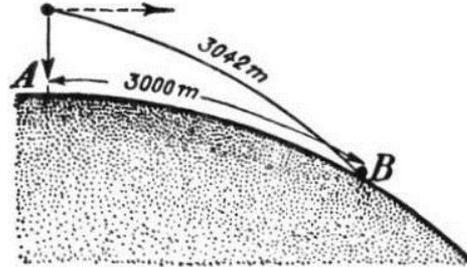
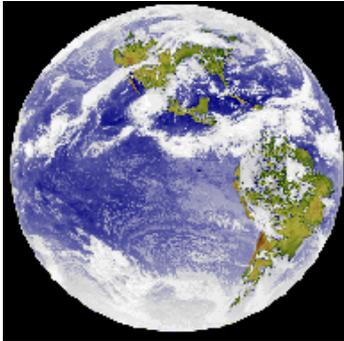
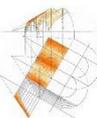
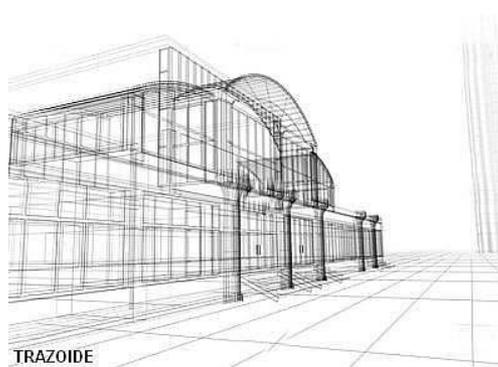
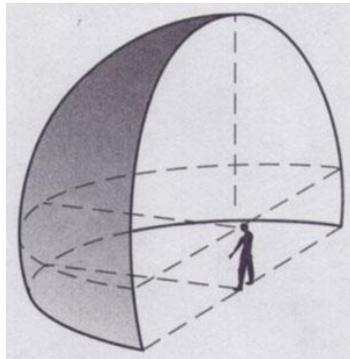


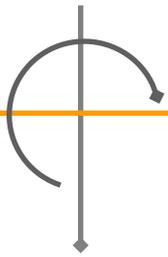


### Concepto GEOMETRÍA.

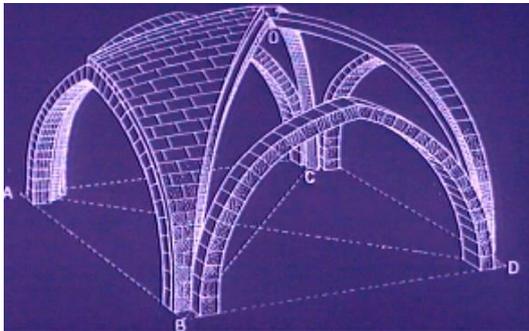


- GEO proviene del Griego que significa Tierra o superficie.
- METRIA significa medida o medición.
- Medir y representar las figuras planas y volumétricas de la tierra.





### Concepto GEOMETRÍA.



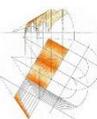
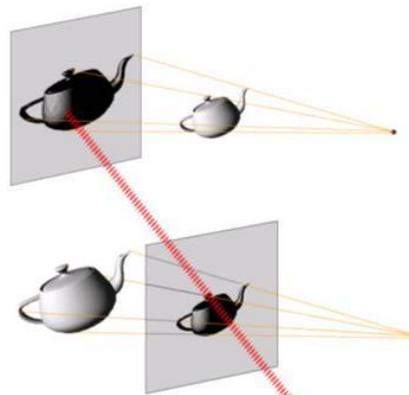
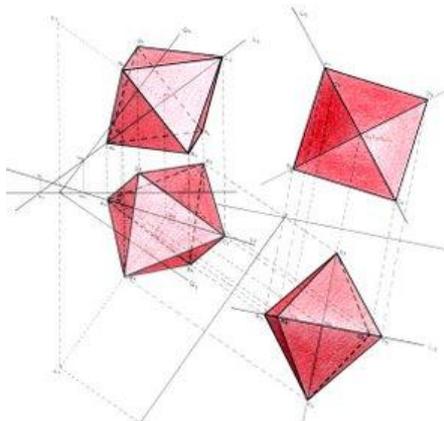
- El desarrollo y evolución de la geometría esta inserto en:

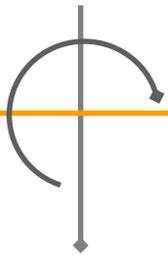
- un campo dinámico

- interrelacionado con el mundo real.

- Diferentes realidades dan origen a diferentes modelizaciones geométricas

- Diferentes lenguajes matemáticos dan origen a enfoques que metodológicamente han diferenciado la geometría.



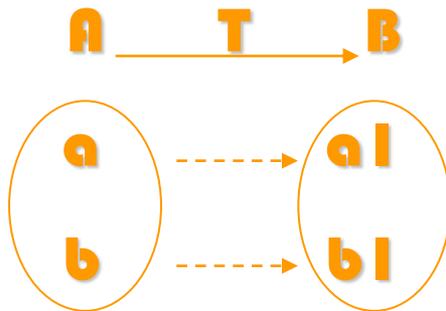


1879 Félix Klein sienta las bases de la definición moderna y unificadora de la Geometría:

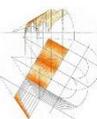
• **Un espacio E**

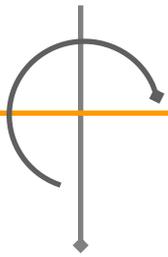
• **Un Grupo G(E) de Transformaciones de dicho espacio E**

- Existen dos bases fundamentales.
- E cualquier conjunto no vacío.
- El Grupo de Transformaciones G(E) contiene como mínimo:
  - La Identidad
  - Está inserto en el Grupo de todas las posibles Biyecciones de E en E.

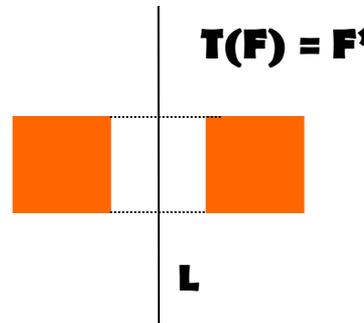
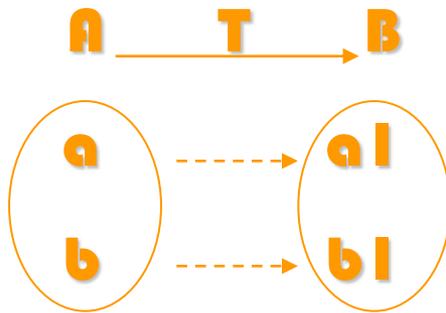


$$\left. \begin{array}{l} aI = a \\ bI = b \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} A = B \\ T = I \end{array}$$



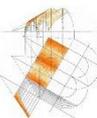
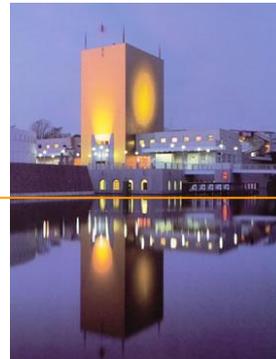
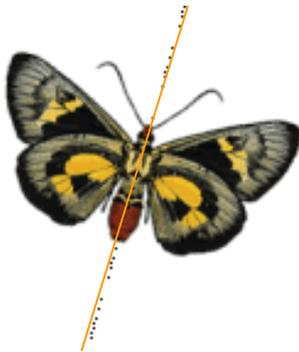


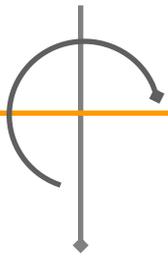
A partir del par  $(E, G(E))$ .



- Se pueden clasificar figuras y conjuntos no vacíos de  $E$  de acuerdo con las transformaciones  $G(E)$ , donde:

- Dos figuras  $F$  y  $F'$  son equivalentes si y solo si existe una transformación  $T$  en  $G(E)$  que transforme  $F$  en  $F'$ .

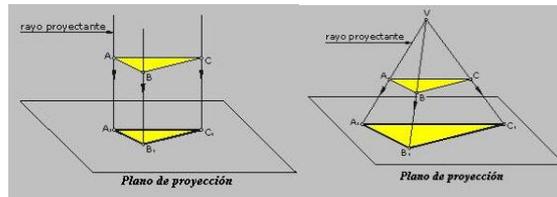
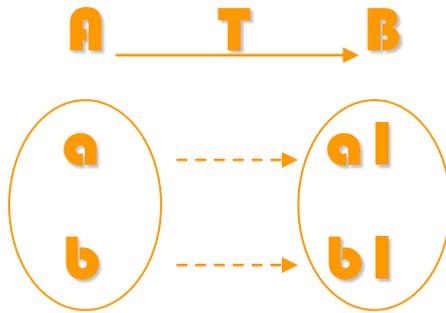




# GEOMETRÍA

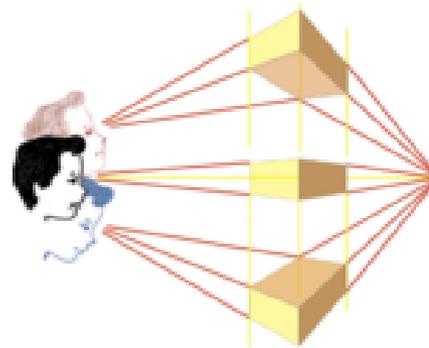
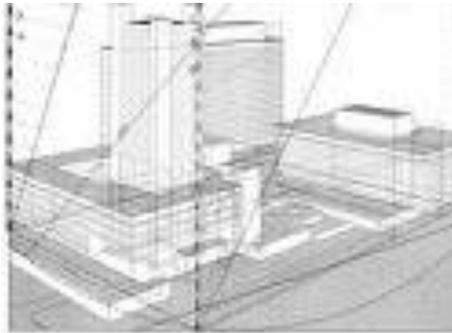
... 1º CICLO: Teoría de las Transformaciones.

A partir del par  $(E, G(E))$ .

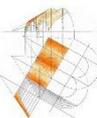


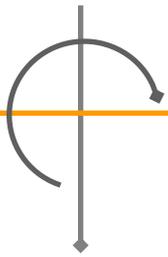
- Sobre este espacio se pueden generar distintos grupos de transformaciones, que darán origen a distintas Geometrías.

