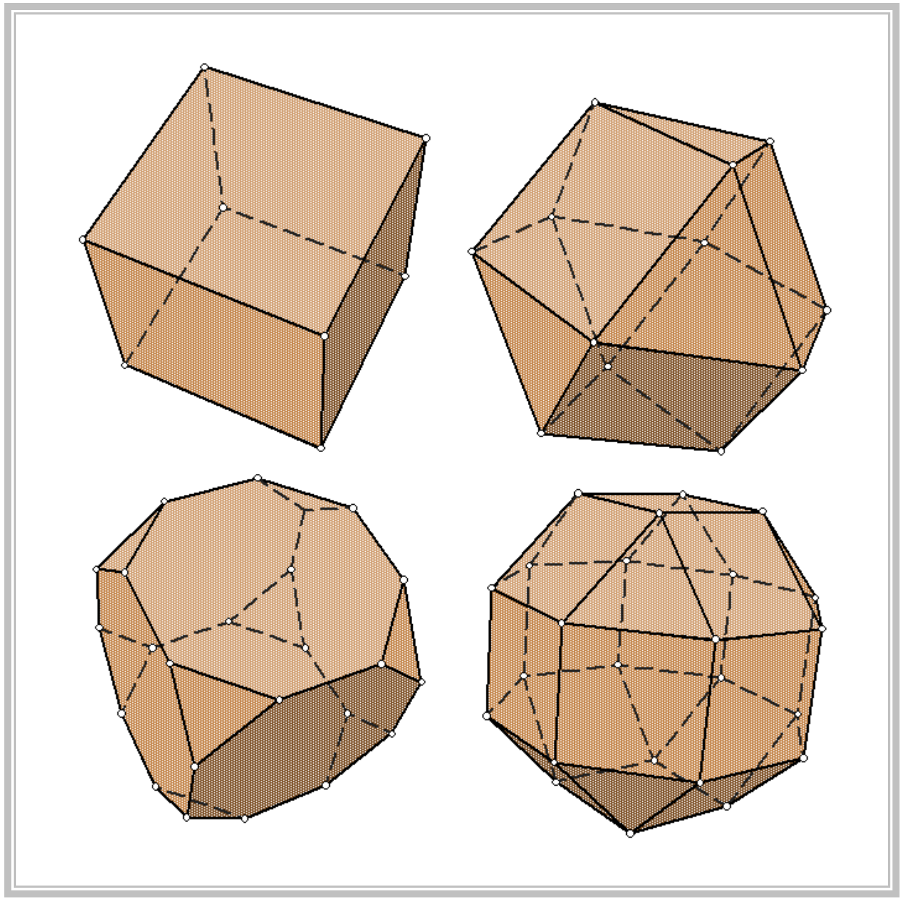
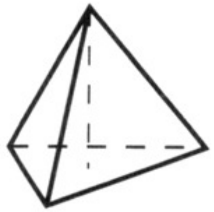


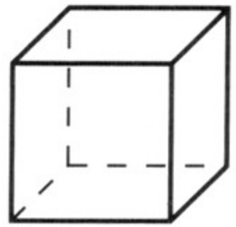
POLIEDROS

APUNTE DOCENTE

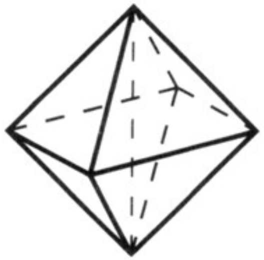
Preparado por el Arqto. Jing Chang Lou



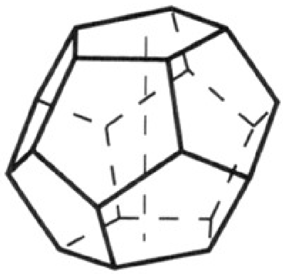
TETRAEDRO



HEXAEDRO



OCTAEDRO



DODECAEDRO

ICOSAEDRO

POLIEDROS REGULARES.

Se define como poliedro un cuerpo limitado por superficies poligonales planas. Dichos polígonos son caras del poliedro. Los lados de estos polígonos son las aristas y los vértices son también los vértices de los poliedros.

Lo que característica a los poliedros regulares es que posee las caras, las aristas y ángulos, respectivamente, iguales entre sí.

Además, al pertenecer a la familia de los poliedros euclidianos cumplen con la siguiente relación establecida por el Teorema de poliedros de Euler: "El número de caras de un poliedro platónico más su número de vértices es siempre igual a su número de aristas más dos”

Nº de caras + Nº de vértices = Nº de aristas + 2.

Existen sólo cinco poliedros regulares y son: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Los elementos que los configuran están expuestos en el siguiente cuadro:

POLIEDRO	CARAS	VERTICES	ARISTAS	POLIGONO DE LAS CARAS
Tetraedro	4	4	6	Triángulo Equilátero
Hexaedro o Cubo	6	8	12	Cuadrado
Octaedro	8	6	12	Triángulo Equilátero
Dodecaedro	12	20	30	Pentágono
Icosaedro	20	12	30	Triángulo Equilátero

CARACTERISTICAS DE LOS POLIEDROS REGULARES

Regularidad

Tal y como se ha expresado para definir estos poliedros:

- Todas las caras son polígonos regulares iguales.
- En todos los vértices concurren el mismo número de caras y de aristas.
- Todas las aristas tienen la misma longitud.
- Todos los ángulos diedros que forman las caras entre sí son iguales.

