las estructuras reales son sistemas indeterminados tanto desde el punto de vista de la estática como de la geometría. Esto hace que la etapa de análisis de estos sistemas sea más compleja, ya que la solución de un problema indeterminado

es más laboriosa y complicada que el de un sistema determinado; además, el proceso global de diseño estructural adquiere una naturaleza iterativa al tener que estimar las dimensiones de las secciones antes de efectuar el análisis, y verificar dichas dimensiones cuando se realiza la etapa de dimensionamiento sobre la base de los esfuerzos internos obtenidos del análisis de la estructura inicial.

Frente a estos inconvenientes que presenta la indeterminación estructural de la mayoría de los sistemas de la práctica, cabe preguntarse si esta indeterminación trae algún beneficio, puesto que de no ser así, los ingenieros proyectistas debieran enfatizar el uso de sistemas determinados, isostáticos por ejemplo, y evitar que se construyan sistemas estáticamente indeterminados. La pregunta anterior tiene una respuesta afirmativa; las estructuras estáticamente indeterminadas presentan grandes ventajas desde el punto de vista de su seguridad, de su economía y de su facilidad de construcción; en este último caso, particularmente si se trata de estructuras de hormigón armado, de albañilería o de madera. La discusión siguiente ilustra las ventajas de seguridad y economía que presentan los sistemas estáticamente indeterminados frente a los sistemas isostáticos.

Anteriormente se ha hecho referencia a que el cálculo de deformaciones expuesto en la Sección 4.2 y el método de las fuerzas discutido en las Secciones 4.3.1 y 4.3.2 se basa en el comportamiento lineal y elástico tanto del material como la de la estructura. Todos los valores anteriores que se han obtenido para las reacciones de vínculo y para los diagramas de esfuerzos internos son solamente válidos dentro del rango lineal y elástico del comportamiento estructural. Sin embargo, si se considera el comportamiento de las estructuras hasta su colapso, el rango de validez anterior es sólo una parte del comportamiento completo hasta el colapso; normalmente, este rango de validez de la hipótesis de comportamiento lineal y elástico es un tanto mayor al que corresponde a la acción de las cargas de servicio. Por otra parte, en un país sísmico como Chile no se puede estimar el nivel máximo que tendrán las sollicitaciones sísmicas, y es muy posible que el comportamiento estructural incurriera en el rango inelástico durante movimientos sísmicos de intensidad extrema. Por lo tanto es importante ponderar y evaluar qué es lo que le sucede al sistema estructural una vez que se excede el límite del comportamiento lineal y elástico.

El comportamiento de las estructuras en el rango del comportamiento inelástico o plástico, es el motivo de estudio de un campo de la Mecánica Estructural conocido usualmente como Análisis Plástico. Si se considera un sistema que trabaja preferentemente por flexión, una vez que las tensiones de flexión llegan al valor de fluencia comienza la plastificación progresiva de la sección más solicitada y de sus secciones vecinas, hasta que se forma una *rótula plástica* en una zona del elemento estructural; a partir de dicho instante se congela el valor del momento resistente de dicha sección, con lo cual el grado de indeterminación estática baja en una unidad, y el comportamiento incremental posterior es equivalente a la consideración de una

rótula interna en dicho punto. Si las solicitaciones siguen aumentando se formará un número mayor de rótulas plásticas hasta que se produzca un mecanismo de colapso. El esquemático análisis anterior indica que mientras mayor sea el número de rótulas plásticas que se requieren para formar un mecanismo de colapso, mayor debe ser el aumento de las acciones externas para producir dicho colapso, y mayor es la seguridad que ofrece el sistema estructural frente al colapso. Por ejemplo, en el caso de la viga del Ejemplo 4.3, la carga P se puede aumentar hasta que se formen rótulas plásticas en las secciones A, B y C de la viga, o sea, el mecanismo de colapso es el indicado en la Fig. 4.6.

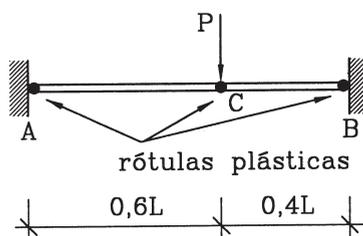


Figura 4.6 Mecanismo de colapso para la viga del Ejemplo 4.3

El número de rótulas plásticas que se requieren para formar un mecanismo de colapso está en muchos casos directamente determinado por el grado de indeterminación estática del sistema. En general, mientras mayor es la indeterminación estática, mayor es el número de rótulas plásticas que se necesitan para formar un mecanismo de colapso. En otras palabras, el grado de indeterminación estática es equivalente a las líneas de defensa que tiene una estructura frente al colapso. Este es un concepto importante, de gran aplicación práctica para conocer el grado de seguridad real que ofrecen las estructuras, y que no puede comprenderse si el análisis estructural se circunscribe a los métodos clásicos.

El uso de sistemas estáticamente indeterminados también redundará en un menor costo de las estructuras, frente a la alternativa de uso de sistemas isostáticos. El ejemplo indicado en la Fig. 4.7 sirve para ilustrar la reducción que se produce en los esfuerzos internos y en las deformaciones cuando se usa un sistema estáticamente indeterminado. Efectivamente, si se tiene una viga con carga centrada P y luz \$2L\$, y se compara la solución de la viga continua de dos tramos de la Fig. 4.7.a con la de la viga simplemente apoyada de la Fig. 4.7.b, los cuocientes entre los momentos flectores máximos y entre las deformaciones verticales máximas son, respectivamente:

$$\frac{M_{\max^1}}{M_{\max^2}} = 0,81 \qquad \frac{\delta_{\max^1}}{\delta_{\max^2}} = 0,72$$

Como puede observarse, el sistema estáticamente indeterminado de este sencillo ejemplo tiene un momento flector máximo un 19% menor y una deformación máxima un 28% menor que el caso isostático. Conclusiones en el mismo sentido se obtienen en situaciones de mayor complejidad, lo cual permite afirmar que el hecho de usar sistemas indeterminados conduce a estructuras de menores dimensiones y en algunos casos a fundaciones más pequeñas que en los casos isostáticos, con el consiguiente ahorro de recursos que ello implica.