- Para Klein la diferencia entre Geometrías está dada por el grupo de INVARIANTES que presenta.

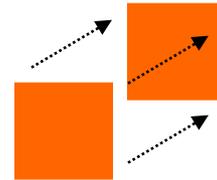
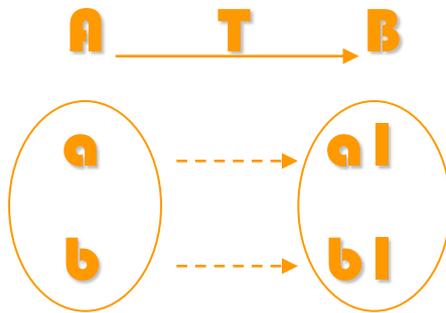


- Las invariantes son propiedades que se mantienen al aplicar un tipo especial de transformación geométrica.





A partir del par  $(E, G(E))$ .

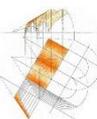
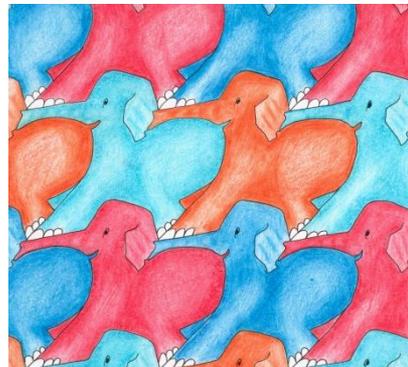
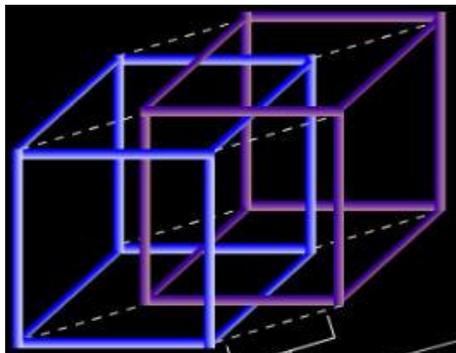


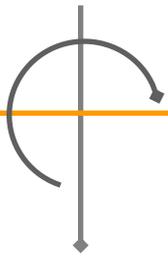
- El objeto de cada Geometría es el estudio del grupo de transformaciones que la caracteriza.

- Ejemplo: Geometría Euclidiana.

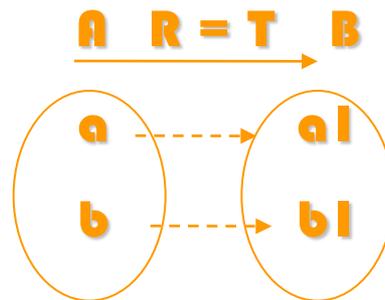
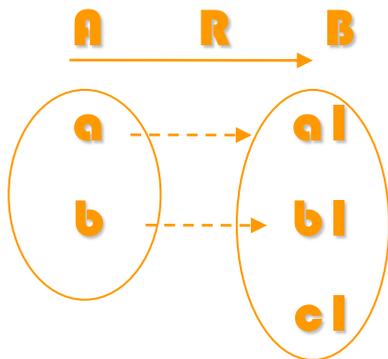
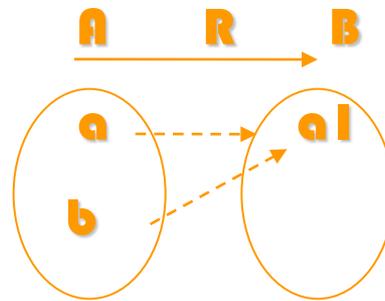
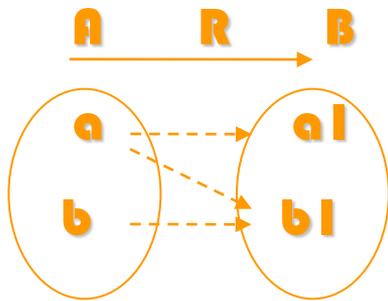
- Grupo de transformaciones las isometrías .

- Invariantes: Distancia, ángulo, paralelismo, perpendicularidad, etc.





### Teoría de las Transformaciones.



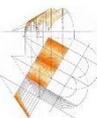
- Patrón de referencia. Concepto de unificación y codificación de la Geometría

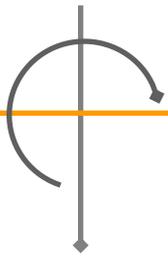
- Definición Transformación.

- Definiremos Transformación de un conjunto A sobre un conjunto B cuando exista una relación biunívoca (o mapeo biunívoco o uno es a uno).

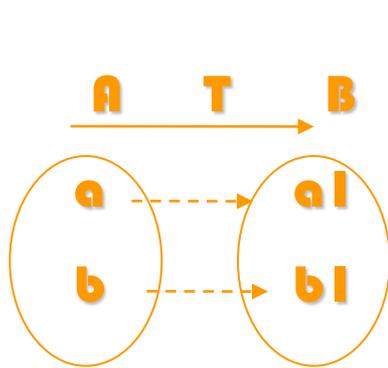
- Donde distintos elementos de A tienen distintas y únicas imágenes en B.

- Y el conjunto de las imágenes o  $F(A) = B$ .

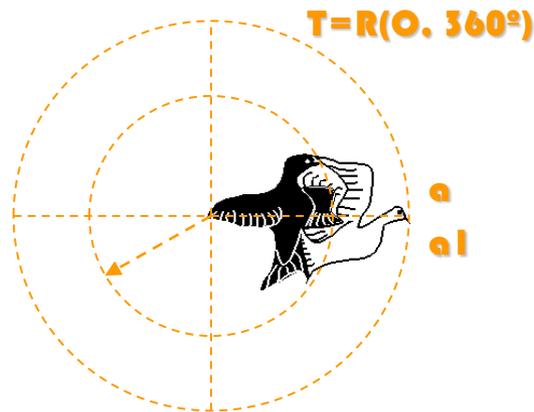
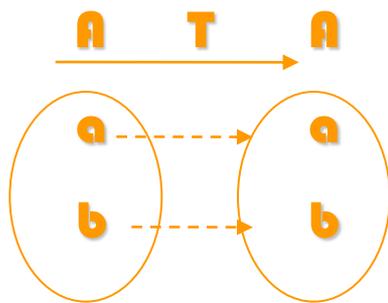




### Transformación Identidad: I.



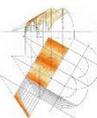
$$\begin{aligned} aI &= a \\ bI &= b \end{aligned} \quad \dashrightarrow \quad A=B$$

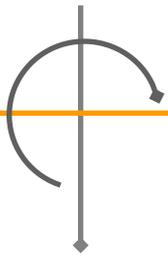


- Si A y B son el mismo conjunto, entonces el mapeo es una transformación del conjunto A sobre sí mismo.

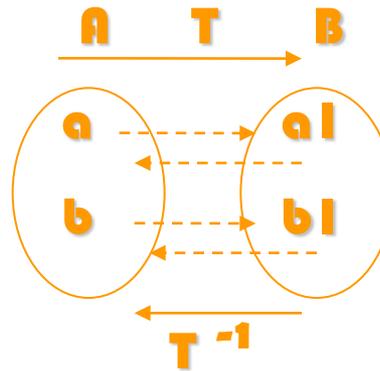
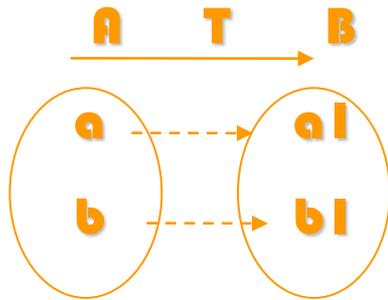
- El elemento del conjunto A que se corresponda a sí mismo se denomina elemento invariante de la transformación.

- Una transformación del conjunto A sobre sí mismo donde cada elemento de A sea invariante, se llama Transformación Identidad en A y se define como I.



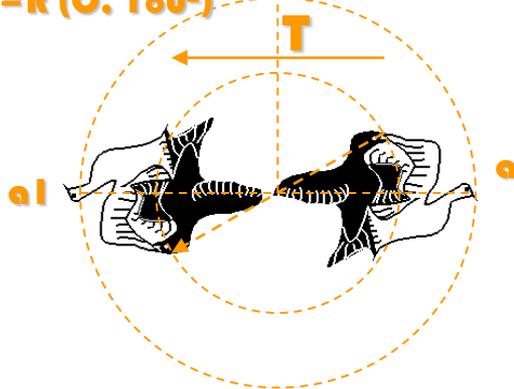


### Transformación Inversa: $T^{-1}$ .

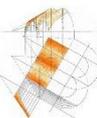
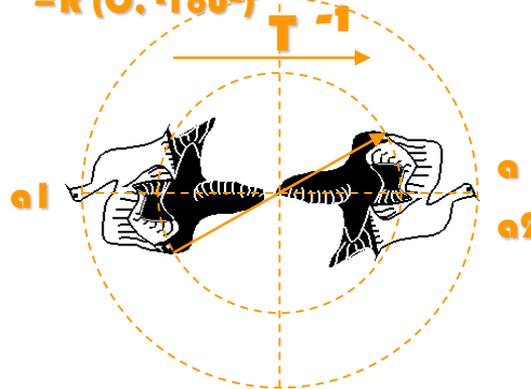


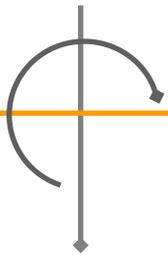
- La transformación del conjunto A sobre el conjunto B que define una segunda transformación del conjunto B sobre el conjunto A, donde la imagen que tenía A en B ahora tenga como imagen el elemento inicial de A, da origen a una transformación llamada inversa que se denomina  $T^{-1}$ .