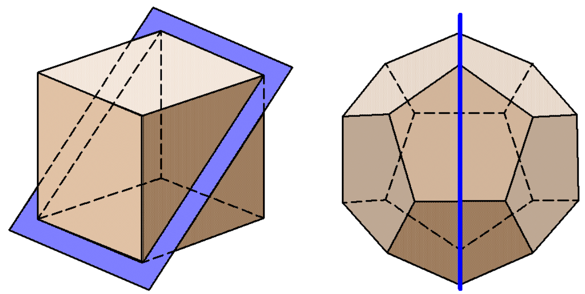
Simetría

Estos poliedros son fuertemente simétricos:

Todos ellos gozan de perfecta simetría central respecto a un punto del espacio (centro de simetría) que equidista de sus caras, de sus vértices y de sus aristas.

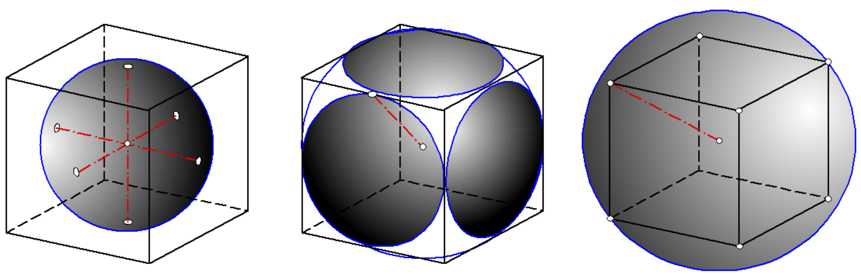
Todos ellos tienen además simetría axial respecto a una serie de ejes de simetría que pasan por el centro de simetría anterior.

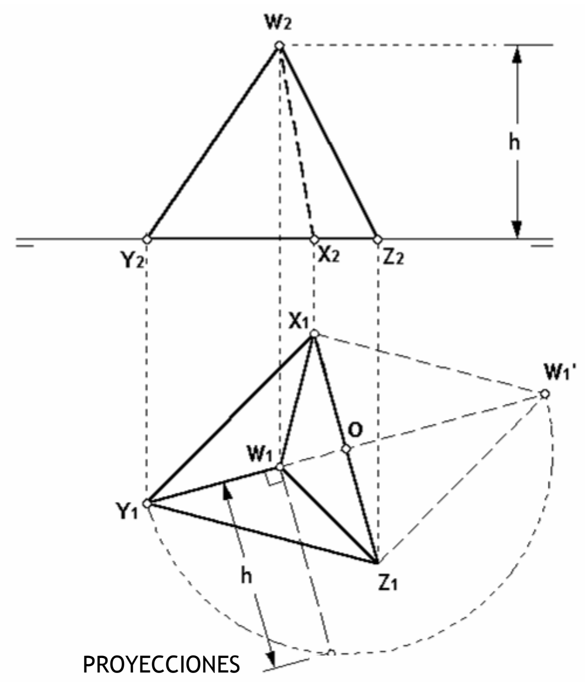
Todos ellos tienen también simetría especular respecto a una serie de planos de simetría (o planos principales), que los dividen en dos partes iguales.



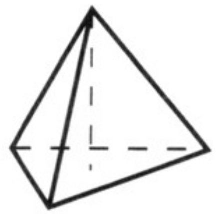
Como consecuencia geométrica de lo anterior, se pueden trazar en todo poliedro regular tres esferas particulares, todas ellas centradas en el centro de simetría del poliedro:

- Una esfera inscrita, tangente a todas sus caras en su centro.
- Una segunda esfera tangente a todas las aristas en su centro.
- Una esfera circunscrita, que pase por todos los vértices del poliedro.





PROYECCIONES



TETRAEDRO

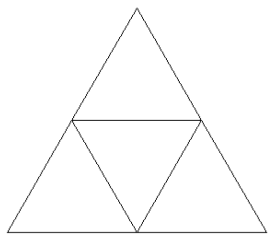
TETRAEDRO

Es un poliedro formado por cuatro caras que son triángulos equiláteros, y cuatro vértices en cada uno de los cuales concurren tres caras.

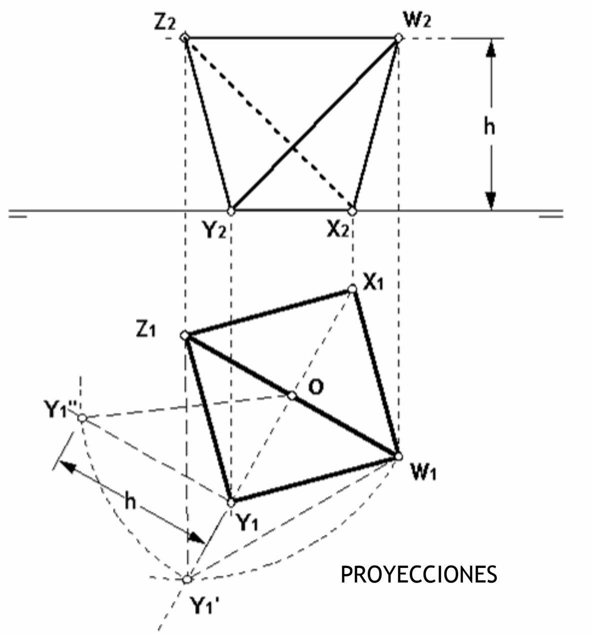
Proyecciones de un tetraedro regular, apoyado en una de sus caras sobre el plano horizontal de proyección.

