UNIDAD 14

LA ELIPSE Y LA HIPÉRBOLA

PROBLEMAS PROPUESTOS

Objetivo general.

Al terminar esta Unidad aplicarás las definiciones y los elementos que caracterizan a la elipse y a la hipérbola en las soluciones de ejercicios y problemas.

Objetivos específicos:

1. Recordarás y aplicarás la definición de la elipse como un lugar geométrico y su ecuación en la forma canónica.
2. Recordarás y aplicarás la definición de la hipérbola como un lugar geométrico, su ecuación en la forma canónica.
3. Recordarás y aplicarás la forma general de la ecuación de una elipse o de una hipérbola y las características de los coeficientes de una ecuación de segundo grado que representa a una elipse o a una hipérbola.

Problemas propuestos:

En los problemas 1 al 8, encuentra la ecuación de la elipse en la forma canónica a partir de los datos que se dan.

1.) V(5, 0), V'(-5, 0), F(3, 0), F'(-3, 0)

2.) V(0, 4), V'(0, -4); $e = \frac{1}{2}$

3.) F(4, 0), F'(-4, 0); $LR = \frac{18}{5}$

4.) F(3, 1), F'(9, 1), longitud del eje mayor igual a 8

5.) V(2, 10), V'(2, 2); $e = \frac{3}{4}$

6.) C(-1, -1), V(5, -1); $e = \frac{2}{3}$

7.) F(8, 0), F'(-8, 0) y pasa por el punto $\left(8, \frac{18}{5}\right)$

8.) C(4, -1), F(1, -1) y pasa por el punto (8, 0)

9.) La órbita de la Tierra es una elipse en uno de cuyos focos está el Sol. Sabiendo que el semieje mayor de la elipse es de 148.5 millones de kilómetros y que la excentricidad es igual a 0.017, encuentra las distancias máxima y mínima de la Tierra al Sol.

10.) Comprueba que al simplificar la expresión:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = -2a,$$

se obtiene la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

11.) Encuentra la longitud de cada unos de sus lados rectos y la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, eje transverso sobre el eje y, un foco en (0, 5) y excentricidad igual a 3.

12.) Encuentra la ecuación de la hipérbola horizontal con centro en (0, 0), $e = \sqrt{6}/2$ y que pasa por el punto (2, 1).

13.) Determina la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, ejes sobre los ejes coordenados, cada lado recto igual a 18 y la distancia entre sus focos igual a 12. (Dos soluciones).

14.) Encuentra la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, un vértice en (6, 0) y una de sus asíntotas la recta $4x - 3y = 0$

15.) Determina el lugar geométrico de los puntos (x, y) cuya distancia al punto fijo (0, 4) sea igual a $4/3$ de la correspondiente distancia a la recta $4y - 9 = 0$

16.) Encuentra la ecuación de la hipérbola con centro en (0, 0), ejes sobre los ejes coordenados y que pasa por los puntos (3, 1) y (9, 5)

17.) El centro de una hipérbola es el punto (4, 5), uno de sus focos es (8, 5) y su excentricidad es 2. Encuentra su ecuación y las longitudes de sus ejes transverso y conjugado.

18.) Encuentra la ecuación de la hipérbola cuyos focos son (−6, 2) y (0, 2) y un extremo del eje conjugado es (−3, 3)

19.) Encuentra la forma general de las elipses que se dan:

a.) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

b.) $\frac{(x-6)^2}{6}+\frac{(y-1)^2}{7}=1$

c.) $\frac{(x-2)^2}{7}+\frac{(y-6)^2}{16}=1$

d.) $\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{20}=1$

20.) Dada las ecuaciones:

a.) $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$

b.) $5x^2+4y^2-20x-8y+4=0$

c.) $3x^2+4y^2+6x-24y+27=0$

encuentra el centro, los vértices y focos y la longitud de los semiejes de las elipses que representan.

21.) Determina si las siguientes ecuaciones representan o no a una elipse y explica la respuesta.

a.) $4x^2+4y^2-60x-20y+225=0$

b.) $36x^2+11y^2-144x-44y-208=0$

c.) $y^2-2y-8x+9=0$

d.) $x^2-2y^2+x+8y-8=0$

22.) Analiza lo que ocurre en la ecuación $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ cuando A y C son ambos positivos y $D=E=0$

23.) Encuentra la ecuación general de la elipse que pasa por los puntos (1, 3), (–1, 4), $(-3,3)$ y $\left(0,3-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

24.) Comprueba que la hipérbola $x^2-y^2-2x-y+1=0$ es una hipérbola rectangular y determina todos sus elementos.

