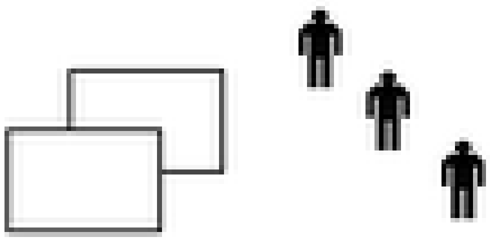
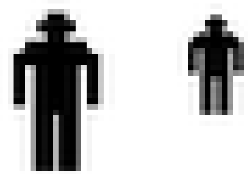
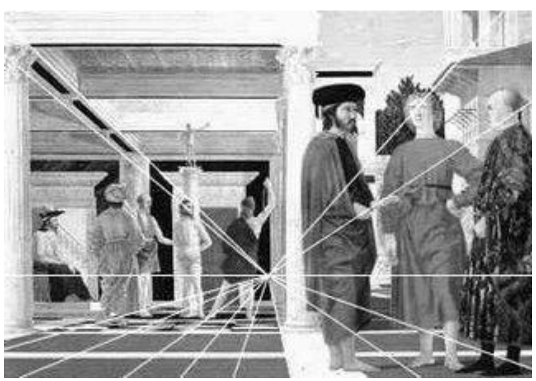
GEOMETRIA PROYECTIVA Plana

- Mediante superposición de figuras.
- Mediante escalonamiento.



- Mediante diferenciación de tamaño.



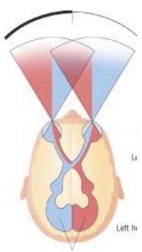


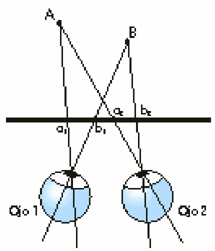
- La flagelación de Cristo, c 1469. Piero de la Francesca.

- El origen de la Geometría Proyectiva está en el Renacimiento, S. XV – VXI, revolución cultural .
- Surge la necesidad por los artistas de la época de representar el espacio de una manera más real. Distancia y profundidad.
- Los pintores de la época por medio de la representación bidimensional crearon la ilusión del espacio tridimensional.
- La relación entre la ilusión del espacio tridimensional y la interpretación de la visión monocular

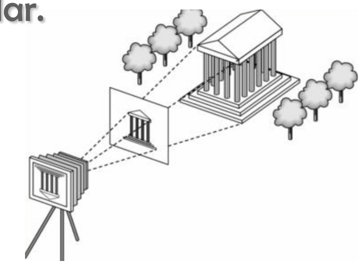
GEOMETRIA PROYECTIVA Plana

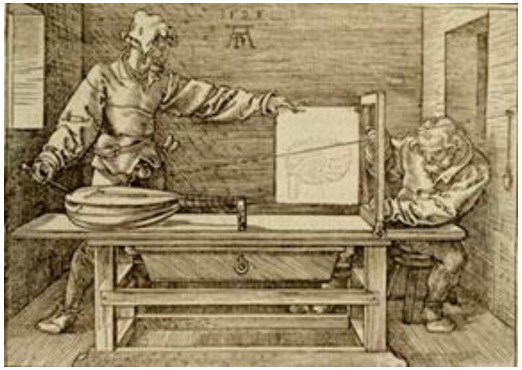
- Visión estereométrica.

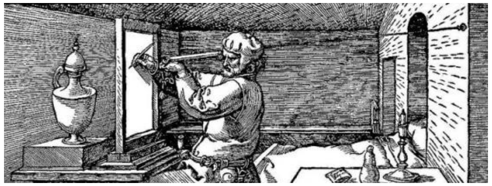


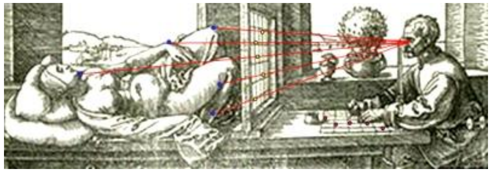


- Visión mono ocular.







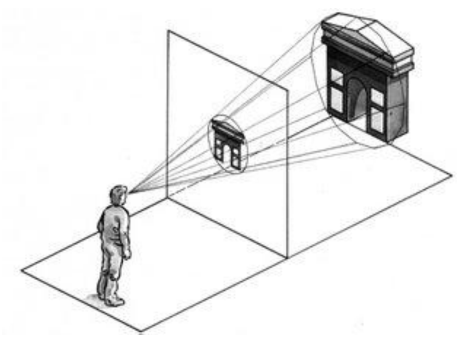


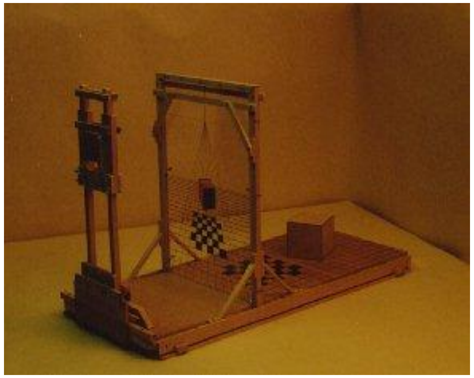
- La visión del ojo humano capta la realidad de una forma semejante a como lo hace una cámara fotográfica. Las dimensiones se reducen con la distancia.

- El primer artista del Renacimiento en tener una teoría sobre las leyes que rigen la interpretación del espacio tridimensional sobre un soporte bidimensional es Filippo Brunelleschi (1377- 1446) y quien adapto y puso por escrito estos principios es Leone Battista Alberti (1404- 1472), en Della Pintura 1436.

- Alberto Durero 1471 – 1528, desarrolló varios aparatos mecánicos para facilitar su aplicación.

GEOMETRIA PROYECTIVA Plana



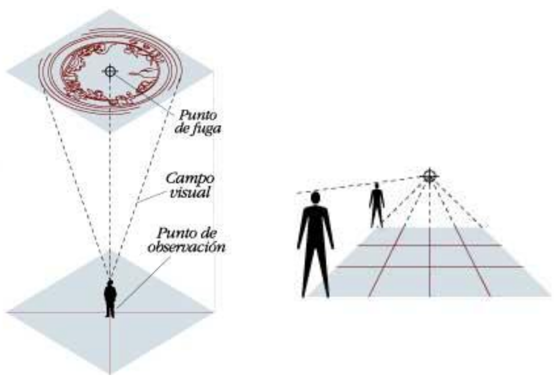


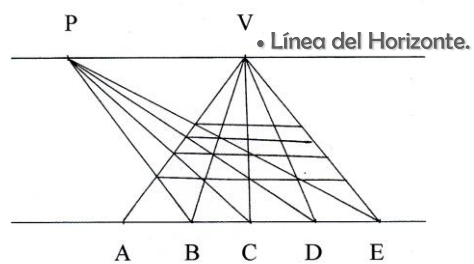
- El planteamiento de Alberti era el estudio de aquellas propiedades geométricas que tienen en común el objeto original y cualquiera de sus secciones.

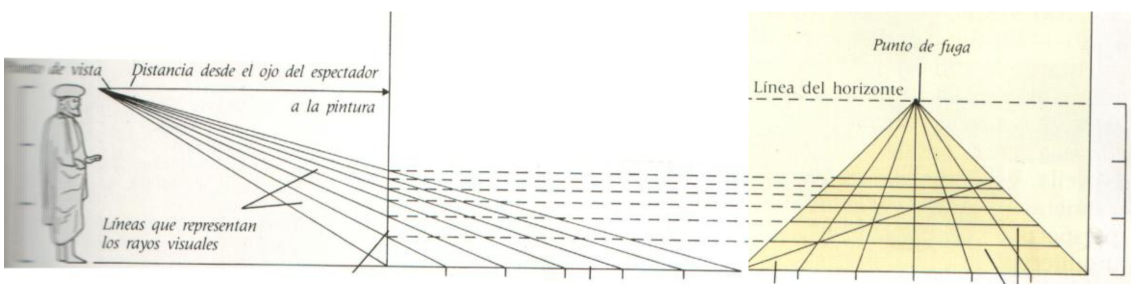
- El método consistía en construir una pirámide de rayos desde el ojo del pintor, y los puntos de la escena a interpretar, y una pantalla transparente entre el ojo del artista y el objeto.

- La pirámide de rayos la llamó proyección y la pantalla entre el ojo y la escena sección.

GEOMETRIA PROYECTIVA Plana



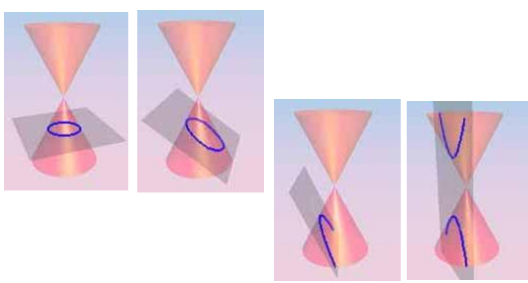




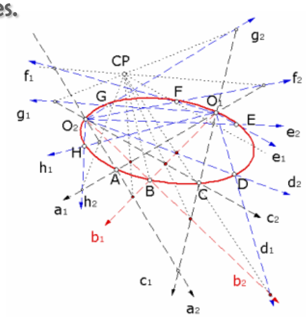
- La pregunta inicial de Alberti fue:
- ¿ Cuál es la relación matemática entre dos de estas secciones cualquiera?
- O, ¿ Cuales son la propiedades que tiene en común?
- El método desarrollado se llamó "*Construzione Legitima*",
- La distancia entre PV es igual a la distancia entre el ojo y el plano del cuadro o pantalla.
- Teoría que fundamenta la perspectiva geométrica.

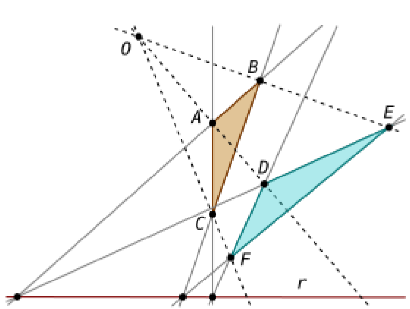
GEOMETRIA PROYECTIVA Plana

• Secciones cónicas.

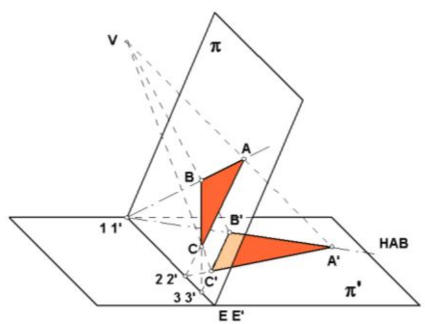


• Construcción de cónicas a través de proyecciones.





• Teorema de Desargues de los dos triángulos en el plano.



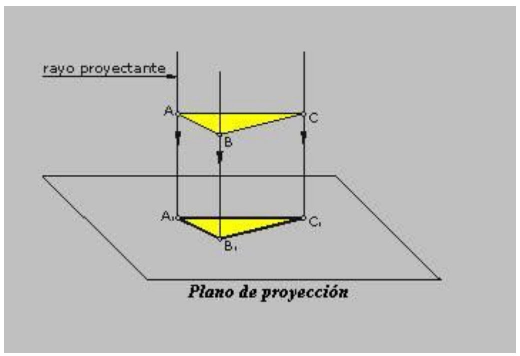
• Teorema de Desargues de los dos triángulos en el espacio.

