5. *Productos escalar y vectorial de dos vectores.* Dados dos vectores $\mathbf{a} = 3\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}} - 5\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{b} = -\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}} + 6\hat{\mathbf{z}}$, calcular por métodos vectoriales:

(*a*) La longitud de cada uno de ellos. *Sol.* $a = \sqrt{50}$; $b = \sqrt{41}$
(*b*) El producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. *Sol.* -25.
(*c*) El ángulo formado entre ambos. *Sol.* 123,5°.
(*d*) Los cosenos directores de cada uno.
(*e*) El vector suma y diferencia $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.
Sol. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\hat{\mathbf{x}} + 6\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$.
(*f*) El vector producto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. *Sol.* $34\hat{\mathbf{x}} - 13\hat{\mathbf{y}} + 10\hat{\mathbf{z}}$.

6. *Algebra vectorial.* Dados dos vectores tales que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 11\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b} = -5\hat{\mathbf{x}} + 11\hat{\mathbf{y}} + 9\hat{\mathbf{z}}$:
(*a*) Hallar **a** y **b**.
(*b*) Determinar el ángulo formado por **a** y $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ utilizando métodos vectoriales.

7. *Suma vectorial de velocidades.* En agua tranquila un hombre puede remar un bote a 5 km/h.
(*a*) Si intenta cruzar un río que fluye a 2 km/h, ¿cuál será la dirección de su trayectoria y su velocidad?
(*b*) ¿En qué dirección debe apuntar en su movimiento para cruzar perpendicularmente el río y cuál debería ser su velocidad?

8. *Composición de vectores.* El piloto de un aeroplano desea alcanzar un punto a 200 km al este de su posición presente. Sopla viento del noroeste a 30 km/h. Calcular su vector velocidad respecto a la masa de aire en movimiento, si su horario le exige que llegue a su destino en 40 minutos.
Sol. $\mathbf{v} = 279\hat{\mathbf{x}} + 21\hat{\mathbf{y}}$ km/h; $\hat{\mathbf{x}}$ = este; $\hat{\mathbf{y}}$ = norte.

9. *Operaciones con vectores; vector de posición relativa.* De una fuente común se emiten dos partículas y en un instante determinado tienen los siguientes desplazamientos:

$$\mathbf{r}_1 = 4\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 8\hat{\mathbf{z}}; \qquad \mathbf{r}_2 = 2\hat{\mathbf{x}} + 10\hat{\mathbf{y}} + 5\hat{\mathbf{z}}$$

(*a*) Indicar en un esquema las posiciones de las partículas y escribir la expresión que nos da el desplazamiento **r** de la partícula 2 respecto a 1.
(*b*) Utilizar el producto escalar para calcular el módulo de cada vector. *Sol.* $r_1 = 9{,}4$; $r_2 = 11{,}4$; $r = 7{,}9$.
(*c*) Calcular los ángulos entre las parejas posibles de estos tres vectores.
(*d*) Calcular la proyección de **r** sobre $\mathbf{r}_1$. *Sol.* $-1{,}2$.
(*e*) Calcular el vector producto $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$.
Sol. $-65\hat{\mathbf{x}} - 4\hat{\mathbf{y}} + 34\hat{\mathbf{z}}$.

11. *Diagonales de un cubo.* ¿Cuál es el ángulo formado por dos diagonales interiores de un cubo? (Una *diagonal interior* une dos vértices y pasa por el interior de un cubo. Una *diagonal superficial* une dos vértices pertenecientes a la misma cara del cubo.) *Sol.* $\cos^{-1} \frac{1}{3}$.

13. *Vectores paralelos y perpendiculares.* Determinar x e y de tal modo que los vectores $\mathbf{B} = x\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}}$ y $\mathbf{C} = 2\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ sean cada uno de ellos perpendicular a $\mathbf{A} = 5\hat{\mathbf{x}} + 6\hat{\mathbf{y}}$. Demostrar ahora que **B** y **C** son paralelos. Si consideramos un espacio tridimensional, ¿también se cumple que dos vectores perpendiculares a un tercero son necesariamente paralelos?