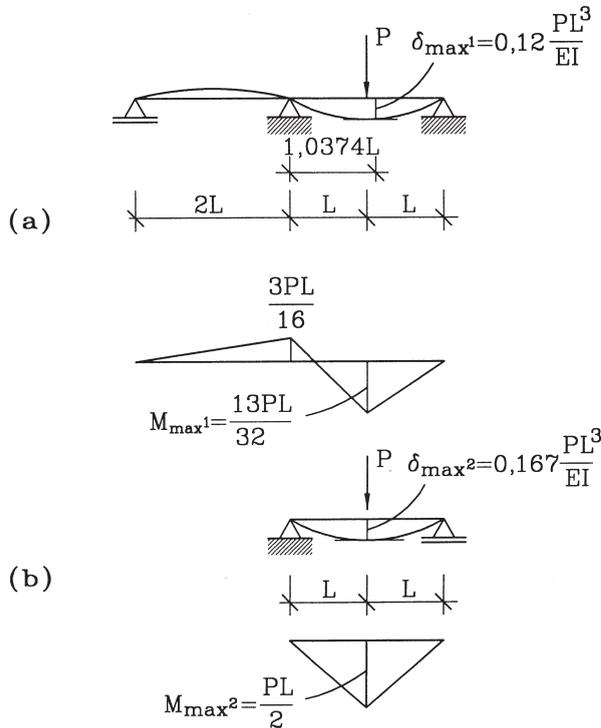


Figura 4.7 Comparación entre sistemas estáticamente determinado e indeterminado

4.4 Conceptos de Resistencia Máxima y Rigidez Elástica

4.4.1 Resistencia Máxima

Las estructuras se diseñan de modo que bajo condiciones de cargas de servicio, o sea, aquellas que se espera estén actuando durante el funcionamiento normal del edificio, las tensiones en la sección más solicitada se mantengan dentro del rango de comportamiento lineal y elástico. Bajo estas condiciones, los resultados de los métodos presentados en las Secciones 4.1, 4.2 y 4.3 son muy cercanos a lo que ocurre realmente en el edificio que se está analizando. Sin embargo, tal como se discutió en la Sección 4.3.3, existen condiciones de carga eventuales en que el valor máximo de

las cargas no se puede predecir con un grado de certeza razonable; este es el caso de la sollicitación sísmica en Chile, en el cual no se puede anticipar el nivel de intensidad máximo que tendrán los sismos que deberán soportar los edificios actuales y los que se diseñen en el futuro. Frente a esta situación cabe preguntarse con cuál carga o sollicitación sísmica deben diseñarse las estructuras, problema que es analizado en la Sección 6.6. Sin perjuicio que se haya postergado la discusión de la sollicitación con que debe realizarse el análisis y el diseño del edificio, hay dos aspectos que se pueden concluir: la importancia de usar estructuras estáticamente indeterminadas o hiperestáticas, que ya se ha tratado en la Sección 4.3.3, y la necesidad de estimar cuál es la resistencia máxima que efectivamente tienen las estructuras; esta información será esencial para determinar la sollicitación o demanda de un evento sísmico sobre una estructura cuando el comportamiento del material supera el punto de fluencia, que marca el límite del comportamiento lineal y elástico, tal como se verá en la Sección 6.5.

4.4.2 Capacidad Resistente de Elementos o Estructuras

Para determinar la capacidad resistente de elementos se debe estudiar en primer lugar la capacidad resistente de secciones. Esto puede hacerse para los cuatro tipos de esfuerzos internos que existen en las secciones; sin embargo, la presentación siguiente se limita a los casos del esfuerzo axial y del momento flector, ya que bajo estos esfuerzos es que se puede producir en la práctica el comportamiento inelástico o comportamiento en el que se supera el punto de fluencia.

Para el análisis que sigue se supondrá que la relación tensión-deformación del material obedece a una idealización que recibe el nombre de *comportamiento elasto-plástico*. Este comportamiento, que se indica en la Fig. 4.8, está compuesto por una primera parte lineal y elástica, cuya pendiente corresponde al valor del módulo de elasticidad E , y una segunda parte en que el material *fluye*, o sea, se deforma sin que se incremente la tensión de fluencia. El punto que divide ambos tipos de comportamiento, *elástico y plástico*, corresponde al punto de fluencia del material. Aunque no existe un material que tenga realmente este comportamiento, su uso conduce a resultados que son muy cercanos a los que se obtienen en la realidad. Por otra parte, la simplicidad de este modelo permite analizar en forma sencilla lo que ocurre cuando el comportamiento entra en la fase inelástica o plástica.

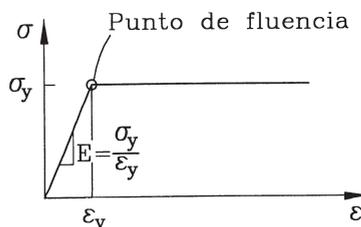


Figura 4.8 Comportamiento elasto-plástico ideal

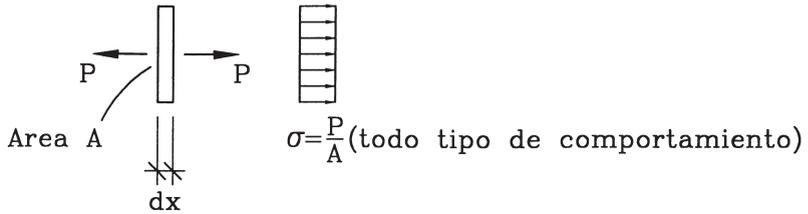
a) Resistencia Máxima de Una Sección

Para estudiar la capacidad resistente de una sección se debe considerar lo que ocurre en una rebanada de espesor dx.