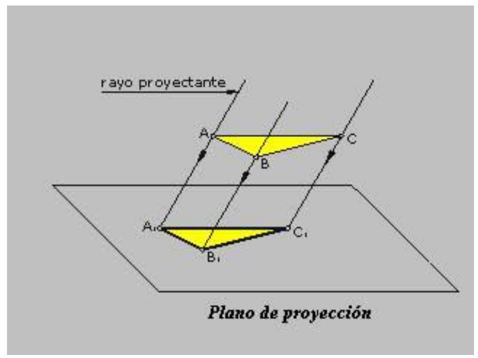
• La teoría de la perspectiva se extendió hasta principios del siglo XVII por un pequeño grupo de matemáticos franceses donde destaca Gerard Desargues que en busca de una teoría más profunda sobre la perspectiva, publica en 1639 un tratado sobre las secciones cónicas.

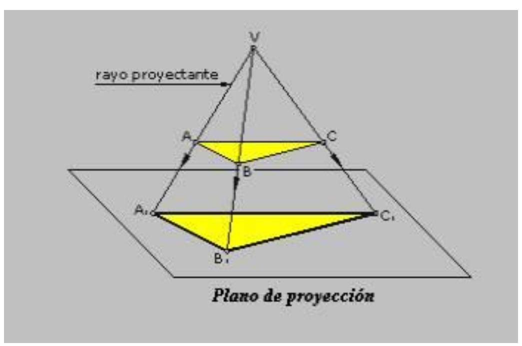
• Trabajo que fue despreciado y que se extravió sin embargo, dos siglos más tarde al escribir la historia de la geometría el matemático Michael Chasles hace mención al tratado, del que se encuentra un manuscrito (1845).

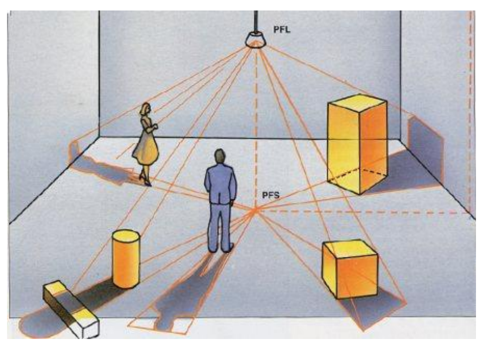
• Manuscrito reconocido como un clásico de la geometría proyectiva.

PROYECTIVIDAD: Homología









- Para definir una homología en el plano o del espacio hay que tener presente dos operaciones fundamentales:

- La proyección y la sección .

- Proyectar equivale a trazar rectas o rayos que cumplen con una condición o ley. Que todas las rectas o rayos pasen por un punto o centro de proyección.

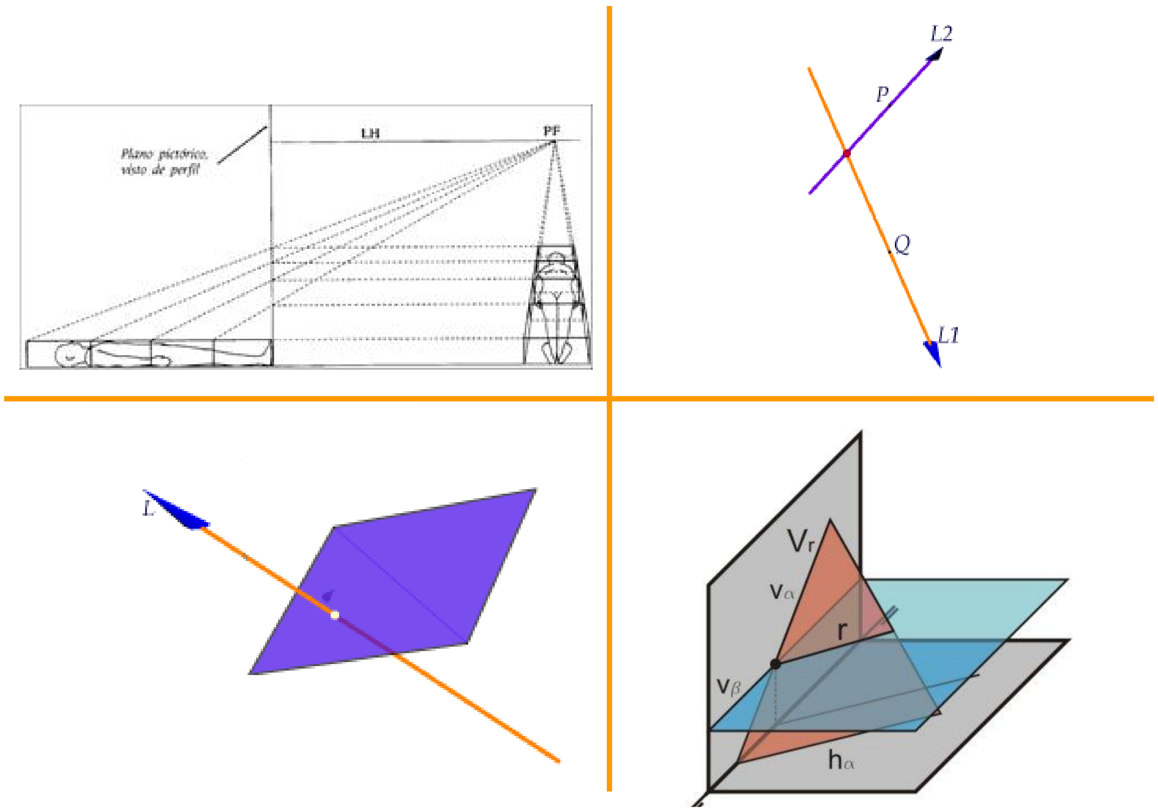
- Tipos de Proyección.

- Paralela o Cilíndrica Recta.

- Paralela o Cilíndrica Oblicua.

- Central o Cónica.

PROYECTIVIDAD: Homología



- Sección: Seccionar equivale a cortar, es decir obtener la intersección común entre dos formas incidentes.

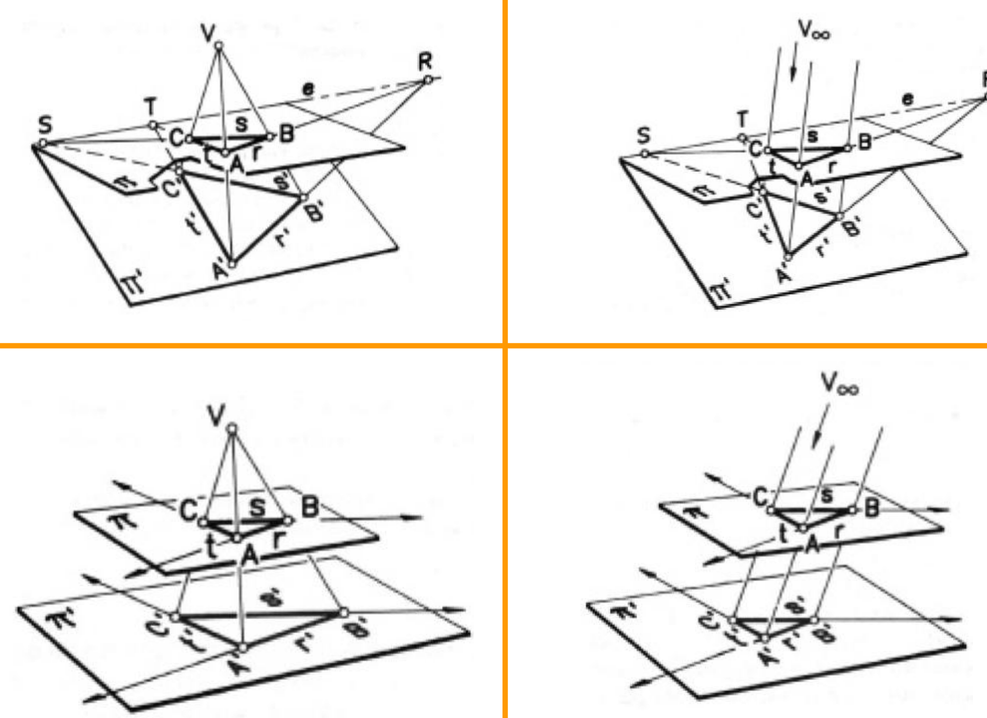
- Existen tres tipos de secciones básicas a obtener .

- Sección de dos rectas, se obtiene un punto.

- Sección de una recta y un plano, se obtiene un punto.

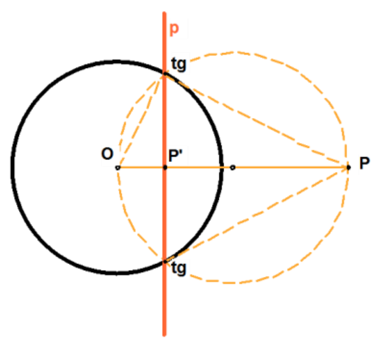
- Sección de dos planos, se obtiene una recta.

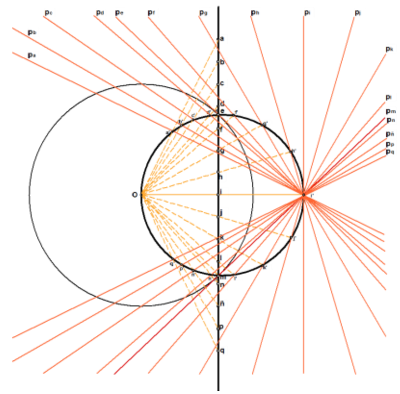
FORMAS PERSPECTIVAS:

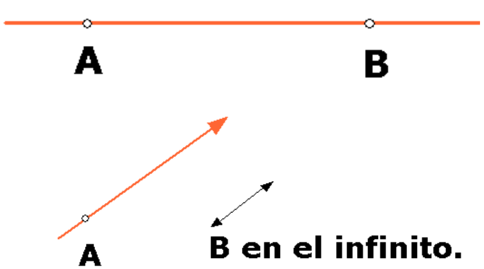


- Dos secciones de una forma.
- Homología.
- Afinidad.
- Homotecia.
- Traslación.

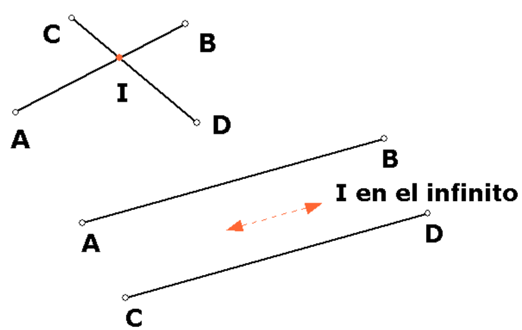
PRINCIPIO DE DUALIDAD.







• La unión de dos puntos define una recta.



• La intersección de dos rectas define un punto.

• El principio de Dualidad afirma que a partir de cualquier teorema o construcción de geometría proyectiva podemos obtener otro conocido como Teorema Dual.

• Solo cabe intercambiar las palabras punto y recta, modificando también las relaciones entre los puntos y las rectas.