Desarrollo:

Sabiendo que una de sus caras pertenece al plano horizontal de proyección, el problema se reduce el obtener la altura del tetraedro. Se dibuja la base $X_1Y_1Z_1$ del tetraedro en la proyección horizontal y mediante las bisectrices de los ángulos internos que forma los lados de la base, se ubica la cúspide W_1 en el centro del triángulo. Para determinar la altura es necesario abatir una de las caras (ejemplo $X_1Z_1W_1$) sobre el plano horizontal de proyección obteniendo un triángulo $X_1Z_1W_1'$. Se traza la recta W_1W_1' definiendo el punto **O** en el lado X_1Z_1. Por W_1 se levanta una perpendicular a W_1W'. Con centro en **O** y radio OW_1' se traza un arco que al cortar la perpendicular trazada por W_1 se define la altura $W_1W_1'' = h$.



DESARROLLO



PROYECCIONES

Proyecciones de un tetraedro regular, apoyado en una de sus aristas sobre el plano horizontal de proyección, con dos aristas horizontales

Desarrollo:

Sabiendo que los pares de aristas opuestas (**XY WZ**) de un tetraedro se cruzan perpendicularmente, la proyección horizontal es un cuadrado en donde las diagonales son los lados (**XY WZ**) del tetraedro, el problema se reduce el obtener la distancia mínima entre las dos aristas opuestas del tetraedro. Se dibuja un cuadrado de diagonales W_1Z_1 y X_1Y_1 en la proyección horizontal. Para determinar la distancia h entre las dos aristas, es necesario abatir una de las caras (ejemplo $W_1Z_1Y_1$) sobre el plano horizontal de proyección obteniendo un triángulo $W_1Z_1Y_1'$. Se define el punto **O** en el lado W_1Z_1. Por Y_1 se levanta una perpendicular a OY_1'. Con centro en **O** y radio OY_1' se traza un arco que al cortar la perpendicular trazada por Y_1 se define la distancia $W_1\ Y_1'' = h$.

HEXAEDRO O CUBO

Es un poliedro formado por seis caras que son cuadrados, y ocho vértices en cada uno de los cuales concurren tres caras.

Proyecciones de un hexaedro apoyado en una de sus caras sobre el plano horizontal de proyección

Desarrollo:

Sabiendo que una de sus caras pertenece al plano horizontal de proyección, la obtención de la altura del hexaedro no presenta mayor problema ya que todas las aristas del hexaedro regular son iguales. En el plano horizontal se proyecta la base del hexaedro que es un cuadrado $\mathbf{W_1X_1Y_1Z_1}$ y sobre éste la cara opuesta $\mathbf{A_1B_1C_1D_1}$ que se confunden. Se levantan los puntos al plano vertical de proyección y con la altura ya conocida queda determinada la protección vertical del poliedro.

Proyecciones de un hexaedro con una diagonal perpendicular al plano horizontal de proyección

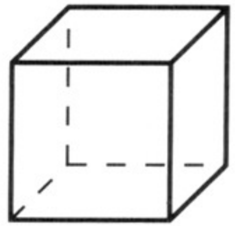
Desarrollo:

Se dibuja previamente un hexaedro apoyado en una de sus caras sobre el plano horizontal de proyección con dos diagonales ($\mathbf{X_2A_2'}$ $\mathbf{C_2'W_2'}$) paralelas al plano vertical de proyección.

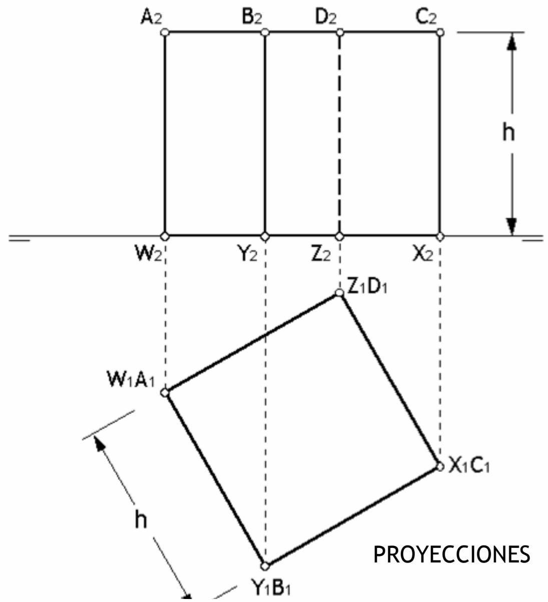
Luego se gira alrededor del eje perpendicular a LT que contiene a **X** hasta que la diagonal $\mathbf{X_2A_2'}$ quede perpendicular a LT ($\mathbf{X_2A_2}$) mientras que $\mathbf{X_1}$ $\mathbf{A_1'}$ confundido en un punto ($\mathbf{X_1}$ $\mathbf{A_1}$).