$T=R(0, 180^\circ)$

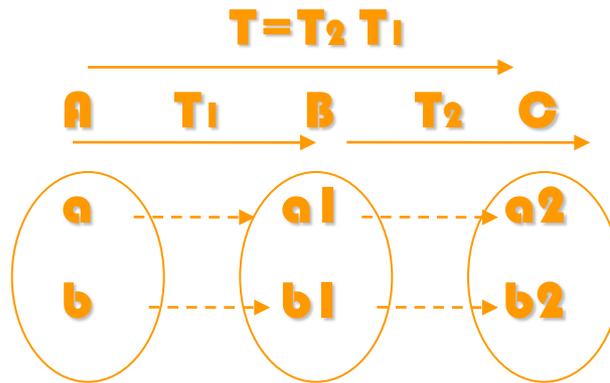


$T^{-1}=R(0, -180^\circ)$

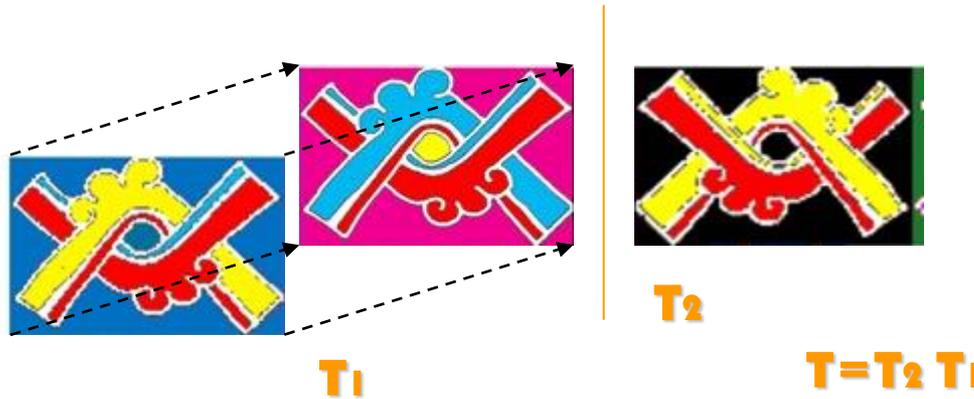




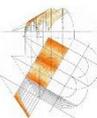
### Producto de Transformaciones.

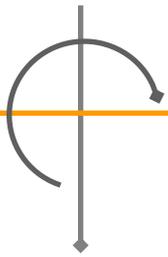


- Si  $T_1$  es una transformación del conjunto A sobre el conjunto B y  $T_2$  una transformación del conjunto B sobre el conjunto C, al efectuar la transformación  $T_1$  seguida de  $T_2$ , se induce una transformación  $T$  del conjunto A sobre el conjunto C.

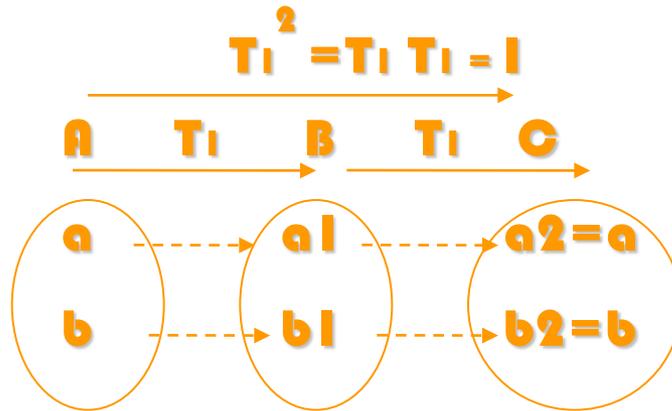


- La transformación  $T$  se llama Producto  $T_2 T_1$ , de las transformaciones  $T_1$  y  $T_2$  tomadas en ese orden (convención).



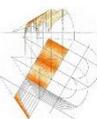
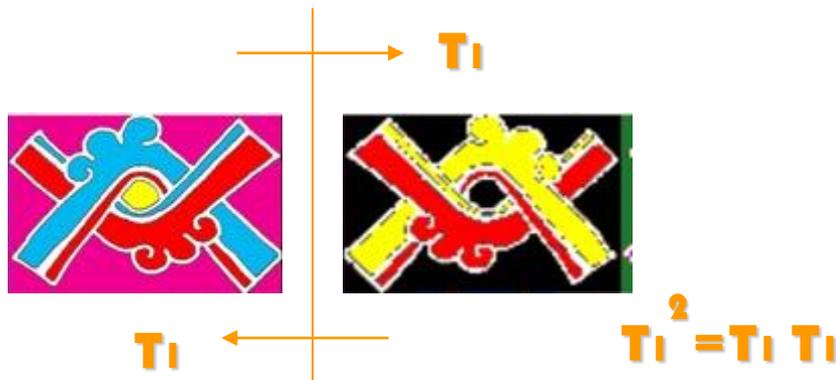


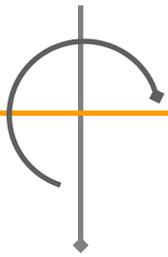
### Definiciones.



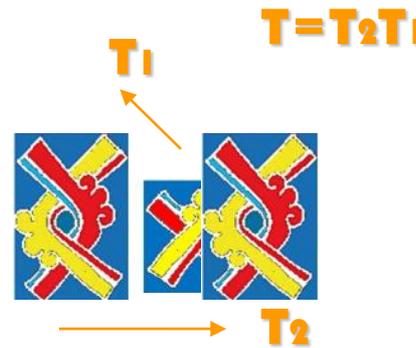
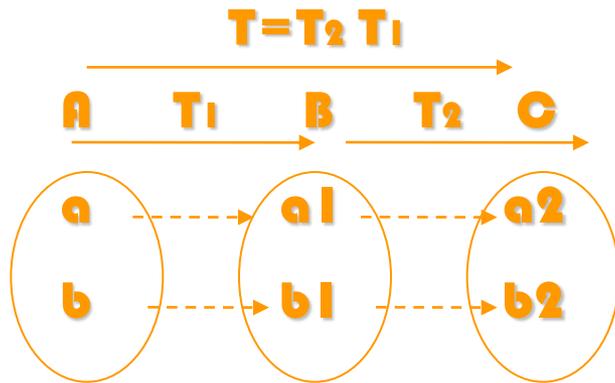
- Una transformación  $T_1$  de un conjunto A sobre si mismo, se dice involutiva si :

$$T_1^2 = T_1 T_1 = I$$





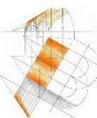
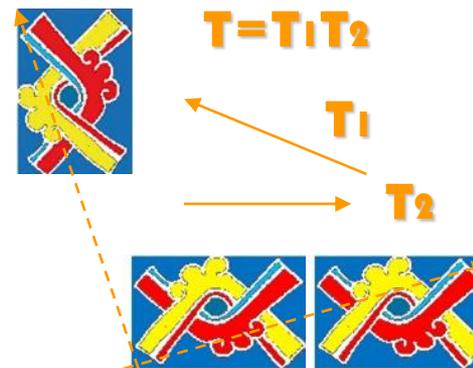
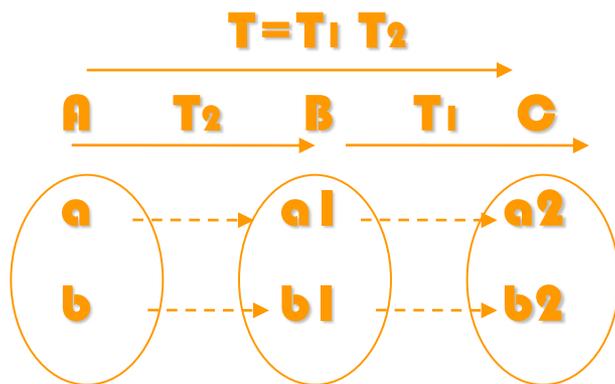
### Teorema.

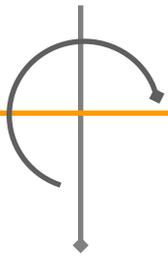


- El producto de dos transformaciones compatibles, aun si cada una es una transformación del conjunto A sobre si mismo, no necesariamente son conmutativas.

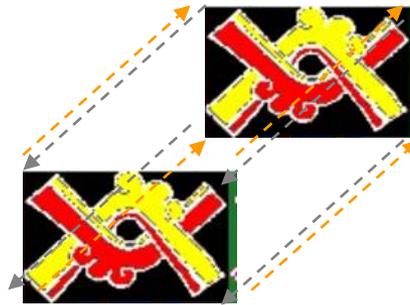
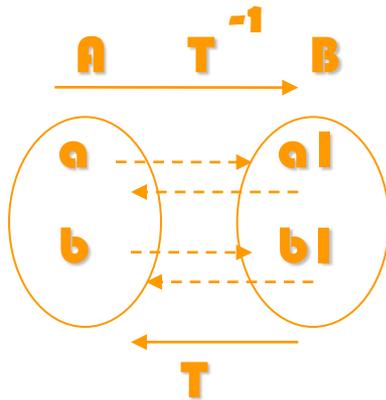
- Esto es, si existe tanto  $T_2 T_1$  como  $T_1 T_2$  no necesariamente

$$T_2 T_1 = T_1 T_2$$



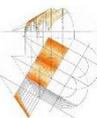
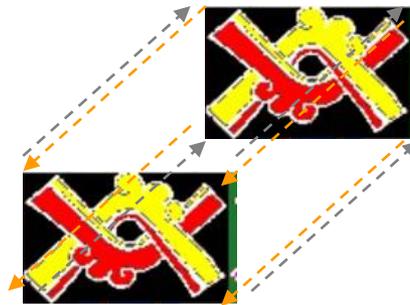
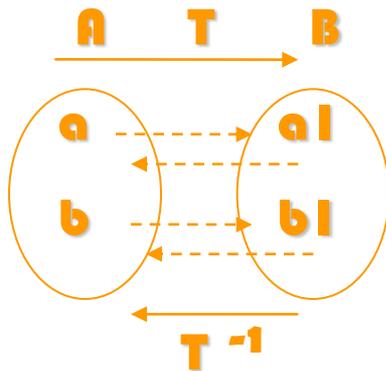


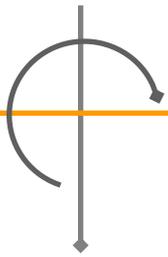
### Teorema.