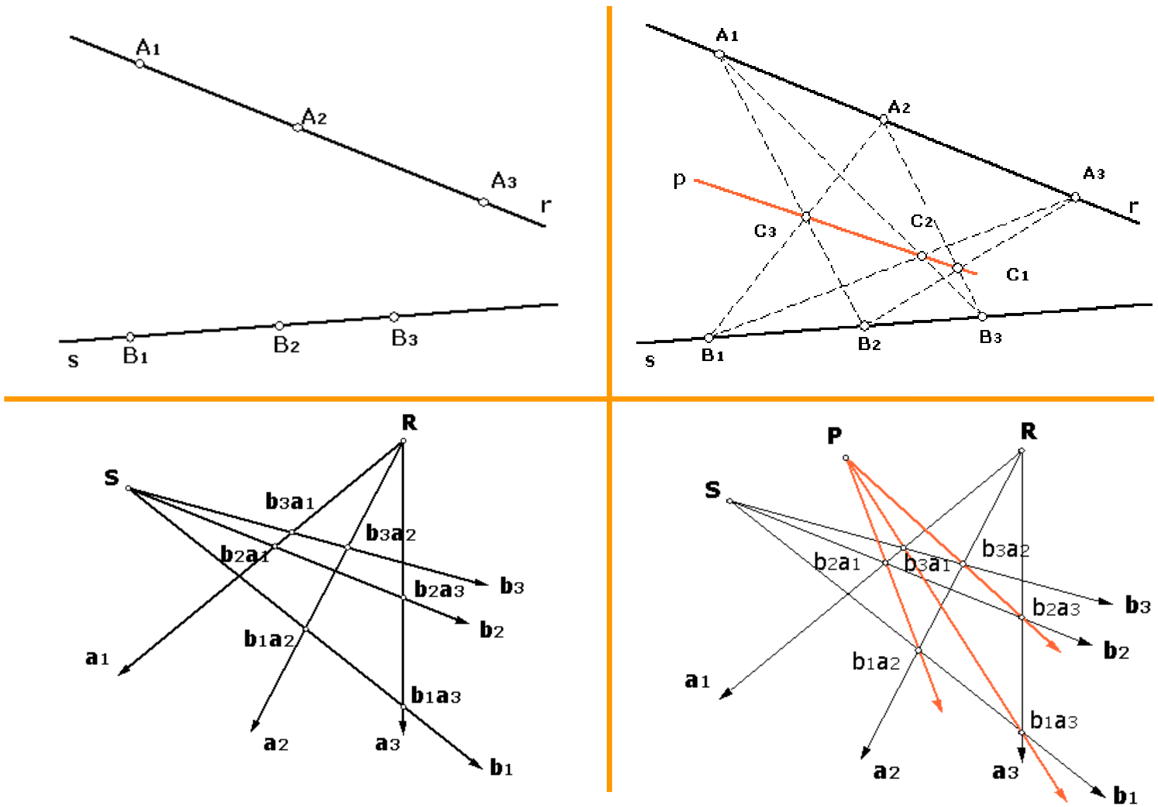
• Un punto se convierte en recta.

• Puntos alineados se convierten en rectas que pasa por un punto.

•Etc.

• Principio válido en la Geometría Proyectiva.

TEOREMA DE PAPPUS.



- En un plano proyectivo, sean **A1 A2 A3** puntos distintos sobre una línea **r** y **B1 B2 B3** puntos distintos sobre otra línea **s**; entonces los puntos: .

  C1= (A2 U B3) I (A3 U B2)

  C2= (A1 U B3) I (A3 U B1)

  C3= (A1 U B2) I (A2 U B1)
- Son colineales

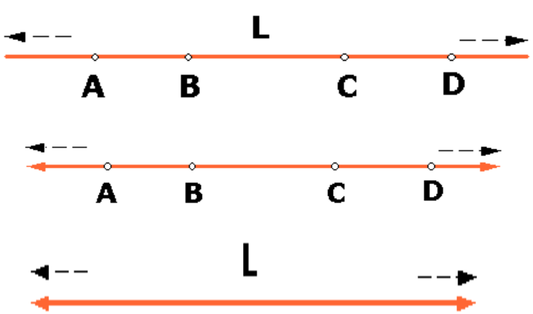
- DUAL: En un plano proyectivo sean **a1 a2 a3** líneas distintas sobre un punto **R** y **b1 b2 b3** líneas distintas sobre otro punto **S**; entonces las líneas:

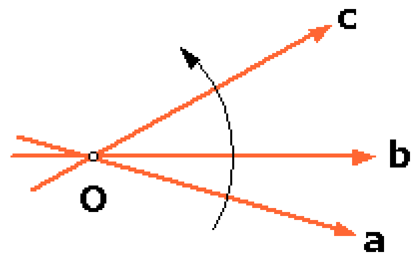
  c1= (a2 I b3) U (a3 I b2);

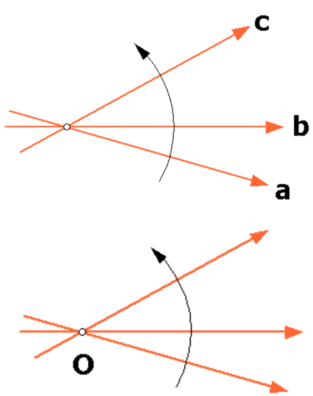
  c2= (a1 I b3) U (a3 I b1);

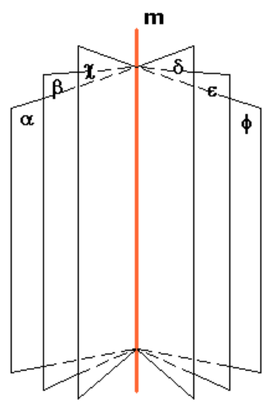
  c3= (a1 I b2) U (a2 I b1);
- Son concurrentes.

DEFINICIONES.



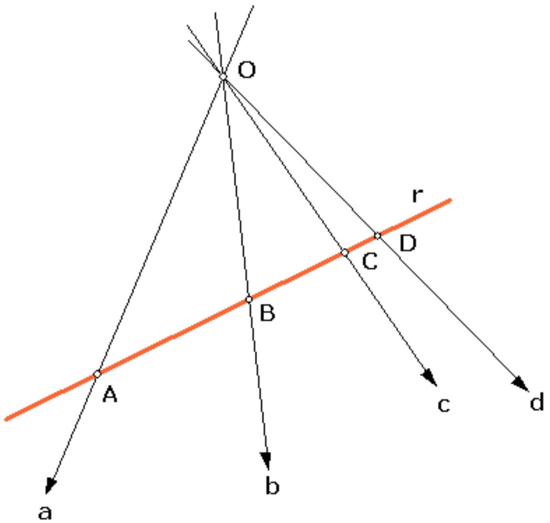


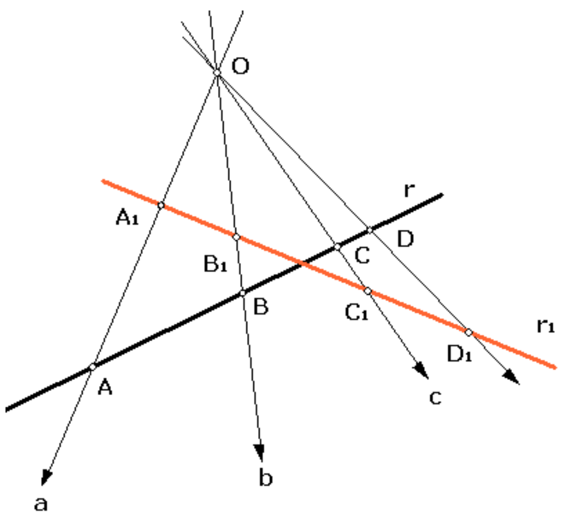




- **ALINEACIONES :** Conjunto de todos los infinitos puntos que podemos considerar sobre una recta indefinida. (alineación recta, o recta soporte de la alineación).
- Las alineaciones se designan por el nombre de alguno de sus puntos o por la recta soporte.
- **HAZ DE RECTAS :** Haz plano, o simplemente haz, es el conjunto infinito de rectas o rayos que pasan por un punto fijo que se llama vértice o centro del haz
- El haz puede designarse por el nombre de alguno de su rayos o por el de su vértice.
- **HACES DE PLANOS :** Son los formados por los infinitos planos α, β, δ, ε, θ….. que pasan por una recta **m**.

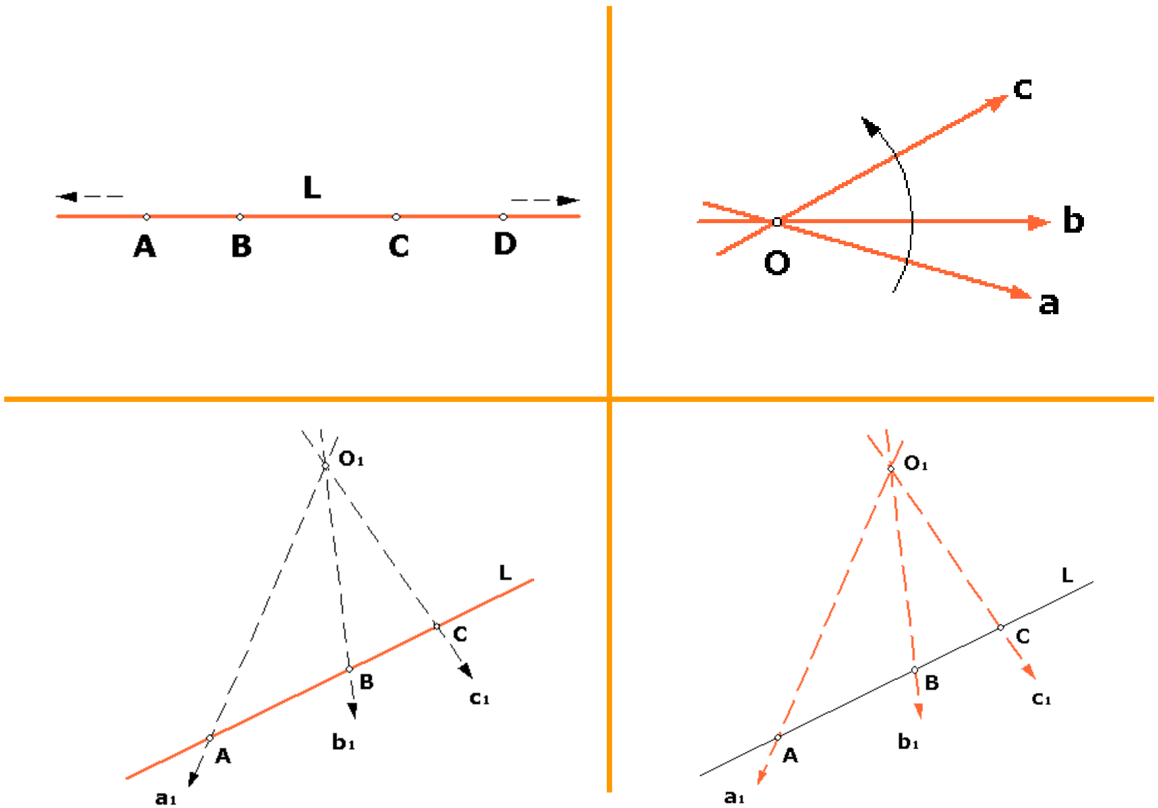
ALINEACIONES Y HACES CORRESPONDIENTES.





- Sean en la alineación **r**, los puntos **A**, **B**, **C** y **D**.
- Si desde un punto exterior **O**, que tomamos como vértice, trazando las rectas **a**, **b**, **c**, **d**, …. que pasen por los puntos dados, habremos formado un haz plano de rectas, donde cada rayo se corresponderá con un punto de la alineación.
- Si luego cortamos este haz por otra recta **r1**, obtendremos otra alineación cuyos puntos **A1**, **B1**, **C1**, **D1**, … se corresponderán con los rayos del haz, y a través de este con los puntos homónimos o correspondientes de la otra alineación.
- Cada par de puntos correspondientes estarán siempre bajo el mismo rayo del haz, pudiéndose o no encontrar en la misma semirrecta respecto del vértice del haz.

