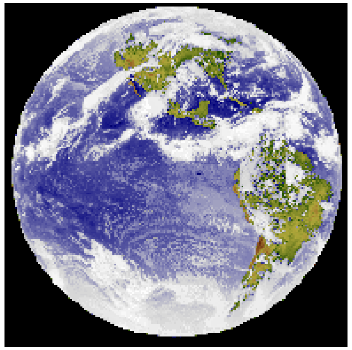
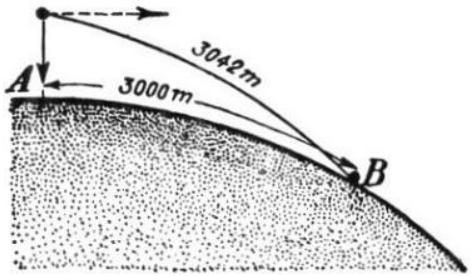
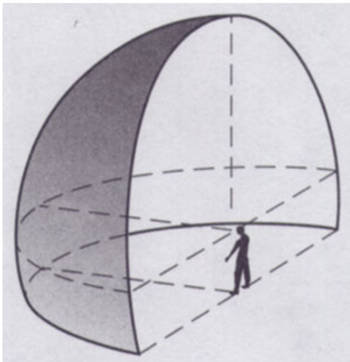
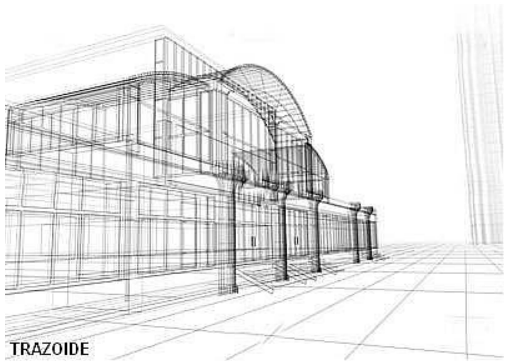
Concepto GEOMETRÍA.



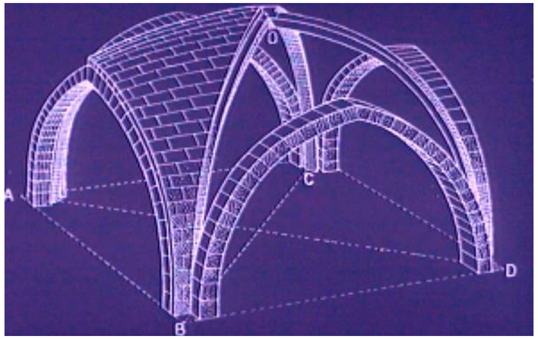


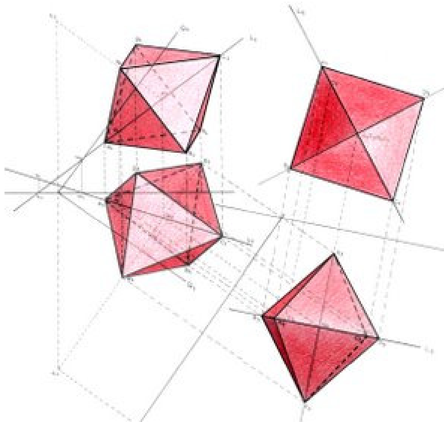


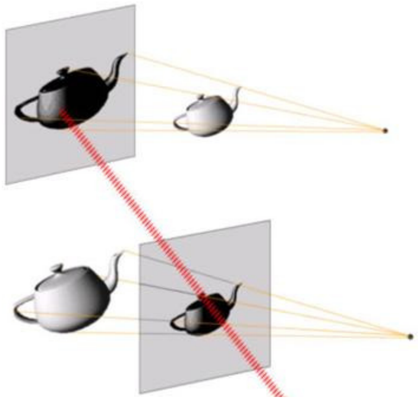


- GEO proviene del Griego que significa Tierra o superficie.
- METRIA significa medida o medición.
- Medir y representar las figuras planas y volumétricas de la tierra.

Concepto GEOMETRÍA.







- El desarrollo y evolución de la geometría esta inserto en:
- un campo dinámico
- interrelacionado con el mundo real.

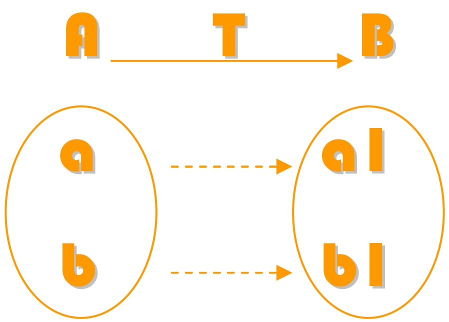
- Diferentes realidades dan origen a diferentes modelizaciones geométricas

- Diferentes lenguajes matemáticos dan origen a enfoques que metodológicamente han diferenciado la geometría.

1879 Félix Klein sienta las bases de la definición moderna y unificadora de la Geometría:

- **Un espacio E**

- **Un Grupo G(E) de Transformaciones de dicho espacio E**

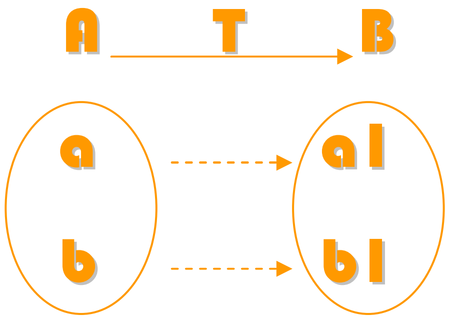


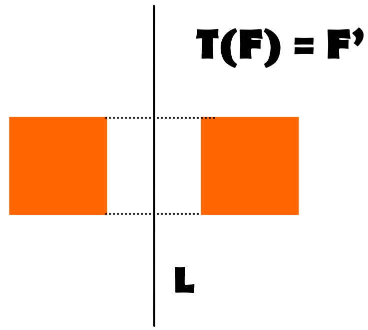
a I = a
b I = b

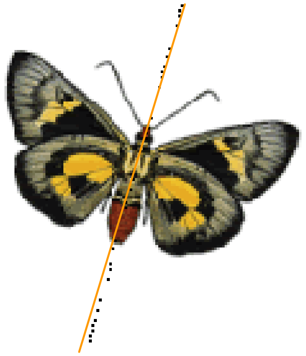
A = B
T = I

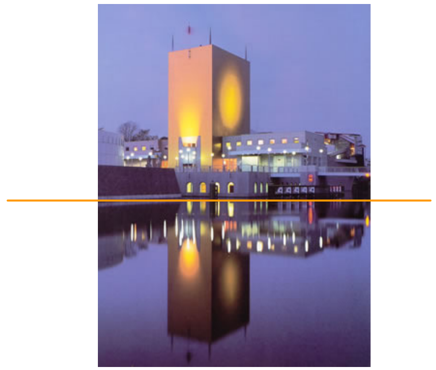
- Existen dos bases fundamentales.
- E cualquier conjunto no vacío.
- El Grupo de Transformaciones G(E) contiene como mínimo:
- La Identidad
- Está inserto en el Grupo de todas las posibles Biyecciones de E en E.

A partir del par (E, G(E)) .





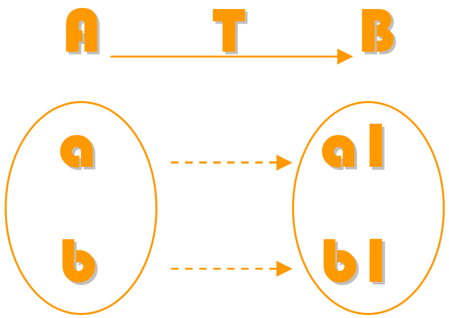


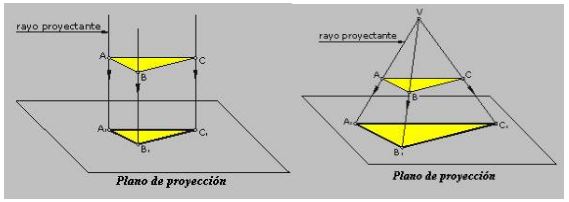


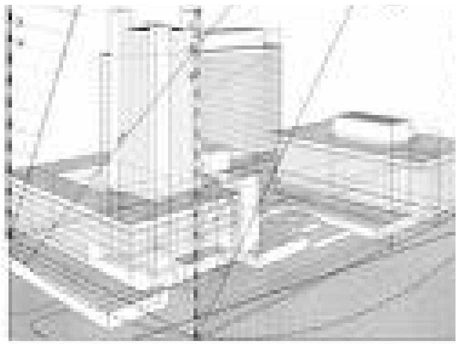
- Se pueden clasificar figuras y conjuntos no vacíos de E de acuerdo con las transformaciones G(E), donde:

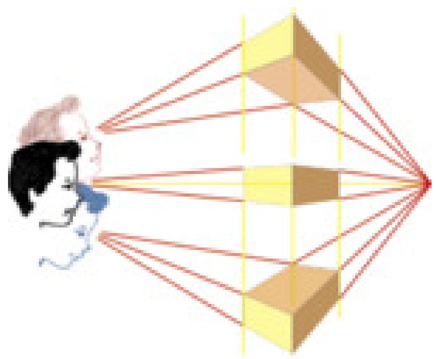
- Dos figuras F y F` son equivalentes si y solo si existe una transformación T en G(E) que transforme F en F`.

A partir del par (E, G(E)) .







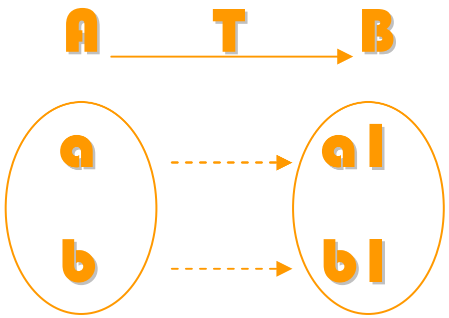


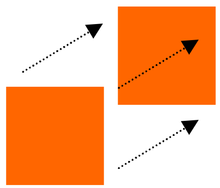
- Sobre este espacio se pueden generar distintos grupos de transformaciones, que darán origen a distintas Geometrías.

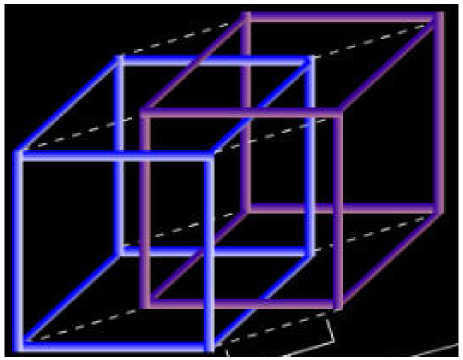
- Para Klein la diferencia entre Geometrías está dada por el grupo de INVARIANTES que presenta.

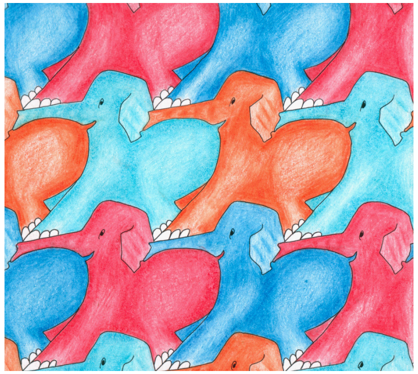
- Las invariantes son ropiedades que se mantienen al aplicar un tipo especial de transformación geométrica.

A partir del par (E, G(E)) .









