VIGAS HIPERESTATICAS

Materia: Estructura II

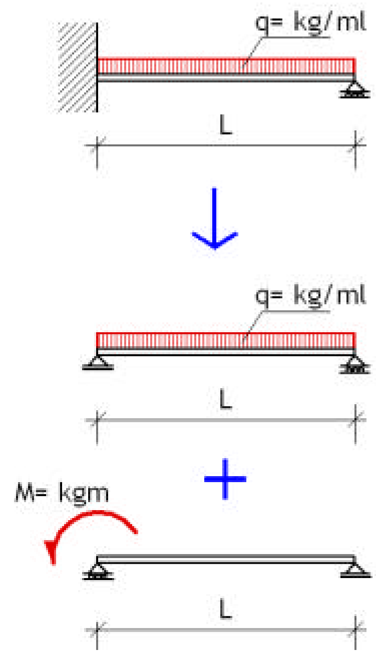
Folio: EST 2-02

Fecha: Noviembre/2000

Autores: Arqto. Verónica Veas B.
Arqto. Jing Chang Lou

I.- INTRODUCCION

El análisis de las deformaciones en vigas nos permite limitar los descensos de las mismas, entregando secciones adecuadas y por otra parte incorporar nuevas expresiones para resolver vigas hiperestáticas.



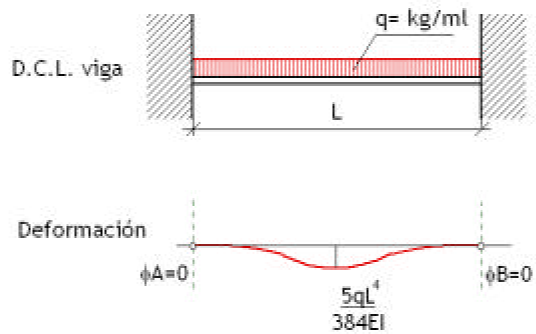
Una forma de enfocar la resolución de las vigas hiperestáticas consiste en descomponer la viga inicial en varias vigas cuyo efecto sumado equivalga a la situación original.

Las solicitaciones externas, cargas y reacciones, generan cortante, momento y deformación, siendo válido el principio de descomposición de las vigas en vigas cuyas acciones sumen el mismo efecto.

Este principio puede ser aplicado a vigas hiperestáticas, tales como

- Vigas bi-empotradas
- Vigas empotrada-apoyada
- Vigas continuas

VIGA EMPOTRADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA



En el caso de viga empotrada en sus dos extremos, la cantidad de reacciones desconocidas supera a la de ecuaciones que la estática dispone para el sistema. Para resolver las incógnitas es necesario disponer de otras ecuaciones basadas en las deformaciones.

Considerando que las pendientes de las tangentes trazadas en los dos extremos es nula, se plantean las siguientes ecuaciones

$$\Sigma\phi A = 0 \qquad\qquad \Sigma\phi B = 0$$

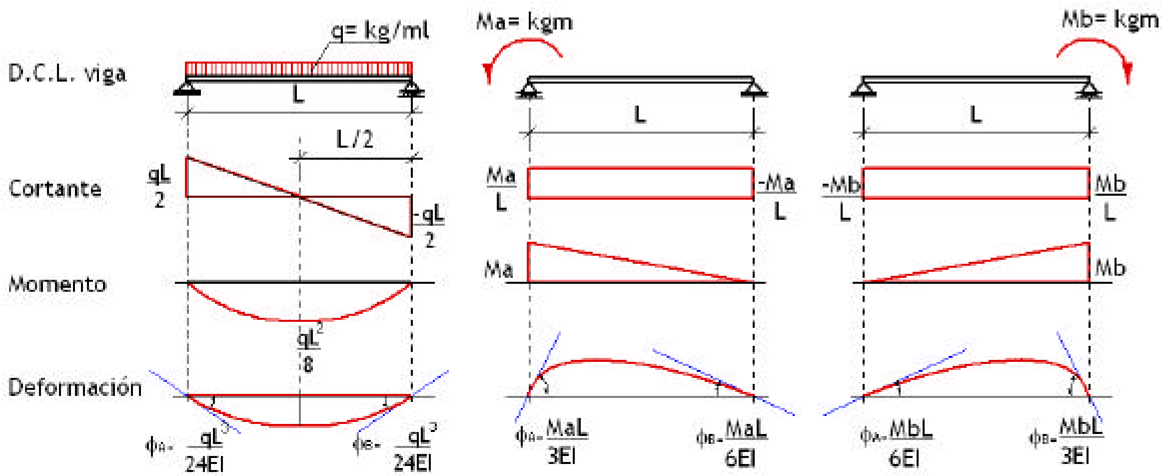
Para establecer las ecuaciones se descompone la viga dada en tres vigas supuestas que en conjunto equivalgan a la viga inicial.

a.- Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida.

b.- Viga simplemente apoyada con momento aplicado en el extremo izquierdo (Ma).

c.- Viga simplemente apoyada con momento aplicado en el extremo derecho (Mb).

.



Si las pendientes de las tangentes trazadas en los dos extremos son nulas, se igualan los valores de ángulo en los extremos de las tres vigas supuestas a cero.

$\Sigma\phi A = 0$

$$0 = \frac{qL^3}{24} - \frac{MeL}{6EI} - \frac{MeL}{3EI}$$

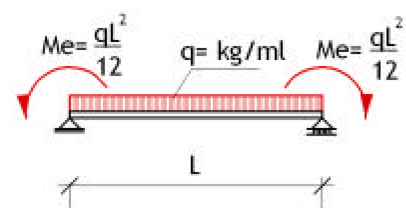
Como la viga es simétrica los momentos aplicados en ambos extremos son iguales

Ma = Mb = Me

$$\frac{MeL + 2MeL}{6EI} = \frac{qL^3}{24EI}$$

$$\boxed{Me = \frac{qL^2}{12}}$$

Una vez determinados los momentos de empotramiento, la viga puede ser analizada como un elemento isostático. Se despeja el momento de tramo, considerando la viga simplemente apoyada con carga repartida uniformemente y un momento Me aplicado en cada extremo de la viga



$$Ra = Rb = \frac{qL}{2}$$

$$Mx = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} - Me$$

El momento máximo en una viga simétrica se encuentra en X=L/2

$$M_{(L/2)} = \frac{qL}{2}\frac{L}{2} - \frac{q}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - Me$$

$$M_{(L/2)} = \frac{qL^2}{4} - \frac{qL^2}{8} - \frac{qL^2}{12}$$

$$M_{(L/2)} = \frac{qL^2}{24}$$

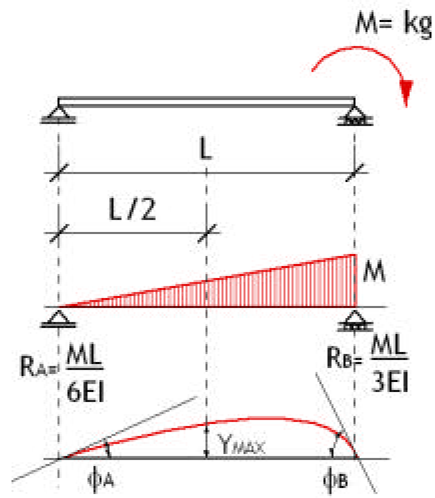
$$\boxed{M_{MAX} = \frac{qL^2}{24}}$$

Como la viga es simétrica la flecha máxima se encuentra en el punto medio de la viga, es decir, Ymax cuando X= L/2.. Una forma de resolver es sumar las flechas en X= L/2 de las tres vigas supuestas en la descomposición anterior.