DUALIDAD ENTRE ALINEACIONES Y HACES.



- De esta propiedad que no siempre usaremos, daremos algunos ejemplos:

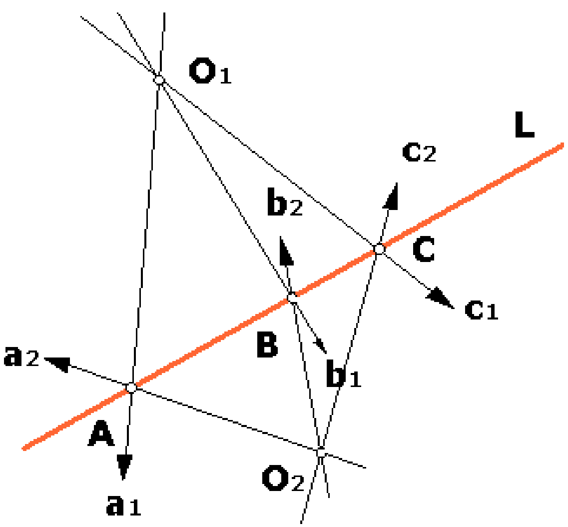
- Una serie de **puntos** sobre una **recta** constituyen una **alineación**.

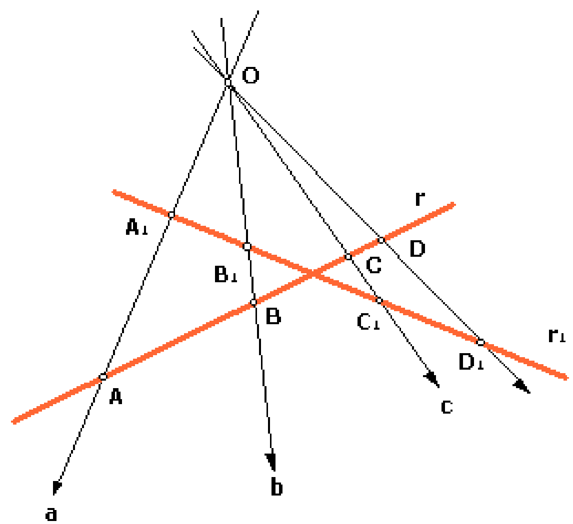
- Una serie de **rectas** que pasan por un **punto** constituyen un **haz**.

- Si proyectamos una **alineación** desde un **punto** exterior a su **recta**, obtendremos un **haz** proyectivo con ella.

- Si cortamos un **haz** por una **recta** que no pase por su **vértice**, obtendremos una **alineación** proyectiva con aquel.

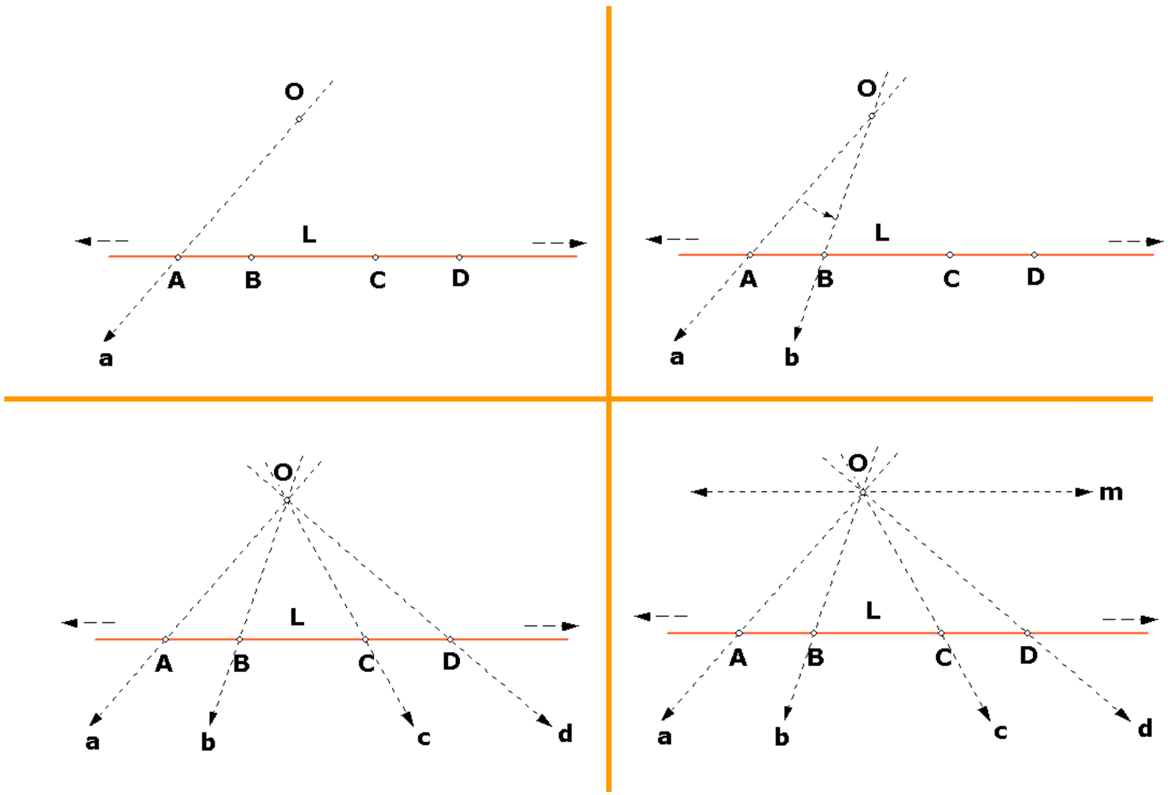
DUALIDAD ENTRE ALINEACIONES Y HACES.





- Una **alineación** proyectada de dos **puntos** exteriores a su **recta soporte**, nos da dos **haces** correspondientes entre sí.
- Un **haz** cortado por dos **rectas** que no pase por su **vértice**, nos da dos **alineación** correspondientes entre sí.

PUNTOS EN EL INFINITO DE UNA ALINEACION.



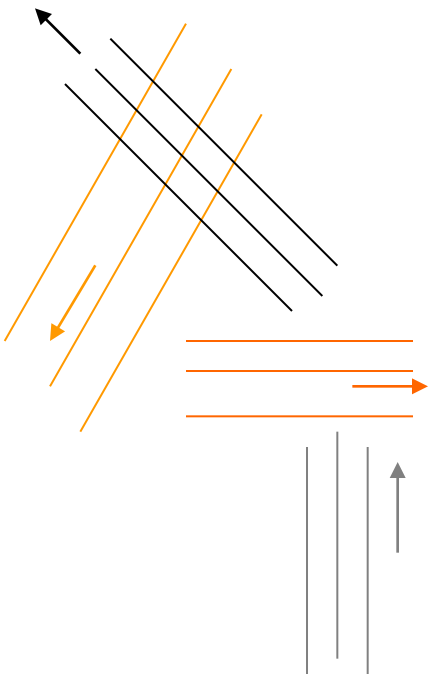
- Si desde un punto **O** exterior a una alineación **L** trazamos rayos correspondientes con la alineación, veremos que siguiendo el giro del rayo este llegará a la posición m, que es paralela a la alineación base.

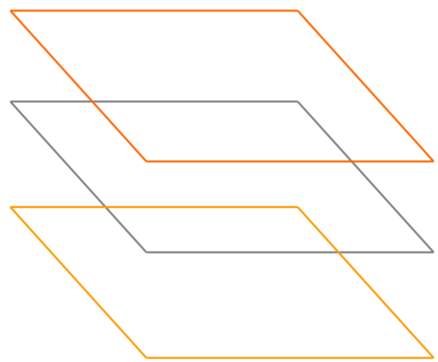
- La correspondencia entre rayo y alineación es donde el rayo corta a la alineación.

- Como el rayo **m** es paralelo a la alineación **L** la cortará en el infinito.

- Cómo en la geometría proyectiva una recta tiene un solo punto en el infinito, implica que la recta es una línea cerrada.

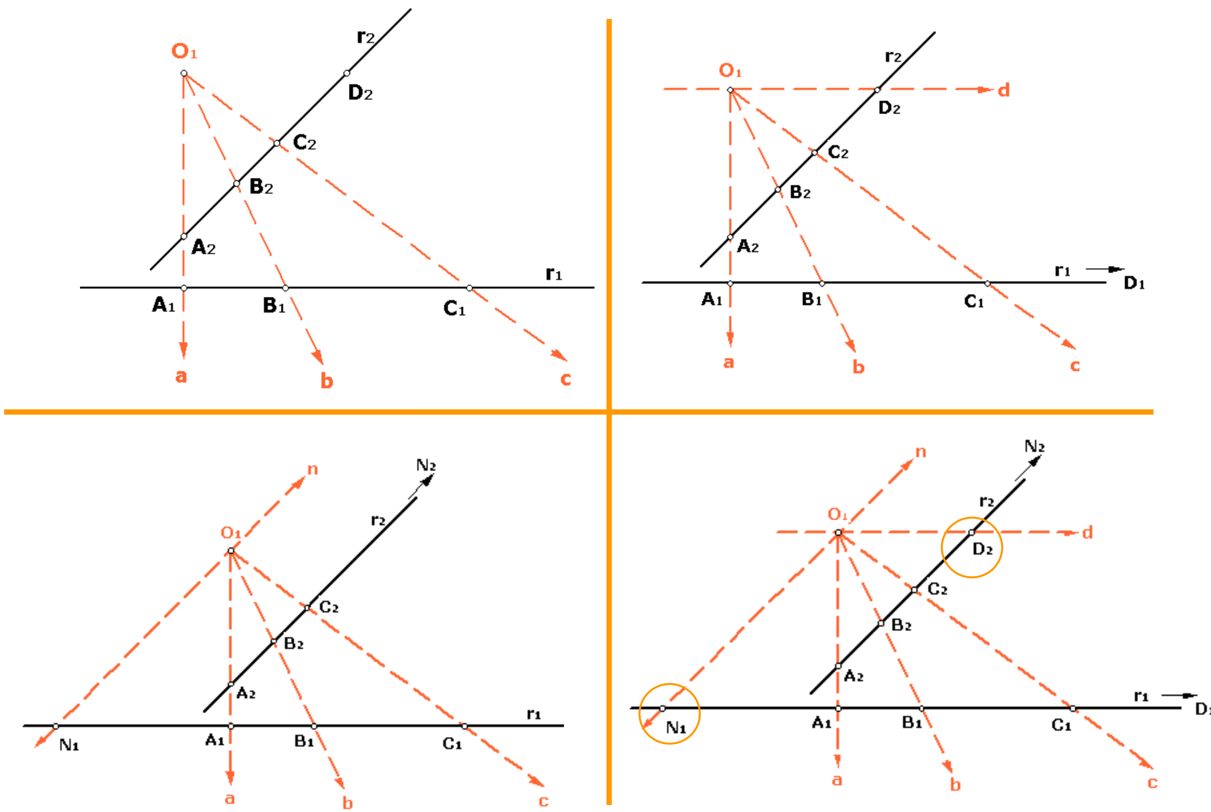
RECTA DEL INFINITO.