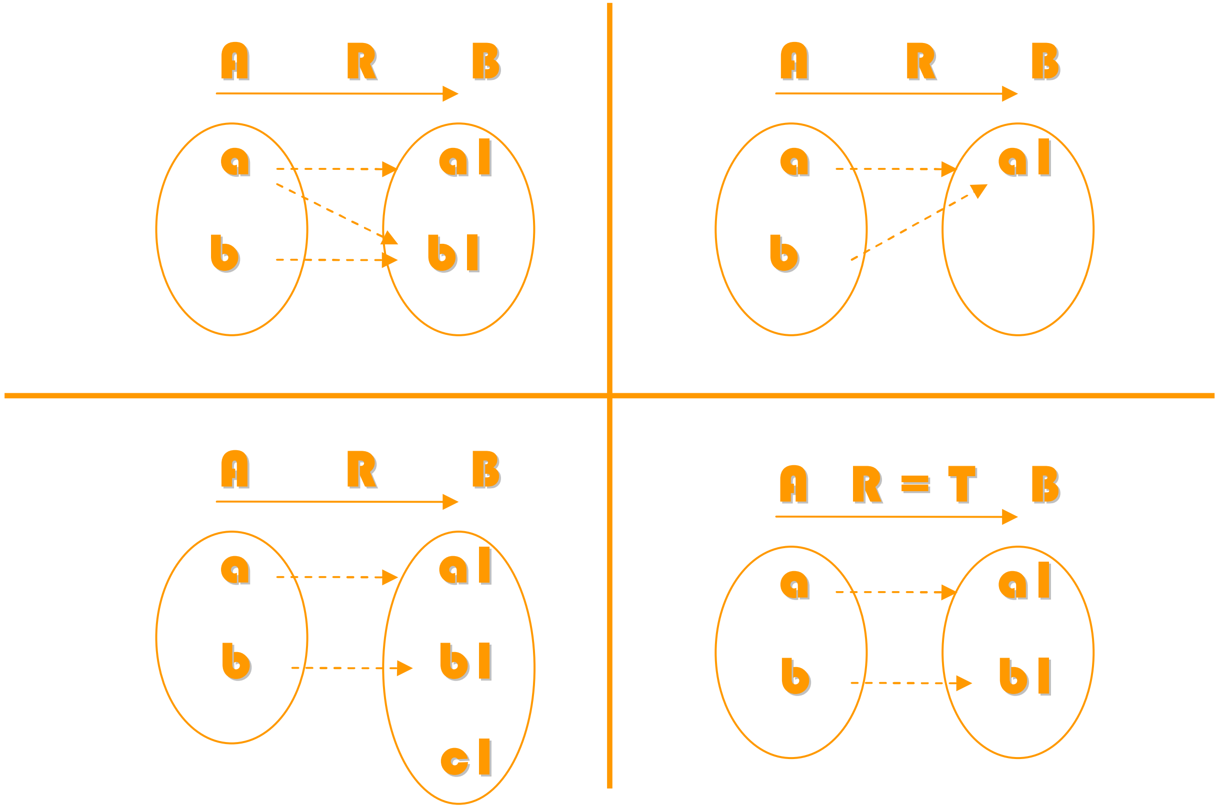
- El objeto de cada Geometría es el estudio del grupo de transformaciones que la caracteriza.

- Ejemplo: Geometría Euclidiana.

- Grupo de transformaciones las isometrías .

- Invariantes: Distancia, ángulo, paralelismo, perpendicularidad, etc.

Teoría de las Transformaciones.



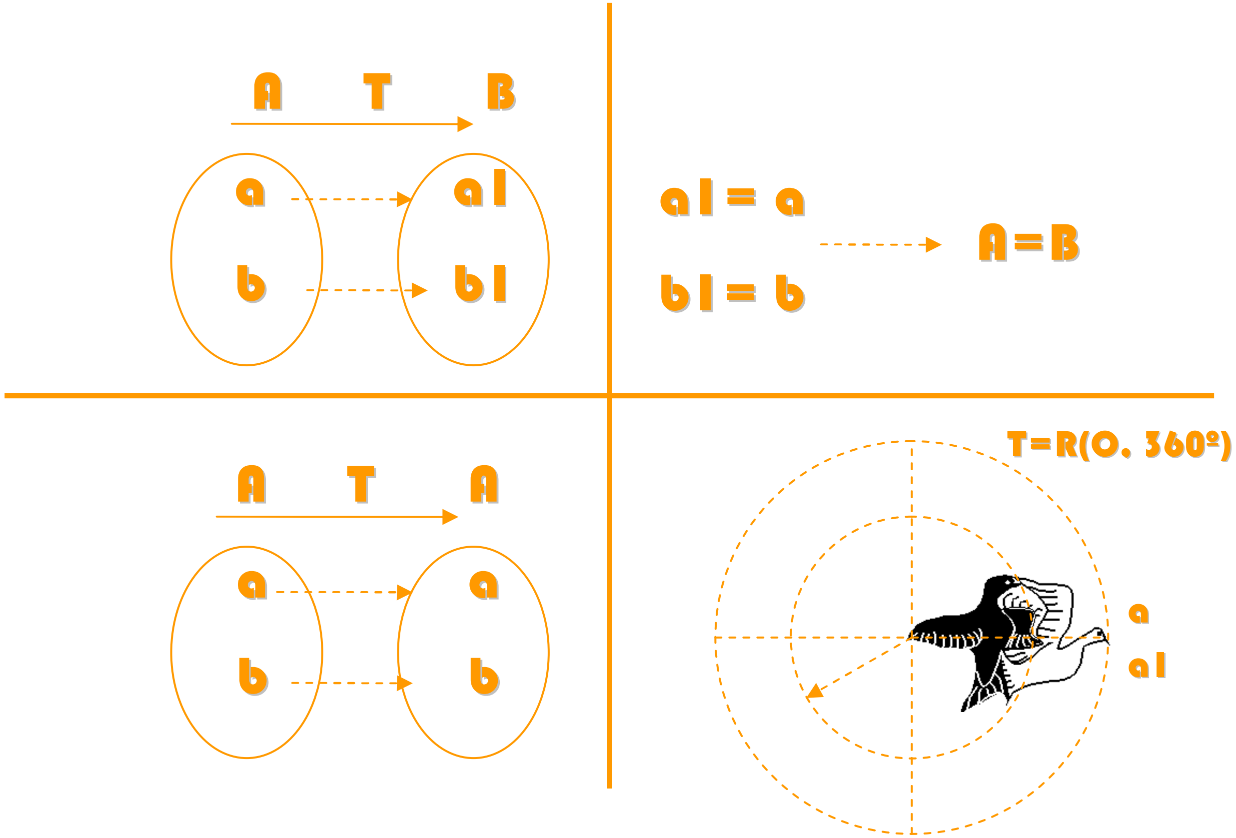
- Patrón de referencia. Concepto de unificación y codificación de la Geometría

- Definición Transformación.

- Definiremos Transformación de un conjunto A sobre un conjunto B cuando exista una relación biunívoca (o mapeo biunívoco o uno es a uno).

- Donde distintos elementos de A tienen distintas y únicas imágenes en B.
- Y el conjunto de las imágenes o F(A)= B.

Transformación Identidad: I.

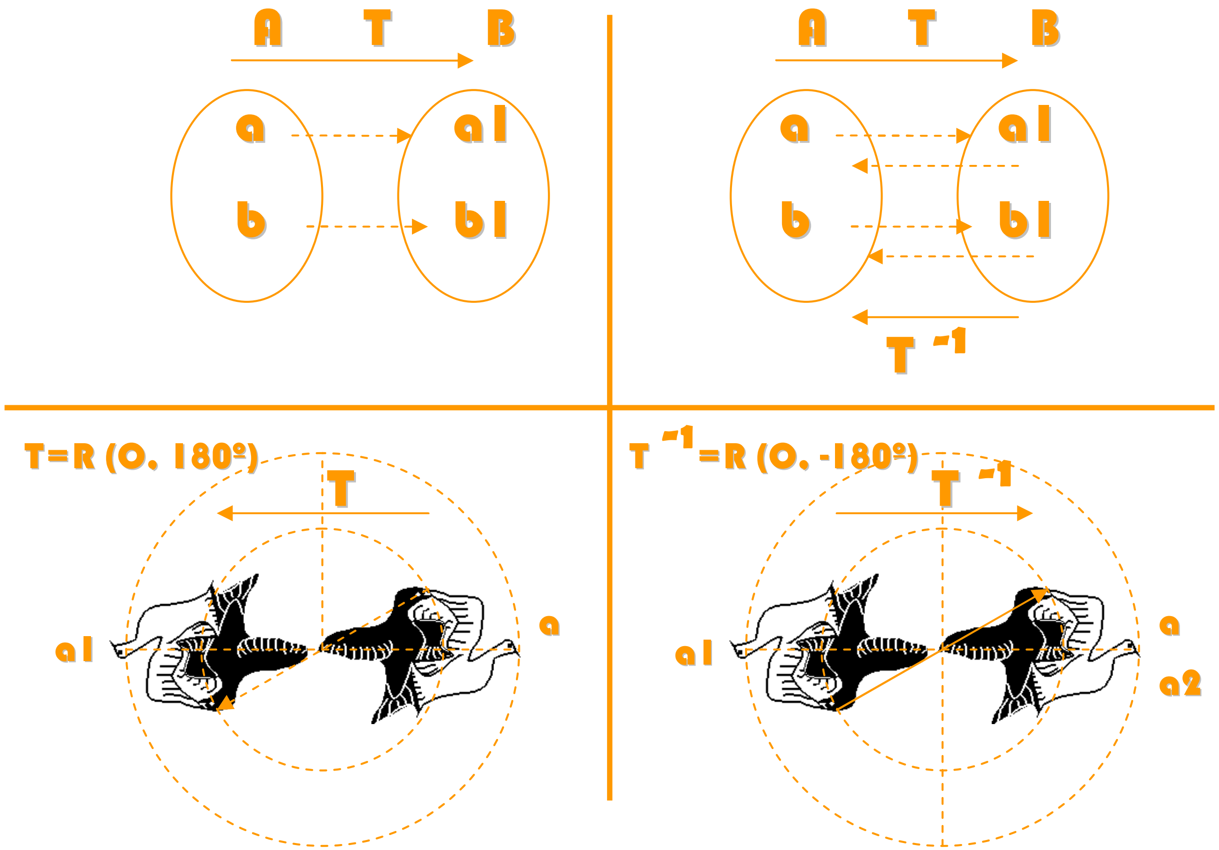


- Si A y B son el mismo conjunto, entonces el mapeo es una transformación del conjunto A sobre sí mismo.

- El elemento del conjunto A que se corresponda a si mismo se denomina elemento invariante de la transformación.

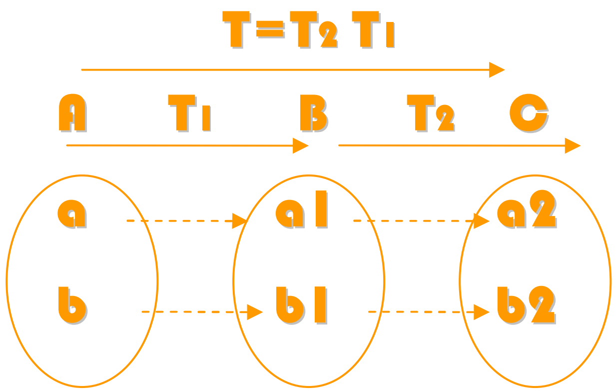
- Una transformación del conjunto A sobre si mismo donde cada elemento de A sea invariante, se llama Transformación Identidad en A y se define como I.

Transformación Inversa: T^{-1} .



