UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO
ESCUELA DE PREGRADO UNIFICADA

ASIGNATURA : MATEMATICAS	MATERIAL DE APOYO
NIVEL : 1er. AÑO	PROF. L. ALTIMIRAS R.
CARRERA : DISEÑO	
AÑO : 2012	

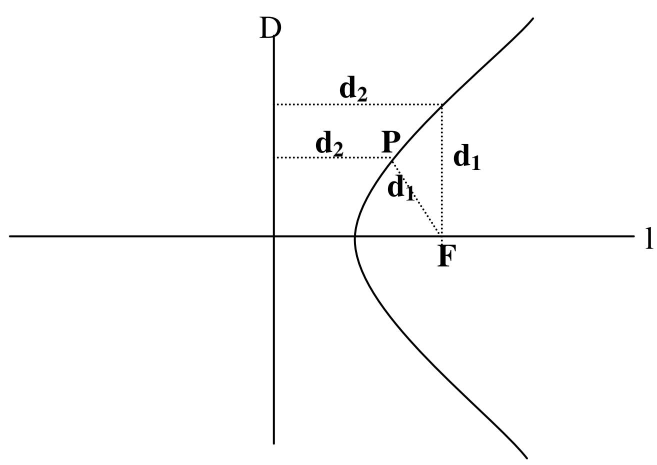
LA PARÁBOLA

Definición :

Una Parábola se define como el Lugar Geométrico de todos aquellos puntos del plano que son equidistantes de un punto fijo, llamado Foco, y de una recta fija, llamada Directriz. El punto fijo no pertenece a la recta fija.

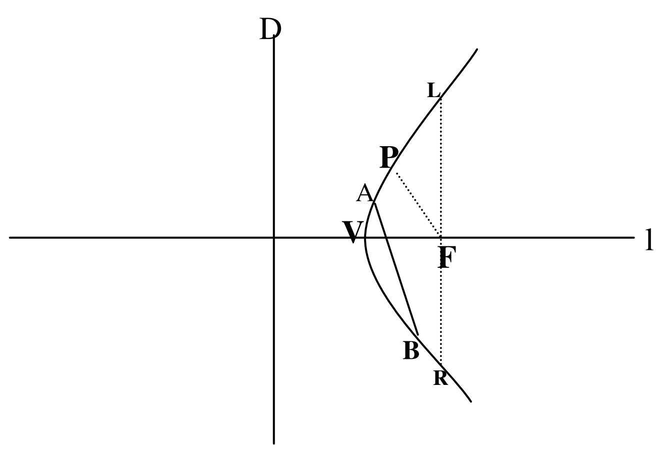
Así, si P es un punto del plano,

$P \in$ Parábola $\Leftrightarrow$ $|\overline{PF}| = |PD|$, donde F = foco y D = recta directriz



$d_1 = d_2$

ELEMENTOS DE LA PARABOLA



1.- Eje Focal o : Recta perpendicular a la Directriz que pasa por el foco (**l**)
Esta recta corresponde al Eje de Simetría de la Parábola

2.- Vértice : Punto de intersección entre el eje focal y el Lugar Geométrico (Parábola) (**V**)

3.- Cuerda : Cualquier segmento cuyos extremos pertenezcan al lugar geométrico. ($\overline{AB}$)

4.- Lado Recto : Cuerda perpendicular al eje focal en el foco. ($\overline{LR}$ **).** El punto medio de dicha cuerda es el Foco **F**

5.- Radio Vector : Segmento que une un punto cualquiera del lugar geométrico con el foco ($\overline{LF}$; $\overline{PF}$)

ECUACIONES CARTESIANAS DE LA PARABOLA

Teorema 1.

