Deformación en vigas

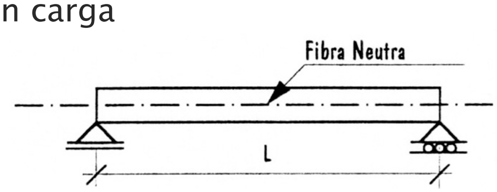
ESTRUCTURAS 2

1

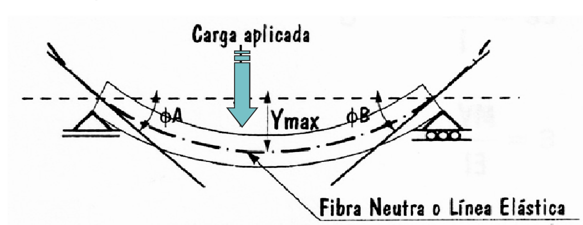
profesor: Jing Chang Lou ayudante: Elisabeth Avalos

Línea elástica

Viga sin carga

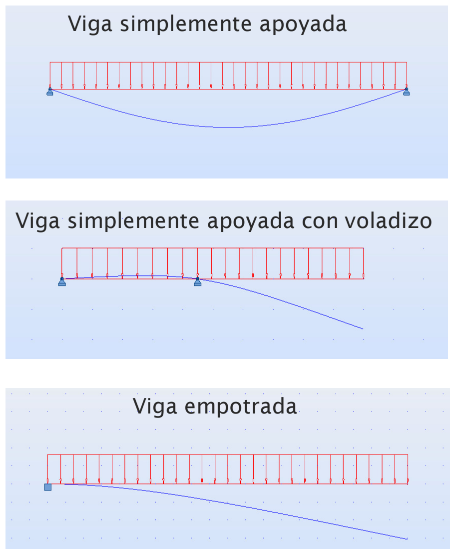


Viga con carga



E S T R U C T U R A S II

Deformación en vigas

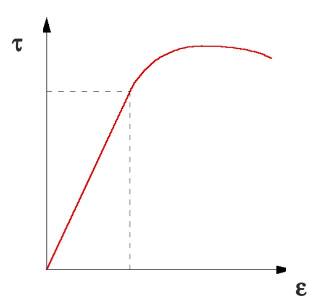


Ley de Hooke

$\mathbf{E}$ = Elasticidad (kg/cm²)

τ = Tensión (kg/cm²)

ε = Deformación Unitaria



$$E = \frac{\tau}{\varepsilon}$$

$$\boxed{1} \quad \tau = E * \varepsilon$$

Deducción fórmula de flexión

$$\tau = \frac{M}{W} \qquad W = \frac{I}{V} \qquad \boxed{2}\ \tau = \frac{MV}{I}$$

τ = Tensión (kg/cm²)

M = Momento flector (kgcm)

V = Distancia desde la fibra neutra a la fibra más traccionada o más comprimida (cm)

I = Inercia (cm⁴)

Igualando expresiones $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$

$$\tau = E\varepsilon = \frac{MV}{I} \quad \text{ó} \quad \varepsilon = \frac{MV}{EI} \quad \boxed{3}$$

Análisis de la sección

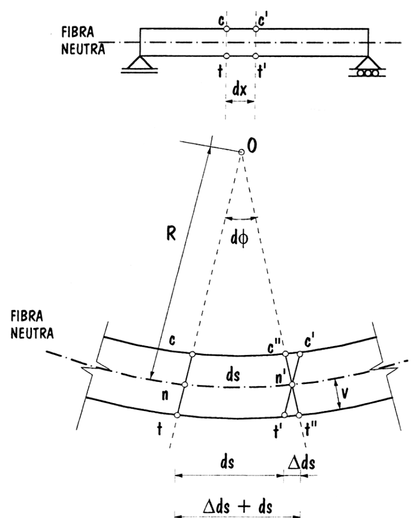
Por relación de triángulos semejantes

△ 0 n n’ y △ n’ t’ t’’

$$\boxed{4}\quad \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{V}{R} = \varepsilon$$

$$ds = d\phi * R \qquad /:R\ :ds$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d\phi}{ds}$$



E S T R U C T U R A S II

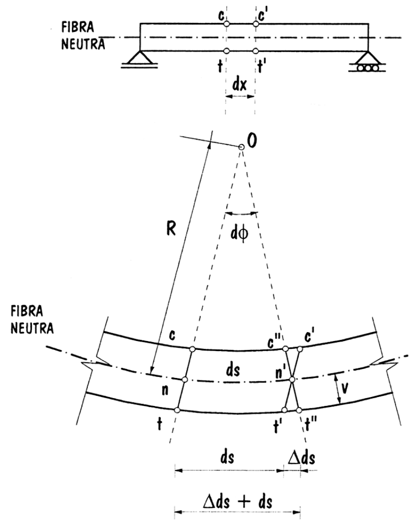
Igualando $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$

$$\varepsilon = \frac{V}{R} = \frac{MV}{EI} \quad /:V$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI} = \frac{d\phi}{ds}$$

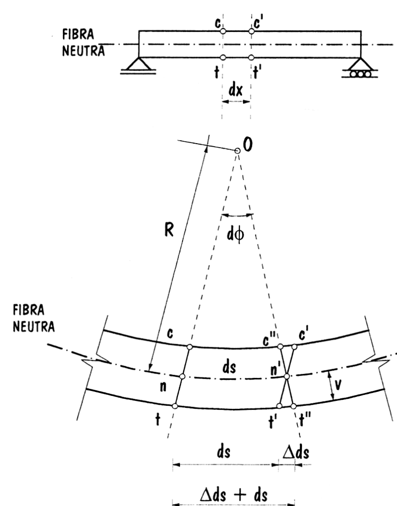
$$d\phi = \frac{M * ds}{EI}$$



Si $ds \approx dx$

La curvatura de la línea elástica es una variable proporcional al momento flector.

$$\boxed{d\phi = \frac{Mdx}{EI}}$$



E S T R U C T U R A S II

Métodos de cálculo

a Método de área de momentos.