La flecha cuando X= L/2 de una viga con carga uniformemente repartida, ya calculada anteriormente, es:

$$Y_{MAX} = \frac{5qL^4}{384EI}$$

Se determina la flecha en X= L/2 de una viga con momento aplicado en un extremo, en este ejemplo se plica el método de viga conjugada.



$$M'_{L/2} = \frac{MeL}{6EI}\frac{L}{2} - \frac{MeL}{2EI}\frac{L}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{L}{2}$$

$$M'_{L/2} = \frac{MeL^2}{16EI}$$

Reemplazando el valor de Me se obtiene

$$M'_{L/2} = \frac{qL^2}{12}\frac{L^2}{16EI}$$

$$Y_{L/2} = M'_{L/2} = \frac{qL^4}{192EI}$$

Si sumamos las tres deformaciones obtendremos la deformación máxima de la viga

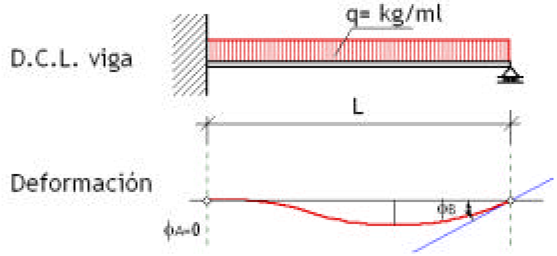
$$Y_{MAX} = \frac{5qL^4}{384EI} - \frac{qL^4}{192EI} - \frac{qL^4}{192EI}$$

$$\boxed{Y_{MAX} = \frac{qL^4}{384EI}}$$

VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y SIMPLEMENTE APOYADA EN EL OTRO, CON CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA.

En este caso de viga empotrada en uno de sus extremos, la cantidad de reacciones desconocidas también supera a la de ecuaciones de estática. Para resolver las incógnitas es necesario disponer de las ecuaciones basadas en las deformaciones.

Considerando que la pendiente de la tangente trazada en el extremo empotrado es nula, se plantea la ecuación:

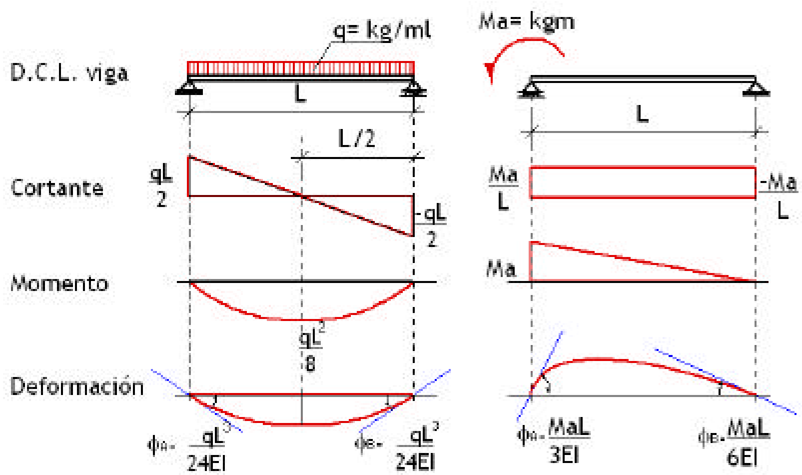


$$\phi A = 0$$

Se descompone la viga inicial en dos vigas supuestas que en conjunto equivalen a la viga inicial.

a.- Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida.

b.- Viga simplemente apoyada con momento aplicado en el extremo izquierdo.



Se iguala los valores de ángulo en el apoyo izquierdo de las dos vigas supuestas a cero.

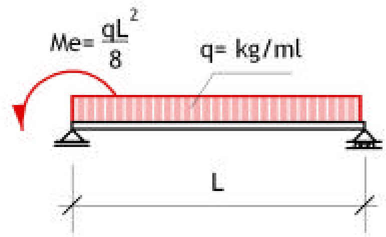
$$\Sigma \phi A = 0$$

$$0 = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{MeL}{3EI}$$

$$\frac{MeL}{3EI} = \frac{qL^3}{24EI}$$

$$\boxed{Me = \frac{qL^2}{8}}$$

Para determinar el momento de tramo, se considera la viga simplemente apoyada con carga repartida uniformemente y un momento Me aplicado en el extremo reemplazando el empotramiento inicial.

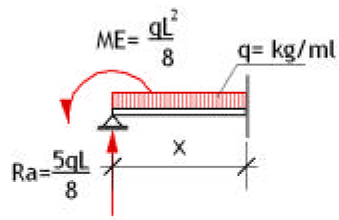


Las reacciones se pueden determinar sumando las reacciones de las vigas supuestas.

$$Ra = \frac{qL}{2} + \frac{Me}{L} = \frac{qL}{2} + \frac{qL}{8} = \frac{5qL}{8}$$

$$Rb = \frac{qL}{2} - \frac{Me}{L} = \frac{qL}{2} - \frac{qL}{8} = \frac{3qL}{8}$$

El momento es máximo cuando el cortante es nulo.