25.) Obtén las relaciones entre los coeficientes de la ecuación general de segundo grado sin término en *xy*, y la ecuación canónica de una hipérbola vertical con centro en (h,k).

26.) Encuentra e identifica el lugar geométrico de un punto que se mueve de manera que su distancia del punto (3, 2) es siempre igual al triple de su distancia a la recta $y+1=0$

27.) Determina si la ecuación cuadrática $4x^2-9y^2+32x+36y+64=0$ representa una hipérbola y, si la respuesta es afirmativa, encuentra todos sus elementos.

28.) Muestra que la siguiente ecuación cuadrática no corresponde a una hipérbola y determina el lugar geométrico que representa: $x^2-4y^2-2x+1=0$

Soluciones:

1.) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

2.) $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$

3.) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

4.) $\frac{(x-6)^2}{6}+\frac{(y-1)^2}{7}=1$

5.) $\frac{(x-2)^2}{7}+\frac{(y-6)^2}{16}=1$

6.) $\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{20}=1$

7.) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$

8.) $\dfrac{(x-4)^2}{18}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$

9.) 152 millones de kilómetros y 146 millones de kilómetros.

10.) $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$\left[\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2=\left[-2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2\to -4a^2-4xc=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$\left(a^2+xc\right)^2=\left[a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2\to a^4+x^2c^2=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2\to$

$x^2\left(c^2-a^2\right)-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$. Como $\left(c^2-a^2\right)>0$, $c^2-a^2=b^2$

$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \;\to\; \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

11.) $72y^2-9x^2=200$; $LR=\dfrac{80}{3}$

12.) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{1}=1$

13.) Hipérbola horizontal: $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{27}=1$; hipérbola vertical: $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{27}=1$

14.) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$

15.) $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{7}=1$, es una hipérbola vertical con centro en el origen.

16.) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$

17.) $\dfrac{(x-4)^2}{4}-\dfrac{(y-5)^2}{12}=1$; $2a=4$; $2b=4\sqrt{3}$

18.) $\dfrac{(x+3)^2}{8}-\dfrac{(y-2)^2}{1}=1$

19.) **a.**) $9x^2+25y^2-225=0$; **b.**) $7x^2+16y^2-84x-32y+156=0$;

c.) $16x^2+7y^2-64x-84y+204=0$; **d.**) $5x^2+9y^2+10x+18y-166=0$

20.) **a.**) C(6, -4), V(0, -4), V'(12, -4), focos: (6 ± 2$\sqrt{5}$, -4); a = 6, b = 4

b.) C(2, 1), vértices: (2, 1 ± $\sqrt{5}$), F(2, 2), F'(2, 0); a = $\sqrt{5}$; b = 2

c.) C(-1, 3), V(1, 3), V'(-3, 3), F(0, 3), F'(-2, 3); a = 2; b = $\sqrt{3}$

21.) **a.**) No es una elipse (Los coeficientes A y C son iguales. Es una circunferencia)

b.) Sí es una elipse, con eje mayor paralelo al eje y

c.) No es una elipse (Le falta el término en x2, es una parábola)

d.) No es una elipse (Los coeficientes A y C son de signos diferentes)

22.) La ecuación puede representar a una circunferencia (si A = C) o una elipse (si $A \neq C$), con centro en el origen. Pero también puede representar un punto o no representar a un lugar geométrico real, dependiendo del valor de F.

23.) $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$

24.) a = b = ½; Vértices: (1, 0) y (1, –1); Focos: (1, –½ + ½$\sqrt{2}$) y (1, –½ –½$\sqrt{2}$); e = $\sqrt{2}$; LR = 1; asíntotas: y + ½ = ± (x – 1)

25.) $A = -a^2$; $C = b^2$; $D = 2a^2h$; $E = -2b^2k$; $F = b^2k^2 - a^2h^2 - a^2b^2$

26.) $x^2 - 8y^2 - 6x - 22y + 4 = 0$, hipérbola

27.) Es una hipérbola; C(−4, 2); V(−4, 4); V'(−4, 0); F(−4, 2 + $\sqrt{13}$); F'(−4, 2 − $\sqrt{13}$); 2a = 4; 2b = 6; LR = 9: $e = \sqrt{13}/2$; asíntotas: $2x + 3y + 2 = 0$; $2x - 3y + 14 = 0$

28.) Dos rectas que se cortan: $x + 2y - 1 = 0$ y $x - 2y - 1 = 0$