La proyección vertical $\mathbf{W_2'A_2'C_2'X_2}$ al girar, rotará en torno a $\mathbf{X_2}$ quedando en la posición de $\mathbf{W_2A_2C_2X_2}$.

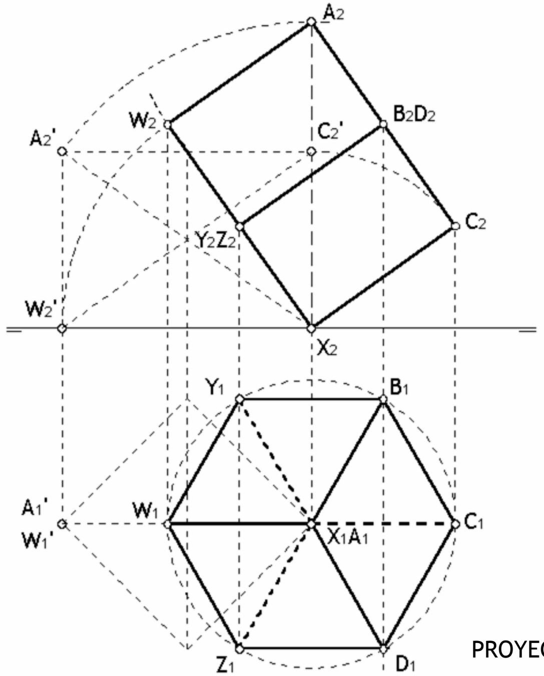
Mientras que la proyección horizontal formará con su contorno aparente un hexágono regular $\mathbf{B_1C_1D_1Z_1W_1Y_1}$ y en el centro se confunden los vértices $\mathbf{X_1}$ y $\mathbf{A_1}$



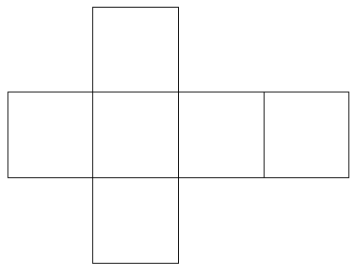
HEXAEDRO



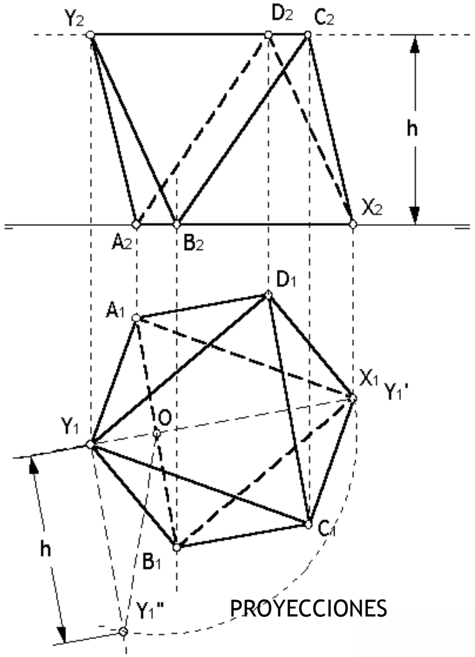
PROYECCIONES



PROYECCIONES

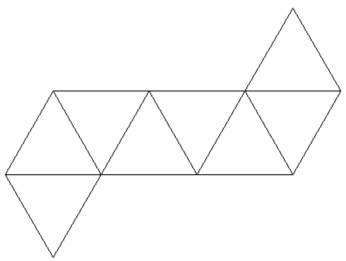


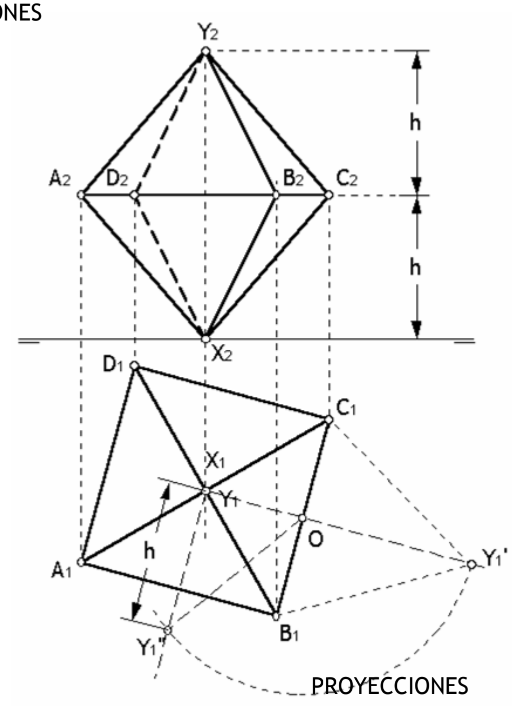
DESARROLLO



PROYECCIONES


OCTAEDRO


DESARROLLO



PROYECCIONES

OCTAEDRO

Es un poliedro formado por ocho caras que son triángulos equiláteros, y seis vértices en cada uno de los cuales concurren cuatro caras.