Qx=0

$$\frac{5qL}{8} - q.x = 0$$

$$X = \frac{5L}{8}$$

$$Mx = \frac{5qLx}{8} - \frac{qx^2}{2} - Me$$

$$M_{MAX} = \frac{5qL}{8}\frac{5L}{8} - \frac{q}{2}\left(\frac{5L}{8}\right)^2 - \frac{qL^2}{8}$$

$$M_{MAX} = \frac{25qL^2}{64} - \frac{25qL^2}{128} - \frac{qL^2}{8}$$

$$\boxed{M_{MAX} = \frac{9qL^2}{128}}$$

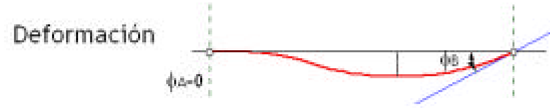
Deformación de la viga,:

Para determinar los valores máximos de pendiente y flecha, en este ejemplo, se aplica el método de doble integración. Para lo cual se establece la ecuación general de momento y a su vez la ecuación diferencial de la elástica.

$$Mx = \frac{5qLx}{8} - \frac{qL^2}{8} - \frac{qx^2}{2}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5qLx}{8} - \frac{qL^2}{8} - \frac{qx^2}{2}$$

Integrando dos veces la ecuación se obtiene:



$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{5qLx^2}{16}-\frac{qL^2x}{8}-\frac{qx^3}{6}+C_1$$

$$EI.y=\frac{5qLx^3}{48}-\frac{qL^2x^2}{16}-\frac{qx^4}{24}+C_1x+C_2$$

Según la deformación de la viga, la pendiente es nula en el extremo empotrado.

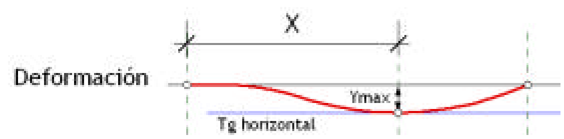
Si X=0 $\qquad$ $C_1=0$

Según las condiciones de apoyo, la flecha es nula en los apoyos.

Si X=0 o X=L $\qquad$ $C_2=0$

Para determinar la flecha máxima de la viga es necesario primero ubicar el punto en donde la tangente trazada por dicho punto sea de pendiente nula, por lo tanto se iguala la ecuación de pendiente a cero

$$\frac{5qLx^2}{16}-\frac{qL^2x}{8}-\frac{qx^3}{6}=0$$ / se factoriza por qx/2



$$\frac{qx}{2}\left(\frac{5Lx}{8}-\frac{L^2}{8}-\frac{qx^2}{6}\right)=0$$

$X_1=0$ punto de empotramiento

$$\frac{5Lx}{8}-\frac{L^2}{4}-\frac{x^2}{3}=0$$ /*24

$$15Lx-6L^2-8x^2=0$$

Ordenando la ecuación se tiene

$$-8x^2+15Lx-6L^2=0$$

$$X=\frac{-15L\pm\sqrt{(15L)^2-4.(-8).(-6L)}}{2.(-8)}$$

$$X=\frac{-15L\pm\sqrt{225L^2-192L^2}}{-16}$$

$$X_2=\frac{-15L+\sqrt{33L^2}}{-16}=0{,}58L$$ punto de flecha máxima.

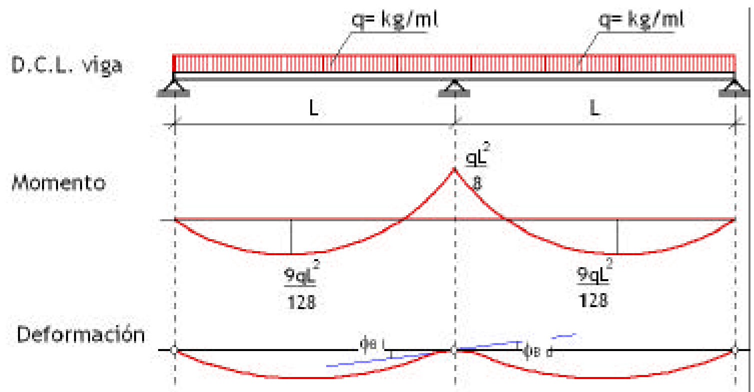
$$X_3=\frac{-15L-\sqrt{33L^2}}{-16}=1{,}3L$$ punto fuera de la viga.

Se determina la flecha cuando $X = 0.58L$ para obtener la deformación máxima de la viga.

$$Y = \frac{5qL}{48EI}(0,58L)^3 - \frac{qL^2}{16EI}(0,58L)^2 - \frac{q}{24EI}(0,58L)^4$$

$$\boxed{Y_{MAX} = \frac{qL^4}{185EI} = 0,005\,\frac{qL^4}{EI}}$$

VIGA CONTINUA DE DOS TRAMOS CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA.



En este caso de viga continua, la cantidad de reacciones desconocidas también supera a la de ecuaciones de estática. Se establece entonces ecuaciones basada en las deformaciones.
El ángulo que genera la tangente trazada en un punto de la curva de la línea elástica, medido hacia la izquierda es de igual valor, pero de signo contrario que si se mide hacia la derecha.

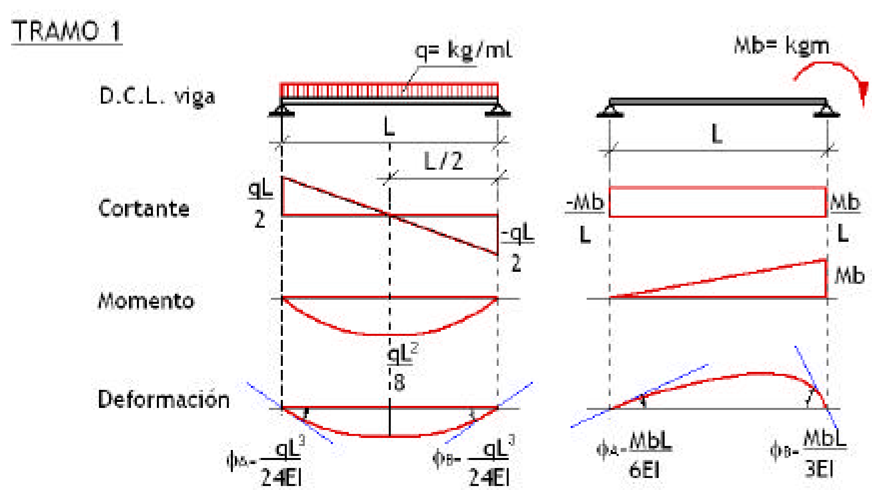
$\phi B_{izquierdo} = -\phi B_{derecho}$ por ángulos opuestos por el vértice

El momento de continuidad que se genera es en este caso nuestra primera incógnita. Para resolverla se separa la viga continua en dos tramos y éstos a su vez, se descomponen en dos vigas supuestas que en conjunto equivalen a la viga inicial.

TRAMO 1

a.- Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida.