La ecuación de la Parábola con vértice V(h , k), eje focal paralelo al eje X u horizontal, distancia focal | p |, es decir , | VF | = | p |, es :

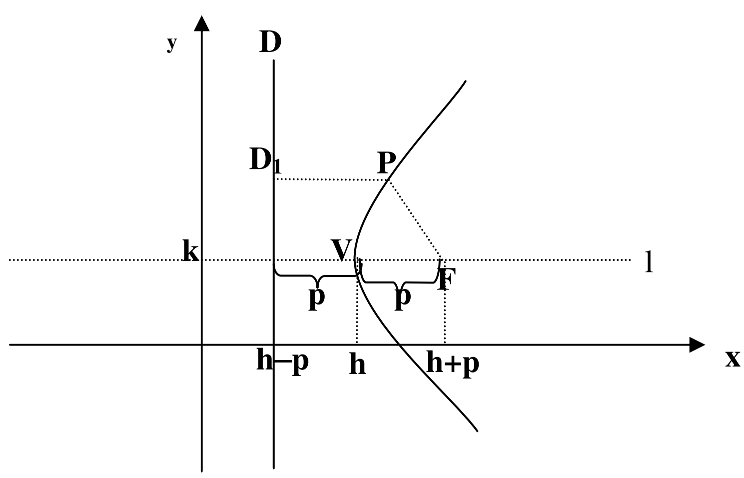
$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

donde:

a) Si **p > 0**, entonces la parábola se abre hacia la derecha

b) Si **p < 0**, entonces la parábola se abre hacia la izquierda

Demostración.



Supongamos que la parábola se abre hacia la derecha como lo indica la figura, entonces **p > 0**; por lo que las coordenadas del Vértice y Foco serán, respectivamente, (h , k) y (h + p , k) pues por hipótesis | $\overline{VF}$ |=|p|

Sea P(x , y) $\in$ Parábola $\Rightarrow$ | $\overline{PF}$ | = | $\overline{PD_1}$ | , con D_1(h – p , y)

Aplicando fórmula de distancia, se tiene que

$$\sqrt{(x-(h+p))^2 + (y-k)^2} = \sqrt{(x-(h-p))^2 + (y-y)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{((x-h)-p)^2 + (y-k)^2} = \sqrt{((x-h)+p)^2}$$

Elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado, se tiene que

$$(x - h)^2 - 2p(x - h) + p^2 + (y - k)^2 = (x - h)^2 + 2p(x - h) + p^2$$

lo que al reducir términos semejante, se obtiene la ecuación

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \qquad (*)$$

Recíprocamente, si $P(x , y)$ es la solución de la ecuación **(∗),** invirtiendo los pasos anteriores se llega a demostrar que el punto $P(x , y)$ pertenece a la Parábola.

En forma análoga se puede demostrar el :

Teorema 2.
La ecuación de la Parábola con vértice $V(h , k)$, eje focal paralelo al eje Y o vertical, distancia focal $| p |$, es decir , $| VF | = | p |$, es :

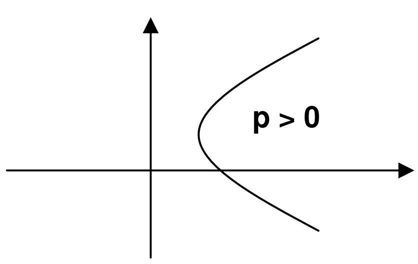
$$\mathbf{(x - h)^2 = 4p(y - k)}$$

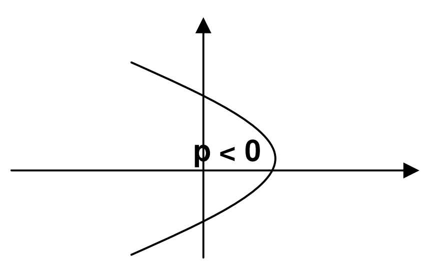
donde:
b) Si $\mathbf{p > 0}$, entonces la parábola se abre hacia arriba

b) Si $\mathbf{p < 0}$, entonces la parábola se abre hacia abajo

Así se obtienen las siguientes situaciones gráficas:

