Deformación en vigas

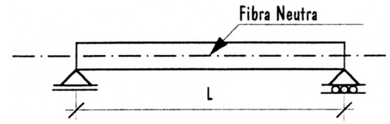
ESTRUCTURAS 2

1

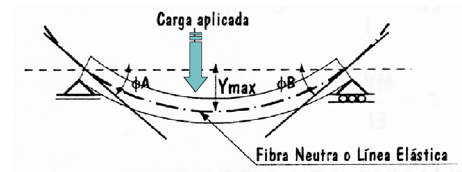
profesora: Verónica Veas   ayudante: Preeti Bellani

Línea elástica

Viga sin carga

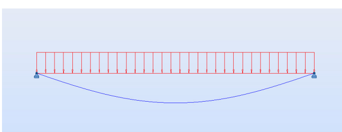


Viga con carga

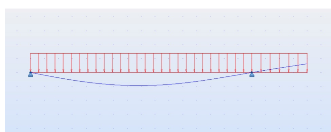


Deformación en vigas

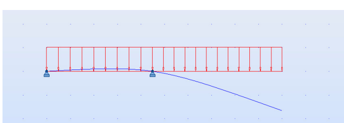
Viga simplemente apoyada



Viga simplemente apoyada con voladizo

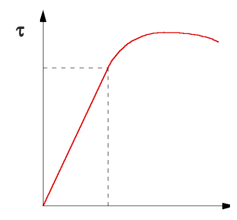


Viga simplemente apoyada con voladizo



Viga empotrada

Ley de Hooke



E = Elasticidad (kg/cm²)
τ = Tensión (kg/cm²)
ε = Deformación Unitaria

$$E = \frac{\tau}{\varepsilon}$$

$\boxed{1}$ $\tau = E * \varepsilon$

Deducción fórmula de flexión

$$\tau = \frac{M}{W} \qquad W = \frac{I}{V} \qquad \boxed{2}\ \tau = \frac{MV}{I}$$

τ = Tensión (kg/cm^2)
M = Momento flector (kgcm)
V = Distancia desde la fibra neutra a la fibra más traccionada o más comprimida (cm)
I = Inercia (cm^4)

Igualando expresiones $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$

$$\tau = E\varepsilon = \frac{MV}{I} \quad \text{ó} \quad \varepsilon = \frac{MV}{EI} \quad \boxed{3}$$

Análisis de la sección

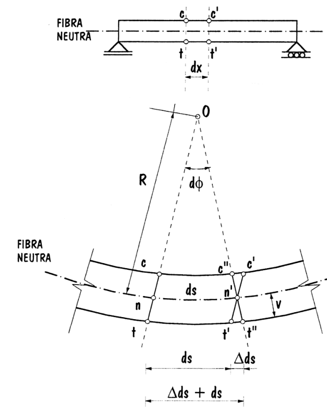
Por relación de triángulos semejantes

$\triangle\, 0\, n\, n'$ y $\triangle\, n'\, t'\, t''$

$$\boxed{4}\quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{V}{R} = \varepsilon$$

$$ds = d\phi * R \qquad /:R\ :ds$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d\phi}{ds}$$



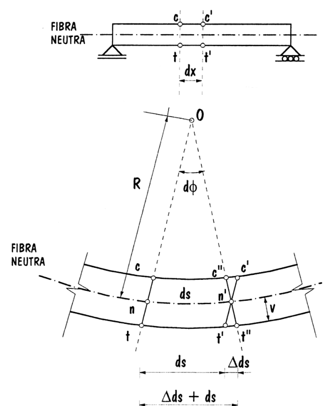
Igualando $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$

$$\varepsilon = \frac{V}{R} = \frac{MV}{EI} \qquad /:V$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} = \frac{d\phi}{ds}$$

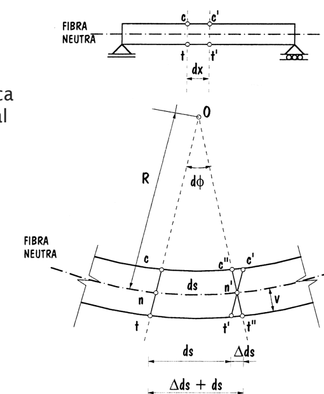
$$d\phi = \frac{M*ds}{EI}$$



Si **$ds \approx dx$**

La curvatura de la línea elástica es una variable proporcional al momento flector.

$$\boxed{d\phi = \frac{Mdx}{EI}}$$



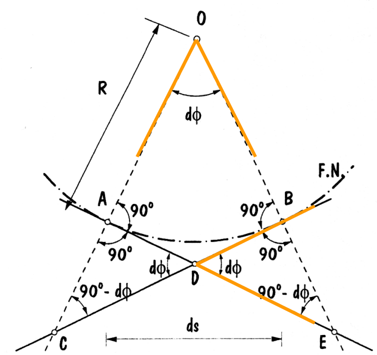
Métodos de cálculo

- a Método de área de momentos.
- b Método de doble integración.
- c Método de la viga conjugada.