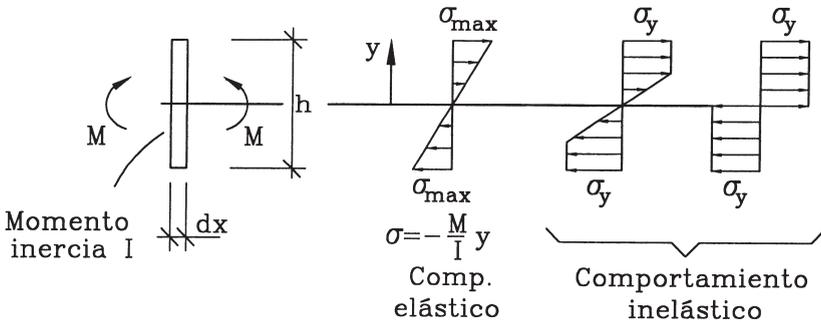
En el caso de una rebanada que se somete a un esfuerzo axial P, tal como se indica en la Fig. 4.9.a, la distribución de tensiones es constante para todos los puntos de la sección e igual a:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

en que A es el área de la sección.



a) Distribución de tensiones por esfuerzo axial



b) Distribución de tensiones por momento flector

Figura 4.9 Distribución de tensiones considerando comportamiento elasto-plástico

El diseño estructural se hace escogiendo el área A de modo que, para cargas de servicio, la tensión no supere un cierto valor llamado *tensión admisible* (σ_{adm}), que es una fracción de la tensión de fluencia σ_y :

$$\sigma \leq \sigma_{adm} = \alpha \sigma_y \quad \text{con } \alpha \leq 1$$

Valores usuales de α están en el rango 0,40 a 0,67.

Una vez que la estructura ha sido diseñada y construida, si la carga P aumenta por sobre el valor de servicio, aumentarán los valores de la tensión σ . La carga axial máxima P_u que puede transmitir la sección corresponde al caso en que todos los puntos de la sección están con tensión de fluencia; por lo tanto, el valor de P_u se determina de:

$$P_u = A\sigma_y \quad (4-19)$$

En el caso de una rebanada que se somete a un momento flector M , (Fig. 4.9.b), la distribución de tensiones es linealmente variable en la altura “ h ” de la sección, y está dada por (Ec.3-43):

$$\sigma = \frac{M}{I}y$$

en que I es el momento de inercia de la sección respecto del eje neutro. En la etapa de diseño, la sección se escoge de modo que el valor máximo σ_{\max} de esta distribución de tensiones no supere la tensión admisible σ_{adm} . En el caso de una sección simétrica respecto del eje neutro, el valor de σ_{\max} se produce tanto en la fibra extrema en tracción como en la fibra extrema en compresión, o sea:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I}y_{\max} = \frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2} \leq \sigma_{\text{adm}} = \alpha\sigma_y$$

Por lo tanto, el término importante para el diseño de la sección es el módulo de flexión, definido por (Ec.3-44):

$$W = \frac{I}{y_{\max}}$$

de modo que la tensión máxima en la sección es (Ec.3-45):

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W}$$

Por ejemplo, en el caso de una sección rectangular de ancho “ b ” y altura “ h ”:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 \quad y_{\max} = \frac{h}{2} \quad W = \frac{I}{y_{\max}} = \frac{bh^2}{6}$$

Una vez que la estructura se ha construido y está en servicio, el momento M podría aumentar con el consiguiente aumento en el valor de las tensiones. El límite del

comportamiento lineal y elástico está determinado por el hecho que la tensión máxima σ_{\max} se haga igual a la tensión de fluencia σ_y . El momento flector que produce esta condición recibe el nombre de *momento de fluencia* y está determinado por:

$$M_y = W\sigma_y \quad (4-20)$$

Si el momento se hace mayor que el valor de M_y , la tensión alcanza el valor de la tensión de fluencia σ_y en un mayor número de fibras de la sección además de las fibras extremas. El proceso de plastificación va creciendo desde las fibras extremas hacia el centro de la sección, como se muestra en la Fig. 4.9.b. Cuando todas las fibras de la sección han alcanzado el valor de σ_y , se alcanza el máximo momento flector que puede transmitir la sección, y se desarrolla en la sección lo que en la Sección 4.3.3 se ha denominado *rótula plástica*. Este valor máximo del momento flector que puede transmitir una rótula plástica recibe el nombre de *momento plástico*, y está determinado, por analogía con la Ec. 4-20, por:

$$M_p = Z\sigma_y \quad (4-21)$$

El término Z recibe el nombre de *módulo plástico deflexión*. Es una propiedad de la geometría de la sección tal como lo es el módulo de flexión W . Para una sección rectangular de dimensiones $b \times h$, el módulo plástico de flexión es:

$$Z = \frac{bh^2}{4} = 1,5W$$

Por lo tanto, para una sección rectangular, el momento plástico M_p que puede transmitir es un 50% mayor que el momento de fluencia M_y .

b) Resistencia Máxima de Elementos o Estructuras

De acuerdo al análisis desarrollado en la Sección 4.3.3, la carga máxima que puede soportar una estructura estáticamente determinada está limitada por la formación de la primera rótula plástica, en el caso de elementos que trabajan predominantemente en flexión, o cuando el esfuerzo axial en alguna barra alcanza el valor determinado por la Ec. 4-19, en el caso de las estructuras de reticulado.