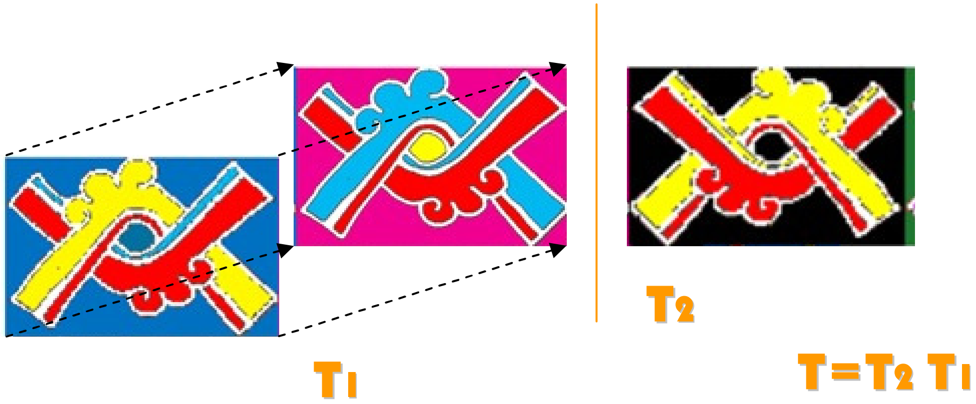
• La transformación del conjunto A sobre el conjunto B que define una segunda transformación del conjunto B sobre el conjunto A, donde la imagen que tenía A en B ahora tenga como imagen el elemento inicial de A, da origen a una transformación llamada inversa que se denomina T^{-1}.

Producto de Transformaciones.

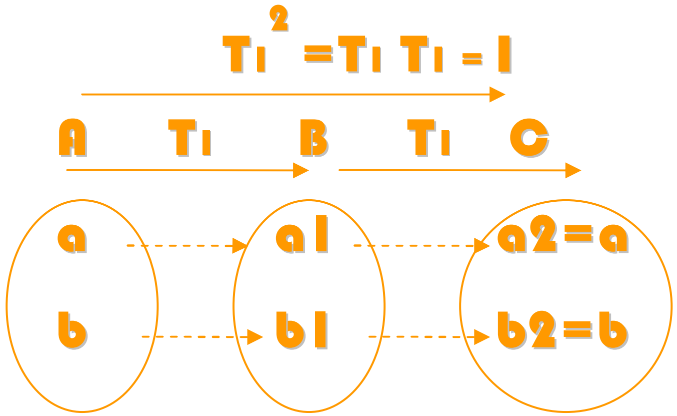


- Si T1 es una transformación del conjunto A sobre el conjunto B y T2 una transformación del conjunto B sobre el conjunto C, al efectuar la transformación T1 seguida de T2, se induce una transformación T del conjunto A sobre el conjunto C.

- La transformación T se llama Producto T2T1, de las transformaciones T1 y T2 tomadas en ese orden (convención).

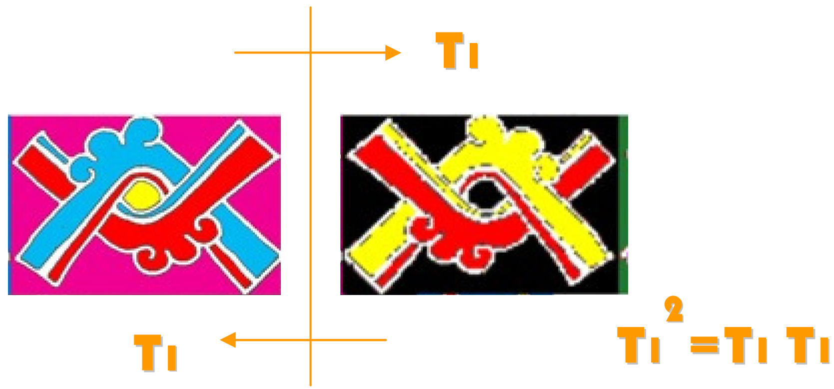


Definiciones.

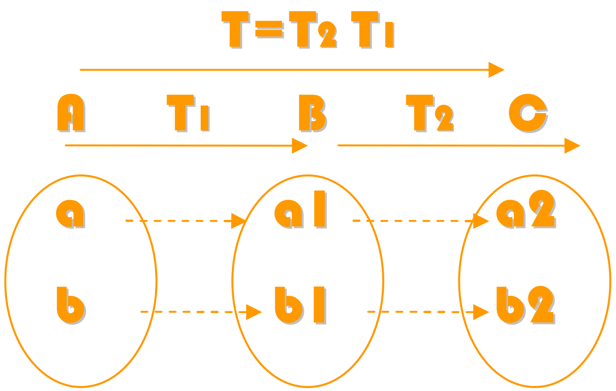


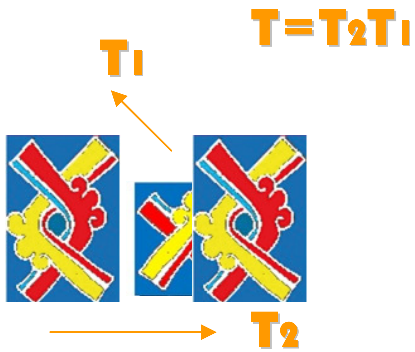
- Una transformación T1 de un conjunto A sobre si mismo, se dice involutiva si :

$$T1^2 = T1\ T1 = I$$



Teorema.

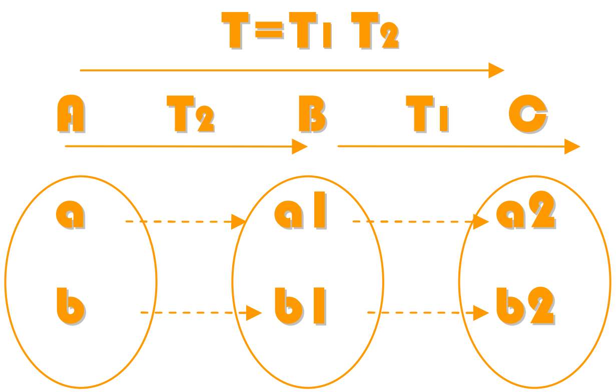


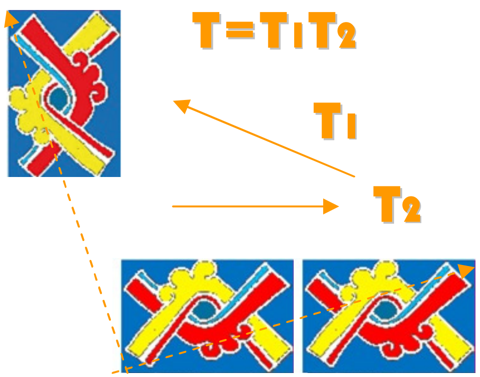


- El producto de dos transformaciones compatibles, aun si cada una es una transformación del conjunto A sobre si mismo, no necesariamente son conmutativas.

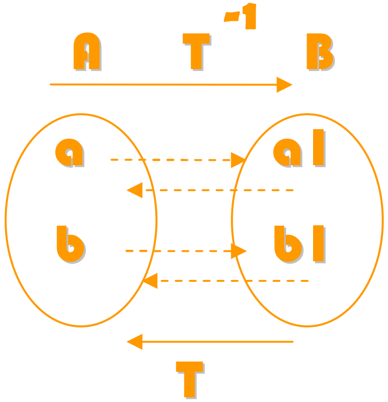
- Esto es, si existe tanto T2T1 como T1T2 no necesariamente

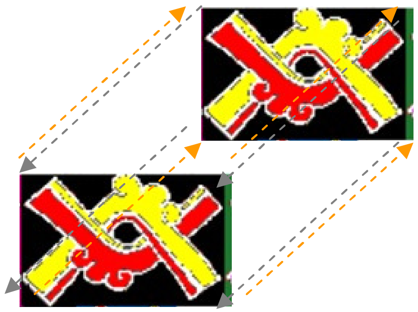
T2T1 = T1T2





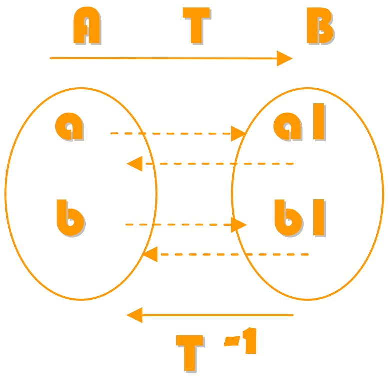
Teorema.

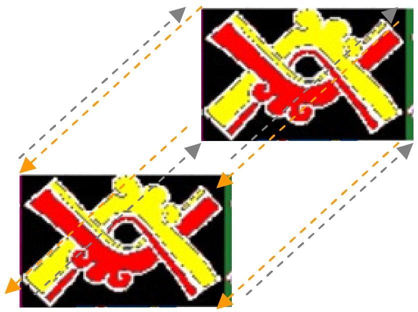




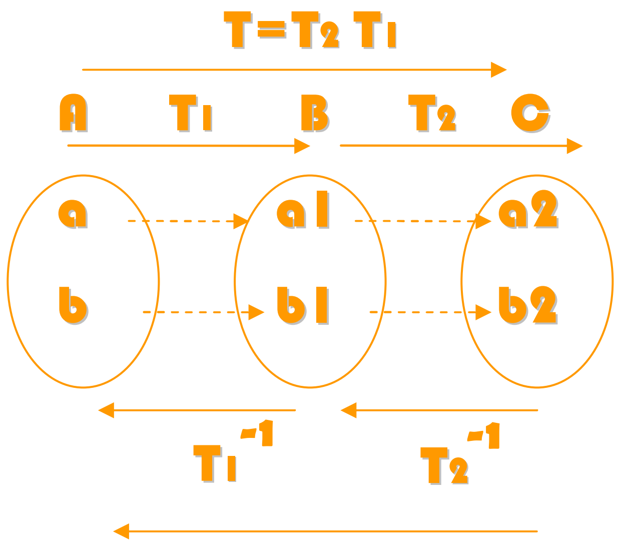
- Si T es una transformación del conjunto A sobre si mismo, entonces:

- $T^{-1}T = TT^{-1} = I$





Teorema.

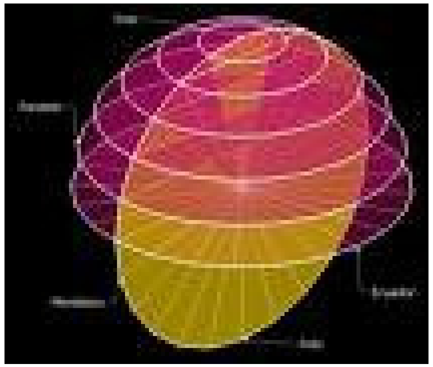


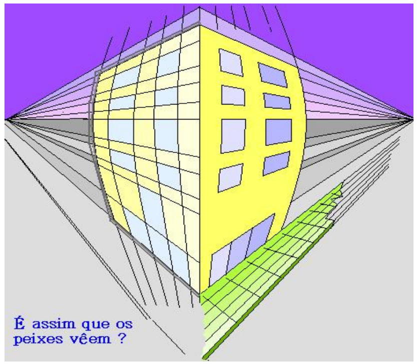
$$T^{-1} = (T_2\, T_1)^{-1} = T_1^{-1}\, T_2^{-1}$$

- Si la transformación T2 es compatible con T1, entonces:

- $(T_2\, T_1)^{-1} = T_1^{-1}\, T_2^{-1}$

Transformaciones.





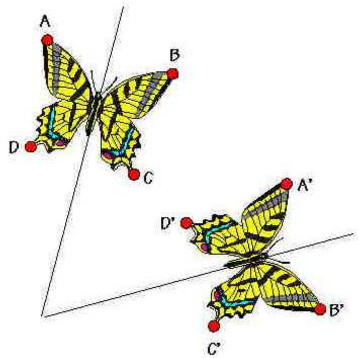
- Las Transformaciones pueden ser de tres tipos:

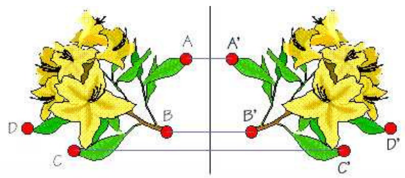
1.- Transformaciones que dan origen a formas congruentes, igualdad de formas. Denominadas Isometrías o movimientos rígidos.