Se busca determinar el ángulo de curvatura de la línea elástica y sus deflecciones o flechas.

Cada método tiene ventajas y desventajas dependiendo de la viga a analizar.

Estableciendo relaciones entre ángulos



Método de doble integración

$$d\phi = \frac{M.dx}{EI} \quad \ldots / dx$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M}{EI}$$

Si...

$$\frac{dy}{dx} = tg\phi \Rightarrow tg\phi \approx \phi$$

$$\frac{dy}{dx} = \phi$$

Reemplazando...

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{M}{EI} \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}}$$

$$\boxed{EI\ \frac{d^2y}{dx^2} = M}$$

Ecuación diferencial de la elástica

Integrando...

$$\boxed{EI\ \frac{dy}{dx} = \int M\ dx}$$

Ecuación general de Pendiente

Integrando...

$$\boxed{EI\ y = \iint M\ dx}$$

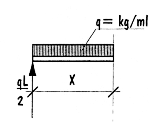
Ecuación general de Flecha

Ejemplo Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida

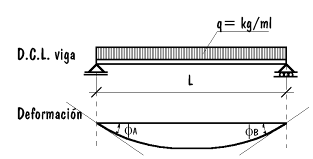
1. Equilibrio externo: cálculo de reacciones

$$Ra = Rb = \frac{qL}{2}$$

2. Determinar ecuación general de momento



$$Mx = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$



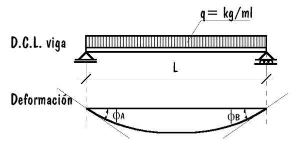
3. Definir la ecuación diferencial de la elástica.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_X = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

4. Definir la ecuación general de la pendiente

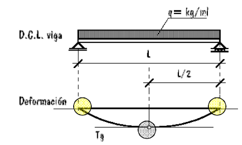
$$EI\ \frac{dy}{dx} = \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C_1$$

5. Definir la ecuación general de la flecha



$$EI\ y = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2$$

6. Despejar las constantes de integración



Para despejar C_1 ...

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

$$EI.\ 0 = \frac{qL}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{q}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + C_1$$

$$C_1 = -\frac{qL^3}{24}$$

$$\boxed{EI\ \frac{dy}{dx} = \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} - \frac{qL^3}{24}}$$

Para despejar C_2 ...

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = L$$

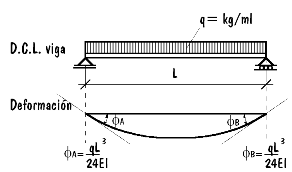
$$EI.\ 0 = \frac{qL}{12}0^3 - \frac{q}{24}0^4 - \frac{qL^3}{24}0 + C_2$$

$$EI.\ 0 = \frac{qL}{12}L^3 - \frac{q}{24}L^4 - \frac{qL^3}{24}L + C_2$$

$$C_2 = 0$$

$$\boxed{EI\ y = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3x}{24}}$$

7. Determinar valores característicos.



Ángulos en los apoyos...

$$\boxed{EI\ \frac{dy}{dx} = \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} - \frac{qL^3}{24}}$$

$x = 0$

$$\phi_A = \frac{dy}{dx} = -\frac{qL^3}{24EI}$$

$x = L$

$$\phi_B = \frac{dy}{dx} = \frac{qL^3}{4EI} - \frac{qL^3}{6EI} - \frac{qL^3}{24EI}$$

$$\phi_B = \frac{dy}{dx} = \frac{qL^3}{24EI}$$

La flecha máxima...

$$\boxed{EI\ y = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3x}{24}}$$

$x = L/2$

$$y = \frac{qL}{12EI}\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{q}{24EI}\left(\frac{L}{2}\right)^4 - \frac{qL^3}{24EI}\frac{L}{2}$$

$$y = \frac{5qL^4}{384EI}$$