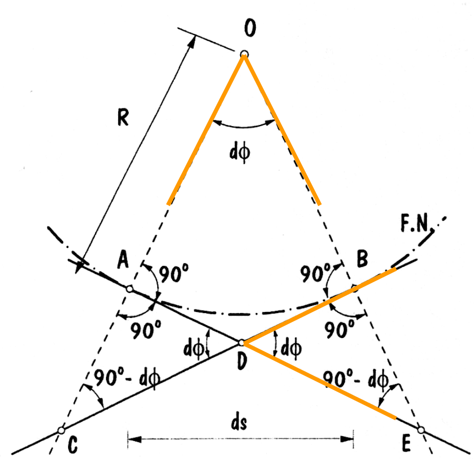
b Método de doble integración.

c Método de la viga conjugada.

Se busca determinar el ángulo de curvatura de la línea elástica y sus deflecciones o flechas.

Cada método tiene ventajas y desventajas dependiendo de la viga a analizar.

Estableciendo relaciones entre ángulos



E S T R U C T U R A S II

Método de doble integración

$$d\phi = \frac{M.dx}{EI} \quad \ldots / dx$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M}{EI}$$

Si...

$$\frac{dy}{dx} = tg\phi \Rightarrow tg\phi \approx \phi$$

$$\frac{dy}{dx} = \phi$$

Reemplazando...

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{M}{EI} \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}}$$

$$\boxed{EI\ \frac{d^2y}{dx^2} = M}$$

Ecuación diferencial de la elástica

Integrando...

$$\boxed{EI\ \frac{dy}{dx} = \int M\ dx}$$

Ecuación general de Pendiente

Integrando...

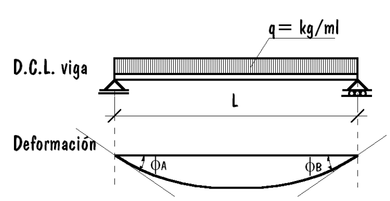
$$\boxed{EI\ y = \iint M\ dx}$$

Ecuación general de Flecha

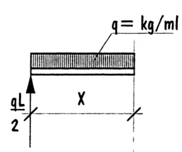
Ejemplo Viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida

1. Equilibrio externo: cálculo de reacciones

$$Ra = Rb = \frac{qL}{2}$$



2. Determinar ecuación general de momento



$$Mx = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

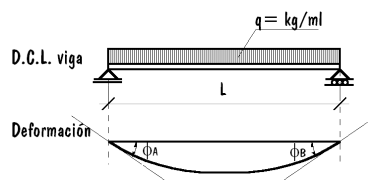
E S T R U C T U R A S II

3. Definir la ecuación diferencial de la elástica.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M_X = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

4. Definir la ecuación general de la pendiente

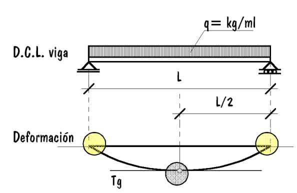
$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C_1$$



5. Definir la ecuación general de la flecha

$$EI\ y = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2$$

6. Despejar las constantes de integración



Para despejar C_1 ...

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

$$EI.\ 0 = \frac{qL}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{q}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + C_1$$

$$C_1 = -\frac{qL^3}{24}$$

$$\boxed{EI\frac{dy}{dx} = \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} - \frac{qL^3}{24}}$$

Para despejar C_2 ...

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = L$$

$$EI.\ 0 = \frac{qL}{12}0^3 - \frac{q}{24}0^4 - \frac{qL^3}{24}0 + C_2$$

$$EI.\ 0 = \frac{qL}{12}L^3 - \frac{q}{24}L^4 - \frac{qL^3}{24}L + C_2$$

$$C_2 = 0$$

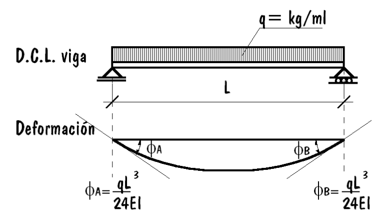
$$\boxed{EI\ y = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3x}{24}}$$

E S T R U C T U R A S II

7. Determinar valores característicos.

Ángulos en los apoyos...

$$\boxed{EI\,\frac{dy}{dx}=\frac{qLx^2}{4}-\frac{qx^3}{6}-\frac{qL^3}{24}}$$



$x=0$

$$\phi_A=\frac{dy}{dx}=-\frac{qL^3}{24EI}$$

$x=L$

$$\phi_B=\frac{dy}{dx}=\frac{qL^3}{4EI}-\frac{qL^3}{6EI}-\frac{qL^3}{24EI}$$

$$\phi_B=\frac{dy}{dx}=\frac{qL^3}{24EI}$$

La flecha máxima...

$$\boxed{EI\;y=\frac{qLx^3}{12}-\frac{qx^4}{24}-\frac{qL^3x}{24}}$$

$x=L/2$

$$y=\frac{qL}{12EI}\left(\frac{L}{2}\right)^3-\frac{q}{24EI}\left(\frac{L}{2}\right)^4-\frac{qL^3}{24EI}\frac{L}{2}$$

$$y=\frac{5qL^4}{384EI}$$