En cambio, en el caso de las estructuras estáticamente indeterminadas o hiperestáticas, se pueden formar varias rótulas plásticas hasta llegar a la formación del mecanismo de colapso que determina la resistencia máxima de la estructura. El número de rótulas plásticas que se pueden formar para llegar al mecanismo de colapso está relacionado con el grado de hiperestaticidad o de indeterminación estática; mientras mayor es este grado, mayor es el número de rótulas plásticas que se pueden formar y mayor es la resistencia máxima de la estructura. Un razonamiento análogo se puede hacer cuando son barras de una estructura de reticulado los elementos que se plastifican, en vez de rótulas plásticas las que se forman en secciones. A continuación se muestran algunos ejemplos que sirven para ilustrar este concepto.

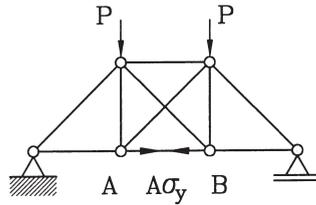


Figura 4.10 Resistencia máxima de una estructura de reticulado

La estructura de reticulado que se muestra en la Fig. 4.10 es una estructura una vez estáticamente indeterminada, ya que tiene una barra de más que la que se requeriría para tener un sistema isostático. Si la tensión por esfuerzo axial mayor se produce en la barra AB, el valor límite de las cargas P para mantener comportamiento lineal elástico está dado por el hecho que la tensión de tracción en la barra AB alcance el valor σ_y , o en otras palabras, que el esfuerzo axial de tracción en la barra AB alcance el valor $A\sigma_y$. Una vez que se produce esta situación, la barra AB se plastifica y ejerce a partir de dicho instante fuerzas $A\sigma_y$ sobre el resto de la estructura. Esto implica que, a partir de este momento, la estructura pierde su grado de indeterminación porque ya se conoce el esfuerzo axial en una de sus barras. Las cargas P pueden seguir aumentando hasta que la tensión en otra barra alcance el valor de fluencia. En este instante, el sistema se transforma en un mecanismo y las cargas P no pueden seguir aumentando por sobre el valor que produjo la plastificación en las dos primeras barras. Por lo tanto, las cargas P han llegado al máximo valor que puede soportar la estructura, o sea, se ha desarrollado la resistencia máxima de ella.

La viga de la Fig. 4.11.a es dos veces estáticamente indeterminada, si se considera que las reacciones horizontales en A y en B son nulas, tal como se discutió en el Ejemplo 4.2. El diagrama de momentos elástico, determinado en el Ejemplo 4.2, se muestra en la Fig. 4.11 .b. En dicho ejemplo, no se requería conocer una característica de la sección que ahora sí se necesitará: el momento plástico M_p , obtenido de acuerdo a la Ec. 4-21 y que se supone constante para toda la longitud de la viga, tanto para tracción en la fibra inferior como en la superior.

Del diagrama de momentos elástico se puede deducir que la primera rótula plástica se formará en las secciones empotradas A y B, ya que allí es donde es mayor el momento flector. La carga q_c para la que se producen estas rótulas plásticas se determina de:

$$\frac{q_c L^2}{12} = M_p$$

$$q_c = \frac{12M_p}{L^2}$$

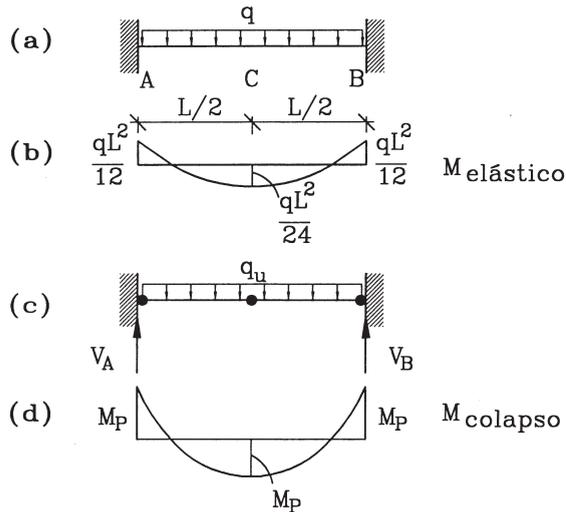


Figura 4.11 Resistencia máxima de una viga

Una vez que se han formado las rótulas plásticas en A y B , el momento en esas secciones se mantiene constante en el valor M_p , ya que las secciones no pueden transmitir un valor mayor del momento flector. Sin embargo, la carga q puede seguir aumentando por sobre el valor q_c , ya que el momento en la sección C puede seguir aumentando hasta alcanzar el valor M_p . Cuando se ha formado la tercera rótula plástica en C , la estructura se transforma en un mecanismo (Fig. 4.11.c), llamado *mecanismo de colapso*, y no puede aceptar más carga por sobre el valor q_u que determina la formación de la rótula plástica en C , ya que con carga q_u sus deformaciones crecen sin limitación. El diagrama de momentos para la situación de colapso se muestra en la Fig. 4.11.d. A partir de este diagrama se tiene:

$$\sum M_C^{\text{izq}} = M_p \rightarrow V_A \frac{L}{2} - M_p - \frac{q_u L^2}{8} = M_p$$

$$V_A = 4 \frac{M_p}{L} + \frac{q_u L}{4} = V_B$$

$$\sum F_{\text{vert}} = 0 \rightarrow q_u L = V_A + V_B = 8 \frac{M_p}{L} + \frac{q_u L}{2}$$

$$q_u = 16 \frac{M_p}{L^2}$$

Este es el máximo valor de q que puede soportar la viga, o sea, q_u es la carga para la cual la viga desarrolla su máxima resistencia.

En la Fig. 4.12.a se muestra un pórtico sometido a una carga horizontal P , y al igual que en los casos anteriores, se determinará el valor de P para el cual el pórtico desarrolla su resistencia máxima. Las características de las secciones de vigas y columnas son tales que la sección de la viga tiene momento plástico $2M_p$, mientras que las secciones de ambas columnas tienen momento plástico M_p .