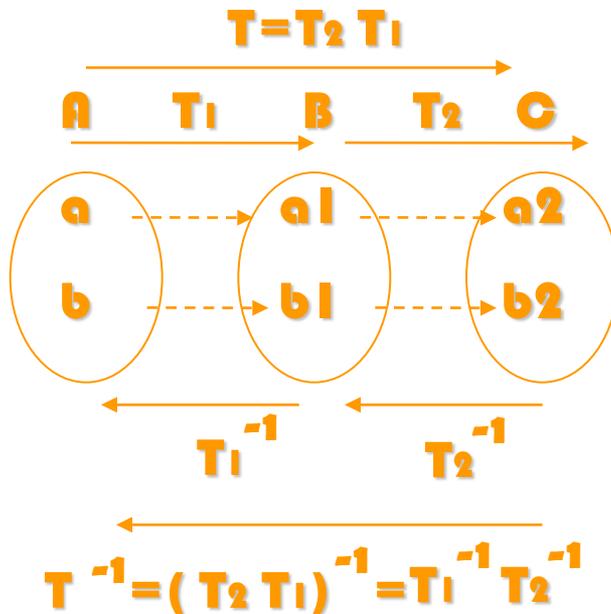
- Si  $T$  es una transformación del conjunto  $A$  sobre si mismo, entonces:

$$T^{-1}T = TT^{-1} = I$$



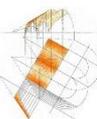


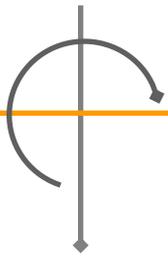
### Teorema.



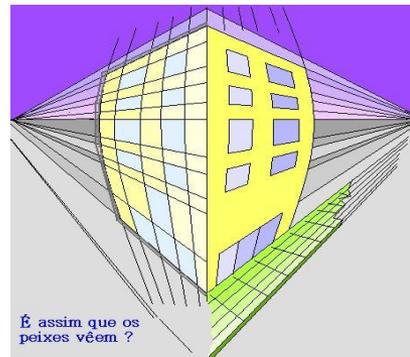
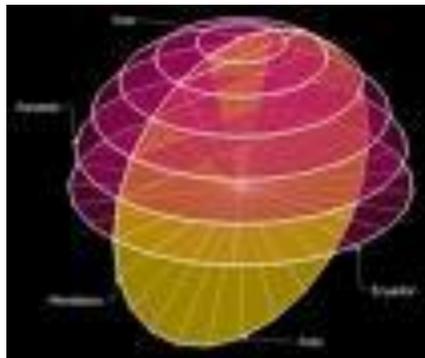
- Si la transformación T2 es compatible con T1, entonces:

- $(T_2 T_1)^{-1} = T_1^{-1} T_2^{-1}$



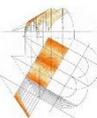


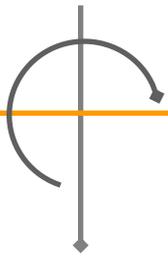
### Transformaciones.



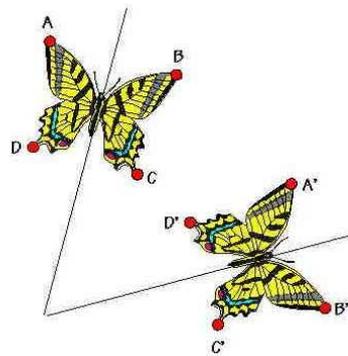
• Las Transformaciones pueden ser de tres tipos:

- 1.- Transformaciones que dan origen a formas congruentes, igualdad de formas. Denominadas Isometrías o movimientos rígidos.
- 2.- Transformaciones que conservan la forma y establecen relaciones de proporcionalidad entre dos figuras transformadas. Dan origen a formas semejantes. Isomórficas.
- 3.- Transformaciones que no conservan la forma. Anamórficas.





### Transformaciones Puntuales en el Plano.



- Sea  $S$  el conjunto de todos los puntos de un Plano Ordinario.

Definición de algunas transformaciones del conjunto  $A$  sobre sí mismo:

#### 1.- Isometrías:

Traslación.

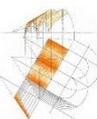
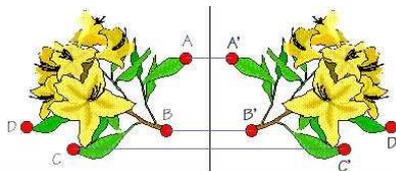
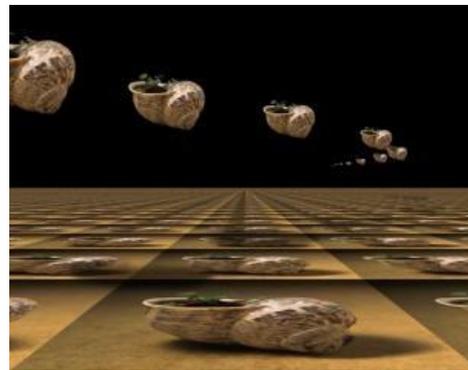
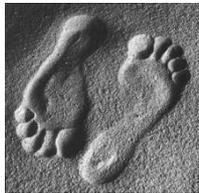
Rotación

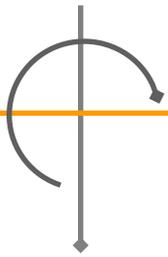
Reflexión con respecto a un punto.

Reflexión con respecto a un eje.

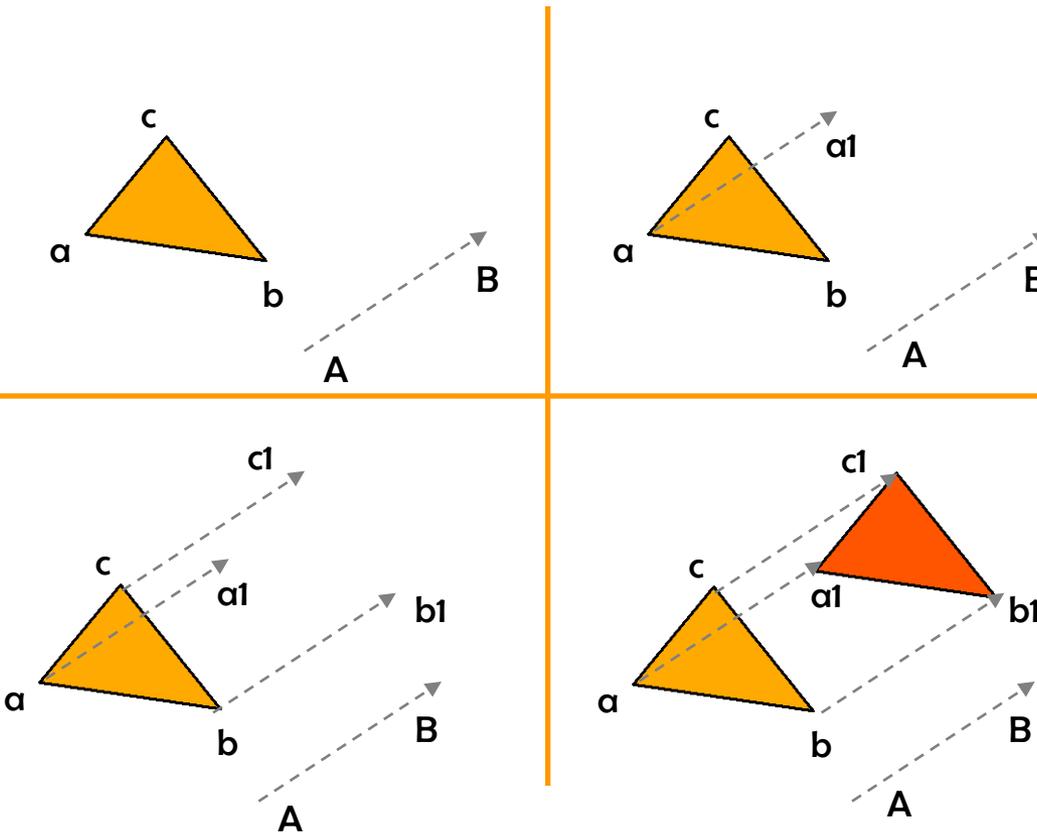
#### 2.- Isomorfas:

Homotecia.





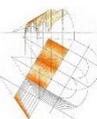
### Transformación Traslación: $T(AB)$ .

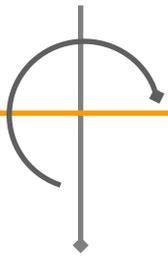


- Sea  $AB$  un segmento rectilíneo dirigido del plano, por la Transformación Traslación  $T(AB)$  se quiere decir, la transformación de  $S$  sobre si mismo que transporta todo punto  $P$  del plano al punto  $P'$  del mismo plano, tal que:

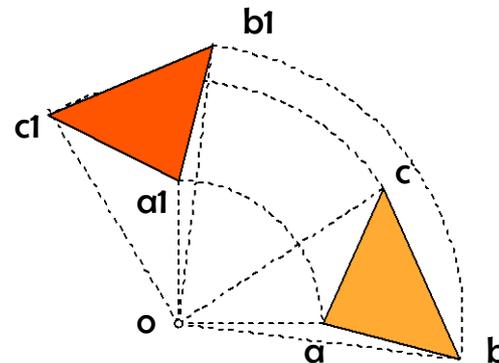
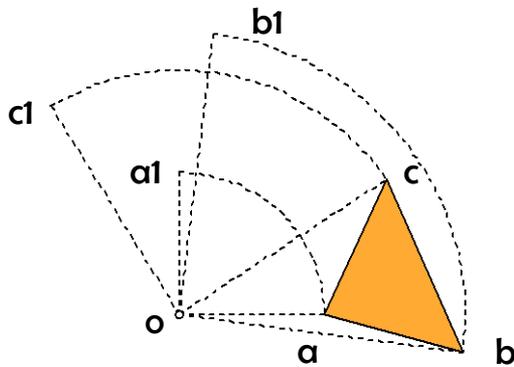
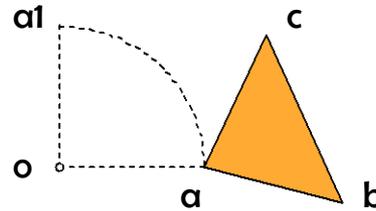
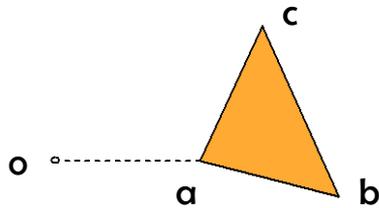
**$PP'$  sea igual y paralelo a  $AB$ .**

- El segmento  $AB$  se llama vector de traslación.