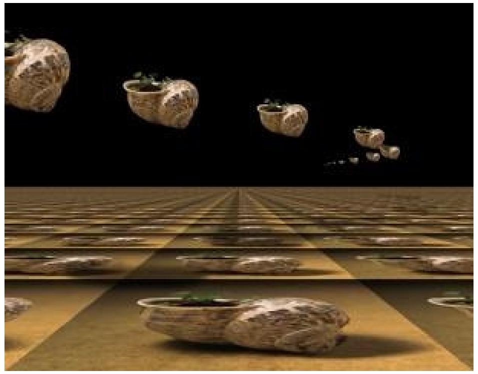
2.- Transformaciones que conservan la forma y establecen relaciones de proporcionalidad entre dos figuras transformadas. Dan origen a formas semejantes. Isomórficas.

3.- Transformaciones que no conservan la forma. Anamórficas.

Transformaciones Puntuales en el Plano.







- Sea S el conjunto de todos los puntos de un Plano Ordinario.

Definición de algunas transformaciones del conjunto A sobre sí mismo:

1.- Isometrías:

Traslación.

Rotación

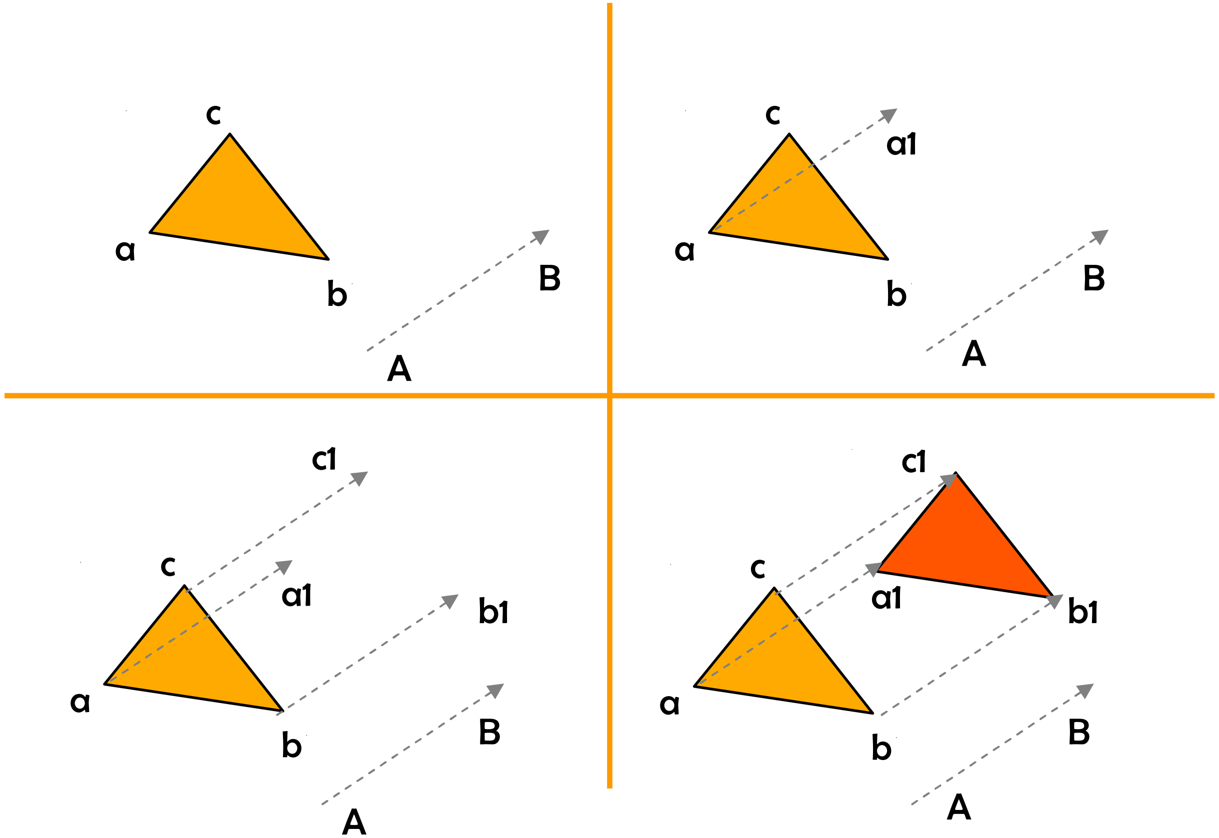
Reflexión con respecto a un punto.

Reflexión con respecto a un eje.

2.- Isomorfas:

Homotecia.

Transformación Traslación: T(AB).

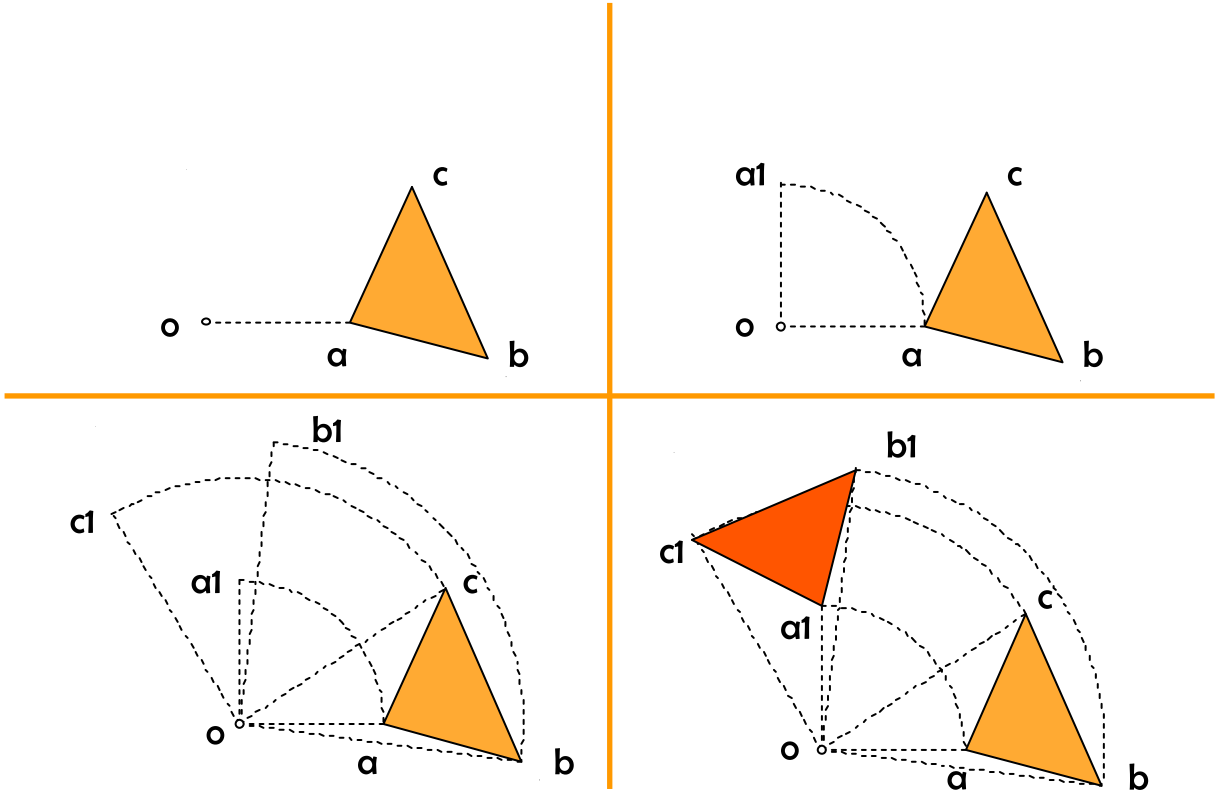


- Sea AB un segmento rectilíneo dirigido del plano, por la Transformación Traslación T(AB) se quiere decir, la transformación de S sobre si mismo que transporta todo punto P del plano al punto P' del mismo plano, tal que:

PP` sea igual y paralelo a AB.

- El segmento AB se llama vector de traslación.

Transformación Rotación : R(O, θ).

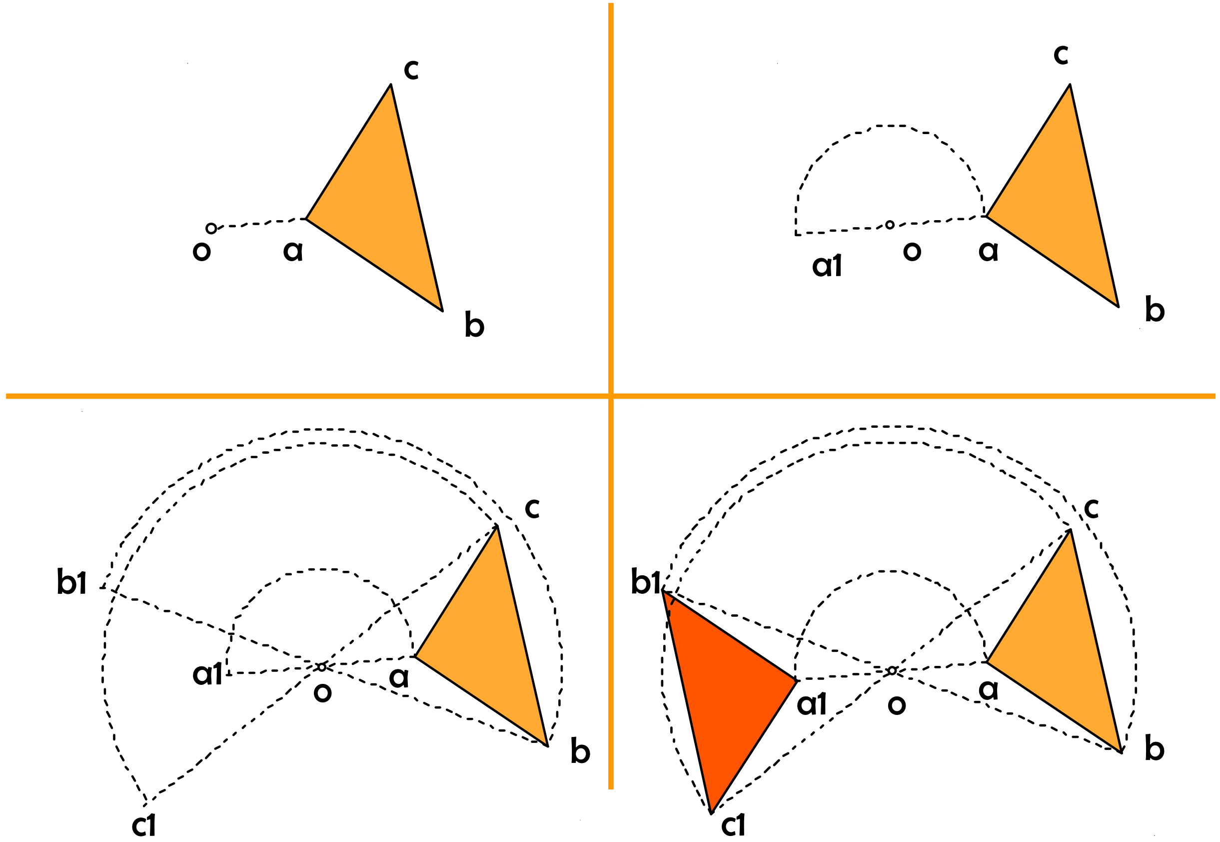


- Sea O un punto fijo del plano y θ un determinado ángulo con sentido, por la Transformación Rotación R(O, θ) se quiere decir la Transformación de S sobre si mismo que lleva a cada punto P del plano al punto P` del mismo plano, tal que :

- **OP = OP` y el ángulo POP`= θ**

- El punto O se llama centro de rotación y θ se llama ángulo de rotación.