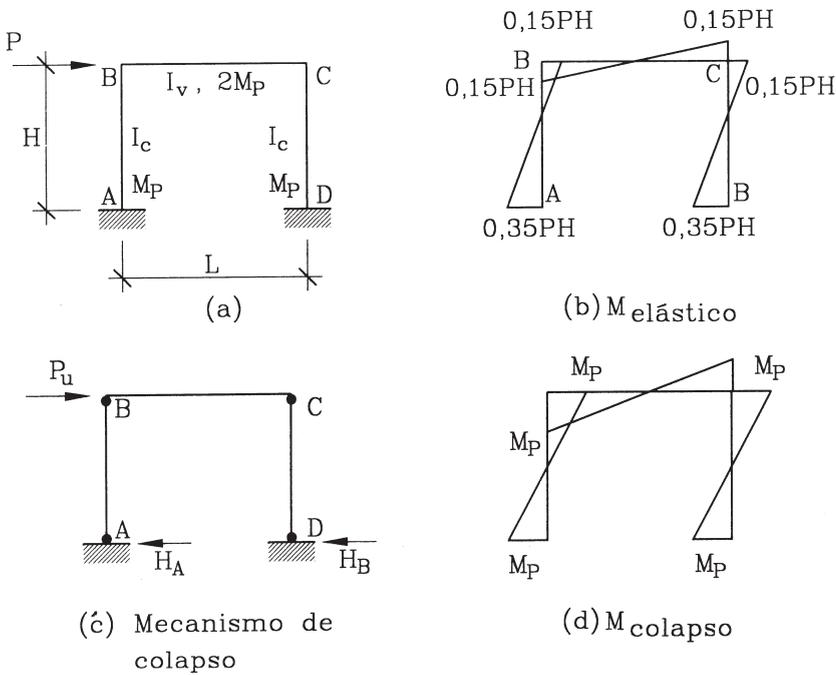


Figura 4.12 Resistencia máxima de un pórtico

Este pórtico es una estructura tres veces hiperestática. Para encontrar sus reacciones y esfuerzos internos se pueden usar las mismas técnicas y procedimientos expuestos en las Secciones 4.3.1 y 4.3.2. En este caso, la solución suponiendo comportamiento elástico depende de los momentos de inercia de la viga y las columnas y de las dimensiones H y L . Supóngase que el diagrama de momentos elástico es el indicado en la Fig. 4.12.b. Este diagrama indica que, cuando empieza a aumentar la carga P , las primeras rótulas plásticas se formarán en las secciones inferiores de ambas columnas, donde el momento flector es máximo para un valor de la carga P_c igual a:

$$0,35P_c H = M_p$$

$$P_c = \frac{M_p}{0,35H}$$

Cuando la carga P aumenta por sobre el valor P_e , el momento en las secciones inferiores de las columnas no puede aumentar, pero sí puede crecer el momento flector en el resto de las columnas y en la viga, hasta que se forman las siguientes dos rótulas plásticas en las secciones superiores B y C de ambas columnas. Debido a que la sección de la viga tiene capacidad $2M_p$, ella permanece con comportamiento elástico, ya que el momento en el nudo B debe ser igual para columna y viga, y lo propio ocurre en el nudo C. Habiéndose formado las rótulas plásticas en los extremos superiores de las columnas, tal como se muestra en la Fig. 4.12.c, el pórtico no puede resistir una mayor carga horizontal, por lo que este es el mecanismo de colapso y P_u la fuerza horizontal que desarrolla la resistencia máxima del pórtico. El diagrama de momentos en la situación de colapso, Fig. 4.12.d, permite determinar los valores de H_A y H_B a través del equilibrio que deben satisfacer las fuerzas que actúan sobre cada una de las columnas:

$$H_A = H_B = \frac{2M_p}{H}$$

$$P_u = H_A + H_B = \frac{4M_p}{H}$$

En general, el comportamiento de un sistema estáticamente indeterminado implica la formación sucesiva de las rótulas plásticas, o la plastificación de barras en sistemas de reticulados, hasta llegar al mecanismo de colapso el cual implica el desarrollo de la resistencia máxima de la estructura. La Fig. 4.13 ilustra cualitativamente este proceso, el cual se traduce en curvas carga-deformación como la indicada; P_e denota el valor de la carga P que pone término al comportamiento elástico y P_u la carga máxima que se puede desarrollar en la estructura.

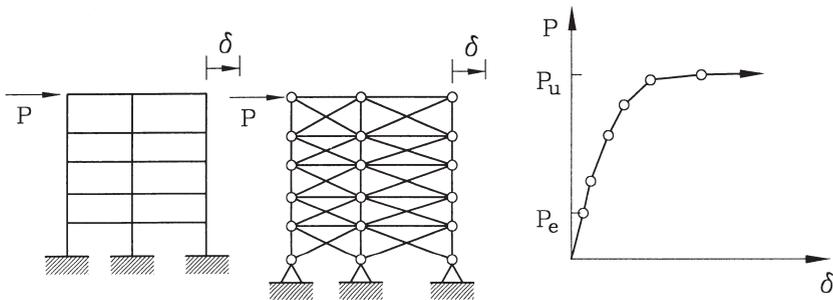


Figura 4.13 Resistencia máxima de una estructura

Una consecuencia obvia del análisis anterior es que la razón P_u/P_e entre la resistencia máxima y la resistencia elástica, será tanto mayor mientras más rótulas plásticas puedan formarse, o mayor número de barras del sistema de reticulado se plastifiquen,

hasta que se desarrolle el mecanismo de colapso. Otra forma de expresar lo mismo es concluir que la razón P_u/P_c será tanto mayor mientras mayor sea el grado de indeterminación estática de la estructura. Este concepto ya se discutió en la Sección 4.3.3, cuando se concluyó que al aumentar la razón P_u/P_c , aumenta la seguridad que ofrece la estructura frente a un aumento no previsto de la carga R .