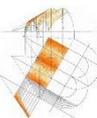
### Transformación Rotación : $R(O, \theta)$ .

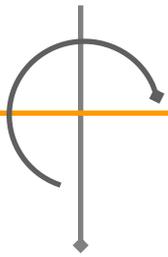


- Sea  $O$  un punto fijo del plano y  $\theta$  un determinado ángulo con sentido, por la Transformación Rotación  $R(O, \theta)$  se quiere decir la Transformación de  $S$  sobre si mismo que lleva a cada punto  $P$  del plano al punto  $P'$  del mismo plano, tal que :

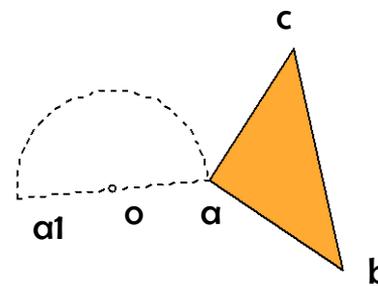
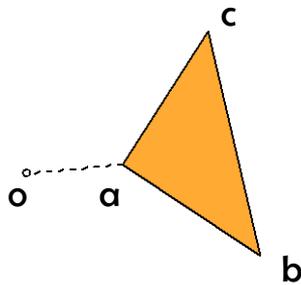
•  **$OP = OP'$  y el ángulo  $POP' = \theta$**

- El punto  $O$  se llama centro de rotación y  $\theta$  se llama ángulo de rotación.





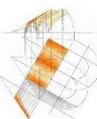
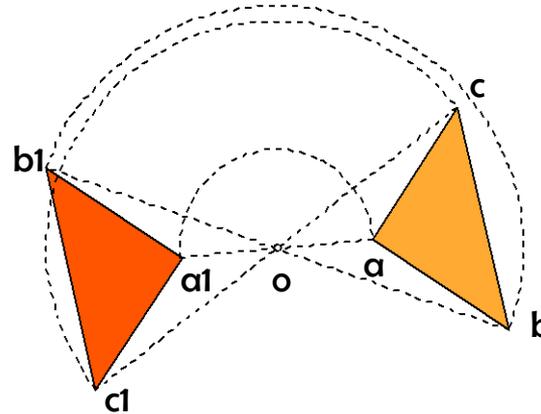
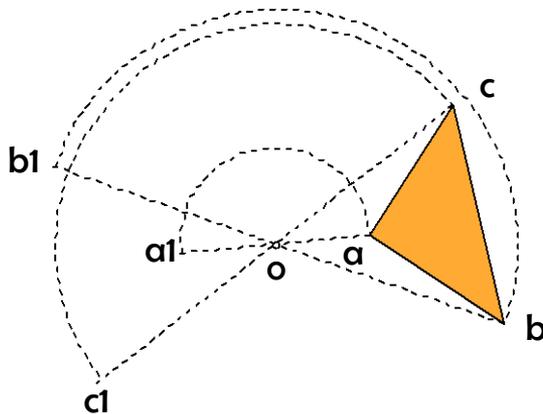
### Transformación Reflexión con respecto a un Punto $O$ : $R(O)$ .

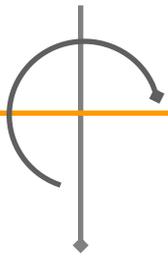


- Sea  $O$  un punto fijo del plano, por la Transformación Reflexión o semivuelta  $R(O)$  se quiere decir la Transformación de  $S$  sobre si mismo que lleva a cada punto  $P$  del plano al punto  $P'$  del mismo plano, tal que :

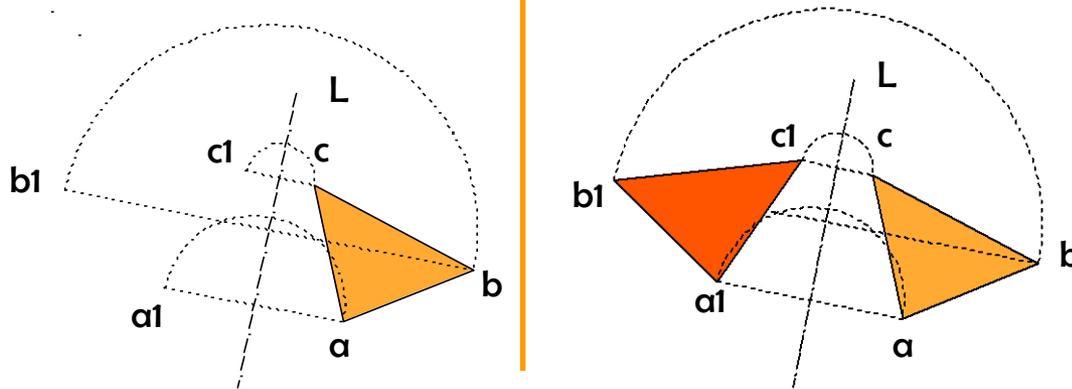
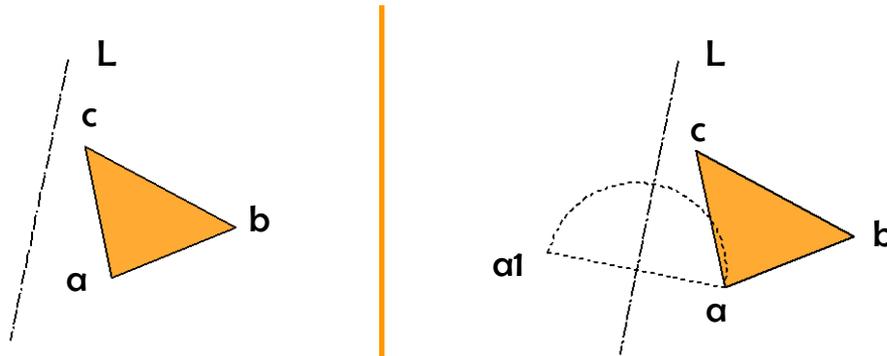
• **Sea  $O$  el punto medio de  $PP'$**

- El punto  $O$  se llama centro de reflexión.





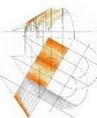
### Transformación Reflexión con respecto a un Eje $L : R(L)$ .

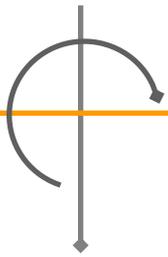


- Sea  $L$  una recta fija del plano, por la Transformación Reflexión  $R(L)$  en la recta se quiere decir la Transformación de  $S$  sobre si mismo que lleva a cada punto  $P$  del plano al punto  $P'$  del mismo plano, tal que :

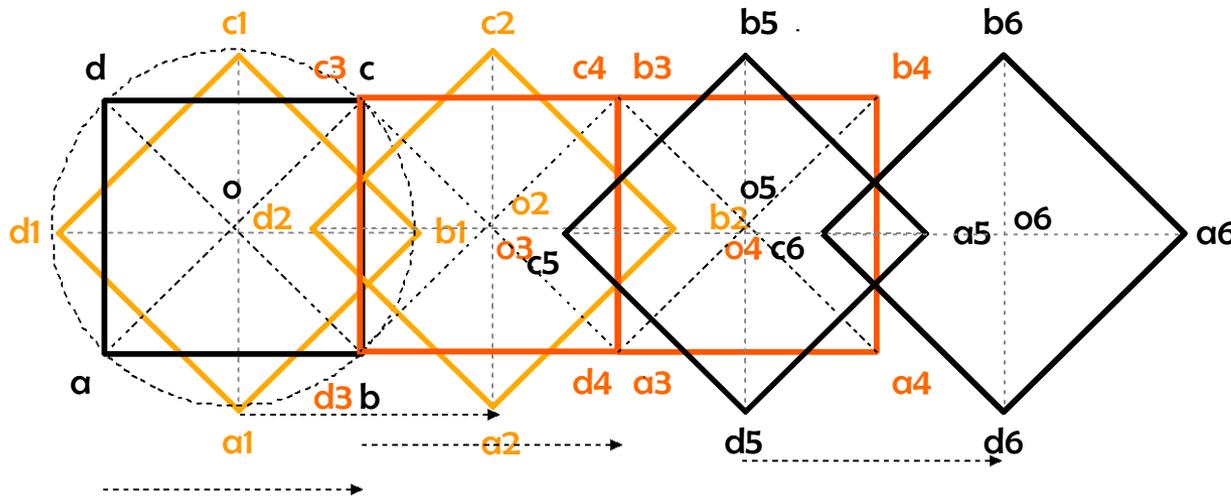
• **Sea  $L$  la mediatriz del trazo  $PP'$**

- La recta  $L$  se llama Eje de reflexión.





### Producto de Transformaciones Puntuales.



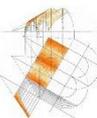
Dado un cuadrado abcd de lado 3 cm., se pide:

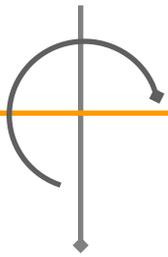
Determinar  $T = (T_2 T_1)^n$

$T_1 = R(O_i, 45^\circ)$ ;  $T_2 = T(ab)$

O = Intersección de las diagonales del cuadrado.