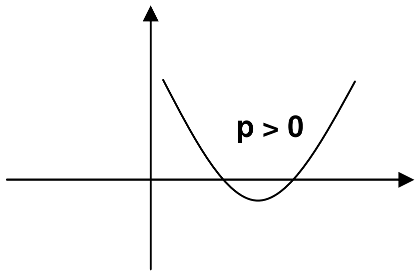
1.-

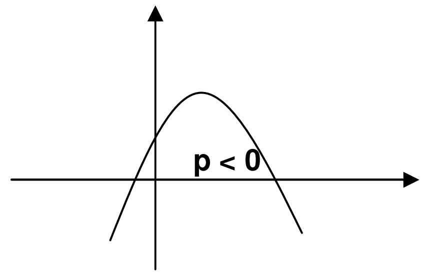




Parábolas con eje Horizontal cuya ecuación es : $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

2.-





Parábolas con eje Vertical cuya ecuación es : $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

OBSERVACIONES IMPORTANTES

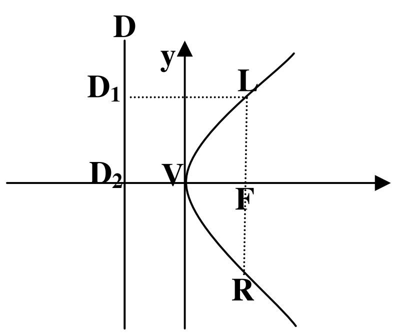
1.- Las ecuaciones descritas en los teoremas 1 y 2 reciben el nombre de Ecuaciones Ordinarias de la Parábola.

2.- Si **h = k = 0**, las ecuaciones se reducen a : $\mathbf{y^2 = 4px}$ y a **,** $\mathbf{x^2 = 4py}$ respectivamente, llamadas Ecuaciones Canónicas de la Parábola

3.- De la misma gráfica se desprende que toda Parábola es simétrica con respecto a su propio eje de simetría que es el Eje Focal (aquella recta perpendicular a la Directriz , que contiene al Vértice y Foco, respectivamente.

4.- Cualquiera sea la ubicación del eje focal (paralelo al eje X u horizontal ó paralelo al eje Y o vertical) se tiene que la longitud del Lado Recto es igual a 4 | p |, es decir: $\left| LR \right| = 4\,|\,p\,|$

En efecto:



$$|\,\overline{LR}\,| = 2\,|\,\overline{LF}\,|$$

$$= 2\,|\,\overline{LD_1}\,|$$

$$= 2\,|\,\overline{D_2F}\,|$$

$$= 2 \cdot 2\,|\,\overline{VF}\,|$$

$$= 4\,|\,p\,|$$

5.- Para graficar una Parábola, entonces, se deben conocer a lo menos :

a) Coordenadas del Vértice
b) Coordenadas del foco
c) El signo de **p** , para saber hacia dónde se abre
d) Longitud del Lado Recto, para obtener en forma aproximada la abertura de la parábola
e) La ecuación de la Directriz

ECUACION GENERAL DE LA PARABOLA

Si a partir de las ecuaciones ordinarias :

$$\mathbf{(y - k)^2 = 4p(x - h)} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{(x - h)^2 = 4p(y - k)}$$

se desarrollan los cuadrados y se reordenan los términos, se obtienen expresiones del tipo :

$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0$ (**1**)

$x^2 - 2hx - 4py + h^2 + 4py = 0$ (**2**)

las que, efectuando sustituciones adecuadas, representan ecuaciones del tipo :

$By^2 + Dx + Ey + F = 0$ (**1'**) Eje focal paralelo al eje X u horizontal

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ (**2'**) Eje focal paralelo al eje Y o vertical

Ambas expresiones reciben el nombre de Ecuaciones generales de la Parábola

Inversamente, si **A = 0** **ó** **B = 0 ,** pero no ambos simultáneamente, la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa , o bien una Parábola , o bien una Recta. La forma de verificación es trabajar algebraicamente la ecuación con el fin de poder transformarla en alguna de las ecuaciones que son descritas por los teoremas.