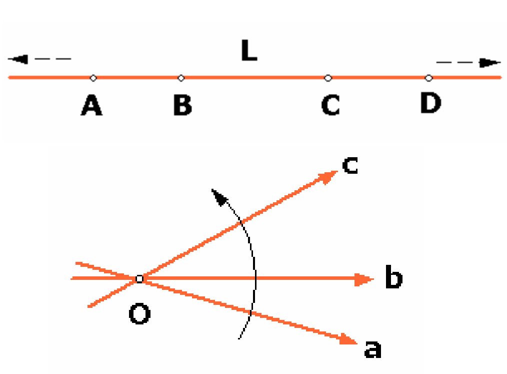
- En un plano dado existe solo una recta del infinito.
- La recta del infinito está definida por los puntos del infinito de los innumerables sistemas de rectas paralelas que puedan trazarse en el plano de referencia.
- Cada uno de sus puntos representará una dirección.
- En dos o más planos paralelos pueden trazarse infinitos sistemas de rectas paralelas, cuyos puntos del infinito serán comunes, podemos afirmar que todos los planos paralelos tienen común la recta del infinito.

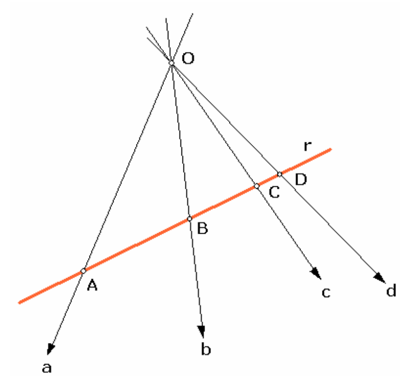
PUNTOS LIMITES.

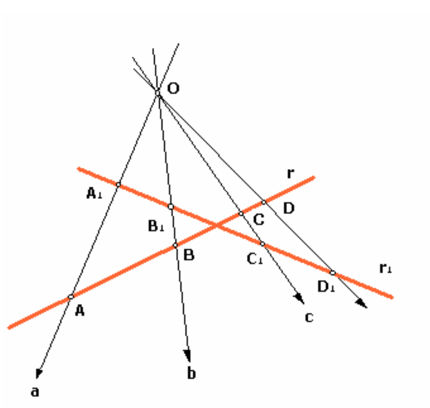


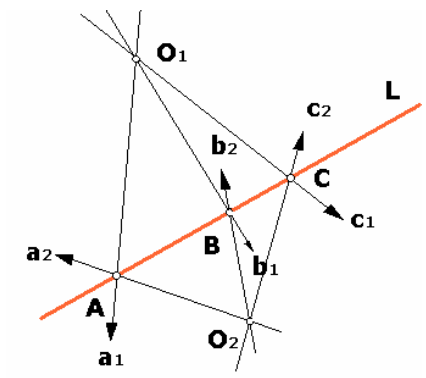
- Sea un haz que intersecta dos rectas, **r1** y **r2**, en las que determina dos alineaciones correspondientes.
- El rayo **d** paralelo a **r1**, determinará sobre la recta **r2**, el punto **D2** correspondiente de **D1** punto del infinito de la alineación **r1**.
- El rayo **n**, paralelo a **r2**, nos determinará el punto **N1** correspondiente a **N2** punto del infinito de la alineación **r2**.
- **D2** y **N1** puntos límites de la otra alineación.

PROYECTIVIDADES Y PERSPECTIVIDADES.



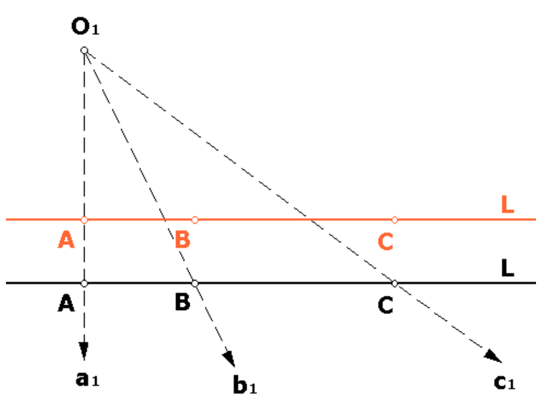


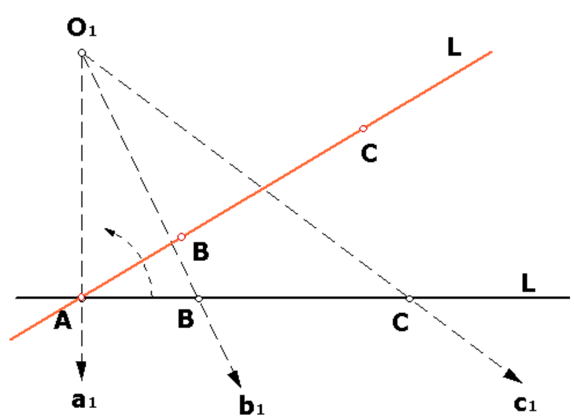




- Las alineaciones y haces correspondientes pueden ser perspectivas o simplemente proyectivos.
- Un haz de rectas y una alineación, dos alineaciones o dos haces de rectas, se llaman perspectivas cuando ocupan una determinada posición relativa entre ellos:
- Una alineación y un haz están en situación perspectiva cuando los rayos del haz pasan por puntos de una alineación.
- Dos alineaciones están en situación perspectiva cuando los puntos correspondientes de las dos alineaciones están bajo los rayos de un haz.
- Dos haces de rectas están en situación perspectiva cuando los rayos correspondientes se cortan en puntos de una alineación.

PROYECTIVIDADES Y PERSPECTIVIDADES.





- Al romper las relaciones mutuas, trasladando o girando una o más de las alineaciones o de los haces, sin variar la distancia entre los puntos de las alineaciones o los ángulos entre los rayos, seguirán los distintos elementos siendo correspondientes, pero en este caso perderán su cualidad de perspectivas y se llamaran simplemente proyectivos.

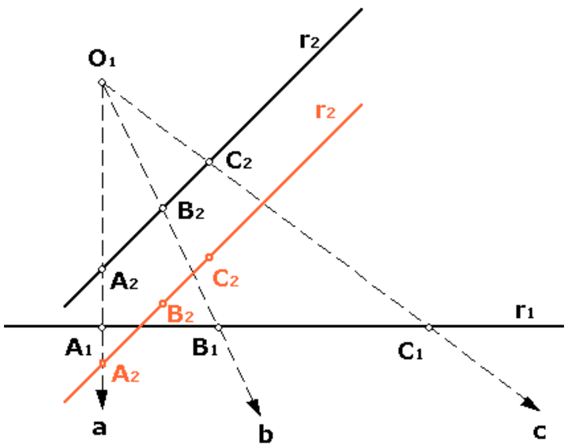
- **Una alineación y un haz.**

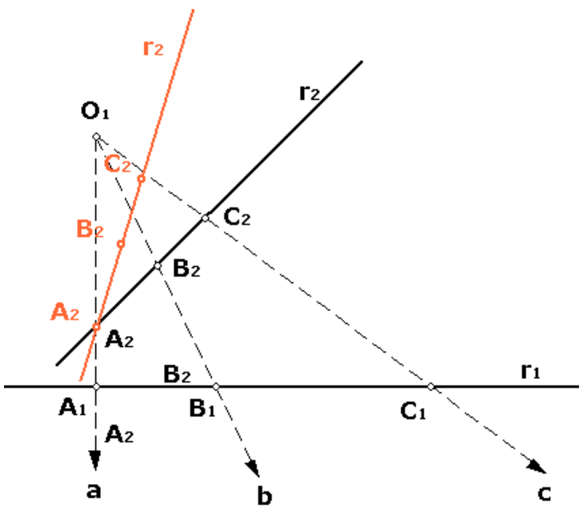
- Trasladando.

- Girando.

PROYECTIVIDADES Y PERSPECTIVIDADES.

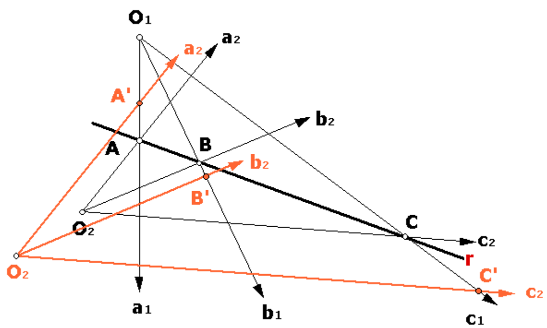
- **Dos alineaciones.**
- Trasladando.
- Girando.

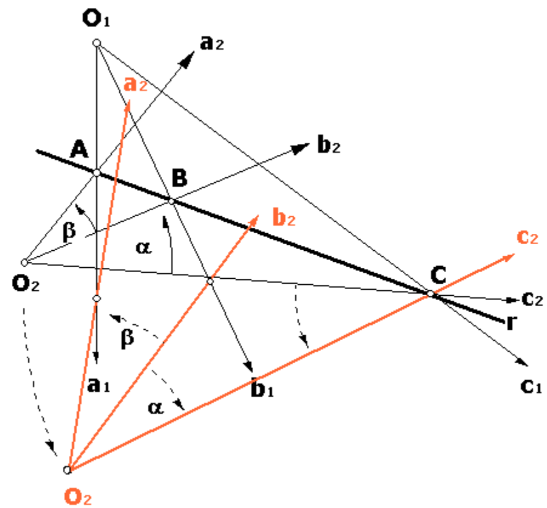




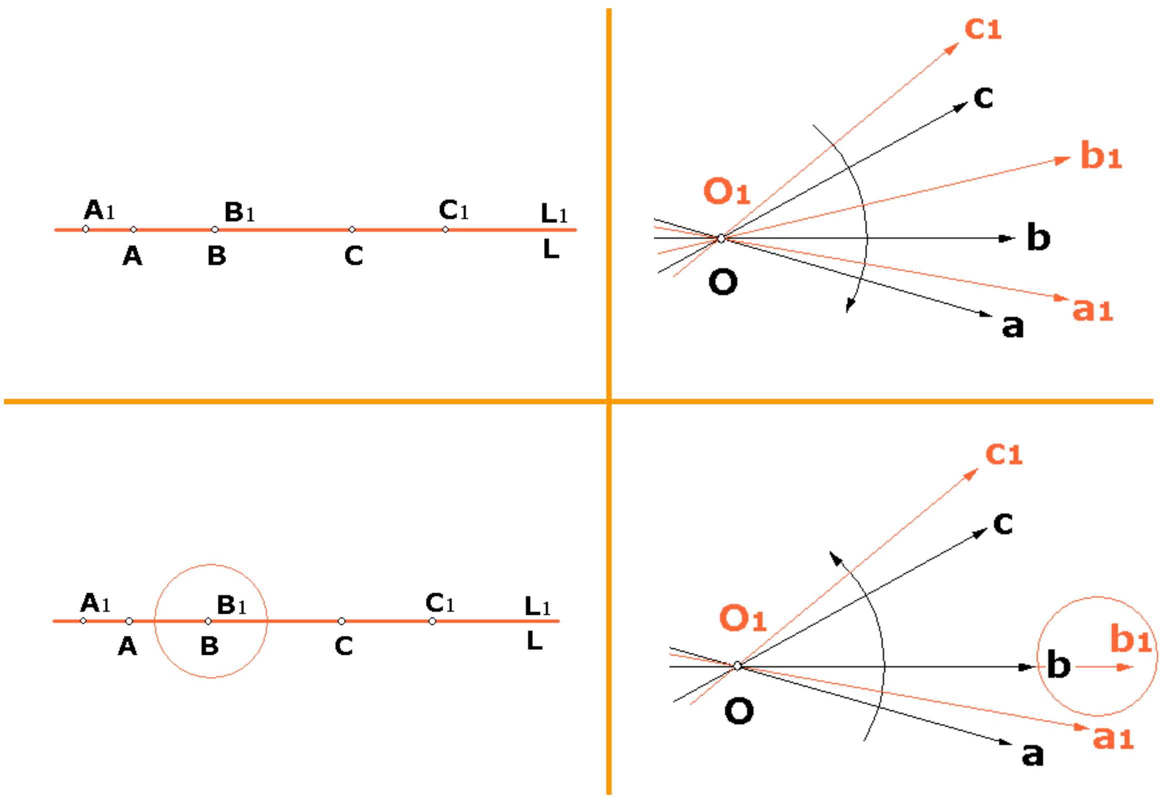
PROYECTIVIDADES Y PERSPECTIVIDADES.