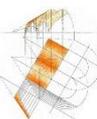
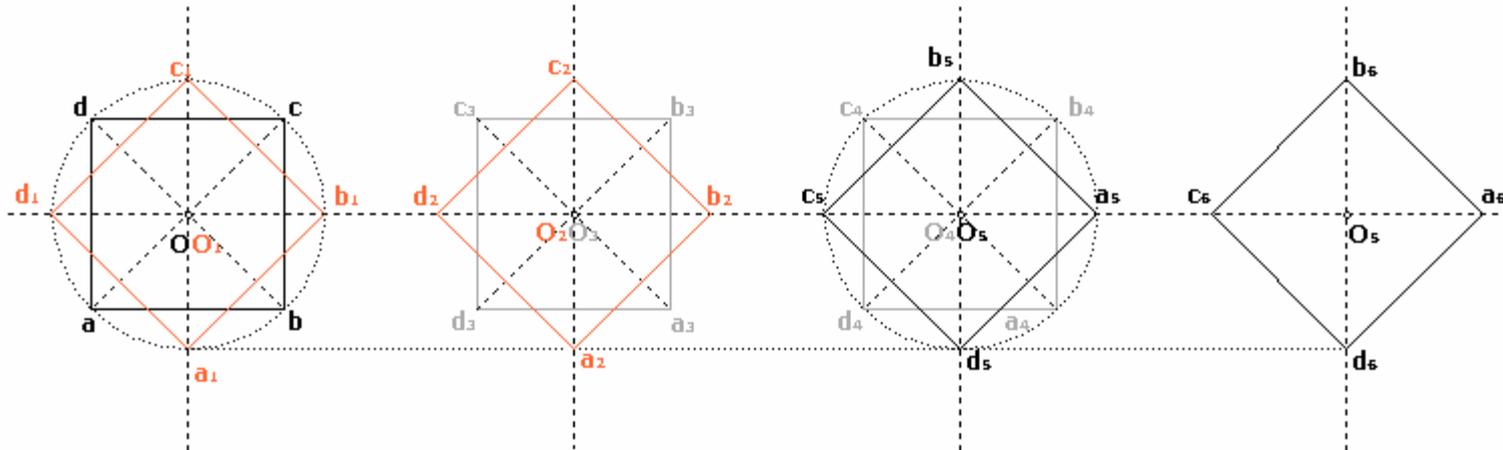
i = Subíndice de la última transformación.

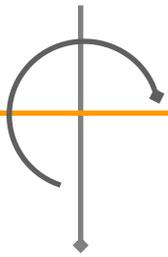




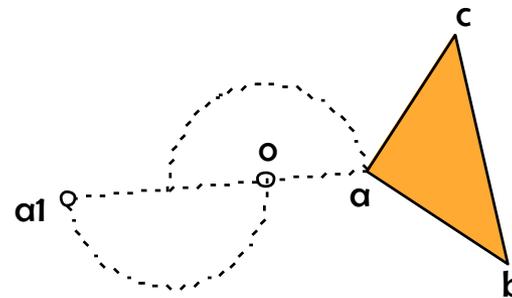
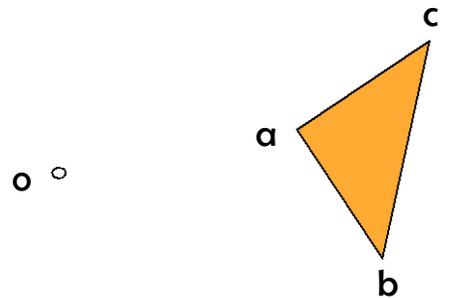
### Producto de Transformaciones Puntuales.

Determinar  $T = (T_2 T_1)^n$   
 $T_1 = R(O_i, 45^\circ)$ ;  $T_2 = T(2ab)$   
 $O$  = Intersección de las diagonales del cuadrado.  
 $i$  = Subíndice de la última transformación.





### Transformación Homotecia : $H(O, K)$ .

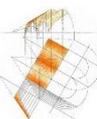
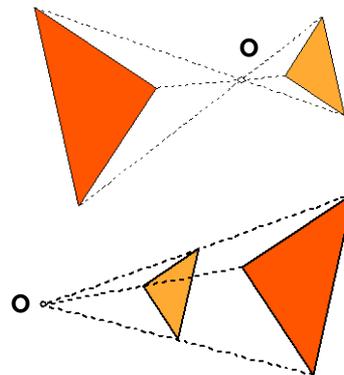
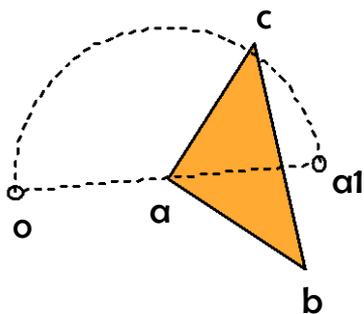


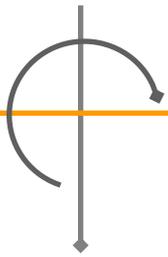
- Sea  $O$  un punto fijo del plano y  $K$  un número real dado distinto de cero, por la Transformación Homotecia ( o expansión, o dilatación, o alargamiento)

$H(O, K)$  se quiere decir, la Transformación de  $S$  sobre si mismo que lleva a cada punto  $P$  del plano al punto  $P'$  del mismo plano, tal que :

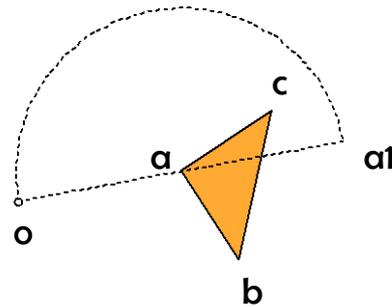
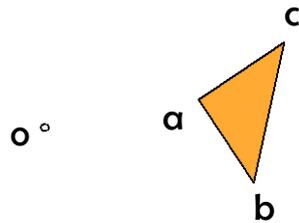
$$\bullet OP' = KOP$$

- El punto  $O$  se llama centro de Homotecia y  $K$  es la razón de Homotecia.



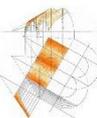
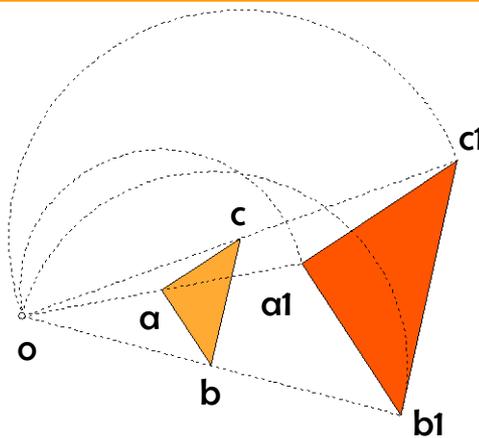
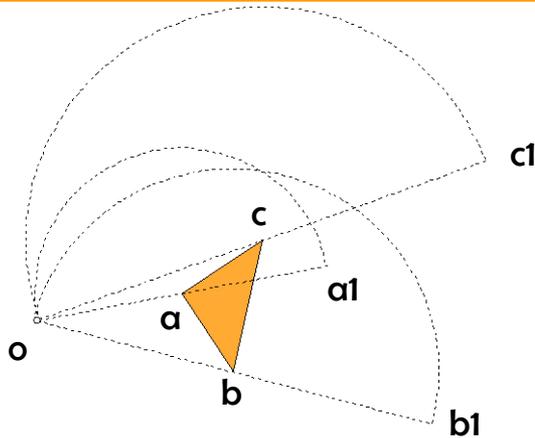


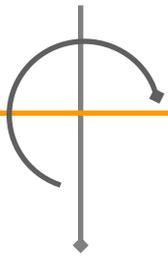
### Homotecia Directa : $H(O, K)$ .



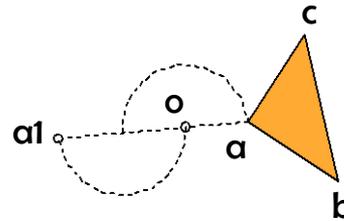
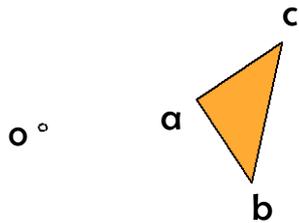
- Cuando  $K$  es un número real positivo la Homotecia es Directa. En este caso dos puntos homotéticos están ubicados en la misma semirrecta respecto del centro de homotecia  $O$ .

•  $OP' = K \cdot OP$



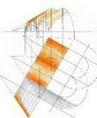
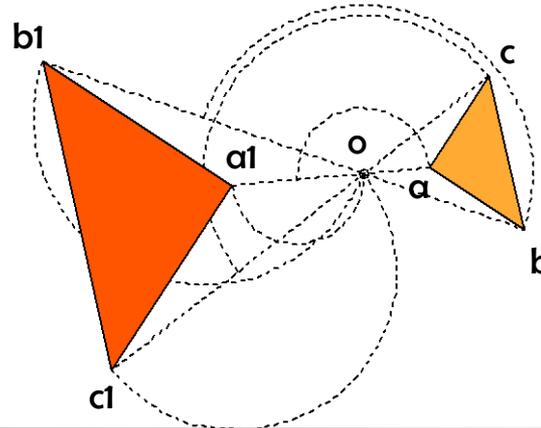
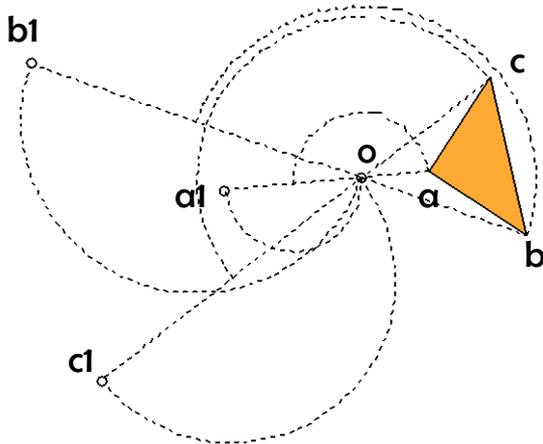


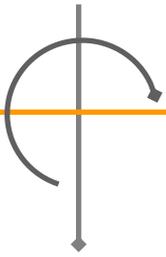
### Homotecia Inversa : $H(O, K)$ .