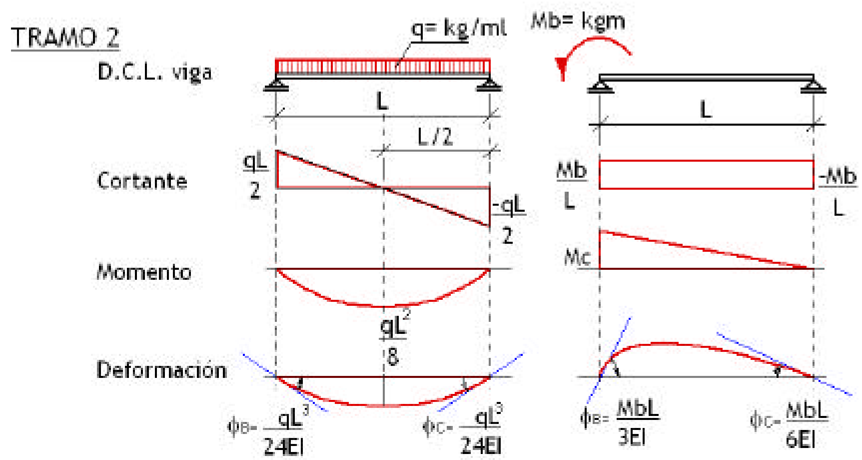
b.- Viga simplemente apoyada con momento aplicado en el extremo derecho.



TRAMO 2

a.- Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida.

b.- Viga simplemente apoyada con momento aplicado en el extremo izquierdo.



Se iguala los valores de ángulos a ambos lados del apoyo B para determinar el momento de continuidad entre ambos tramos.

$\Sigma\phi B_{izquierdo} = -\Sigma\phi B_{derecho}$

$$\frac{qL^3}{24EI} - \frac{MbL}{3EI} = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{MbL}{3EI}$$

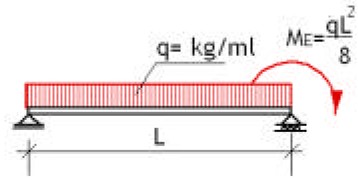
$$\frac{2MbL}{3EI} = \frac{qL^3}{12EI} \qquad /{*}EI/L$$

$$\frac{2Mb}{3} = \frac{qL^2}{12}$$

$$\boxed{Mb = \frac{qL^2}{8}}$$

Una vez determinado el momento de continuidad, se pude analizar cada tramo de viga como elemento isostático. El momento máximo del primer tramo, se determina considerando a ese tramo por separado como una viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida y un momento Mb aplicado en el extremo derecho de la viga.

Para determinar las reacciones en los apoyos se pueden sumar las reacciones de las vigas supuestas en el tramo.



$$Ra = \frac{qL}{2} - \frac{Mb}{L} = \frac{qL}{2} - \frac{qL}{8}$$

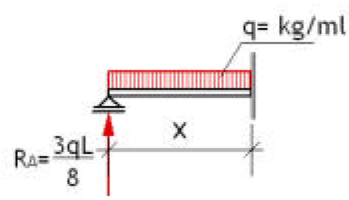
$$Ra = \frac{3qL}{8}$$

$$Rb_{izquierdo} = \left(\frac{qL}{2} + \frac{Mb}{L}\right)$$

$$Rb_{izquierdo} = \left(\frac{qL}{2} + \frac{qL}{8}\right)$$

$$Rb_{izquierdo} = \frac{5qL}{8}$$

Con las reacciones despejadas se establece la ecuación general de momento para el primer tramo de la viga



$$Mx = \frac{3qLx}{8} - \frac{qx^2}{2}$$

El momento es máximo cuando la cortante es nula.

$Qx = 0$

$$Qx = \frac{3qL}{8} - qx = 0$$

$$x = \frac{3L}{8}$$

Reemplazando el valor de x en la ecuación de momento se obtiene

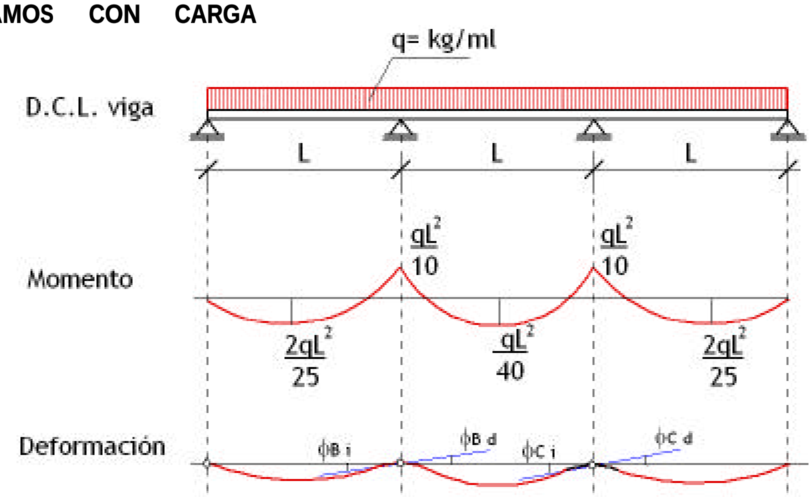
$$M_{MAX} = \frac{3qL}{8}\frac{3L}{8} - \frac{q}{2}\frac{3L}{8}\frac{3L}{8}$$

$$M_{MAX} = \frac{9qL^2}{64} - \frac{9qL^2}{128}$$

$$\boxed{Mt_1 = \frac{9qL^2}{128}}$$

Por simetría se deduce que este valor de momento máximo también es válido para el segundo tramo: $Mt_1 = Mt_2$

VIGA CONTINUA DE TRES TRAMOS CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA.

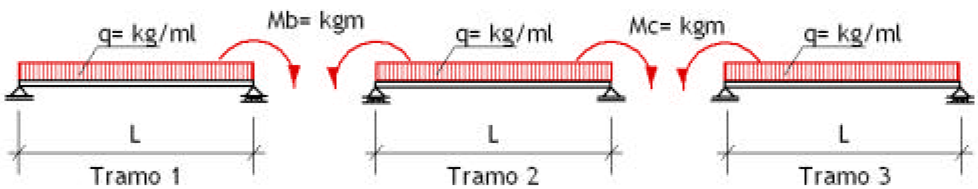


Considerando que las tangentes trazadas en los apoyos centrales generan ángulos iguales en el lado izquierdo y en el lado derecho pero de signo contrario, por lo tanto se deduce que