14. *Volumen de un paralelepípedo.* Un paralelepípedo tiene sus aristas descritas por los vectores $\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{y}}$, $4\hat{\mathbf{y}}$, e $\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}$ a partir del origen. Calcular su volumen. *Sol.* 12.

EJEMPLO 3.8. **La velocidad de un aeroplano en aire tranquilo es de 200 millas por hora. Se desea ir de *O* a *O′*, siendo la dirección de *OO′* N 20° W. El viento tiene una velocidad de 30 millas por hora en la dirección N 40° E. Encontrar la dirección del movimiento del avión y su velocidad resultante.**

Solución: **Designemos la velocidad del aeroplano por $\boldsymbol{V}_a$ y la del viento por $\boldsymbol{V}_w$. La velocidad resultante es, como antes,**

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_a + \boldsymbol{V}_w.$$

En este caso sabemos que $\boldsymbol{V}$ debe de tener la dirección *OO′*. Por lo tanto el vector $\boldsymbol{V}_a$ debe dibujarse de tal modo que cuando se sume a $\boldsymbol{V}_w$, la resultante esté a lo largo de *OO′*. Esto se ha hecho en la Fig. 3-25 dibujando un círculo de radio V_a, con el centro en el extremo de $\boldsymbol{V}_w$, y hallando la intersección de este círculo con la línea *OO′*.
Para proceder analíticamente, notamos que el ángulo entre $\boldsymbol{V}$ y $\boldsymbol{V}_w$ es 20° + 40° = = 60°. Por tanto, usando la ec. (3.4), obtenemos

$$\frac{V_a}{\text{sen } 60°} = \frac{V_w}{\text{sen } \alpha} \quad \text{ó} \quad \text{sen } \alpha = \frac{V_w \text{ sen } 60°}{V_a} = 0{,}130$$

lo que da $\alpha = 7{,}8°$. Por consiguiente, la dirección de $\boldsymbol{V}_a$ debe ser N 27,8° W. El ángulo entre $\boldsymbol{V}_a$ y $\boldsymbol{V}_w$ es $\theta = 27{,}8° + 40° = 67{,}8°$, y la magnitud de la velocidad resultante, usando la ec. (3.3), es

$$V = \sqrt{200^2 + 30^2 + 2 \times 200 \times 30 \cos 67{,}8°} = 204 \text{ mi hr}^{-1}.$$

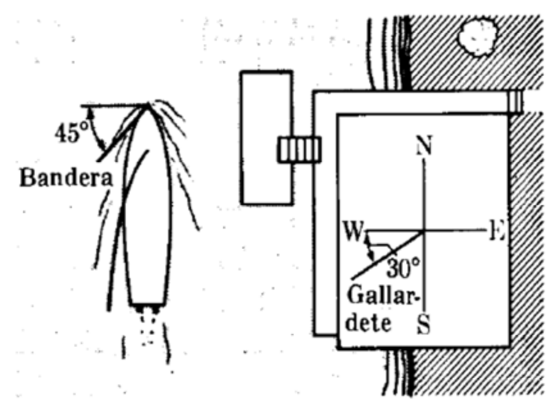

Figura 3-39

3.12 La bandera situada en el mástil de un bote a vela flamea haciendo un ángulo de 45°, como se muestra en la Fig. 3-39, pero la bandera situada en una casa a la orilla se extiende 30° al suroeste. (a) Si la velocidad del bote es de 10 km hr^{-1} calcular la velocidad del viento. (b) Encontrar la velocidad aparente del viento para un observador situado sobre el bote.

EJEMPLO 5.4. Un cuerpo se mueve a lo largo del eje X de acuerdo a la ley

$$x = 2t^3 + 5t^2 + 5,$$

donde x se expresa en pies y t en segundos. Encontrar (a) la velocidad y la aceleración en cualquier momento, (b) la posición, velocidad y aceleración cuando $t = 2$ s y 3 s, y (c) la velocidad promedio y la aceleración promedio entre $t = 2$ s y $t = 3$ s.