- **Dos Haces.**
- Trasladando.
- Girando.



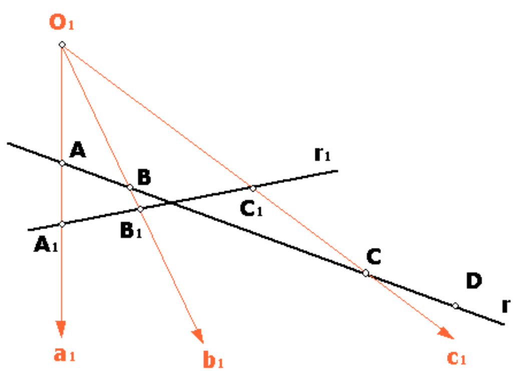


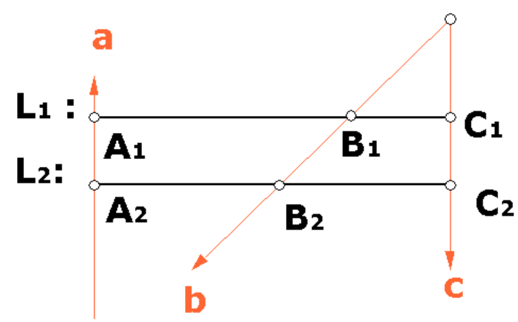
DEFINICIONES.

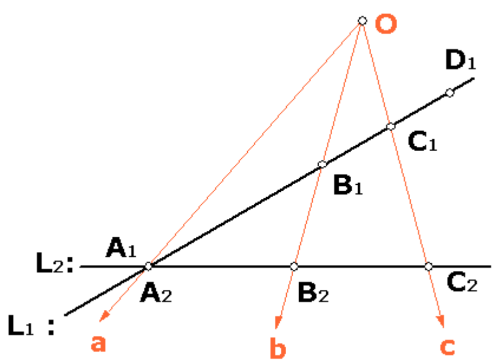


- **Alineaciones y haces dobles.**
- **Alineación Doble**. Es el conjunto de dos alineaciones proyectivas situadas sobre una misma recta. A cada punto le corresponderán dos puntos, perteneciente a cada alineación.
- **Haz Doble**. Es el conjunto de dos haces proyectivos, cuyo vértice es común. A cada Rayo le corresponderán dos rayos, pertenecientes a cada haz.
- **Punto Doble**. Cuando un punto se corresponde a sí mismo.
- **Rayo Doble**. Cuando un rayo se corresponde a sí mismo.

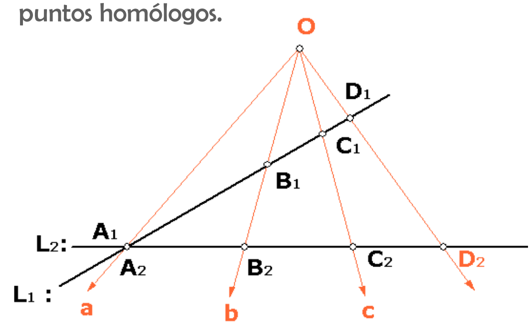
DETERMINACION GRAFICA De Elementos Correspondientes.





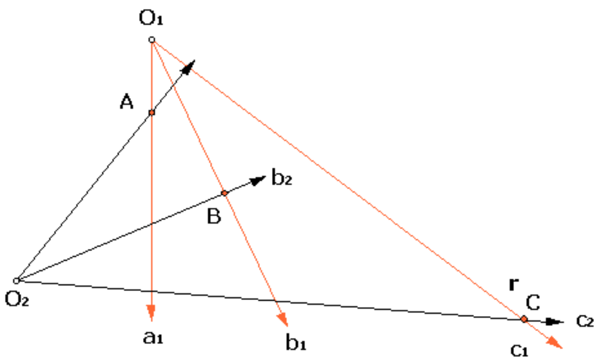


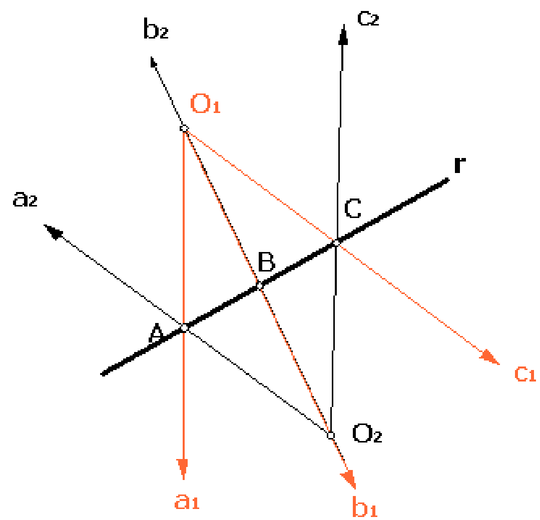
• Estando en situación perspectiva se definen puntos homólogos.



- Alineaciones proyectivas que tengan tres elementos en situación perspectiva serán perspectivas en su totalidad.
- **Métodos Gráficos.**
- **1.-** Por el traslado de una de las formas.
- **2.-** A través de una forma intermedia.
- **Caso dos alineaciones.** Dadas dos series definidas por tres elementos en situación proyectiva.
- **Método 1.-** Se traslada una de las series haciendo coincidir un par de puntos homólogos **A1** con **A2.**
- Se une **B1** con **B2** y **C1** con **C2** y se define el punto **O.**

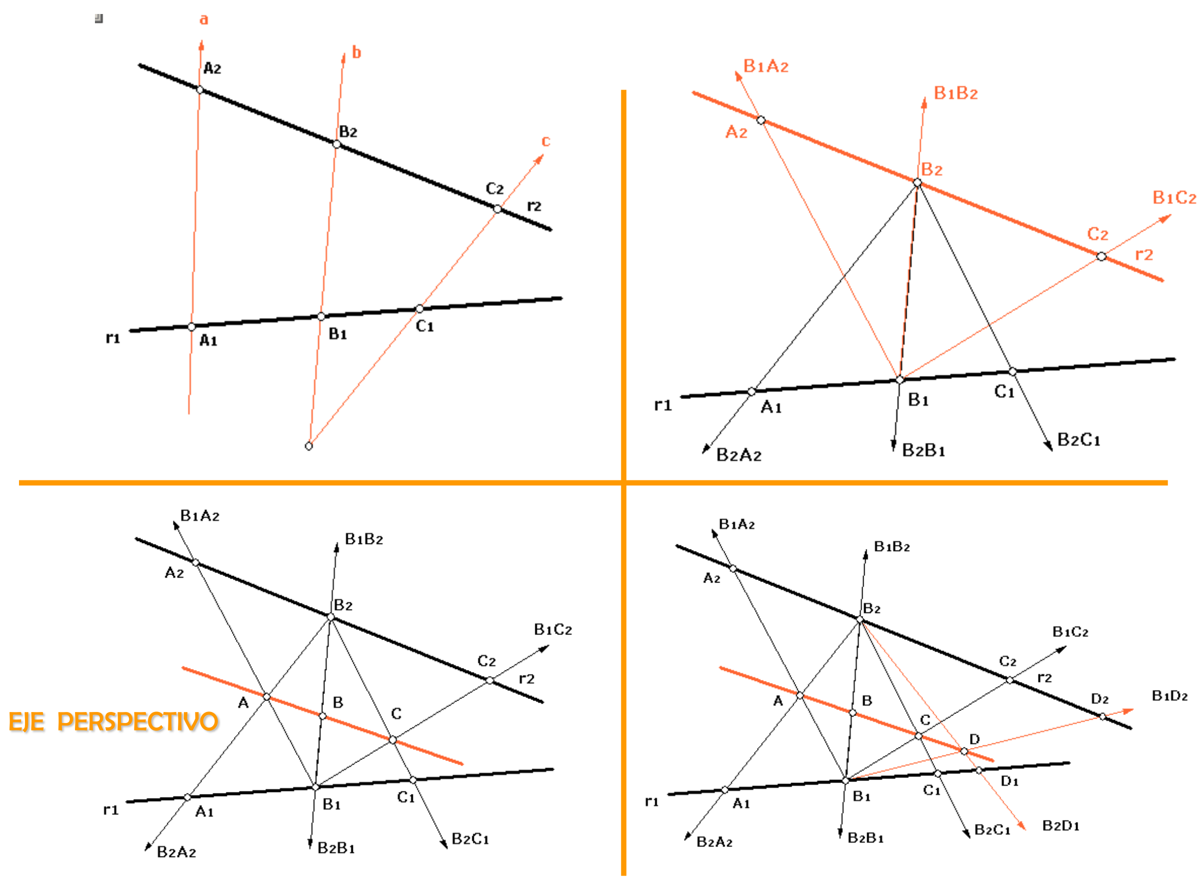
DETERMINACION GRAFICA De Elementos Correspondientes.





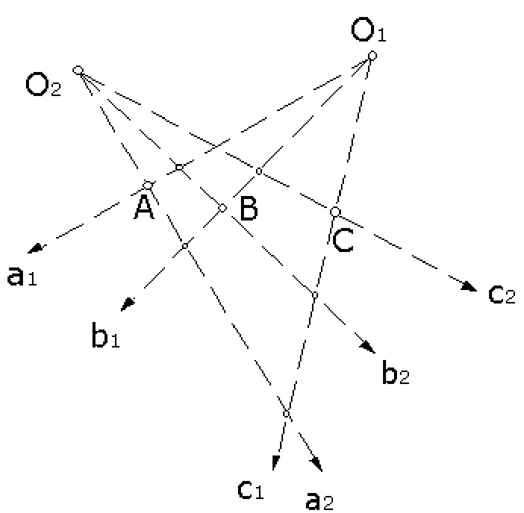
- **Método Gráfico : Por el Traslado de una de las formas.**
- **Caso dos Haces**. Sean dos haces definidos por tres rayos en situación proyectiva.
- **Método 1.-** Si sobre uno de los rayos **b1** del primer haz escogemos un punto **O2** como vértice del segundo haz, haciendo coincidir el rayo **b1** con su homólogo **b2**.
- La intersección de **a1** con **a2** y **c1** con **c2**, nos dará la recta **r**, recta base de una alineación perspectiva con ambos haces. La unión de los puntos de esta alineación con los vértices de haces darán rayos homólogos.