$\phi B_{izquierdo} = -\phi B_{derecho}$ por ángulos opuestos por el vértice

$\phi C_{izquierdo} = -\phi C_{derecho}$ por ángulos opuestos por el vértice

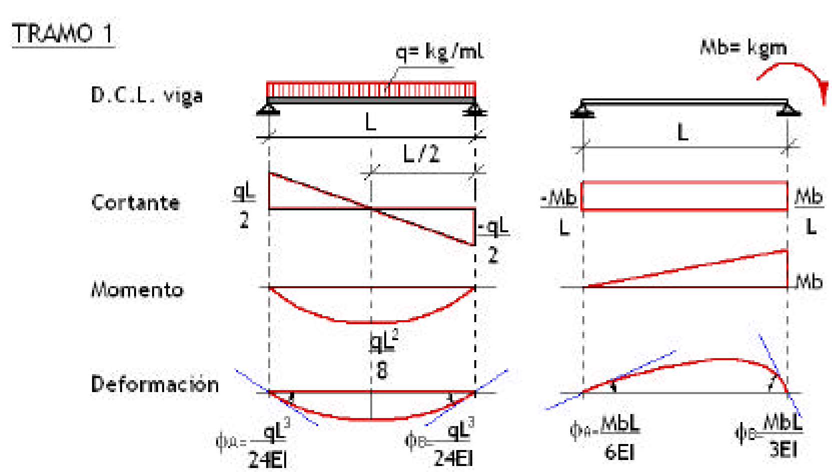
Se descompone la viga en sus tres tramos y éstas a su vez se descomponen en vigas que en conjunto equivalen a la viga inicial.



TRAMO 1

a.- Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida.

b.- Viga simplemente apoyada con momento aplicado en el extremo derecho (Mb).

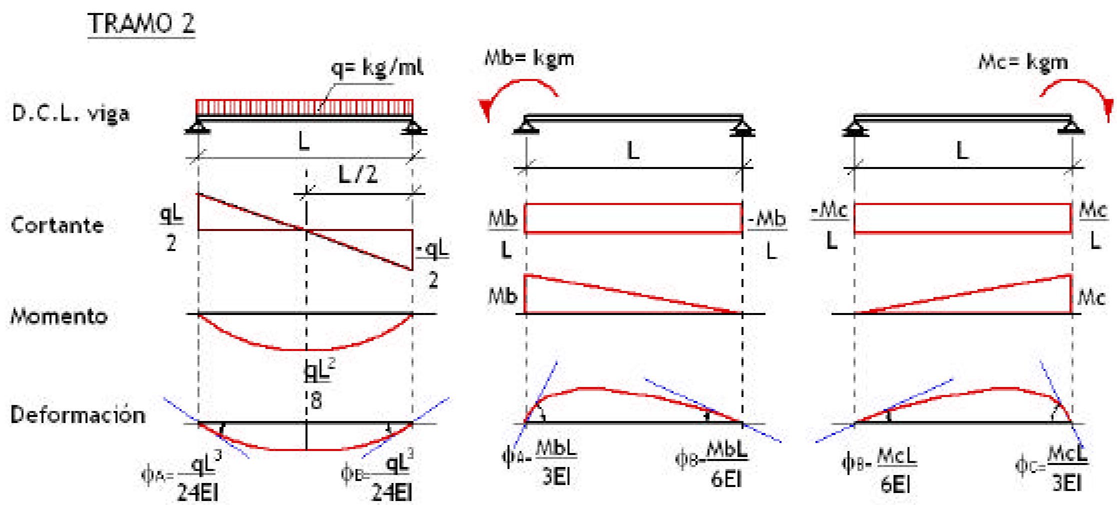


TRAMO 2

a.- Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida.

b.- Viga simplemente apoyada con momento aplicado en el extremo izquierdo (Mb).

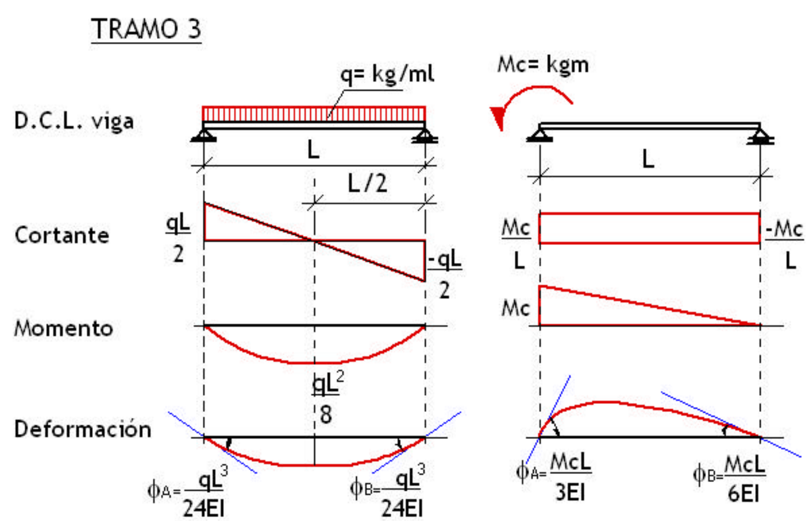
c.- Viga simplemente apoyada con momento aplicado en el extremo derecho (Mc).



TRAMO 3

a.- Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida.

b.- Viga simplemente apoyada con momento aplicado en el extremo izquierdo (Mc).



Se igualan los ángulos a ambos lados del apoyo B, por ser opuestos por el vértice; y del mismo modo se procede en el apoyo C

$\Sigma\phi B_{izquierdo} = -\Sigma\phi B_{derecho}$

$$\frac{qL^3}{24EI} - \frac{MbL}{3EI} = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{MbL}{3EI} + \frac{McL}{6EI} \qquad *EI/L$$

$$\frac{2Mb}{3} + \frac{Mc}{6} = -\frac{2qL^3}{24EI}$$

$\Sigma\phi C_{izquierdo} = -\Sigma\phi C_{derecho}$

$$\frac{qL^3}{24EI} - \frac{MbL}{6EI} - \frac{McL}{3EI} = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{McL}{3EI} \qquad *EI/L$$

$$\frac{Mb}{6} + \frac{2Mc}{3} = \frac{2qL^2}{24}$$

Por simetría: Mb = Mc = M

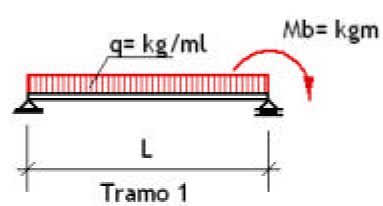
$$\frac{2M}{3} + \frac{M}{6} = \frac{2qL^2}{24}$$

$$\frac{5M}{6} = \frac{qL^2}{12}$$

$$\boxed{Mb = Mc = M = \frac{ql^2}{10}}$$

Una vez determinados los momentos de continuidad Mb y Mc se puede analizar cada tramo por separado como elemento isostático.

El momento máximo del primer tramo se determina considerando a ese tramo como una viga simplemente apoyada con carga repartida uniformemente y un momento Mb aplicado en el extremo derecho de la viga.