4.4.3 Rigidez de Elementos y Estructuras

El concepto de rigidez se puede definir a nivel de un elemento de dimensiones muy pequeñas o infinitesimales, a nivel de rebanada o sección, o a nivel de elemento o estructura completa. En este texto, sólo se desarrollará a nivel de elemento o estructura.

La rigidez de una estructura se define como la razón entre la carga aplicada y la deformación resultante medida en el punto en que actúa la carga y en la dirección y sentido de dicha carga. En la práctica, y particularmente en la forma que se usa el concepto de rigidez en los Capítulos 6 y 7, el concepto de rigidez se limita a deformaciones que implican que el comportamiento de la estructura se mantiene dentro del rango elástico. Por lo tanto, se supone que la carga nunca excede el valor P_c que se indica en la Fig. 4.13.

El concepto de rigidez está asociado pero es diferente de la resistencia de una estructura. La diferencia radica en que la rigidez incorpora la deformación de la estructura. En la Fig. 4.14 se ilustran las deformaciones de una columna en voladizo para dos condiciones de carga, en que δ_1 y δ_2 se han obtenido de la Tabla V.4. En el caso de la Fig. 4.14.a, la rigidez es:

$$K_1 = \frac{P_1}{\delta_1} = \frac{3EI}{L^3}$$

en que EI es una propiedad de la sección de la columna. Al cambiar la condición de carga, pero manteniendo las propiedades de la columna, la rigidez del caso indicado en la Fig. 4.14.b es:

$$K_2 = \frac{qL}{\delta_2} = \frac{8EI}{L^3}$$

O sea que, si la carga P_1 se distribuye en la altura de modo que $P_1 = qL$, la rigidez aumenta en 2,67 veces.

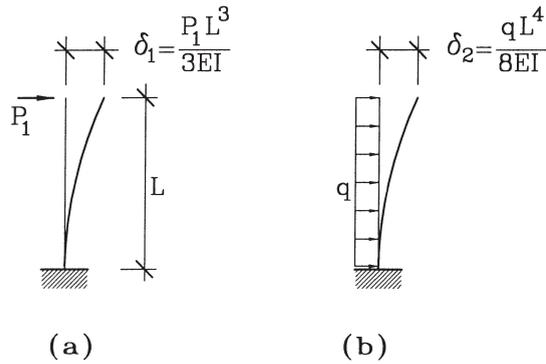


Figura 4.14 Rigideces de una columna en voladizo

En la Tabla V.5 se entregan las rigideces de varias estructuras simples, todas ellas asociadas a la acción de una única fuerza P . Los casos indicados para las vigas se pueden deducir de aquellos indicados en la Tabla V.4. Los últimos dos casos se refieren a pórticos, en que el cálculo de las deformaciones δ es un tanto más complicado, pero que obedece a los mismos principios expuestos en la Sección 4.2.2.

En el Capítulo 7, el concepto de rigidez de una estructura se usará asociado a la acción de varias fuerzas, particularmente para el caso de las fuerzas que se desarrollan durante un evento sísmico, asociado a la acción de varias fuerzas horizontales aplicadas al nivel de cada uno de los pisos, tal como se muestra en la Fig. 4.15. Si se definen por δ_1 , δ_2 , δ_3 , las deformaciones horizontales asociadas a las fuerzas P_1 , P_2 , P_3 , respectivamente, el concepto de rigidez no se puede definir a través de un solo número sino que debe hacerlo a través de un cuadro de números.

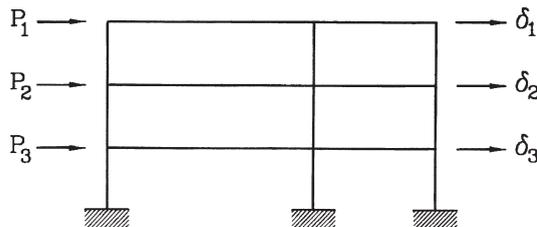


Figura 4.15 Concepto de rigidez para una estructura sometida a varias fuerzas

La forma más clara de expresar este cuadro de número es usar el concepto matemático de matriz, en este caso, una *matriz de rigidez*, la cual relaciona las fuerzas que se requieren para producir un conjunto de deformaciones de desplazamientos δ_1 , δ_2 , δ_3 de valores determinados:

$$\delta_1=1 \quad \delta_2=1 \quad \delta_3=1$$

$$\text{Matriz de rigidez: } [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow P_1 \\ \rightarrow P_2 \\ \rightarrow P_3 \end{matrix}$$

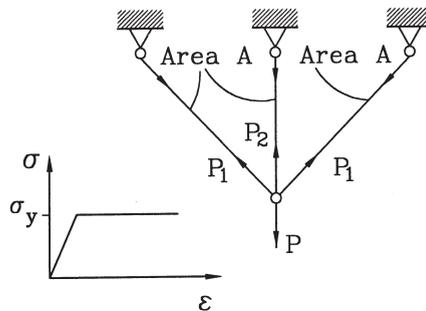
Para el caso de la Fig. 4.15, cada columna de la matriz de rigidez incluye los valores de las fuerzas P_1 , P_2 y P_3 . En la primera columna se anotan estos valores para producir el conjunto de deformaciones $\delta_1=1, \delta_2= \delta_3=0$. En la segunda columna se anotan los valores de las fuerzas para obtener $\delta_2=1, \delta_1= \delta_3=0$. En la tercera columna ocurre lo propio para $\delta_3=1, \delta_1=\delta_2=0$. La ventaja de esta formulación es poder obtener las fuerzas P_1, P_2, P_3 para producir un conjunto de deformaciones o desplazamientos dados, que es el caso específico que se tratará en las Secciones 7.1 y 7.3. Esta matriz, asociada solamente a fuerzas y deformaciones horizontales de una estructura, recibe el nombre de *matriz de rigidez lateral*.