Proyecciones de un octaedro apoyado en una de sus caras sobre el plano horizontal de proyección

Desarrollo:

Sabiendo que una de sus caras pertenece al plano horizontal de proyección, la proyección de la cara opuesta **CDY** es un triángulo **$D_1C_1Y_1$** simétrico del triángulo **$A_1B_1X_1$** con respecto al centro común.

Para obtener la distancia entre las dos caras opuestas del octaedro, se abate una de sus caras (**ABY**) sobre el plano horizontal de proyección. En la proyección horizontal se obtendrá entonces, el triángulo equilátero (**$B_1C_1Y_1'$**) producto del abatimiento, en el ejemplo coincide con el triángulo **$A_1B_1X_1$**. Se traza recta **Y_1Y_1'** definiendo el punto **O** en el lado **A_1B_1**. Por **Y_1** se levanta una perpendicular a **Y_1Y_1'**. Con centro en **O** y radio **OY_1'** se traza un arco que al cortar la perpendicular trazada por **Y_1** se define la altura **Y_1Y_1''** = h.

Proyecciones de un octaedro regular cuyo eje central es perpendicular al plano horizontal de proyección

Desarrollo:

Sabiendo que su eje central es perpendicular al plano horizontal de proyección, la base común a ambas pirámides que forma el octaedro, es paralela a dicho plano, la proyección de ésta es un cuadrado **$A_1B_1C_1D_1$** de lado igual a la magnitud de la arista del octaedro. Trazando las diagonales de dicho cuadrado se definirá la proyección horizontal del poliedro.

Para la obtención de la altura del octaedro se abate una de sus caras sobre un plano auxiliar paralelo al plano horizontal de proyección que contiene a la base común. En la proyección horizontal se obtendrá entonces, el triángulo equilátero (**$B_1C_1Y_1'$**) producto del abatimiento. Se traza recta **Y_1Y_1'** definiendo el punto **O** en el lado **B_1C_1**. Por **Y_1** se levanta una perpendicular a **Y_1Y_1'**. Con centro en **O** y radio **OY_1'** se traza un arco que al cortar la perpendicular trazada por **Y_1** se define la altura **Y_1Y_1''** = h.

DODECAEDRO

Es un poliedro formado por doce caras que son pentágonos, y veinte vértices en cada uno de los cuales concurren tres caras.

Proyecciones de un dodecaedro apoyado en una de sus caras sobre el plano horizontal de proyección.

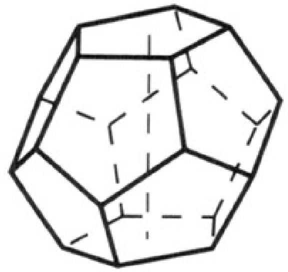
Desarrollo:

Si una de sus caras pertenece al plano horizontal de proyección, la proyección de ésta será un pentágono regular (**$A_1B_1C_1D_1E_1$**) y se verá en real magnitud. La cara superior es paralela a ésta también se proyectará como un pentágono regular (**$F_1G_1H_1I_1J_1$**) pero girado en 180º. Uniendo los vértices **A_1** con **G_1** y **E_1** con **J_1** se cortarán en el vértice **6_1** del polígono.

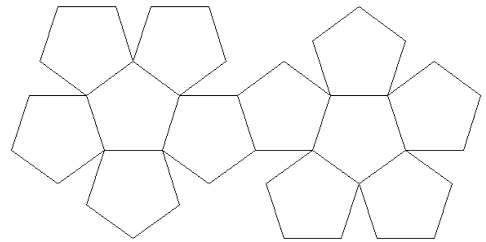
Se construye la circunferencia con centro en **O** (centro del pentágono) y radio **$O6_1$**. Trazando rayos desde **O** que pasen por los vértices ya definidos se obtiene en la circunferencia los vértices restantes.

Para determinar la altura del polígono, se abate una de sus caras (pentágono **CD394**) sobre el plano horizontal de proyección, obteniendo el pentágono **$C_1D_13'9'4'$**. Se traza el eje **X9’**, altura del pentágono y luego se construye un arco con centro en **X** y radio **X9'**, que cortará en la perpendicular trazada por **9_1** en **9”**, siendo **$9_19”$** la altura **H** del poliedro. Luego al trazar por **3_1**otra perpendicular a **X9'** cortará a la recta **X9”** en **3”** define la altura **h** = **Y3”**.