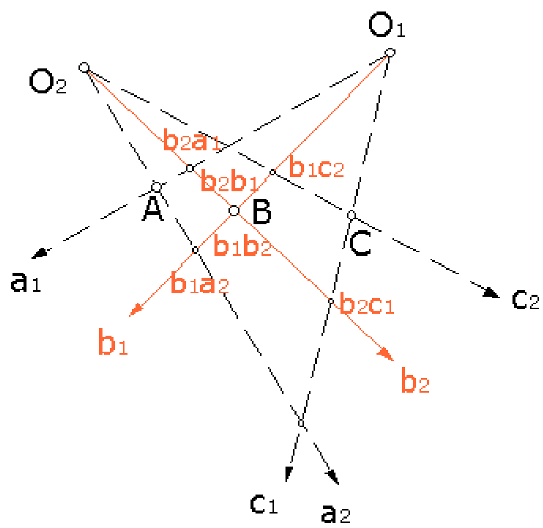
DETERMINACION GRAFICA De Elementos Correspondientes.



- **Método Gráfico: A través de una forma intermedia.**
- **Caso dos Alineaciones**. Dadas dos series definidas por tres elementos en situación proyectiva.
- Desde dos puntos homólogos cualesquiera **B1** y **B2** se proyectan todos los puntos de la otra alineación obteniendo dos haces proyectivos en situación perspectiva.
- **B1B2** se corresponde con **B2B1**, (rayo doble o común), luego ambas radiaciones serán perspectivas, y todos los rayos homólogos se cortarán sobre una alineación o Eje Perspectivo y que se determina al intersectar **B1A2** con **B2A1** y **B1C2** con **B2C**1.

DETERMINACION GRAFICA De Elementos Correspondientes.





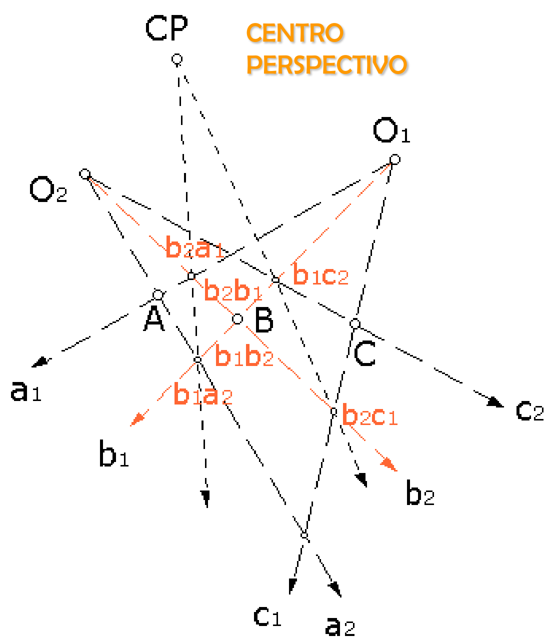
- **Método Gráfico: A través de una forma intermedia.**

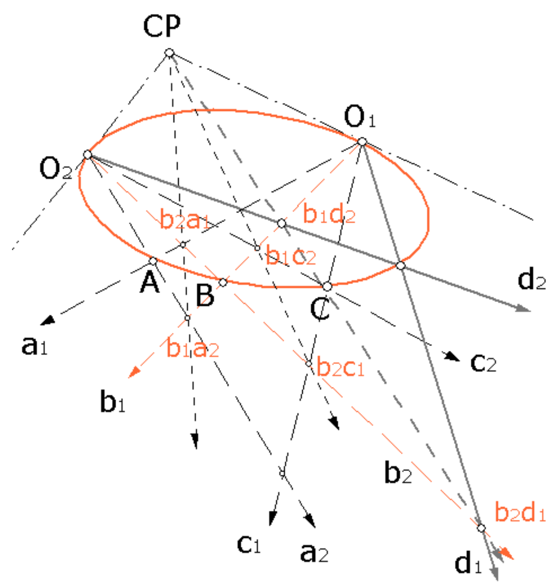
- **Caso dos Haces**. Dadas dos haces definidos por tres elementos en situación proyectiva.

- Si dos rayos homólogos cualesquiera los cortamos por todos los rayos del otro haz, tendremos dos alineaciones proyectivas.

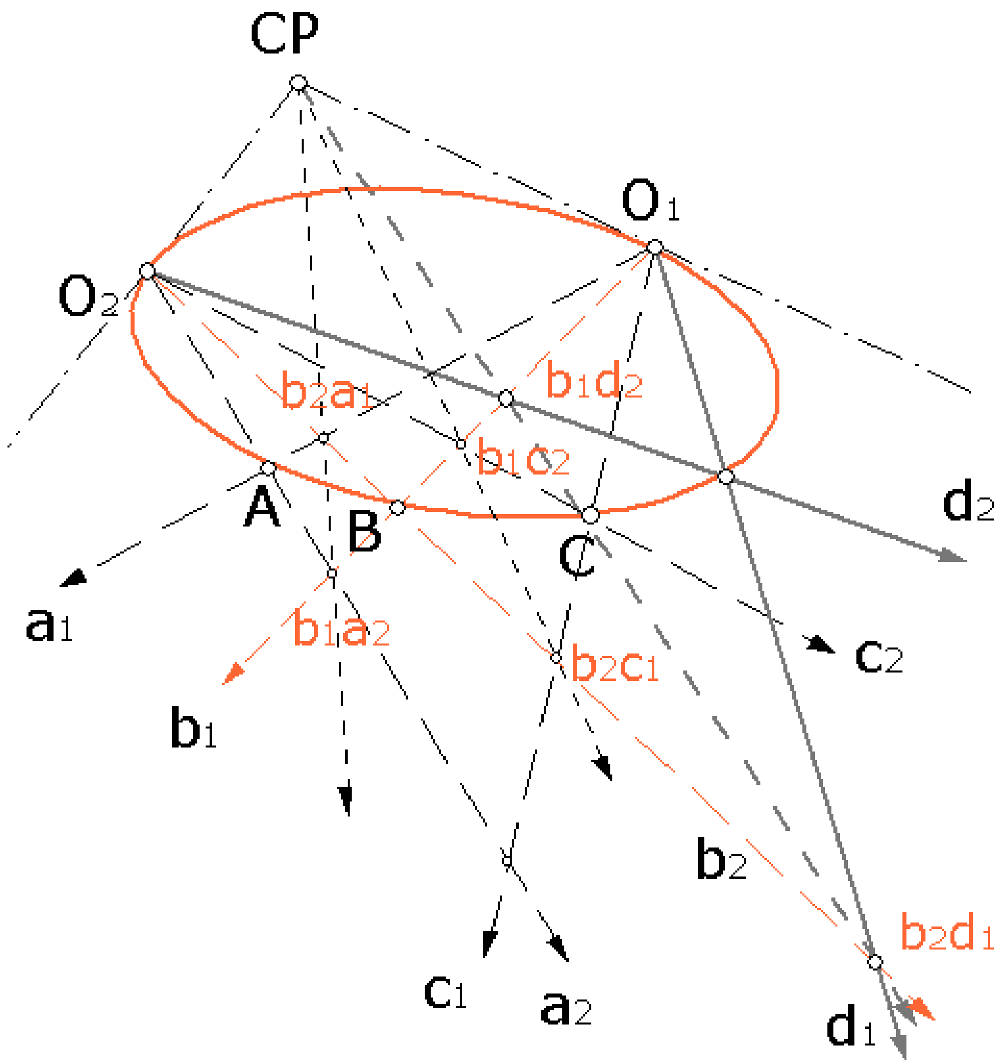
- Como las dos alineaciones **b1** y **b2** tienen un punto homólogo común, están en situación perspectivas.

DETERMINACION GRAFICA De Elementos Correspondientes.

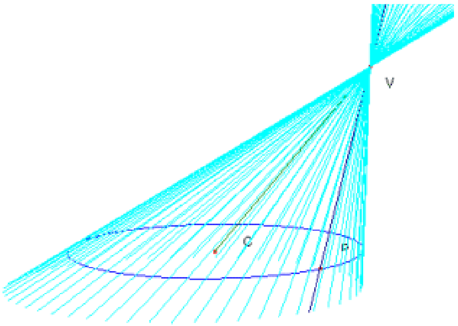




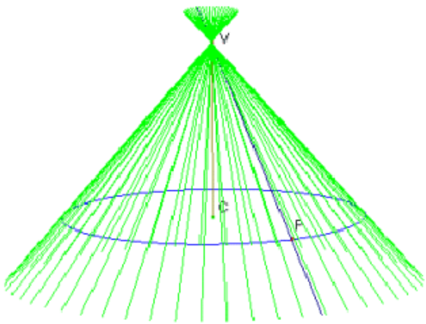
- Luego las rectas que unen puntos homólogos se cortarán en un punto que llamaremos centro perspectivo, el cual determinaremos uniendo los puntos de intersección de **b1a2** con **b2a1** y **b1c2** con **b2c1**.
- A través de los puntos correspondientes de las alineaciones **b1** y **b2** podemos obtener rayos homólogos.
- Se traza desde O2 un rayo arbitrario **d2** y donde corte al rayo b1 se define el punto **b1d2**, el que se une con **CP** y donde corte al rayo **b2** obtenemos su correspondiente **b2d1** el que se une con O1 obteniendo el rayo d1 correspondiente a **d2**.


CP
O1
O2
b2a1
b1d2
b1c2
A
B
C
d2
a1
b1a2
b2c1
c2
b1
b2
b2d1
c1
a2
d1

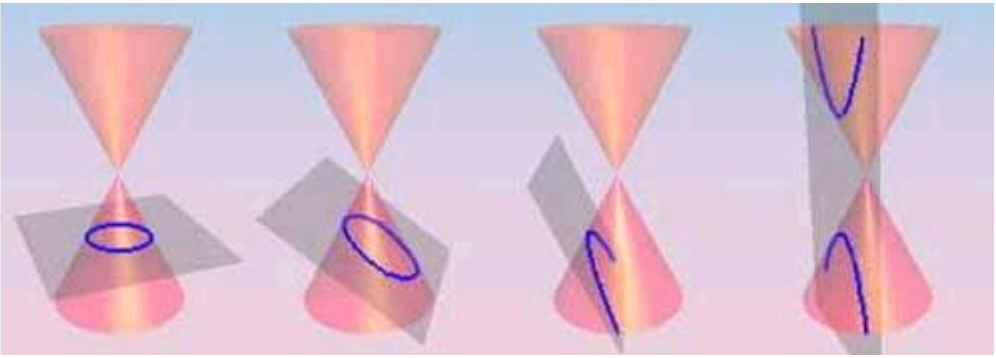
CONSTRUCCION DE CONICAS.



Cono Oblicuo.



Cono Recto.



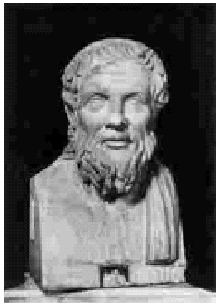
- **Cono.** Es una superficie generada por una recta que se mueve de modo que siempre corte a una circunferencia dada **C** y que pase por un punto fijo **V**.

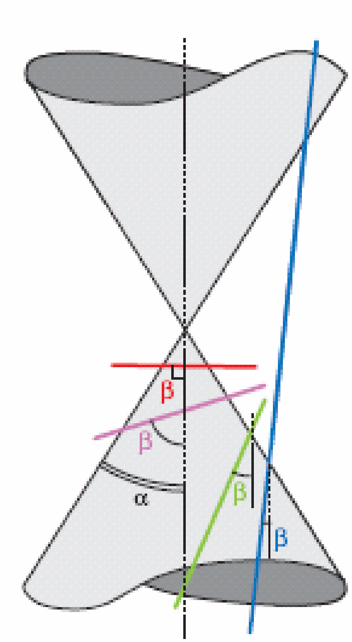
Generatriz: es la recta generadora del cono circular.

Vértice de cono: es el punto fijo V.