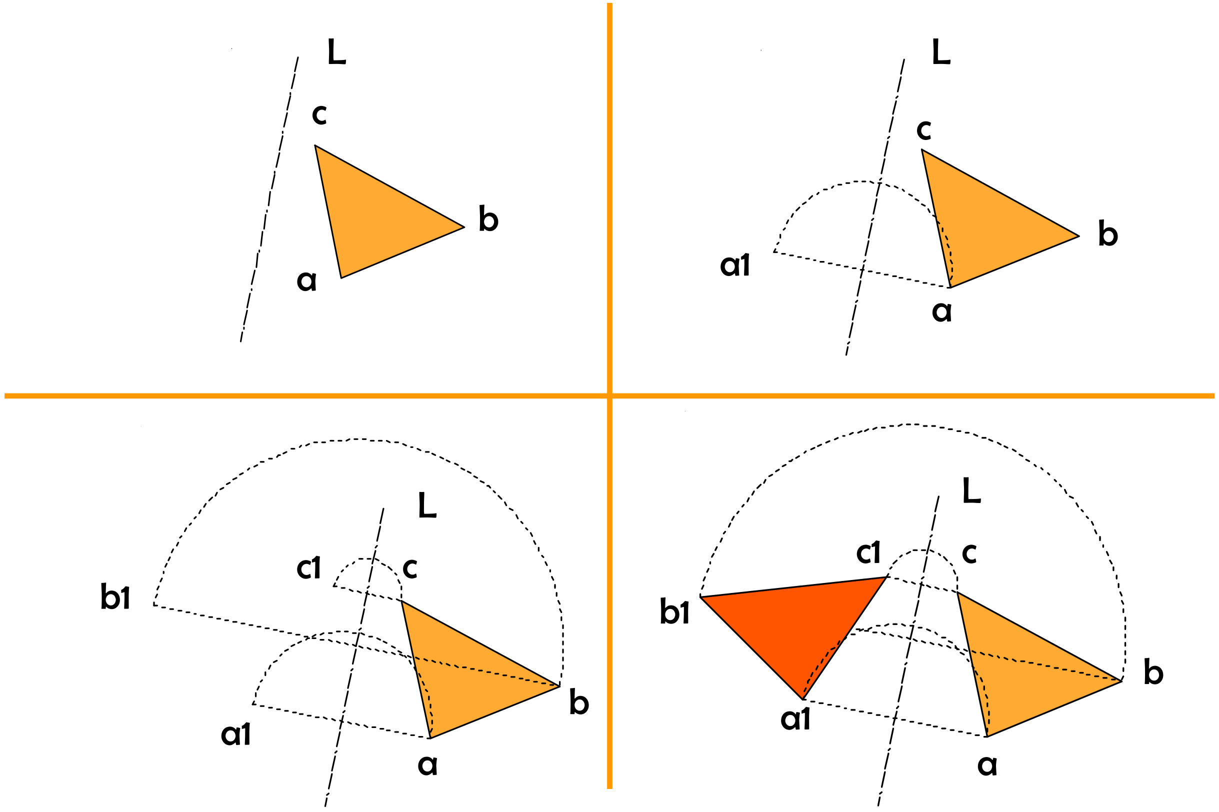
Transformación Reflexión con respecto a un Punto O : R(O).



- Sea O un punto fijo del plano, por la Transformación Reflexión o semivuelta R(O) se quiere decir la Transformación de S sobre si mismo que lleva a cada punto P del plano al punto P` del mismo plano, tal que :
- **Sea O el punto medio de PP`**

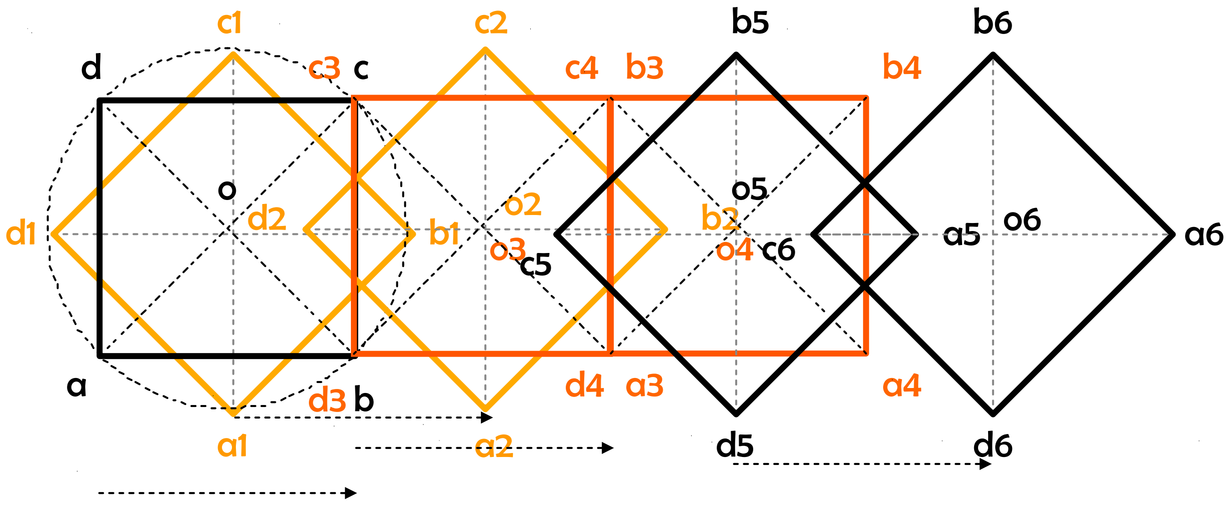
- El punto O se llama centro de reflexión.

Transformación Reflexión con respecto a un Eje L : R(L).



- Sea L una recta fija del plano, por la Transformación Reflexión R(L) en la recta se quiere decir la Transformación de S sobre si mismo que lleva a cada punto P del plano al punto P` del mismo plano, tal que :
- **Sea L la mediatriz del trazo PP`**
- La recta L se llama Eje de reflexión.

Producto de Transformaciones Puntuales.



Dado un cuadrado abcd de lado 3 cm., se pide:

Determinar $T = (T2\ T1)^n$

T1 = R (Oi, 45º); T2 = T (ab)

O = Intersección de las diagonales del cuadrado.
i = Subíndice de la última transformación.

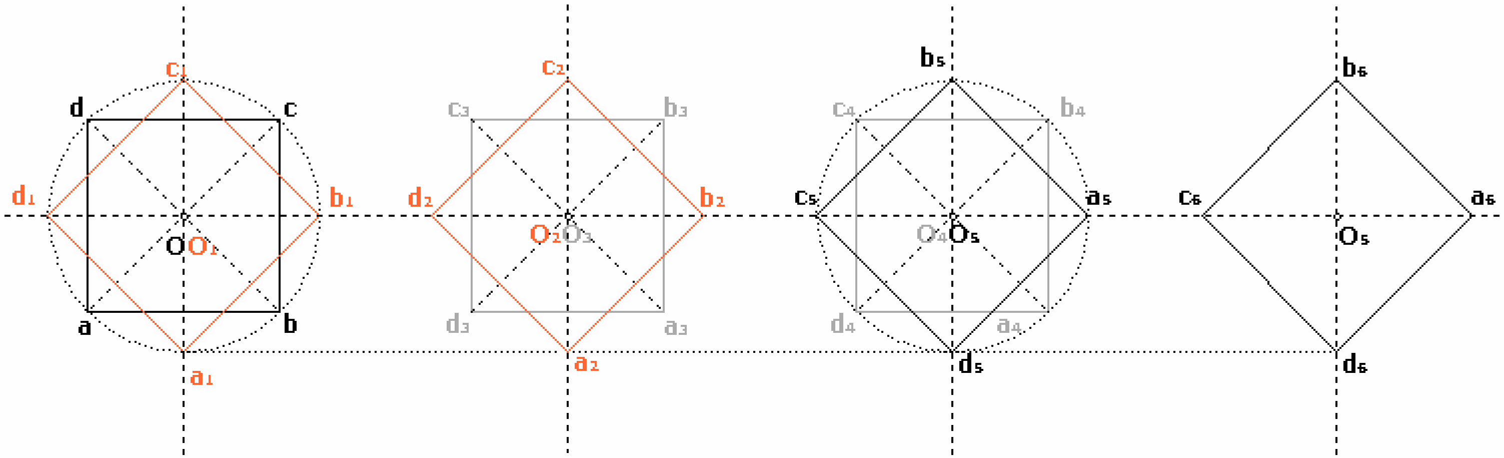
Producto de Transformaciones Puntuales.

Determinar $T = (T2\ T1)^n$

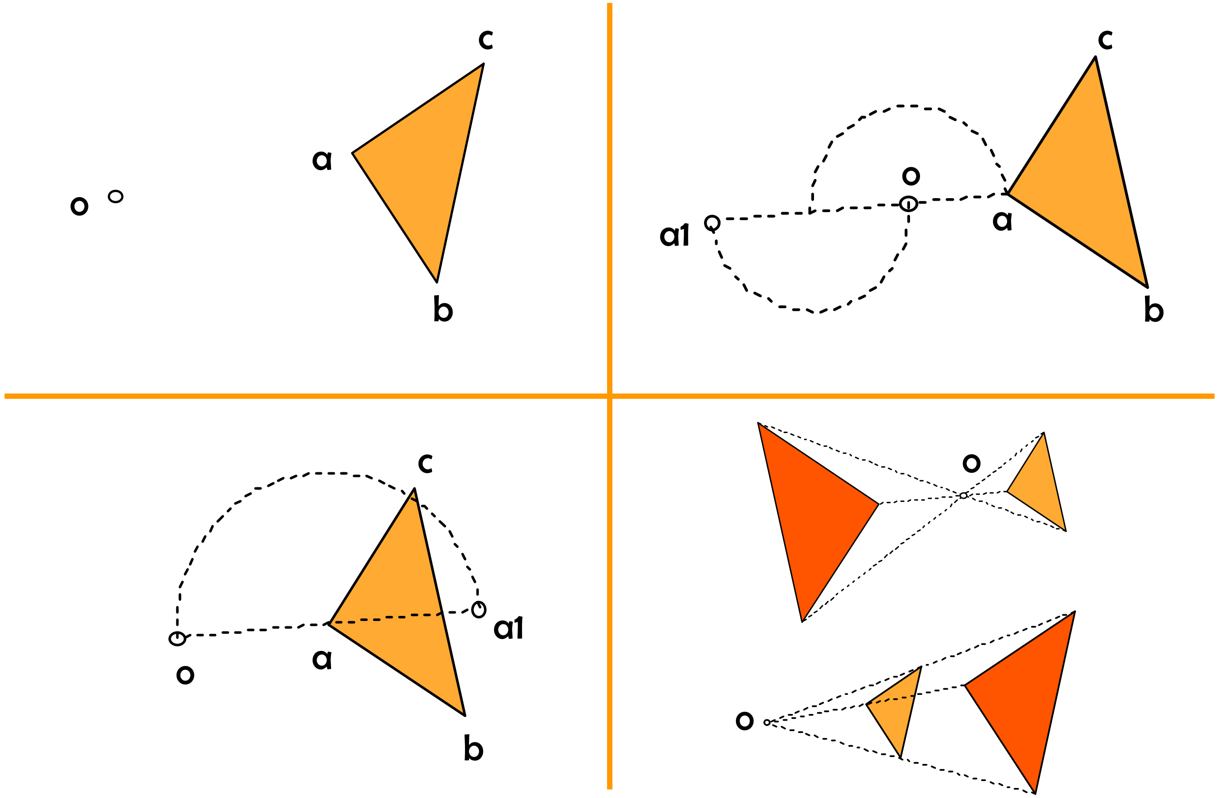
T1 = R (Oi, 45º); T2 = T (2ab)

O = Intersección de las diagonales del cuadrado.

i = Subíndice de la última transformación.