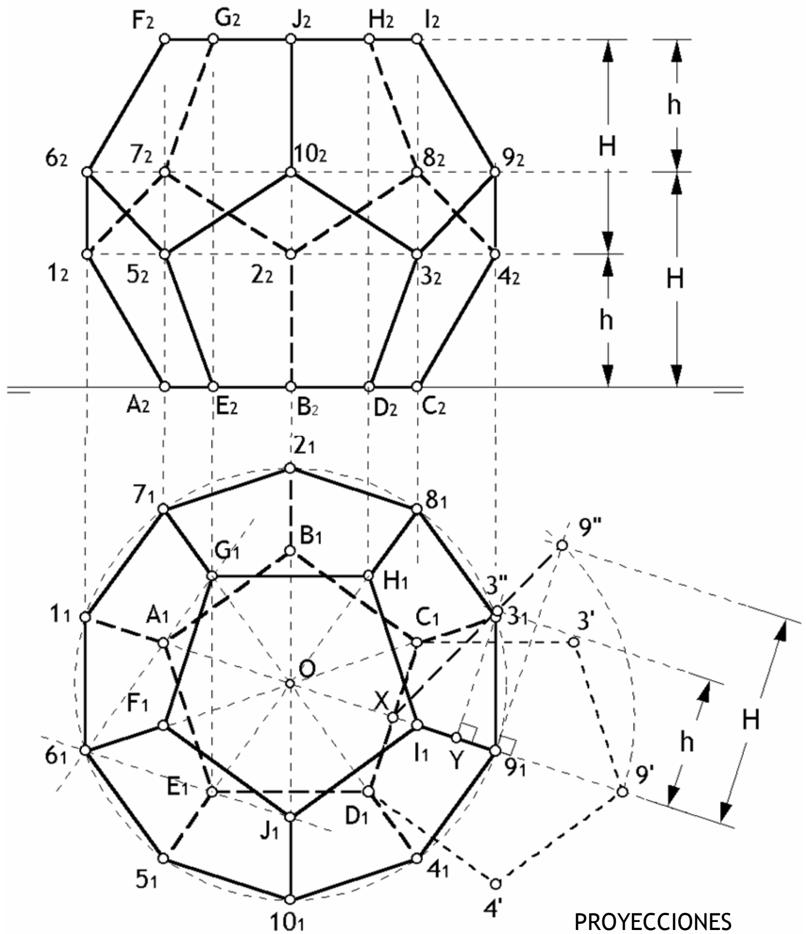
Con dichas alturas queda determinada la construcción del volumen en su proyección vertical.



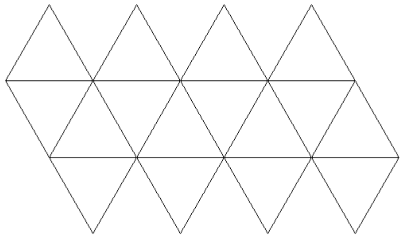
DODECAEDRO



DESARROLLO

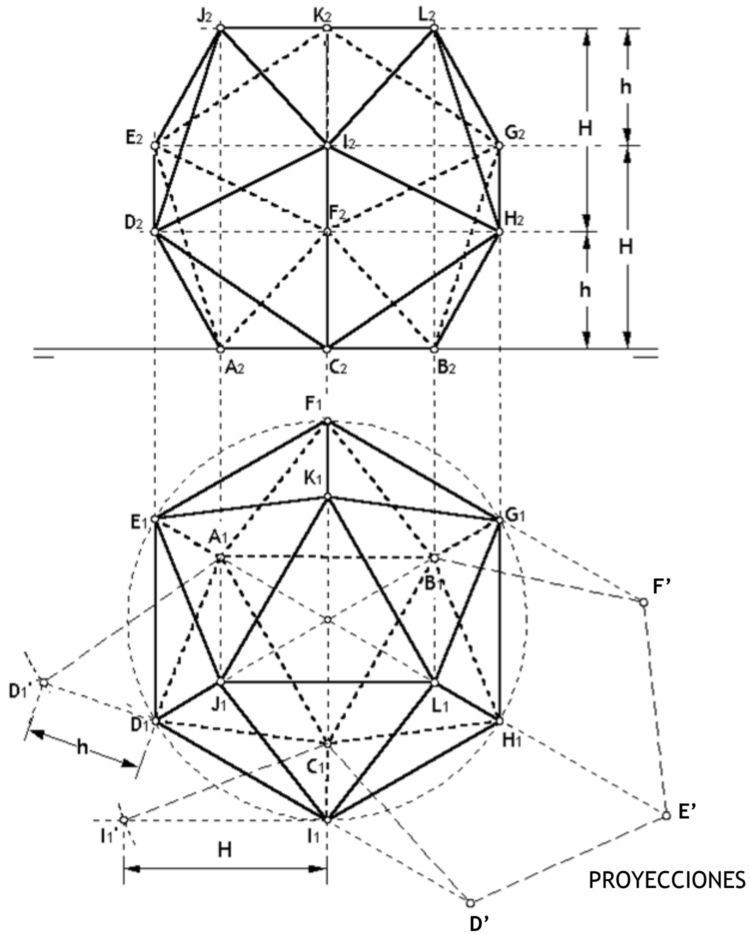


PROYECCIONES



DESARROLLO

ICOSAEDRO



PROYECCIONES

ICOSAEDRO

Es un poliedro formado por veinte caras que son triángulos equiláteros, y doce vértices en cada uno de los cuales concurren cinco caras.

Proyecciones de un icosaedro apoyado en una de sus caras sobre el plano horizontal de proyección

Si se coloca la cara **ABC** en el horizontal, la proyección de la cara opuesta **JKL** es un triángulo $\mathbf{J_1K_1L_1}$ simétrico del triángulo $\mathbf{A_1B_1C_1}$ con respecto al centro común.