- El vértice divide cada generatriz en dos semirrectas y al cono en dos hojas.
- Cuando un cono es seccionado o se corta con un plano se forma una curva. La intersección de la superficie cónica y el plano dan origen a distintas curvas llamadas **cónicas o secciones cónicas**.

CONSTRUCCION DE CONICAS.





- **Apolonio** (262-200 a.C.) de la Escuela de Alejandría y a quien se deben los nombres de parábola, hipérbola y elipse, dio una visión general de las secciones cónicas, al generar todas las curvas, variando la inclinación del plano que corta al cono con respecto del eje del mismo.

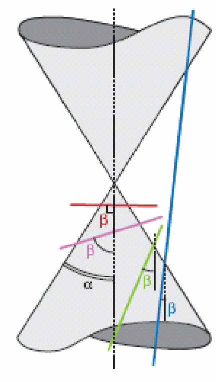
b = 90º: Circunferencia (rojo)

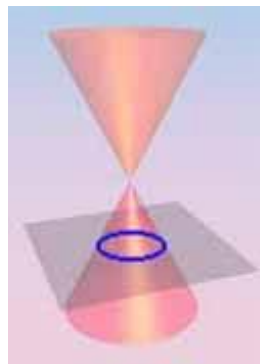
b > a : Elipse (morado)

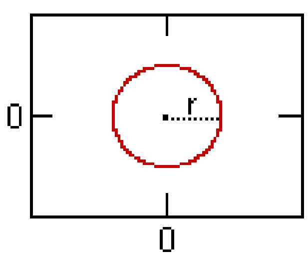
b = a : Parábola (verde)

b < a : Hipérbola (azul)

CONSTRUCCION DE CONICAS.



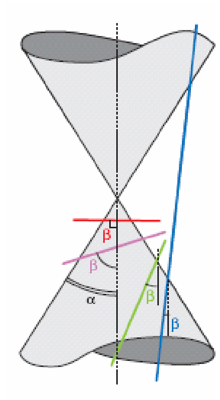


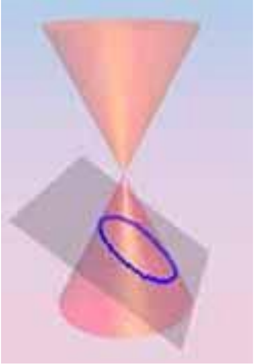


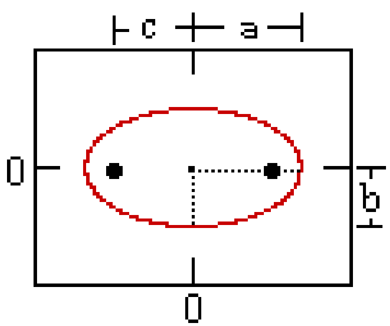
- b = 90º: **Circunferencia** (rojo)

- Ejemplo en la naturaleza de **circunferencias**. Ondas en el agua.

CONSTRUCCION DE CONICAS.

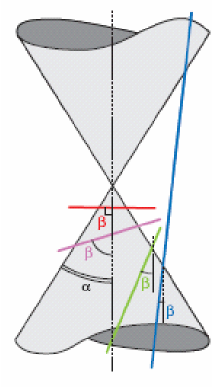


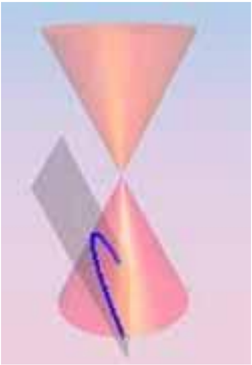


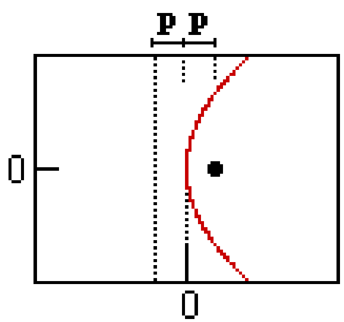


- b > a : **Elipse** (morado)
- Ejemplo en la naturaleza de **Elipse**. Forma de una hoja.

CONSTRUCCION DE CONICAS.

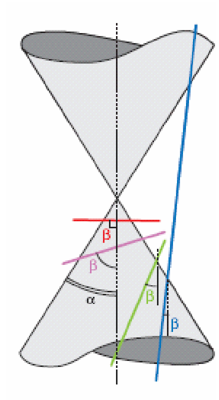


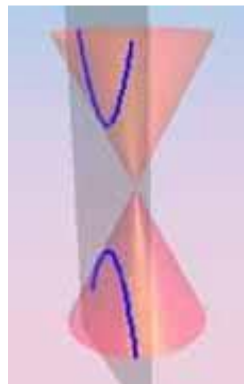


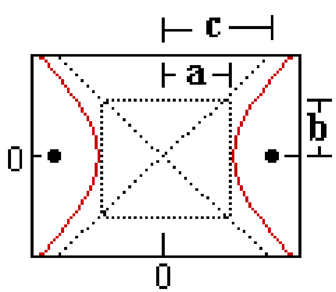


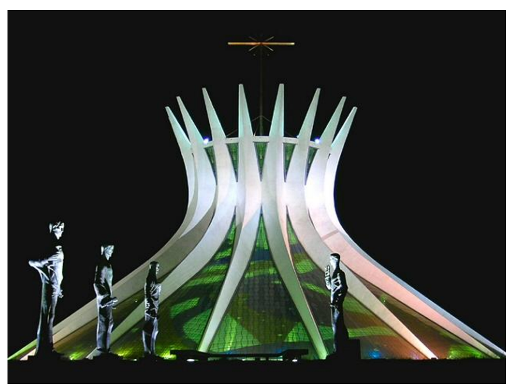
- b = a : **Parábola** (verde)
- Ejemplo en la naturaleza de **Parábolas**. Haz de luz.

CONSTRUCCION DE CONICAS.





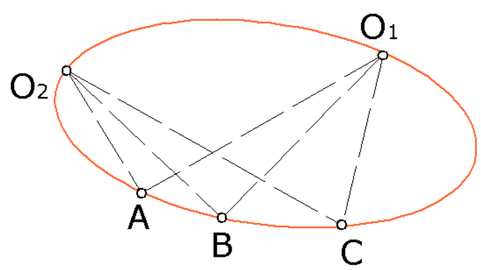


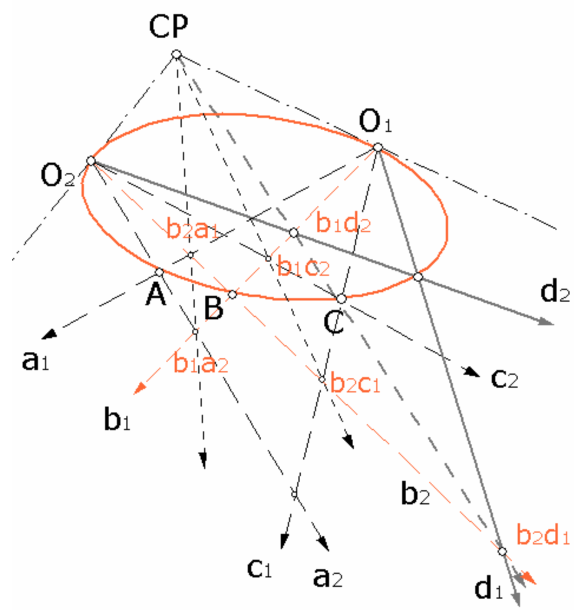


- b < a : **Hipérbola** (azul)

- Ejemplo en un edificio de **Hipérbola**. Catedral de Brasilia, Niemeyer.

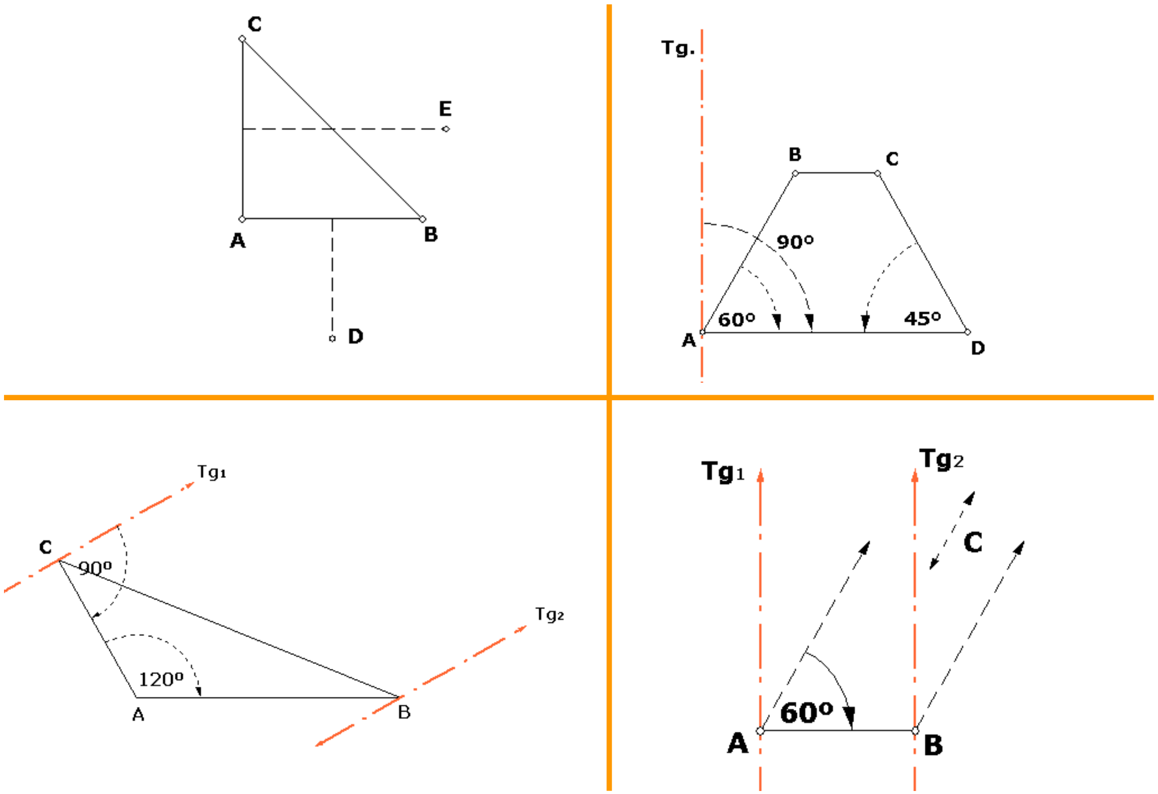
DEFINICION DE CONICAS de Steiner.





- Definición de cónica utilizando la **geometría proyectiva**.
- Se llama cónica al lugar geométrico de los puntos de intersección de rectas homólogas de dos haces proyectivos de un mismo plano, que no sean perspectivos.
- Si la cónica así definida no tiene puntos impropios, se llama elipse; si tiene un punto impropio se llama parábola y si tiene dos puntos impropios se llama hipérbola.

DETERMINACION DE CONICAS. Teorema de Steiner.



- Una cónica queda determinada por cinco puntos de los cuales no haya nunca tres sobre una misma recta.
- Una cónica queda determinada por cuatro puntos, tres de los cuales no estén nunca sobre una recta y una tangente en uno de ellos.
- En este caso el centro perspectivo sería un punto de la tangente dada.
- Una cónica queda determinada por tres puntos, no alineados y las tangentes en dos de ellos.
- En este caso la intersección de las tangentes nos determina el centro perspectivo.