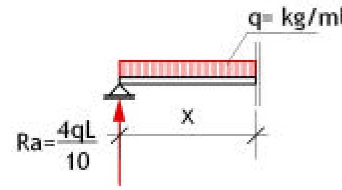


$$Ra = \frac{qL}{2} - \frac{Mb}{L} = \frac{qL}{2} - \frac{qL}{10}$$

$$Ra = \frac{4qL}{10} = \frac{2qL}{5}$$

$$Rb = \frac{qL}{2} + \frac{Mb}{L} = \frac{qL}{2} + \frac{qL}{10}$$

$$Rb = \frac{6qL}{10} = \frac{3qL}{5}$$



Con las reacciones despejadas se establece la ecuación general de momento para el tramo

$$Mx = \frac{4qLx}{10} - \frac{qx^2}{2}$$

El momento es máximo cuando el cortante es nulo.

$$Qx = \frac{4qL}{10} - qx = 0$$

$$x = \frac{2L}{5}$$

Reemplazando el valor de x en la ecuación general de momento se obtiene

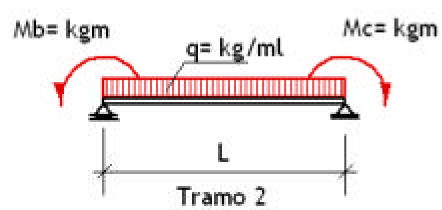
$$M_{MAX} = \frac{4qL}{10}\frac{2L}{5} - \frac{q}{2}\frac{2L}{5}\frac{2L}{5}$$

$$M_{MAX} = \frac{4qL^2}{25} - \frac{4qL^2}{50}$$

$$\boxed{Mt_1 = \frac{2qL^2}{25}}$$

Por simetría se deduce que este valor de momento máximo también es válido para el tercer tramo es decir, $Mt_1 = Mt_3$.

Para determinar el momento máximo del segundo tramo, se analiza este tramo como una viga simplemente apoyada con carga repartida uniformemente y un momento aplicado en cada extremo.



$$Rb_{derecho} = \frac{qL}{2} + \frac{Mb}{L} - \frac{Mc}{L}$$

$$Rb_{derecho} = \frac{qL}{2}$$

$$Rb_{derecho} = Rc_{izquierdo} = \frac{qL}{2}$$

Nuevamente se establece la ecuación general de momento, pero correspondiente al segundo tramo.

$$Mx = -\frac{qL^2}{10} + \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

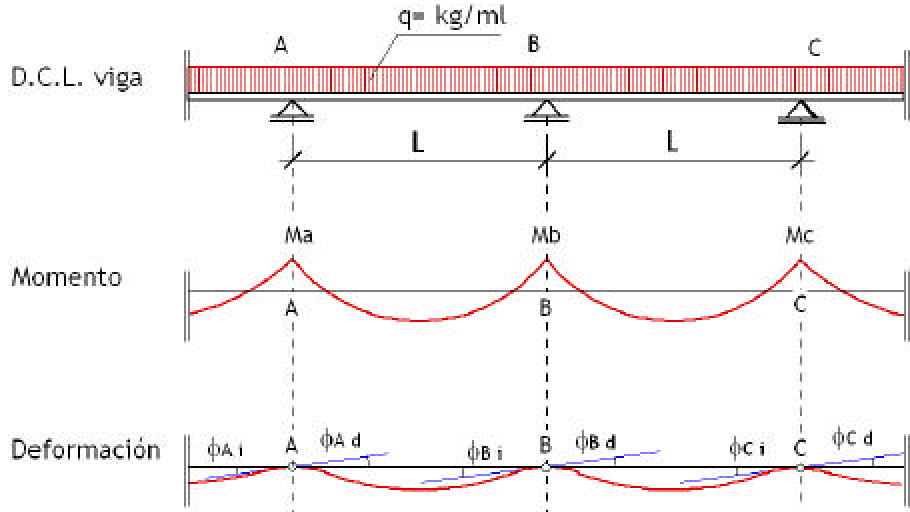
Por simetría el momento es máximo cuando X=L/2

$$Mx = -\frac{qL^2}{10} + \frac{qL}{2}\frac{L}{2} - \frac{q}{2}\frac{L}{2}\frac{L}{2}$$

$$Mx = -\frac{qL^2}{10} + \frac{qL^2}{4} - \frac{qL^2}{8}$$

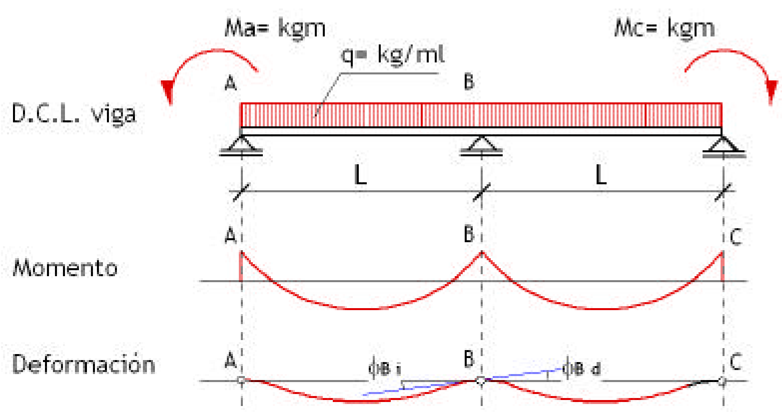
$$\boxed{Mt_2 = \frac{qL^2}{40}}$$

TEOREMA DE LOS TRES MOMENTOS.



Para deducir el teorema de los tres momentos es necesario considerar que al existir continuidad del elemento estructural se producen momentos flectores en los apoyos intermedios. Cada tramo de viga es afectado por su carga y por los momentos de continuidad que se producen en sus extremos.

Para analizar el punto B se consideran dos tramos continuos de la viga y los potenciales momentos de continuidad en los extremos.