El vértice F es común al triángulo **ABC** y al pentágono **BCFED** cuyos abatimientos son el triángulo $\mathbf{A_1B_1C_1}$ y el pentágono $\mathbf{B_1C_1F'E'D'}$. Luego por $\mathbf{C_1}$ y **F'** se trazan perpendiculares a $\mathbf{A_1B_1}$ y $\mathbf{B_1C_1}$, se cortará en el vértice $\mathbf{F_1}$. Los vértices $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{H_1}$ y $\mathbf{G_1}$ se obtienen fácilmente por simetría.

Las alturas **H** y **h** de los vértices **I** y **D**, por ejemplo, se obtienen a partir de la verdadera magnitud de los lados **CI** y **AD**.

Para obtener **H**, se traza un arco, con centro en $\mathbf{I_1}$ y radio igual al lado del poliedro, que cortará en $\mathbf{I_1'}$ en la perpendicular a $\mathbf{C_1I_1}$ trazada por $\mathbf{I_1}$.

Para obtener **h**, se traza un arco, con centro en $\mathbf{A_1}$ y radio igual al lado del poliedro, que cortará en **D1'** en la perpendicular a $\mathbf{A_1D_1}$ trazada por $\mathbf{D_1}$.

Con dichas alturas queda determinada la construcción del volumen en su proyección vertical.

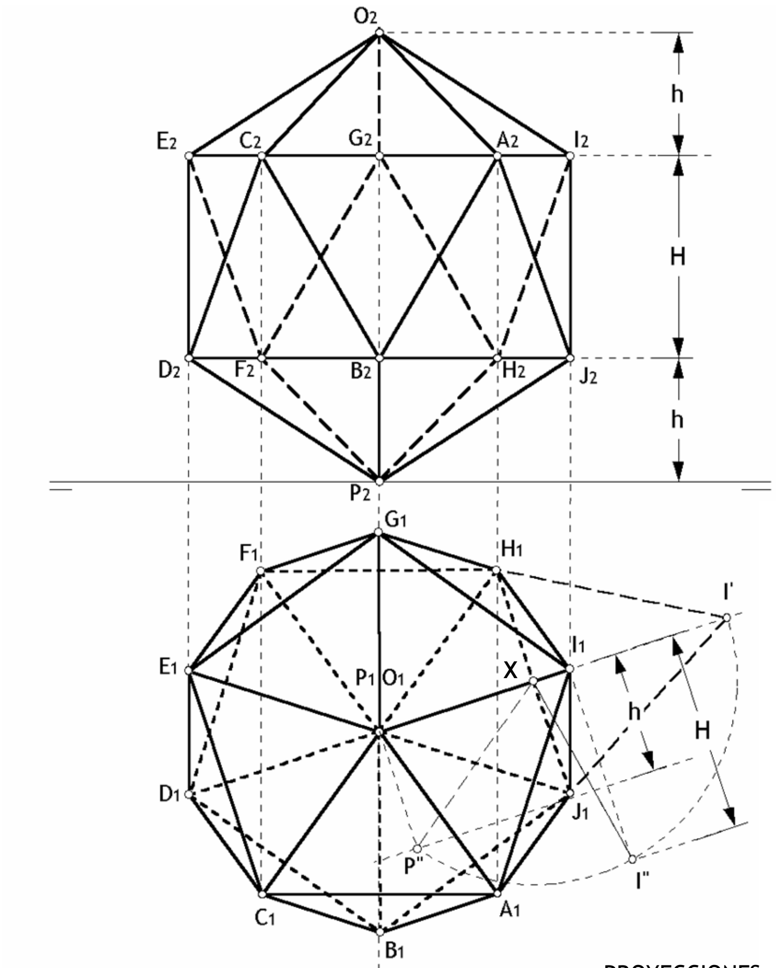
Proyecciones de un icosaedro apoyado con una diagonal vertical sobre el plano horizontal de proyección.

Desarrollo:

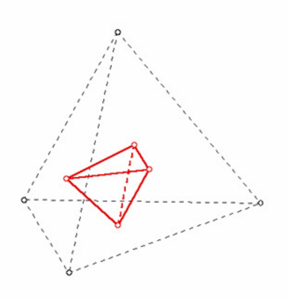
Por estar apoyado con una diagonal vertical sobre el plano horizontal de proyección la proyección sobre este plano estará determinada por dos pentágonos regulares de lado igual a la arista del poliedro y girados en 180º. Su contorno aparente es un decágono.

Para la obtención de la altura del icosaedro se abate una de sus caras sobre un plano auxiliar paralelo al plano horizontal de proyección que contiene al pentágono **$B_1D_1F_1H_1J_1$**. En la proyección horizontal se obtendrá entonces, el triángulo equilátero (**H_1J_1I'**) producto del abatimiento. Se traza recta **I_1I'** definiendo el punto **X** en el lado **H_1J_1**. Por **I_1** se levanta una perpendicular a **I_1I'**. Con centro en **X** y radio **OI'** se traza un arco que al cortar la perpendicular trazada por **I_1** se define la altura **I_1I'' = H**; y al cortar la perpendicular trazada por **P_1** se define la altura **P_1P'' = h**

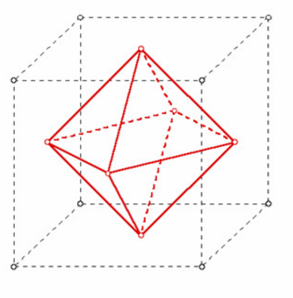
Con dichas alturas queda determinada la construcción del volumen en su proyección vertical.