Dentro de un contexto más general, la matriz de rigidez se puede asociar a fuerzas que no son solamente horizontales, o que son momentos actuando en ciertos puntos de una estructura. Si la fuerza es vertical, su deformación asociada será una deformación vertical del punto en que actúa la fuerza, medida en el mismo sentido en que actúa la fuerza. Si es un momento, su deformación asociada será el cambio de ángulo que sufre la tangente en el mismo punto y dirección en que actúa el momento.

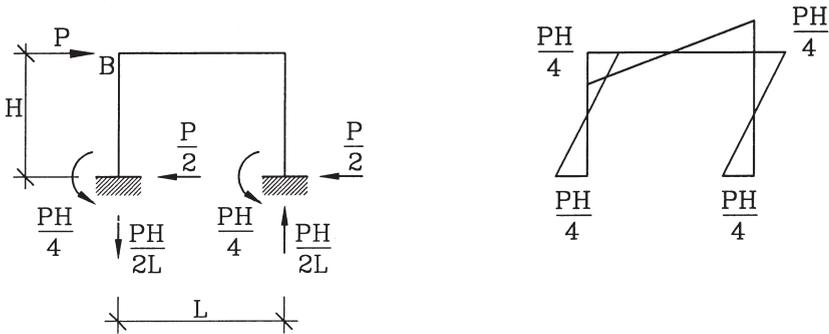
4.5 Ejercicios Propuestos

- 4.01 Indique en términos generales, la diferencia entre una estructura estáticamente determinada y una estáticamente indeterminada o hiperestática.
- 4.02 En las deformaciones debidas a esfuerzo axial, a momento flector, a esfuerzo de corte y a momento torsor interviene siempre el módulo de elasticidad. En cambio, el módulo de Poisson sólo interviene en algunas de ellas. ¿En cuáles interviene?
- 4.03 Indique las razones por las cuales es importante el cálculo de deformaciones en el análisis y diseño estructural.
- 4.04 Porqué razones se prefiere usar estructuras estáticamente indeterminadas en vez de determinadas, en circunstancias que las primeras son más difíciles de analizar.

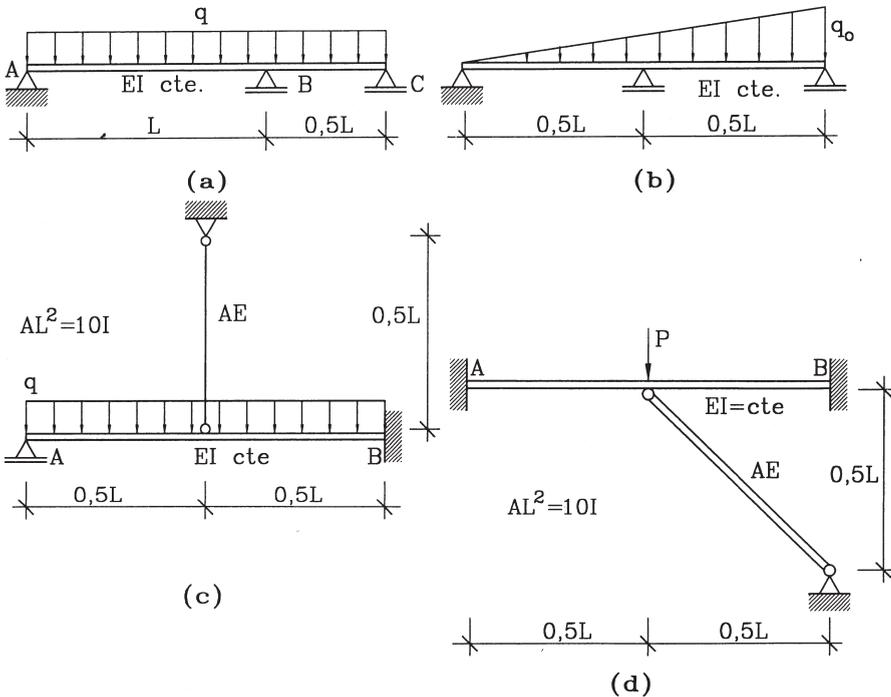
- 4.05 Porqué es importante que se usen en la práctica estructuras con un alto grado de indeterminación estática.
- 4.06 Cuál es la importancia que tiene para la seguridad de las estructuras frente al colapso, el optar por construir estructuras estáticamente indeterminadas en vez de estáticamente determinadas.
- 4.07 Las barras de la estructura de la figura tienen el comportamiento elasto-plástico ideal que se indica. Cuál es la condición de las barras para la cual se obtiene el máximo valor de P que puede resistir la estructura.



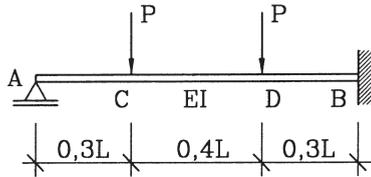
- 4.08 Indique a través de gráficos cómo es la distribución en la altura de una sección de las tensiones debidas a la flexión, suponiendo un material de comportamiento elasto-plástico, para los casos: a) las tensiones no han superado el valor de fluencia; b) la sección ha alcanzado su capacidad máxima en flexión.
- 4.09 Explique conceptualmente por qué la razón P_{\max}/P_c aumenta generalmente en la medida que aumenta el grado de indeterminación estática. (P_{\max} =carga máxima que es capaz de resistir la estructura antes de colapsar; P_c =carga que hace que la primera fibra de la estructura alcance el valor de fluencia).
- 4.10 En un pórtico de un piso sometido a una carga horizontal P se conoce el diagrama de momentos obtenido de un análisis lineal-elástico. Si se sabe que el momento de inercia I de la viga es mucho más grande que el de las columnas, defina conceptualmente para este caso: a) la carga P que produce fluencia en la primera fibra del pórtico; b) la carga P máxima que puede resistir esta estructura antes de colapsar.