En el apoyo B se plantea entonces que

$\Sigma\phi B_{izquierdo} = -\Sigma\phi B_{derecho}$

$$\frac{qL_1^3}{24EI} - \frac{MaL_1}{6EI} - \frac{MbL_1}{3EI} = -\left(\frac{qL_2^3}{24EI} - \frac{MbL_2}{3EI} - \frac{McL_2}{6EI}\right)$$

$$\frac{MaL_1}{6EI} + \frac{MbL_1}{3EI} + \frac{MbL_2}{3EI} + \frac{McL_2}{6EI} = \frac{qL_1^3}{24EI} + \frac{qL_2^3}{24EI}$$

Reemplazando L/EI por λ (módulo de flexibilidad)

$$\frac{Ma\lambda_1}{6}+\frac{Mb\lambda_1}{3}+\frac{Mb\lambda_2}{3}+\frac{Mc\lambda_2}{6}=\frac{qL_1^2\lambda_1}{24}+\frac{qL_2^2\lambda_2}{24} \quad /*6$$

Al amplificar la expresión 6 veces se tiene

$$Ma\lambda_1+2Mb\lambda_1+2Mb\lambda_2+Mc\lambda_2=6*\left[\frac{qL_1^2\lambda_1}{24}+\frac{qL_2^2\lambda_2}{24}\right]$$

$$Ma\lambda_1+2Mb.\left(\lambda_1+\lambda_2\right)+Mc\lambda_2=6*\left[\frac{qL_1^2\lambda_1}{24}+\frac{qL_2^2\lambda_2}{24}\right]$$

Por lo general en una viga continua el material y la sección de la viga es el mismo a lo largo de ella, entonces la elasticidad y la inercia son constantes, por lo que el módulo de flexibilidad está en función de la luz, en otras palabras

Si EI= constante λ =L

Reemplazando ? =L en la ecuación se tiene

$$MaL_1+2Mb.\left(L_1+L_2\right)+McL_2=6*\left[\frac{qL_1^3}{24}+\frac{qL_2^3}{24}\right]$$

Reemplazando $\frac{qL_1^3}{24}$ por Tc_1 y $\frac{qL_2^3}{24}$ por Tc_2 se obtiene la ecuación de los tres momentos, conocido también como el teorema de Clapeyrón.:

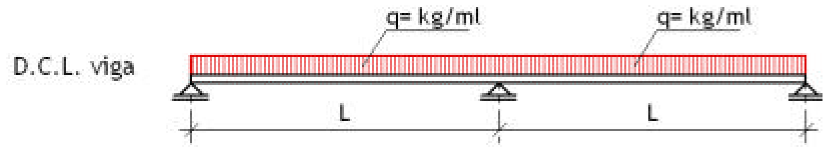
$$\boxed{MaL_1+2Mb.\left(L_1+L_2\right)+McL_2=6*\left[Tc_1+Tc_2\right]}$$

Siendo Tc_1 y Tc_2 ángulos que generan las cargas aplicadas a la viga en el tramo izquierdo y derecho con respecto al apoyo central multiplicado por 6EI

El teorema de los tres momentos, también conocido como teorema de Clapeyrón, se aplica sobre dos tramos de la viga, en donde se analizan las cargas aplicadas en ella y los momentos flectores en los apoyos, es decir, el teorema relaciona tres momentos y dos regímenes de carga de una viga continua.

APLICACIÓN DEL TEOREMA DE CLAPEYRON.

VIGA CONTINUA DE DOS TRAMOS CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA.



Como la viga es de dos tramos se aplica directamente el teorema de Clapeyrón, reemplazando los valores en la expresión se determina el momento en el apoyo central.

$$MaL_1 + 2Mb.(L_1 + L_2) + McL_2 = 6 * [Tc_1 + Tc_2]$$

En este caso el Tc_1 al igual que Tc_2 corresponde al ángulo en el apoyo central de la viga, producto la carga uniformemente repartida, y multiplicado por EI.

$$Tc_1 = Tc_2 = \frac{qL^3}{24EI}.EI = \frac{qL^3}{24}$$

Reemplazando Tc_1 y Tc_2 en la ecuación se tiene

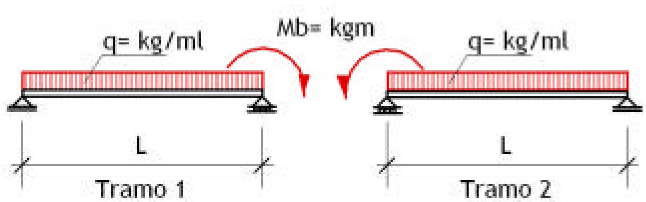
$$0.L_1 + 2Mb.(L_1 + L_2) + 0.L_2 = 6 * \left[\frac{qL_1^3}{24} + \frac{qL_2^3}{24}\right]$$

$$2Mb.(L_1 + L_2) = \frac{qL_1^3}{4} + \frac{qL_2^3}{4} \qquad \text{si } L_1 = L_2$$

$$2Mb\ 2L = \frac{qL^3}{2}$$

$$\boxed{Mb = \frac{qL^2}{8}}$$

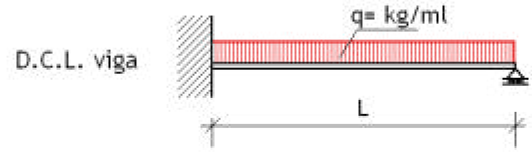
Para determinar los momentos de tramo se deberá analizar cada tramo como elemento isostático, es decir, como una viga simplemente apoyada con una carga uniformemente repartida y con el momento de continuidad Mb en el extremo, (Ejemplo analizado en las páginas 13-14)

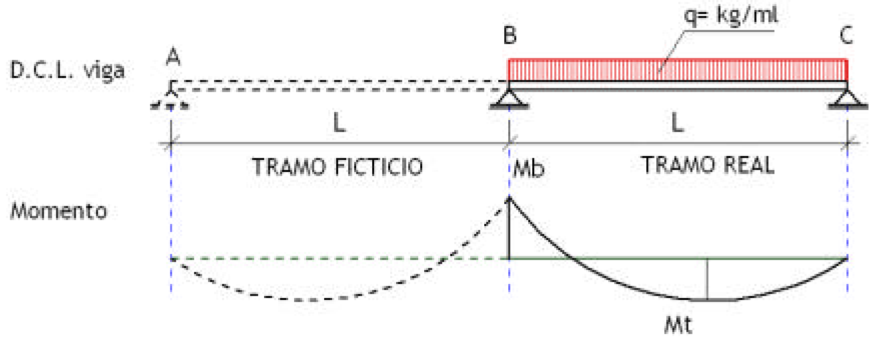


APLICACIÓN DEL TEOREMA DE CLAPEYRON.

VIGA EMPOTRADO EN UN EXTREMO Y APOYADO EN EL OTRO CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA.