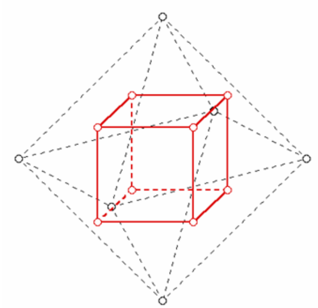
PROYECCIONES



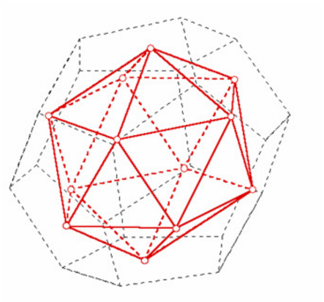
TETRAEDRO



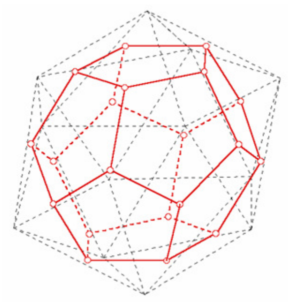
HEXAEDRO



OCTAEDRO



DODECAEDRO



ICOSAEDRO

POLIEDROS CONJUGADOS

Se denominan poliedros conjugados aquéllos que son resultantes de unir los centros de las caras concurrentes de otro polígono.

Los centros de las caras de un tetraedro son vértices de otro tetraedro.

Los centros de las caras de un hexaedro son vértices de un octaedro, y recíprocamente.

Los centros de las caras de un hexaedro son vértices de un octaedro, y recíprocamente,

Por lo tanto, el tetraedro es conjugado de sí mismo, el hexaedro y el octaedro son conjugados entre sí, lo mismo que el dodecaedro y el icosaedro.

GUIA DE EJERCICIOS

1. Determine las proyecciones y visibilidad de un tetraedro regular de arista 5 cm, apoyado en una de sus caras sobre el plano vertical de proyección, si el lado **AB** de la base forma 45º con el plano horizontal de proyección.

2. Determine las proyecciones y visibilidad de un hexaedro regular de arista 4 cm apoyado en una de sus caras sobre el plano horizontal de proyección, si una de sus caras forma 60º con el vertical de proyección.

3. Determine las proyecciones y visibilidad de un octaedro regular de arista 4 cm, si eje central es una recta de fuga de cota 3, y uno de los extremos de su eje central es un punto del primer bisector.

4. Determine las proyecciones y visibilidad de un tetraedro regular de arista 5 cm, apoyado en una de sus caras sobre un plano vertical que forma 45º con el plano vertical de proyección, si el lado **AB** de la base es paralela al plano horizontal de proyección.

5. Determine las proyecciones y visibilidad de un hexaedro regular de arista 4 cm apoyado en una de sus caras sobre un plano de fuga que forma 60º con el plano horizontal de proyección, si el lado **AB** de la base se encuentra en una recta oblicua de recorrido **II-I-IV**.

6. Determine las proyecciones y visibilidad de un octaedro regular de arista 4 cm apoyado en uno de sus vértices sobre el plano horizontal de proyección, si su eje central está contenida en una recta **XY** frontal de recorrido **IV-I**.

7. Determine las proyecciones y visibilidad de un tetraedro regular de arista 5 cm, apoyado en una de sus aristas sobre el plano frontal de alejamiento 3, sabiendo que dos aristas opuestas son paralelas al plano vertical de proyección

8. Determine las proyecciones y visibilidad de un tetraedro regular de arista 5 cm, apoyado en una de sus caras sobre un plano oblicuo, si el lado **AB** de la base está contenido en una recta oblicua de recorrido **II-I-IV**.

9. Determine las proyecciones y visibilidad de un hexaedro regular de arista 4 cm apoyado en una de sus caras sobre el plano de perfil, si una de sus caras forma 30º con el vertical de proyección.

10. Determine las proyecciones y visibilidad de un octaedro regular de arista 4 cm, apoyado en uno de sus vértices sobre el plano horizontal de proyección, si el eje central está contenido en una recta **XY** oblicua de recorrido **IV-I-II**.

11. Determine las proyecciones y visibilidad de de un tetraedro regular de arista 5 cm, apoyado en una de sus caras sobre el plano de fuga que forma 60º con el plano horizontal de proyección, si el centro de la base tiene cota 0.

12. Determine las proyecciones y visibilidad de de un hexaedro regular de arista 4 cm, apoyado en uno de sus vértices sobre el plano vertical de proyección, si la diagonal está contenida en una recta **XY** oblicua de recorrido **II-I-IV**

13. Determine las proyecciones y visibilidad de de un octaedro regular de arista 4 cm, apoyado en uno de sus caras sobre un plano oblicuo definido por las rectas **AX** oblicua y **AY** horizontal que se corta en el vértice **A**(3,4) del volumen.

14. Determine las proyecciones y visibilidad de de un hexaedro regular de arista 4 cm, apoyado en uno de sus caras sobre un plano oblicuo definido por las rectas **AX** frontal y **AY** de perfil que se corta en el vértice **A** del volumen, si el lado AB de la base está contenido en la recta **AY**.