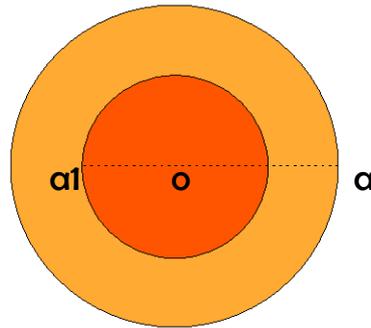
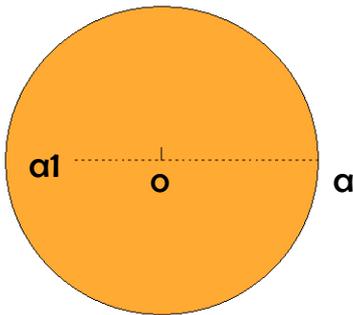
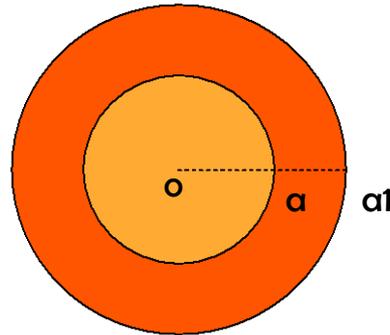
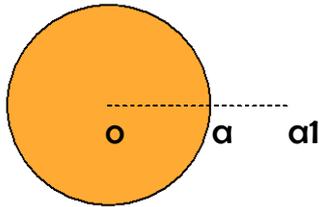
- Cuando  $K$  es un número real negativo la Homotecia es Inversa. En este caso dos puntos homotéticos están ubicados en una semirrecta distinta respecto del centro de homotecia  $O$ .

$$\bullet OP' = |K|OP$$





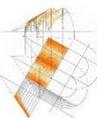
### Homotecia en circunferencias :

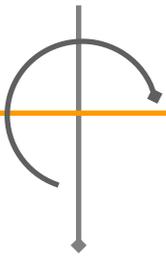


- Dos circunferencias siempre están relacionadas homotéticamente, ya sean circunferencias concéntricas o no concéntricas :

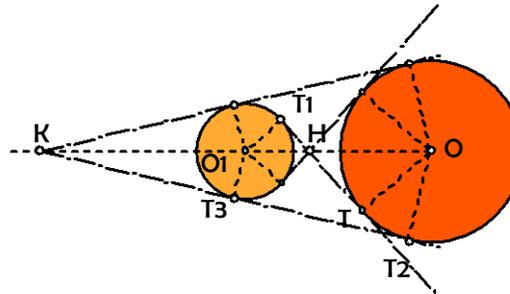
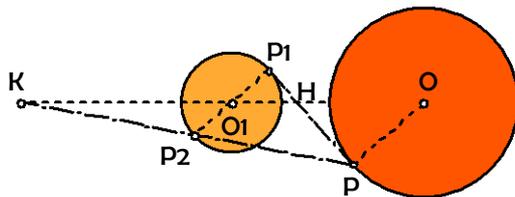
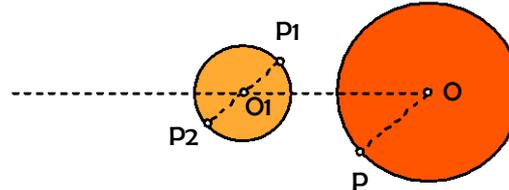
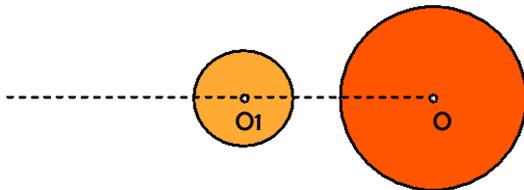
- Circunferencias concéntricas.

El centro de homotecia es el centro de las circunferencias y la razón de homotecia es la razón de sus radios.

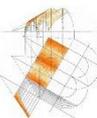


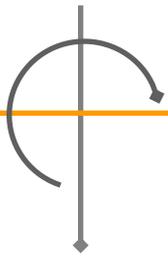


### Homotecia de circunferencias no Concéntricas:

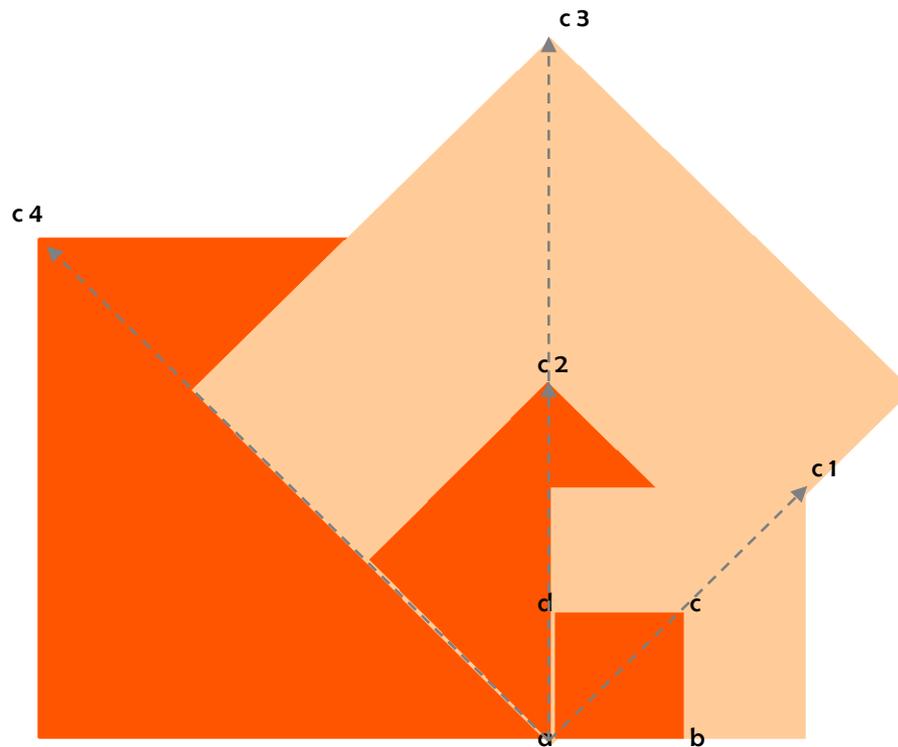


- Son homólogas según dos homotecias, positiva y negativa :
- Procedimiento para definir centro y razón de homotecia.
- Unir centros de circunferencias.
- Se une un punto P de la circunferencia con el centro O.
- Por  $O_1$  se traza paralela a  $OP$  definiendo los puntos  $P_1$  y  $P_2$ .
- Se une P con  $P_1$  y P con  $P_2$ , definiendo los puntos H y K.
- Por H y K se determinan puntos de tangencias T,  $T_1$  y  $T_2$ ,  $T_3$ .
- Se definen triángulos semejantes  $OTH$  con  $O_1T_1H$  y el triángulo  $OT_2K$  con  $O_1T_3K$ .





### Producto de Transformaciones Puntuales :

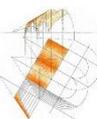


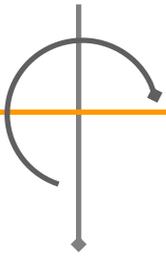
- Dado un cuadrado abcd se pide, determinar el siguiente producto de transformaciones :

n

$$T = ( T_2 T_1 )$$

$$\text{Si } T_1 = H(a, 2) \text{ y } T_2 = R(a, 45^\circ)$$





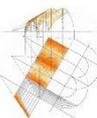
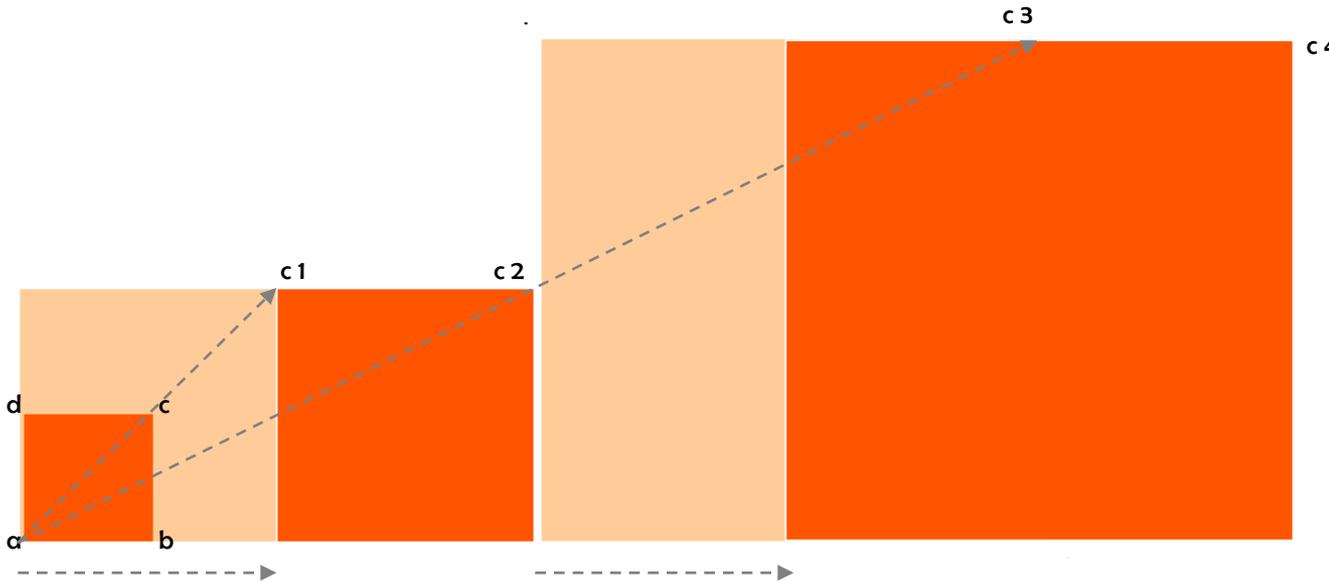
### Producto de Transformaciones Puntuales :

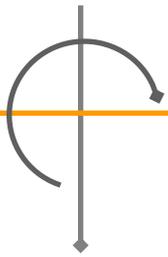
• Dado un cuadrado  $abcd$  se pide, determinar el siguiente producto de transformaciones :