Transformación Homotecia : H(O, K).



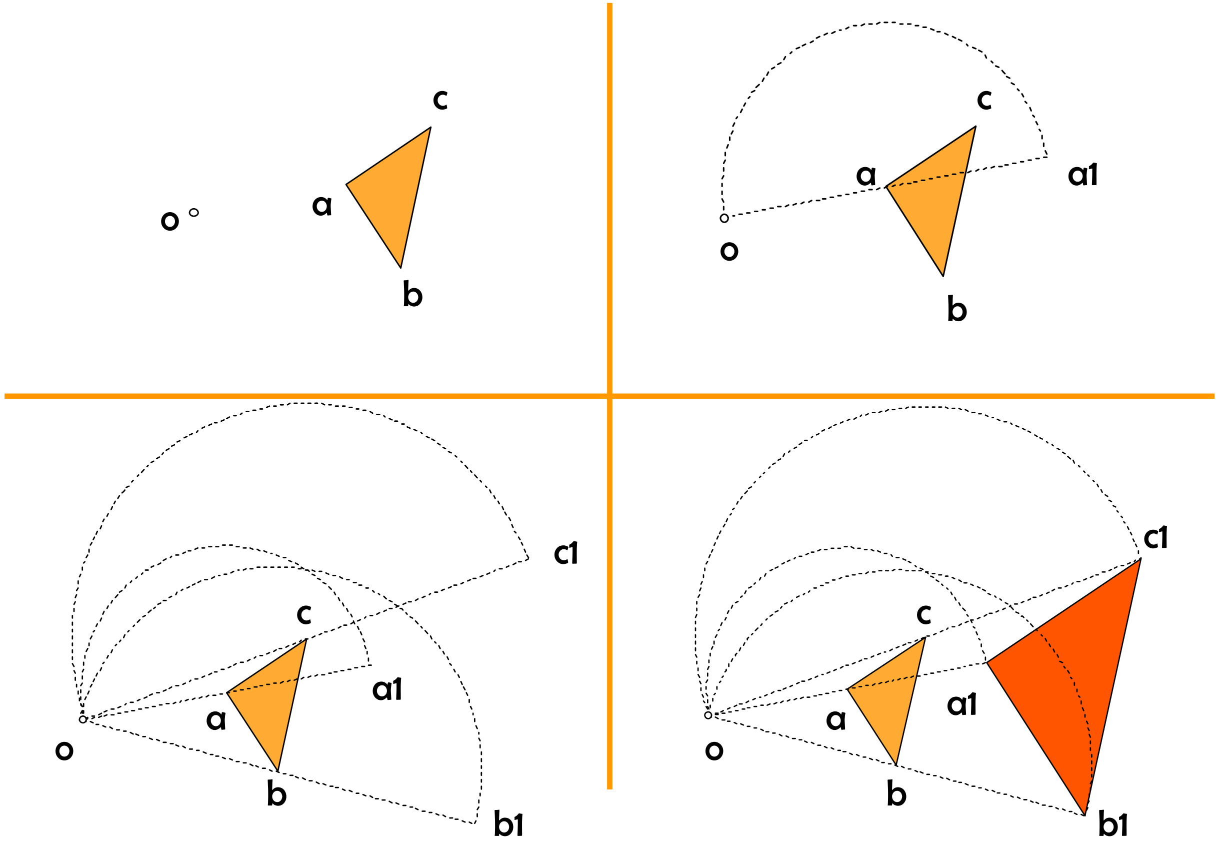
- Sea O un punto fijo del plano y κ un número real dado distinto de cero, por la Transformación Homotecia (o expansión, o dilatación, o alargamiento)

H(O, K) se quiere decir, la Transformación de S sobre si mismo que lleva a cada punto P del plano al punto P` del mismo plano, tal que :

- **OP` = IKIOP**

- El punto O se llama centro de Homotecia y K es la razón de Homotecia.

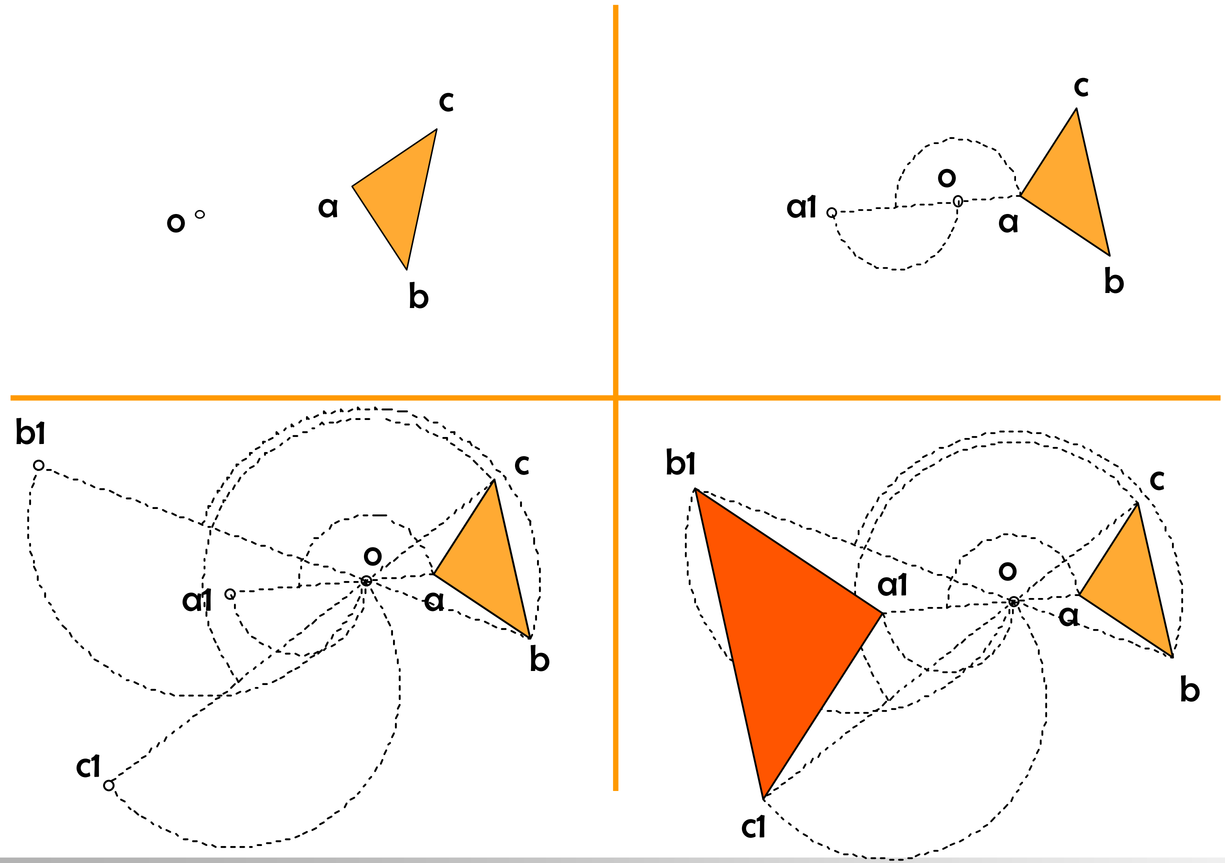
Homotecia Directa : H(O, K).



- Cuando K es un número real positivo la Homotecia es Directa. En este caso dos puntos homotéticos están ubicados en la misma semirrecta respecto del centro de homotecia O.

- **OP\` = IKIOP**

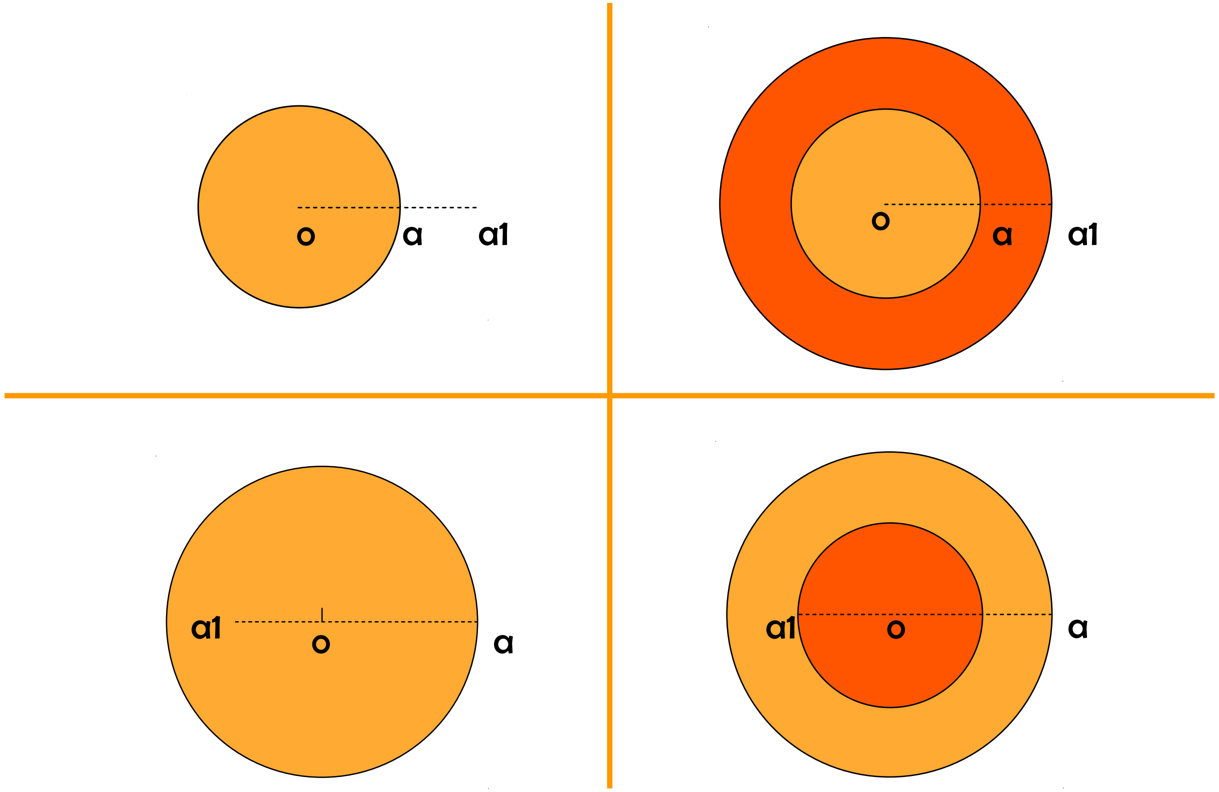
Homotecia Inversa : H(O, K).



- Cuando K es un número real negativo la Homotecia es Inversa. En este caso dos puntos homotéticos están ubicados en una semirrecta distinta respecto del centro de homotecia O.