Esta viga anteriormente analizada, se puede resolver también por el teorema de Clapeyrón. Para su aplicación, es importante considerar que este teorema relaciona tres momentos y dos regímenes de carga. Esta viga es de un solo tramo y el momento en el empotramiento es la incógnita a resolver; para lo cual es necesario generar un tramo ficticio en el extremo izquierdo, quedando así una viga continua de dos tramos y el momento de empotramiento como incógnita en la ecuación.





$$MaL_1 + 2Mb.(L_1 + L_2) + McL_2 = Tc_1L_1 + Tc_2L_2$$

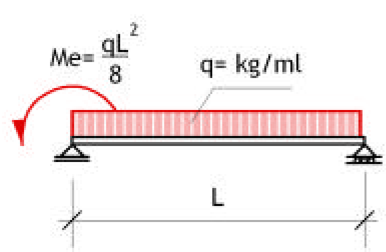
Como Tc_1 corresponde al tramo ficticio, es nulo. Mientras que Tc_2 corresponde al ángulo que produce la carga uniformemente repartida en el tramo real, y multiplicado por EI

$$0.L_0 + 2Mb.(L_0 + L_1) + 0.L_1 = 6 * \left[0 + \frac{qL_1^3}{24}\right]$$

$$2Mb.L_1 = \frac{qL_1^3}{4}$$

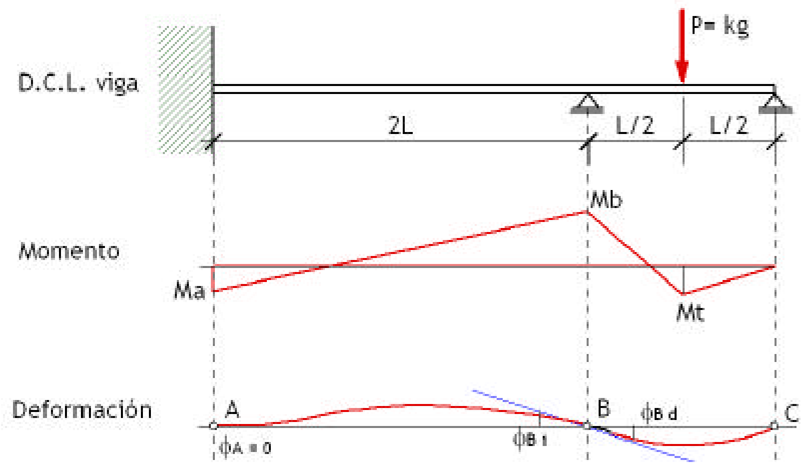
$$\boxed{Mb = \frac{qL^2}{8}}$$

Despejada la incógnita (Momento de Empotramiento) se puede determinar el momento de tramo de la viga si se analiza la viga como elemento isostático: viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida con un momento aplicado en el extremo generando el mismo efecto del empotramiento. (Ejemplo analizado en las páginas 9-10-11)



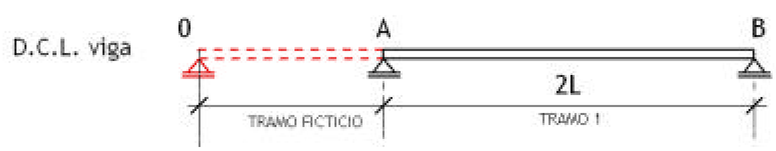
APLICACIÓN DEL TEOREMA DE CLAPEYRON.

VIGA DE DOS TRAMOS EMPOTRADO EN UN EXTREMO CON CARGA PUNTUAL EN EL CENTRO DEL SEGUNDO TRAMO.



Esta viga a pesar de tener carga solamente en el segundo tramo, la deformación se produce en toda la viga por la condición de continuidad. Las dos incógnitas a resolver son los momentos de empotramiento y de continuidad, para lo cual es imprescindible plantear dos ecuaciones:
La primera ecuación relaciona el tramo ficticio y el primer tramo; y la segunda relaciona el primer tramo con el segundo, quedando así los momentos de empotramiento y de continuidad como incógnitas en las dos ecuaciones.

TRAMOS 0-1



$$MoL_0 + 2Ma(L_0 + L_1) + MbL_1 = 6 * [Tc_0 + Tc_1]$$

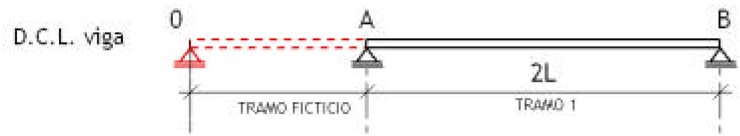
En este caso los términos de carga Tc0 y Tc1 son nulos, ya que el Tc_0 corresponde al tramo ficticio y Tc_1 al primer tramo que no tiene carga alguna.

$$0.L_0 + 2Ma(L_0 + L_1) + MbL_1 = 6 * [0 + 0]$$

$$2MaL_1 + MbL_1 = 0$$

$$\boxed{Ma = -\frac{Mb}{2}}$$

TRAMO 1-2



$$MaL_1 + 2Mb.(L_1 + L_2) + McL_2 = 2[Tc_1 + Tc_2]$$

En este caso el término de carga Tc_2 corresponde al ángulo producido por una carga puntual, y multiplicado EI.

$$Tc_2 = \frac{PL^2}{16EI}.EI = \frac{PL^2}{16}$$

$$Ma2L + 2Mb.(2L + L) + 0.L = 6 * \left[0 + \frac{PL^2}{16}\right]$$

$$2MaL + 6MbL = \frac{3PL^2}{8}$$

Se reemplaza el valor de Ma obtenida en la ecuación del tramo 0-1

$$2\left(-\frac{Mb}{2}\right)L + 6MbL = \frac{3PL^2}{8}$$

$$-MbL + 6MbL = \frac{3PL^2}{8}$$

$$5MbL = \frac{3PL^2}{8}$$

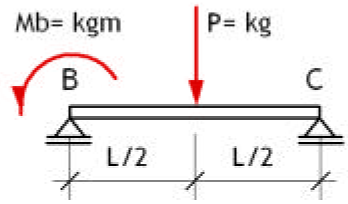
$$\boxed{Mb = \frac{3PL}{40}}$$

Si Ma = -Mb/2 entonces

$$\boxed{Ma = -\frac{3PL^2}{80}}$$

Ya despejadas los momentos de empotramiento (Ma) y de continuidad (Mb), se puede determinar el momento del segundo tramo, analizando el tramo como una viga isostática con carga puntual (P) en el centro y el momento de continuidad (Mb) aplicado en el extremo.

Al igual que en los casos anteriores, para determinar la reacción en el apoyo B se suma las reacciones de las dos vigas supuestas que se puede descomponer este tramo.



$$Rb = \frac{3P}{40} + \frac{P}{2} = \frac{3P + 20P}{40} = \frac{23P}{40}$$

$$Rc = -\frac{3P}{40} + \frac{P}{2} = \frac{-3P + 20P}{40} = \frac{17P}{40}$$

El momento máximo se encuentra en el centro donde se encuentra la carga puntual.

$$M_{MAX} = -\frac{3PL}{40} + \frac{23P}{40}\frac{L}{2}$$

$$M_{MAX} = -\frac{3PL}{40} + \frac{23PL}{80}$$

$$M_{MAX} = \frac{-6PL + 23PL}{80}$$

$$\boxed{M_{MAX} = \frac{17PL}{80}}$$