$n$

$$T = (T_2 T_1)$$

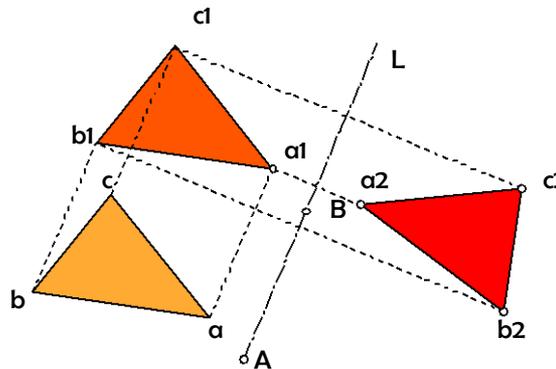
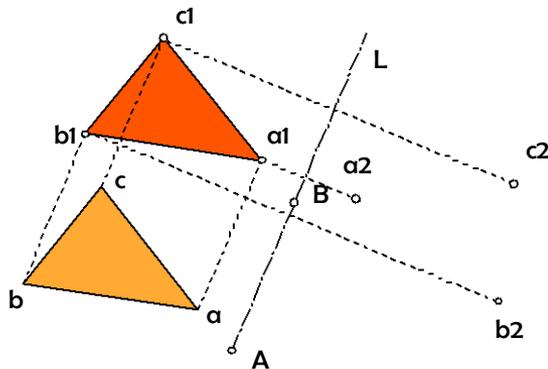
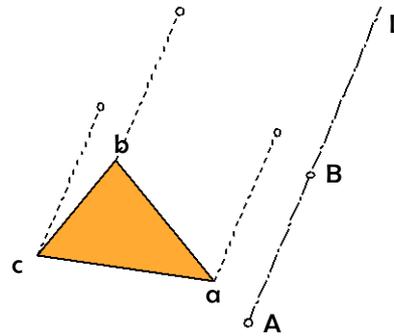
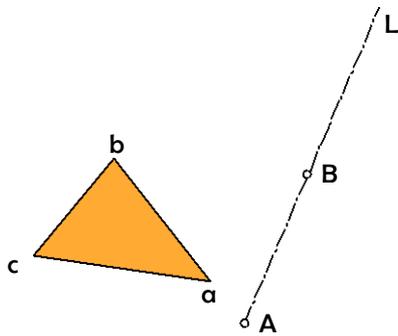
Si  $T_1 = H(a, 2)$  y  $T_2 = T(2ab)$





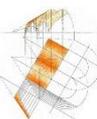
### Combinación de Transformaciones :

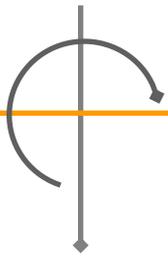
#### 1.- Deslizamiento Reflexión : $G(L, AB)$



• Sea  $L$  una recta dirigida del plano y  $AB$  un determinado segmento dirigido de  $L$ . Por el deslizamiento reflexión  $G(L, AB)$  queremos decir el producto  $R(L) T(AB)$ .

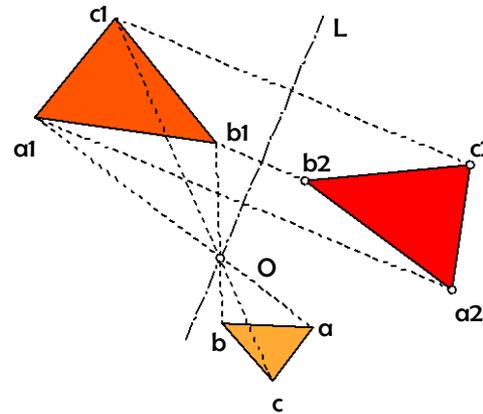
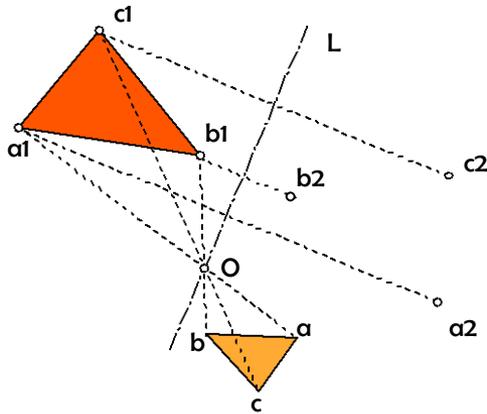
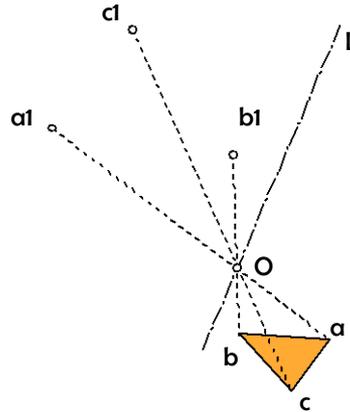
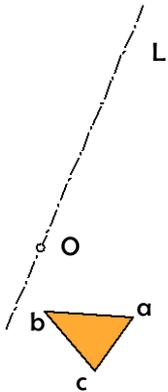
• La recta  $L$  se llama eje de deslizamiento reflexión y el segmento dirigido  $AB$  vector de deslizamiento reflexión.





### Combinación de Transformaciones :

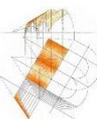
#### 2.- Reflexión Alargamiento : $S(L, O, K)$

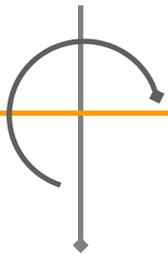


• Sea  $L$  una recta del plano y  $O$  un punto fijo de  $L$  y  $K$  un número real dado distinto de cero.

• Por la Reflexión alargamiento  $S(L, O, K)$  queremos decir el producto  $R(L)H(O, K)$ .

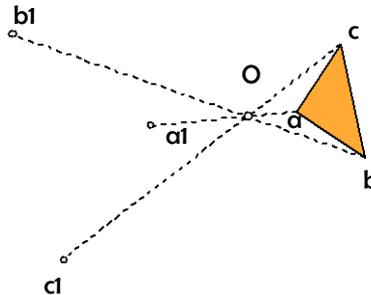
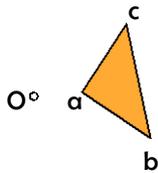
• La recta  $L$  es el eje de reflexión alargamiento,  $O$  es el centro de reflexión alargamiento y  $K$  es la razón de reflexión alargamiento.





### Combinación de Transformaciones :

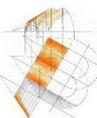
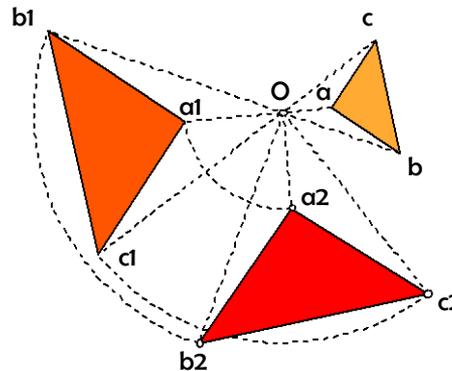
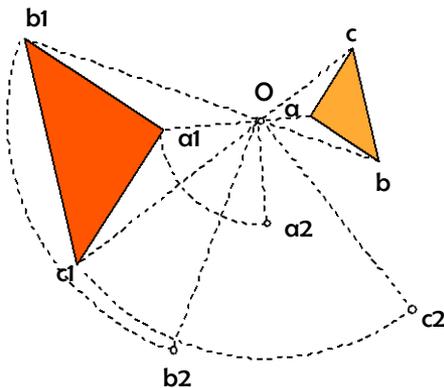
#### 3.- Homología : $H(O, K, \theta)$

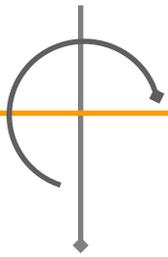


- Sea  $O$  un punto fijo del plano,  $K$  un número real dado distinto de cero y  $\theta$  un determinado ángulo con sentido.

- Por la Homología o rotación en espiral  $H(O, K, \theta)$  queremos decir el producto  $R(O, \theta) H(O, K)$ .

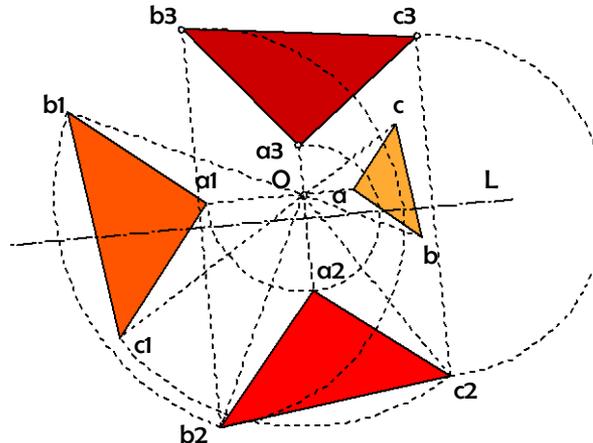
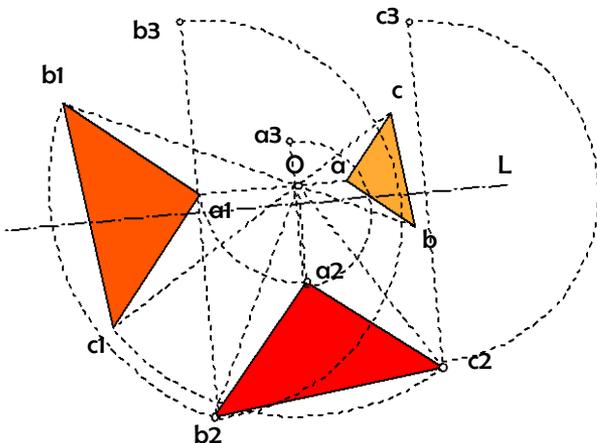
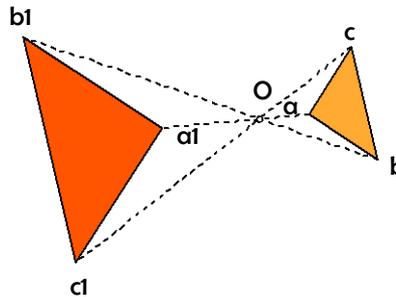
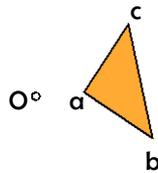
- El punto  $O$  se llama centro de homología,  $K$  es la razón de homología y  $\theta$  es el ángulo de homología.





### Combinación de Transformaciones :

#### 4.- Antilogía : $A(L, O, K, \theta)$



• Sea  $O$  un punto fijo del plano,  $K$  un número real dado distinto de cero,  $\theta$  un determinado ángulo con sentido y  $L$  una recta fija del plano.

• Por la Antilogía designamos al producto  $R(L)H(O, K, \theta)$  que es  $R(L)R(O, \theta)H(O, K)$ .

• El punto  $O$  se llama centro de antilogía,  $K$  es la razón de antilogía,  $\theta$  es el ángulo de homología y  $L$  es el eje de antilogía.