Solución: (a) Usando las ecs. (5.2) y (5.5), podemos escribir

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^3 + 5t^2 + 5) = 6t^2 + 10t \text{ pies s}^{-1}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(6t^2 + 10t) = 12t + 10 \text{ pies s}^{-2}.$$

(b) Para $t = 2$ s, usando las expresiones respectivas, obtenemos

$$x = 41 \text{ pies}, \qquad v = 44 \text{ pies s}^{-1}, \qquad a = 34 \text{ pies s}^{-2}.$$

Similarmente, para $t = 3$ s, el estudiante puede verificar que

$$x = 104 \text{ pies}, \qquad v = 84 \text{ pies s}^{-1}, \qquad a = 46 \text{ pies }^{-2}.$$

(c) Para encontrar la velocidad promedio entre $t = 2$ s y $t = 3$ s, tenemos $\Delta t =$ 1 s, y de (b) $\Delta x = 63$ pies, $\Delta v = 40$ pies s^{-1}. Luego

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{63 \text{ pies}}{1 \text{ s}} = 63 \text{ pies s}^{-1},$$

$$\dot{v} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{40 \text{ pies s}^{-1}}{1 \text{ s}} = 40 \text{ pies s}^{-2}.$$

5.20 Una piedra cae desde un globo que desciende a una velocidad uniforme de 12 m s^{-1}. Calcular la velocidad y la distancia recorrida por la piedra después de 10 s. Resolver el mismo problema para el caso cuando el globo se eleva a la misma velocidad.

5.21 Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m s^{-1}. ¿Cuándo tendrá una velocidad de 6 m s^{-1} y a qué altura se encontrará?

5.22 Se tira una piedra hacia arriba desde el fondo de un pozo de 88 pies de profundidad con una velocidad inicial de 240 pies s^{-1}. Calcular el tiempo que demorará la piedra en alcanzar el borde del pozo, y su velocidad. Discutir las respuestas posibles.

5.26 Un cuerpo se deja caer y simultáneamente un segundo cuerpo, se tira hacia abajo con una velocidad inicial de 100 cm s^{-1}. ¿Cuándo será la distancia entre ellos de 18 m?

5.27 Se tiran dos cuerpos verticalmente hacia arriba, con la misma velocidad de salida de 100 m s^{-1}, pero separados 4 s. ¿Qué tiempo transcurrirá desde que se lanzó el primero para que se vuelvan a encontrar?

5.28 Un cuerpo cae libremente. Demostrar que la distancia que recorre durante el enésimo segundo es $(n - \frac{1}{2})g$.

5.29 Se deja caer una piedra desde lo alto de un edificio. El sonido de la piedra al chocar con el suelo se escucha 6,5 s más tarde. Si la velocidad del sonido es de 1120 pies s^{-1}, calcular la altura del edificio.

Un tren partió del reposo y se movió con aceleración constante. En un momento dado estaba viajando a 33.0 m/s, y 160 m más adelante lo estaba haciendo a 54.0 m/s. Calcule (*a*) la aceleración, (*b*) el tiempo requerido para recorrer 160 m, (*c*) el tiempo requerido para que alcance una velocidad de 33.0 m/s, y (*d*) la distancia recorrida desde el reposo hasta el momento en que el tren tuvo una velocidad de 33.0 m/s.

Un autómovil que se mueve con aceleración constante cubre la distancia entre dos puntos que distan entre sí 58.0 m en 6.20 s. Su velocidad cuando pasa por el segundo punto es de 15.0 m/s. (*a*) ¿Cuál es la velocidad en el primer punto? (*b*) ¿Cuál es su aceleración? (*c*) ¿A qué distancia previa al primer punto estaba el autómovil en reposo?

Un tren subterráneo acelera desde el reposo en una estación (a = +1.20 m/s^2) durante la primera mitad de la distancia a la siguiente estación y luego decelera hasta el reposo (a = −1.20 m/s^2) en la segunda mitad de la distancia. La distancia entre las estaciones es de 1.10 km. Halle (*a*) el tiempo de viaje entre estaciones y (*b*) la velocidad máxima del tren.