- **OP` = IKIOP**

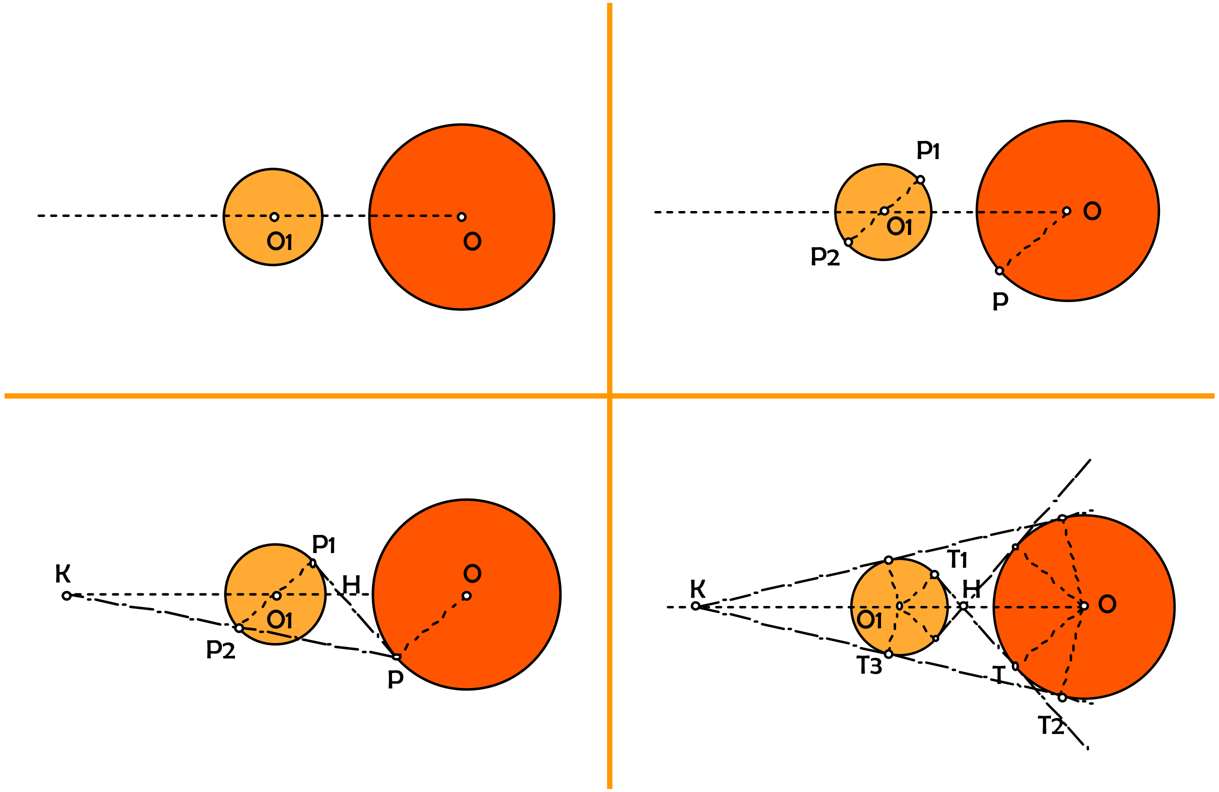
Homotecia en circunferencias :



- Dos circunferencias siempre están relacionadas homotéticamente, ya sean circunferencias concéntricas o no concéntricas :
- Circunferencias concéntricas.

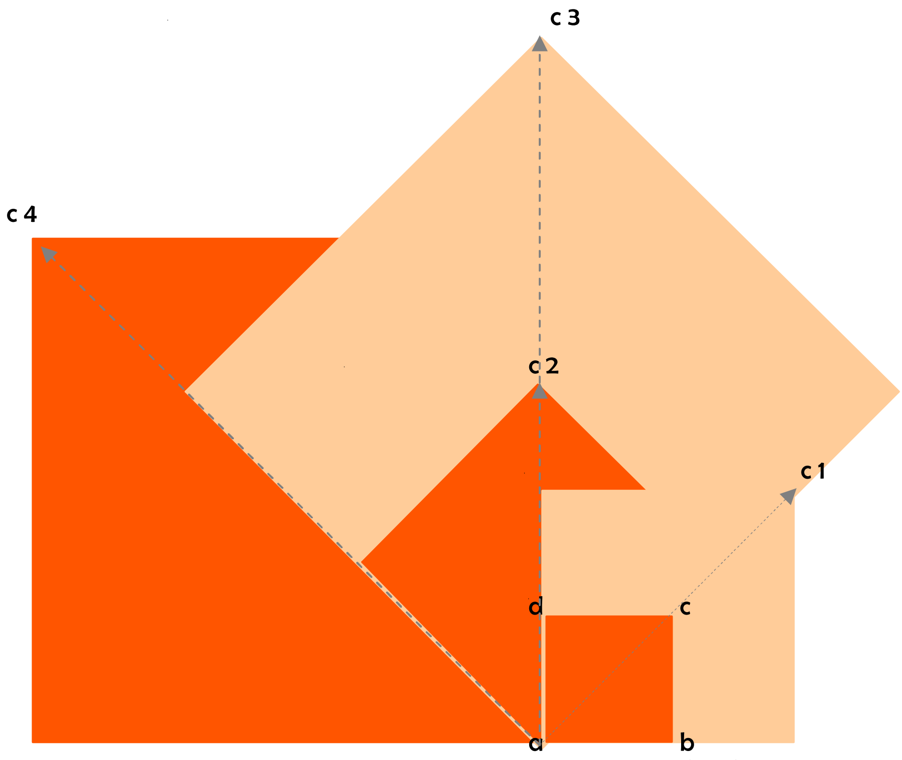
El centro de homotecia es el centro de las circunferencias y la razón de homotecia es la razón de sus radios.

Homotecia de circunferencias no Concéntricas:



- Son homólogas según dos homotecias, positiva y negativa :
- Procedimiento para definir centro y razón de homotecia.
- Unir centros de circunferencias.
- Se une punto P de la circunferencia con el centro O.
- Por O1 se traza paralela a OP definiendo los puntos P1 y P2.
- Se une P con P1 y P con P2, definiendo los puntos H y K.
- Por H y K se determinan puntos de tangencias T, T1 y T2, T3.
- Se definen triángulos semejantes OTH con O1T1H y el triángulo OT2K con O1T3K.

Producto de Transformaciones Puntuales :



• Dado un cuadrado abcd se pide, determinar el siguiente producto de transformaciones :

$$T = (T2\ T1)^{n}$$

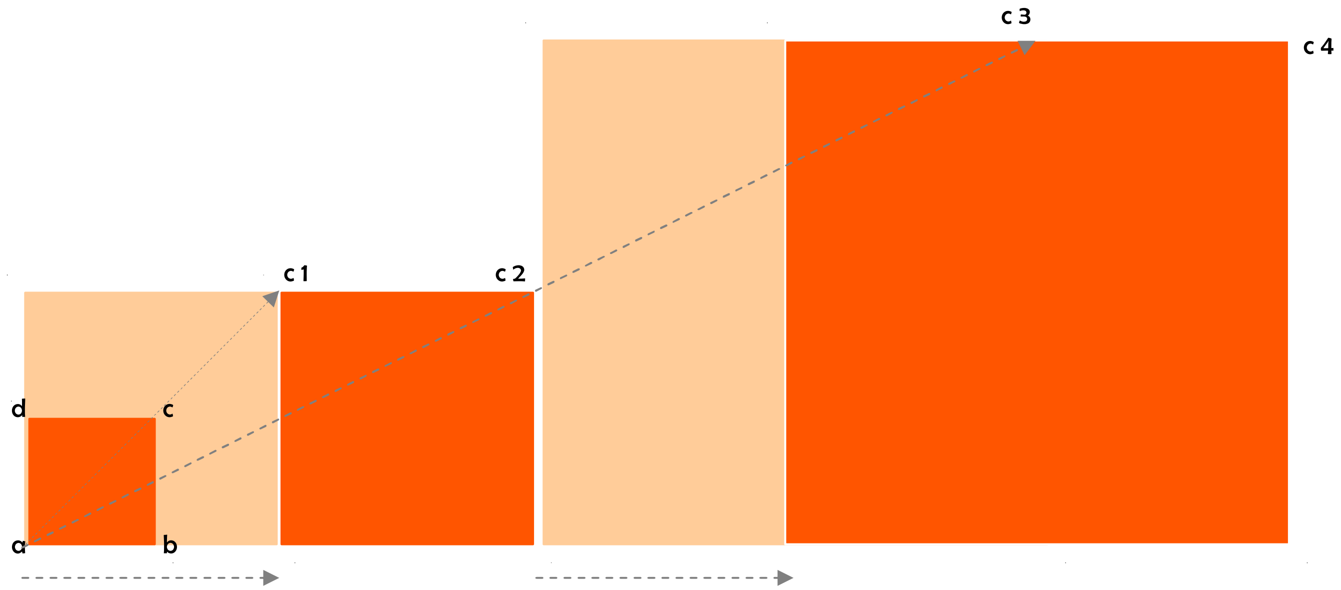
Si T1 = H (a, 2) y T2 = R (a, 45º)

Producto de Transformaciones Puntuales :

- Dado un cuadrado abcd se pide, determinar el siguiente producto de transformaciones :

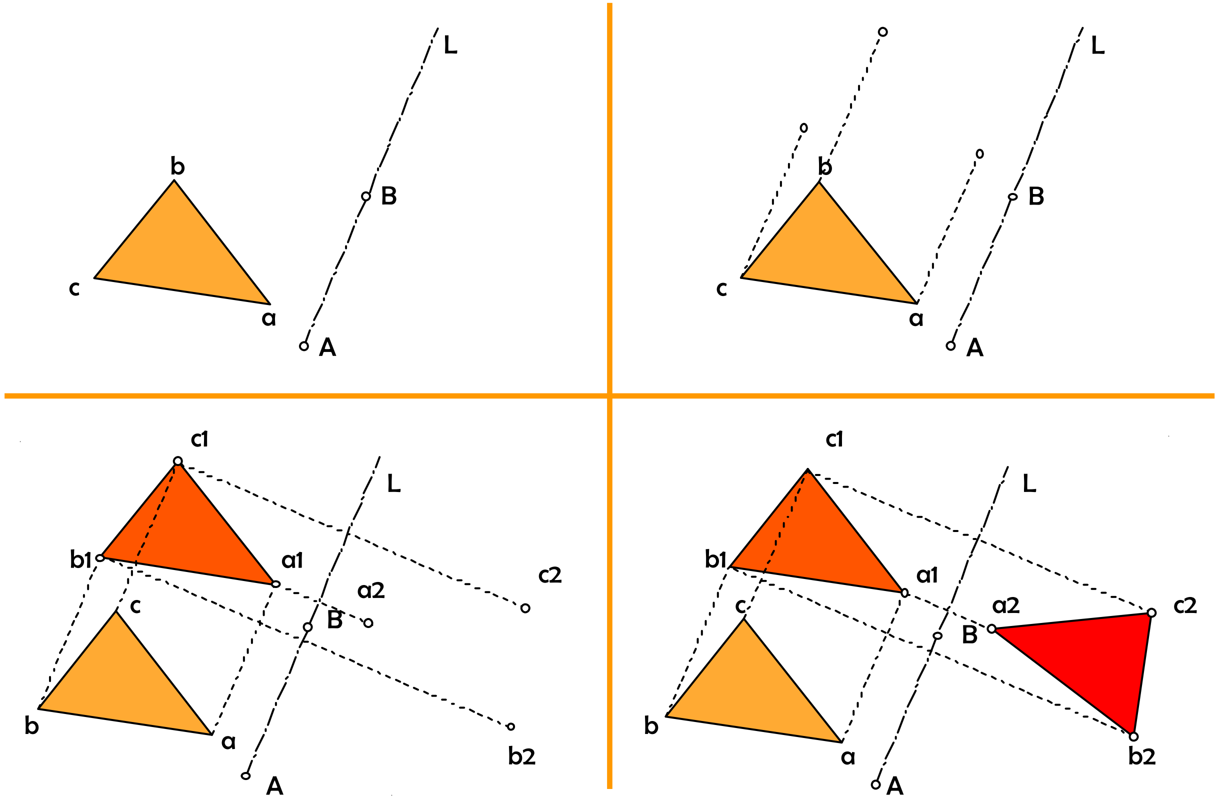
$$T = (T2\ T1)^{n}$$

Si T1 = H (a, 2) y T2 = T (2ab)