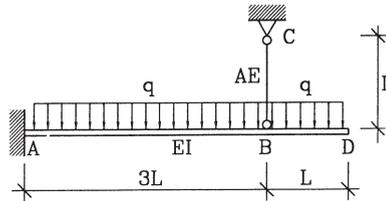
- 4.11 Si la estructura del Ejercicio 4.07 se diseñara por el método de las tensiones admisibles, cuál sería el máximo valor de P para el que se puede usar esta estructura si la tensión admisible por tracción es $\sigma_{adm} = 0,6\sigma_y$, y los valores de P_1 y P_2 obtenidos de una análisis lineal y elástico son $P_1 = 0,30P$, $P_2 = 0,60P$. Todas las barras tienen sección recta A .
- 4.12 Determinar las reacciones de vínculo y los diagramas de esfuerzos internos en los siguientes casos estáticamente indeterminados.



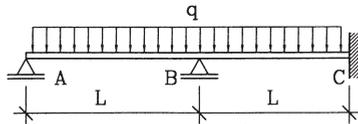
- 4.13 Determinar los diagramas de momento flector y esfuerzo de corte para la viga de la figura. (Respuesta: $M_B = -0,315PL$, $V_A = -0,685P$, $V_B = 1,315P$)



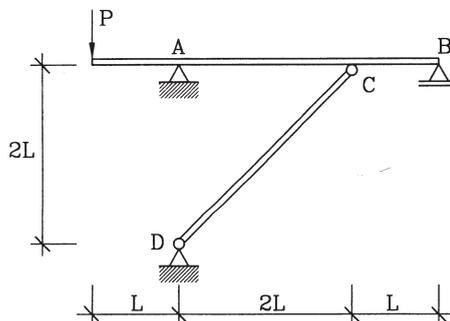
- 4.14 Determinar el momento flector en el apoyo A si se sabe que la viga AD tiene módulo de elasticidad E, momento de inercia I, y que el tirante CB tiene igual módulo E y sección recta A. (Respuesta: $M_A = 8qL^2 + (513qL^5/8EI) / (qL^3/EI + L/AE)$)



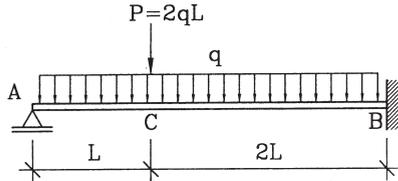
- 4.15 Determinar las reacciones verticales en los apoyos A y B si la viga tiene módulo de elasticidad E y momento de inercia I. (Respuesta: $V_A = 11/28qL$, $V_B = 8/7qL$)



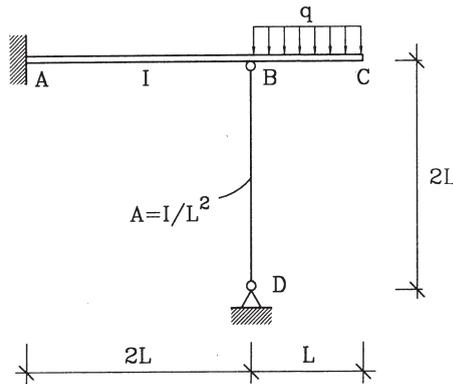
- 4.16 Determinar la carga axial en el elemento CD, si la viga tiene momento de inercia I y el elemento CD tiene área $A = 2I/L^2$. El material es el mismo para toda la estructura. Despreciar las deformaciones por esfuerzo axial en la viga AB, pero considerarlas en el elemento CD. (Respuesta: $N_{CD} = 0,24P$ (tracción))



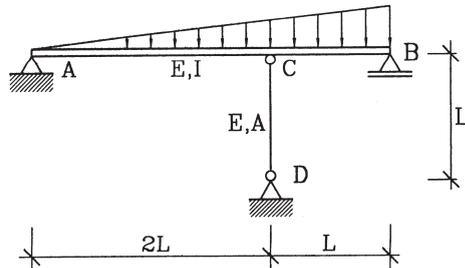
- 4.17 Determinar el diagrama de esfuerzo de corte para la viga de sección y material constante de la figura. (Respuesta: $V_A = -2,162qL$, $V_B = 2,838qL$)



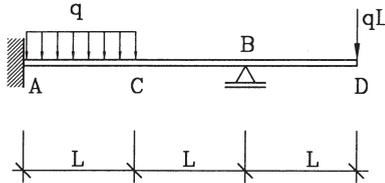
- 4.18 Determinar el diagrama de esfuerzos de corte para la viga A-B-C, si la viga AC tiene momento de inercia I y el puntal BD tiene área $A=I/L^2$. El material es el mismo para toda la estructura. (Respuesta: $V_A = -0,75qL$, $V_B = qL$)



- 4.19 En la viga AB de la figura que tiene EI constante, W representa el total de la carga distribuida que actúa sobre la viga. Determinar la proporción de W que toma el puntal CD si es de igual material que la viga y su sección recta tiene área $A=I/L^2$. (Respuesta: $N=0,218W$)



- 4.20 Determinar los diagramas de momento flector y de esfuerzo de corte en la viga de característica EI constante de la figura. (Respuesta: $M_A=0,22qL^2$, $M_B=-0,5qL^2$, $M_C=-0,14qL^2$, $V_A=0,14qL$)



- 4.21 Determinar el esfuerzo axial en el tirante BC, si se sabe que el área de su sección recta es $A=I/a^2$. Considere sólo las deformaciones por flexión en el elemento ADE. (Respuesta: $T=0,379P$)