Combinación de Transformaciones :

1.- Deslizamiento Reflexión : G (L, AB)

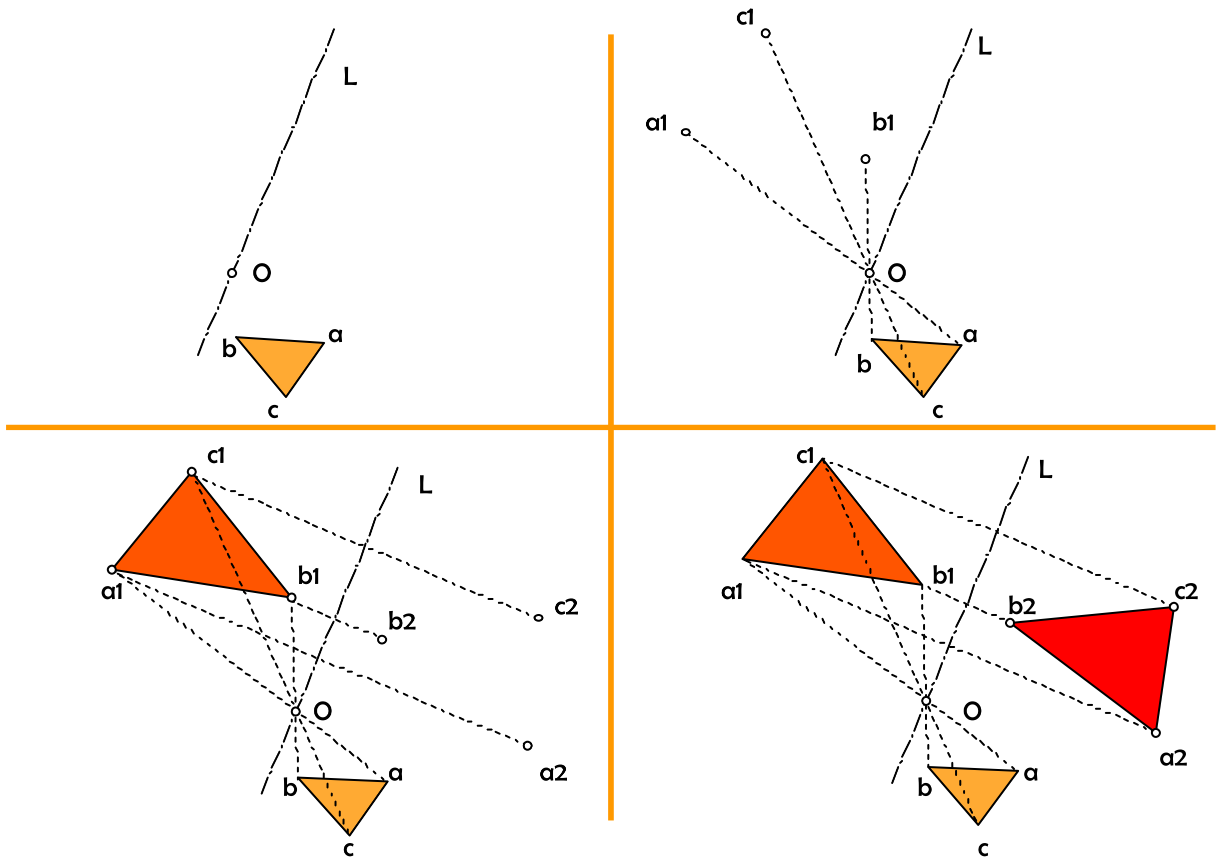


- Sea L una recta dirigida del plano y AB un determinado segmento dirigido de L. Por el deslizamiento reflexión G (L, AB) queremos decir el producto R (L) T (AB) .

- La recta L se llama eje de deslizamiento reflexión y el segmento dirigido AB vector de desplazamiento reflexión.

Combinación de Transformaciones :

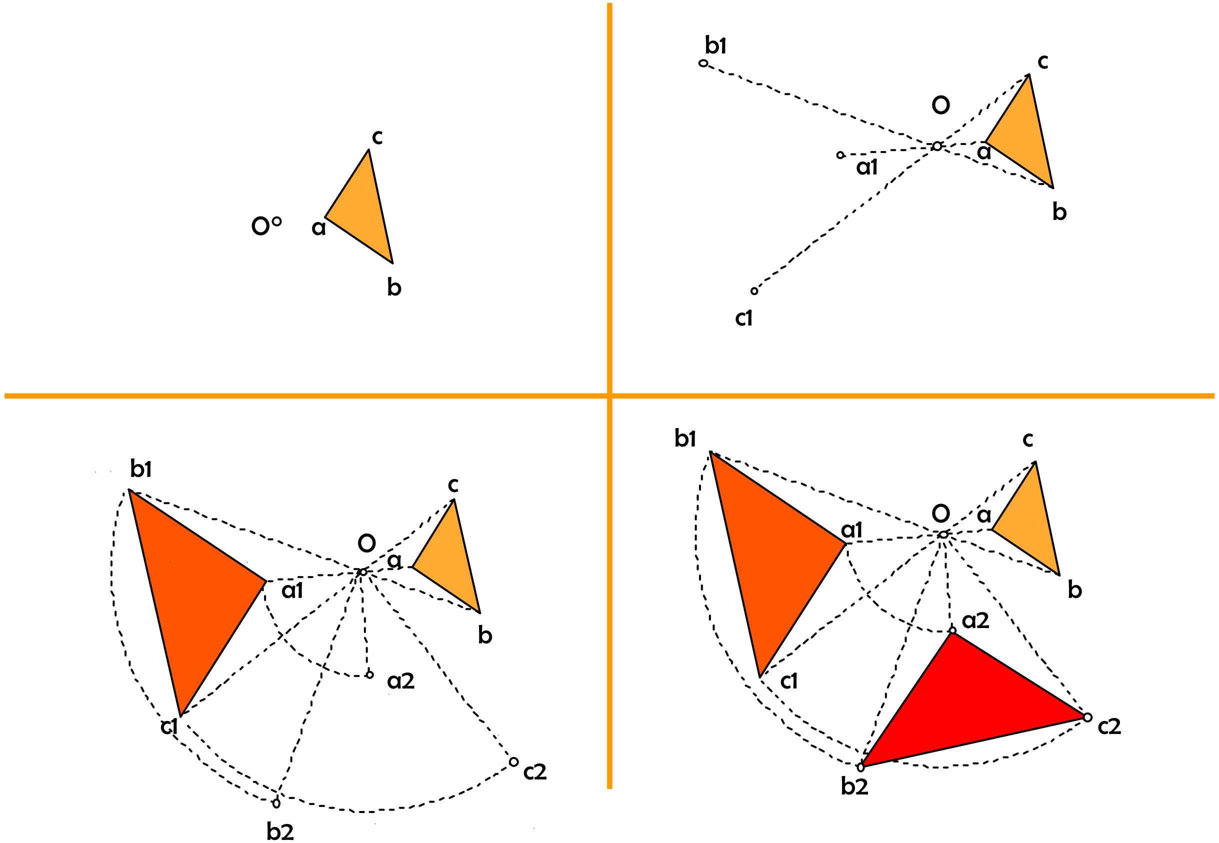
2.- Reflexión Alargamiento : S (L, O, K)



- Sea L una recta del plano y O un punto fijo de L y K un número real dado distinto de cero.
- Por la Reflexión alargamiento S (L, O, K) queremos decir el producto R (L) H (O, K).
- La recta L es el eje de reflexión alargamiento, O es el centro de reflexión alargamiento y K es la razón de reflexión alargamiento.

Combinación de Transformaciones :

3.- Homología : H (O, K, θ)



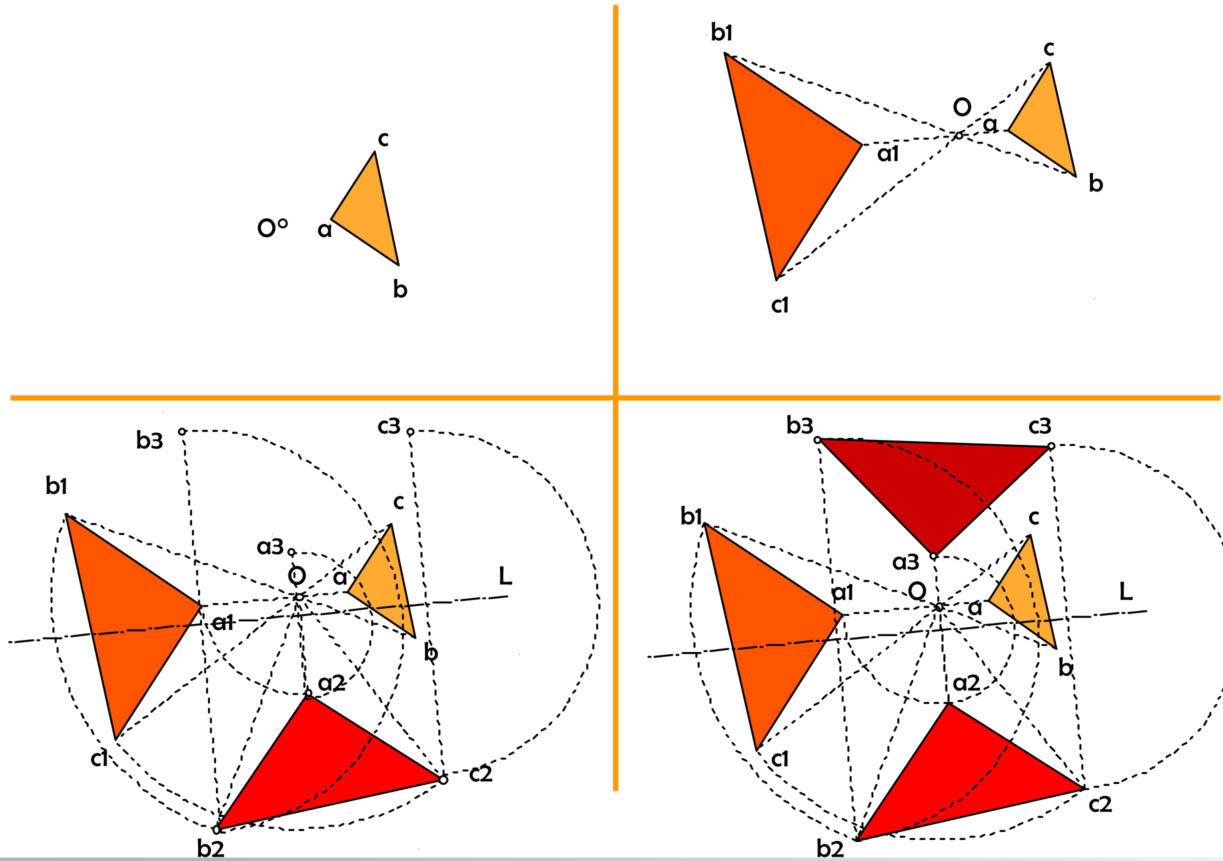
- Sea O un punto fijo del plano, K un número real dado distinto de cero y θ un determinado ángulo con sentido.

- Por la Homología o rotación en espiral H (O, K, θ) queremos decir el producto R (O, θ) H (O, K).

- El punto O se llama centro de homología, K es la razón de homología y θ es el ángulo de homología.

Combinación de Transformaciones :

4.- Antilogía : A (L, O, K, θ)



- Sea O un punto fijo del plano, K un número real dado distinto de cero, θ un determinado ángulo con sentido y L una recta fija del plano.

- Por la Antilogía designamos al producto R (L) H (O, K, θ) que es R (L) R (O, θ) H (O, K).

- El punto O se llama centro de antilogía, K es la razón de antilogía, θ es el ángulo de homología y L es el eje de antilogía.